Экспоненциальная устойчивость одного класса нелинейных интервальных динамических систем

Р. С. Ивлев

Институт проблем информатики и управления МОН РК
Казахстан, 480100 г. Алма-Ата, ул. Пушкина, 125
ivlevruslan@newmail.ru

Аннотация Рассматривается класс нелинейных интервальных динамических систем с нелинейностью секторного типа, математическая модель которой задана в пространстве состояний. На основе прямого метода Ляпунова получены достаточные условия экспоненциальной устойчивости нулевого положения равновесия рассматриваемой нелинейной динамической системы.

1 Введение

Изучение свойств нелинейных динамических систем в условиях параметрической неопределенности интервального типа представляет большой научный интерес. Многие из вопросов, касающиеся исследования устойчивости нелинейных интервальных динамических систем, заданных в пространстве состояний, до сих пор остаются открытыми. В настоящей работе рассматривается нелинейность секторного типа. Задачи исследования динамических систем с нелинейностью секторного типа, математические модели которых точно известны, восходят к работам А.И.Лурье [1] и В.М.Попова [2] и составляют два взаимосвязанных направления современной теории абсолютной устойчивости. Наличие интервальной неопределенности обусловило появление нового витка актуальности задач исследования нелинейных систем А.И. Лурье в условиях параметрической неопределенности. Так, например, в работе [3] получены робастные модификации частотных критериев абсолютной устойчивости при неопределенности в линейной части системы. В отличии от указанной работы, в которой линейная часть задана в виде семейства полиномов, наибольший интерес в этой области представляет исследование нелинейных систем, заданных в пространстве состояний. В работе [4], используя функционалы Ляпунова-Красовского, получены достаточные условия абсолютной устойчивости нелинейной интервальной системы с запаздыванием в состоянии и нелинейностью секторного типа. В настоящей работе на основе прямого метода Ляпунова [5] и методов интервального анализа [6] решается задача исследования экспоненциальной устойчивости нелинейной интервальной динамической системы, математическая модель которой задана в пространстве состояний.

2 Обозначения и постановка задачи

Придерживаясь схожей с [4] нотации, условимся полужирным шрифтом обозначать интервальные величины, обычным шрифтом — неинтервальные. Символом нижнего и верхнего подчеркивания будут обозначаться соответственно нижняя и верхняя границы интервала. Операции взятия нижней и верхней границ интервалов применительно к матрицам и векторам будут пониматься в поэлементном смысле.

Возмущенное движение исследуемой нелинейной интервальной системы задано в пространстве состояний в виде следующего соотношения

$$\dot{x}(t) \in \mathbf{A}x(t) + \mathbf{b}\varphi(\sigma), \qquad x(t_0) = x_0, \qquad t \in [t_0, \infty), \tag{1}$$

где $x(t) = (x_i(t))$ — вектор состояний, компонентами которого являются непрерывные на $[t_0, \infty)$ функции $x_i(t)$, т.е. $x_i(t) \in C[t_0, \infty)$, $1 \le i \le n$, $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ — постоянная интервальная матрица размерности $n \times n$, $A = (\mathbf{a}_{ij})$, $\mathbf{a}_{ij} = [\underline{\mathbf{a}}_{ij}, \overline{\mathbf{a}}_{ij}]$, $1 \le i, j \le n$, $\mathbb{IR}$ — множество всех вещественных интервалов [6], $\mathbf{b} \in \mathbb{IR}^n$ — интервальный вектор размерности $n \times 1$, $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_i)$, $\mathbf{b}_i = [\underline{\mathbf{b}}_i, \overline{\mathbf{b}}_i]$, $1 \le i \le n$, $\varphi(\sigma)$ — непрерывно дифференцируемая функция, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такая, что справедливыми являются ограничения секторного типа (график функции $\varphi(\sigma)$ расположен в секторе между прямыми $\varphi = 0$ и $\varphi = \mu\sigma$, $\mu \in \mathbb{R}^+$, $\mu > 0$), которые в формальном виде могут быть записаны

$$0 \le \varphi/\sigma \le \mu, \tag{2}$$

где $\sigma \neq 0$, и при $\sigma = 0$ необходимо $\varphi(0) = 0$. Величина $\sigma \in \mathbb{R}$ определяется согласно выражению

$$\sigma = r^T x(t), \tag{3}$$

где $r \in \mathbb{R}^n$ — вектор размерности $n \times 1$.

Математическая модель (1) понимается как семейство математических моделей вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b\varphi(\sigma), \qquad x(t_0) = x_0,\ t \in [t_0, \infty), \qquad A \in \mathbf{A},\ b \in \mathbf{b}. \tag{4}$$

Двойное неравенство (2) можно переписать в виде одного неравенства. Учитывая выражение для σ, имеем

$$\varphi(\mu\sigma - \varphi) = \mu\varphi r^T x - \varphi^2 = F(x, \varphi) \geq 0. \tag{5}$$

Левая часть неравенства (5) является квадратичной формой переменных x и φ, которая определяет нелинейное ограничение на x и φ.

Будем предполагать, что пара интервальных матриц $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ полностью управляема, т.е. для любых $A \in \mathbf{A}$ и $b \in \mathbf{b}$ полностью управляемой является пара (A, b).

Определение 1 *Под решением задачи* (1)–(3) *будем понимать всякую абсолютно непрерывную функцию $x(t, t_0, x_0)$, удовлетворяющую при некоторых значениях $A \in \mathbf{A}$ и $b \in \mathbf{b}$ следующей нелинейной системе дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + b\varphi(\sigma) \\ u(t) = \varphi(\sigma),\ \sigma = r^T x(t), \end{cases} \qquad x(t_0) = x_0,\ t \in [t_0, \infty). \tag{6}$$

В силу $\varphi(0) = 0$ существует тривиальное решение $x(t, t_0, x_0) = x(t) \equiv 0$ системы.

Определение 2 *Тривиальное ршение $x(t) \equiv 0$ системы* (1)–(3) *называется экспоненциально устойчивым при $t \to \infty$, если для любых значений $A \in \mathbf{A}$ и $b \in \mathbf{b}$ и всякого решения $x(t, t_0, x_0)$ этой системы справедливо неравенство*

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leq N \, \|x(t_0)\| \, \exp\bigl(-\alpha(t - t_0)\bigr),$$

где $\|\cdot\|$ — Евклидова норма, N и α — положительные постоянные, не зависящие от выбора $x(t, t_0, x_0)$.

Задача: *определить условия наличия свойства экспоненциальной устойчивости положения равновесия $x(t) \equiv 0$ интервальной динамической системы* (1)–(3) *с нелинейностью секторного типа* (2) *в смысле Определения 2.*

3 Основной результат

Решение поставленной задачи будет осуществлено на основе прямого метода Ляпунова посредством выбора функции Ляпунова в виде квадратичной формы

$$V(x) = x^T H x, \tag{7}$$

где $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $H = H^T$ — некоторая симметрическая положительно-определенная матрица.

Используя арифметические операции классической интервальной арифметики, построим интервальную матрицу $\mathbf{A}_1 = (\,\mathbf{a}_{1_{ij}})_{ij=1}^n \in \mathbb{IR}^{n\times n}$

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} + \frac{\mu}{2}\mathbf{b} r^T$$

и введем в расмотрение множество угловых (крайних) матриц

$$\operatorname{vert} \mathbf{A}_1 = \left\{ \hat{A}_1 \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \hat{A}_1 = (\hat{a}_{1_{ij}})_{ij=1}^n,\ \hat{a}_{1_{ij}} \in \{\underline{\mathbf{a}}_{1_{ij}}, \overline{\mathbf{a}}_{1_{ij}}\} \right\}.$$

Условия экспоненциальной устойчивости исследуемой системы дает следующая теорема.

Теорема 1 *Пусть для заданных интервальной матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$, интервального вектора $\mathbf{b} \in \mathbb{IR}^n$, вектора $r \in \mathbb{R}^n$ и скаляра $\mu \in \mathbb{R}^+$ выполнены следующие условия:*

– *пара интервальных матриц $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ полностью управляма;*

– *существует такая положительно-определенная симметрическая матрица* $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$, *что следующие матрицы*

$$\hat{A}_1^T H + H\hat{A}_1 + HH + \frac{\mu^2}{4} rr^T \underline{\mathbf{b}^T\mathbf{b}}, \qquad \hat{A}_1^T H + H\hat{A}_1 + HH + \frac{\mu^2}{4} rr^T \overline{\mathbf{b}^T\mathbf{b}}, \qquad \hat{A}_1 \in \text{vert } \mathbf{A}_1$$

являются отрицательно-определенными.

Тогда тривиальное решение $x(t) \equiv 0$ *нелинейной интервальной системы* (1)–(3) *экспоненциально устойчиво для заданного класса нелинейностей.*

Доказательство. В области пространства $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, выделяемой ограничениями секторного типа (5), вычислим производную функции Ляпунова (7) по времени на траекториях движения системы (4) для произвольных, но фиксированных значений $A \in \mathbf{A}$ и $b \in \mathbf{b}$. Для этого, применяя S-процедуру [7], составим S-форму

$$S(x,\varphi) = \dot{V}(x) + \tau F(x,\varphi),$$

где $\tau \in \mathbb{R}^+$ — некоторое положительное число.

$$\begin{aligned} S(x,\varphi) &= \dot{x}^T Hx + x^T H\dot{x} + \tau\mu\varphi r^T x - \tau\varphi^2 = \\ &= (Ax + b\varphi)^T Hx + x^T H(Ax + b\varphi) + \tau\mu\varphi r^T x - \tau\varphi^2 = \\ &= x^T(A^T H + HA)x + \varphi b^T Hx + x^T Hb\varphi + \tau\mu\varphi r^T x - \tau\varphi^2 = \\ &= x^T(A^T H + HA)x + \varphi(b^T H + \frac{\tau\mu}{2} r^T)x + x^T(Hb + \frac{\tau\mu}{2} r)\varphi - \tau\varphi^2. \end{aligned}$$

Выбирая $\tau = b^T b > 0$, поскольку пара $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ является полностью управляемой, и, выделяя полный квадрат, имеем

$$\begin{aligned} S(x,\varphi) &= x^T(A^T H + HA)x + \varphi(b^T H + b^T b r^T \frac{\mu}{2})x + x^T(Hb + \frac{\mu}{2} r b^T b)\varphi - b^T b\varphi^2 = \\ &= x^T(A^T H + HA)x + \varphi b^T(H + br^T\frac{\mu}{2})x + x^T(H + \frac{\mu}{2} rb^T)b\varphi - b^T b\varphi^2 = \\ &= x^T(A^T H + HA)x + \varphi b^T Gx + x^T G^T b\varphi - b^T b\varphi^2 = \\ &= x^T(A^T H + HA)x + \varphi b^T Gx + x^T G^T b\varphi - b^T b\varphi^2 - x^T G^T Gx + x^T G^T Gx = \\ &= x^T(A^T H + HA)x - (Gx - b\varphi)^T(Gx - b\varphi) + x^T(H + br^T\frac{\mu}{2})^T(H + br^T\frac{\mu}{2})x = \\ &= x^T(A^T H + HA)x - (Gx - b\varphi)^T(Gx - b\varphi) + \\ &+ x^T\left(HH + Hbr^T\frac{\mu}{2} + \frac{\mu}{2} rb^T H + \left(\frac{\mu}{2}\right)^2 rb^T br^T\right)x = \\ &= x^T\left((A + \frac{\mu}{2} br^T)^T H + H(A + \frac{\mu}{2} br^T) + HH + \left(\frac{\mu}{2}\right)^2 rb^T br^T\right)x - \\ &- (Gx - b\varphi)^T(Gx - b\varphi) \le \\ &\le x^T\left((A + \frac{\mu}{2} br^T)^T H + H(A + \frac{\mu}{2} br^T) + HH + \left(\frac{\mu}{2}\right)^2 rb^T br^T\right)x = \\ &= x^T(A_1^T H + HA_1 + HH + C)x = -x^T Qx, \end{aligned}$$

где $G = H + \frac{\mu}{2} br^T$, $A_1 = A + \frac{\mu}{2} br^T$, $C = (\frac{\mu}{2})^2 rb^T br^T = \frac{\mu^2}{4} rr^T b^T b$ и $-Q = A_1^T H + HA_1 + HH + C$.

Поскольку $A_1 \in \mathbf{A}_1$ при $A \in \mathbf{A}$ и $b \in \mathbf{b}$, а также $C \in \frac{\mu^2}{4} rr^T[\underline{\mathbf{b}^T\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{b}^T\mathbf{b}}]$ при $b \in \mathbf{b}$, следовательно

$$A_1 = \sum_{\hat{A}_1 \in \text{vert } \mathbf{A}_1} \hat{A}_1 \eta_{\hat{A}_1}, \qquad \sum_{\hat{A}_1 \in \text{vert } \mathbf{A}_1} \eta_{\hat{A}_1} = 1, \qquad \eta_{\hat{A}_1} \ge 0$$

и

$$C = \frac{\mu^2}{4} rr^T \left(\eta_C \underline{\mathbf{b}^T\mathbf{b}} + (1 - \eta_C)\overline{\mathbf{b}^T\mathbf{b}}\right), \qquad 0 \le \eta_C \le 1.$$

Подставляя последние два соотношения в выражение для $-Q$, имеем

$$
\begin{aligned}
-Q = & \left(\sum_{\hat{A}_1 \in \mathrm{vert}\ \mathbf{A}_1} \hat{A}_1 \eta_{\hat{A}_1} \right)^T H + H \sum_{\hat{A}_1 \in \mathrm{vert}\ \mathbf{A}_1} \hat{A}_1 \eta_{\hat{A}_1} + HH + \\
& + \frac{\mu^2}{4} r r^T \left(\eta_C \underline{\mathbf{b}^T \mathbf{b}} + (1-\eta_C) \overline{\mathbf{b}^T \mathbf{b}} \right) = \\
= & \sum_{\hat{A}_1 \in \mathrm{vert}\ \mathbf{A}_1} \left(\hat{A}_1^T H + H \hat{A}_1 + HH + \frac{\mu^2}{4} r r^T \left(\eta_C \underline{\mathbf{b}^T \mathbf{b}} + (1-\eta_C) \overline{\mathbf{b}^T \mathbf{b}} \right) \right) \eta_{\hat{A}_1} = \\
= & \sum_{\hat{A}_1 \in \mathrm{vert}\ \mathbf{A}_1} \left((\eta_C + (1-\eta_C)) \left(\hat{A}_1^T H + H \hat{A}_1 + HH \right) + \right. \\
& \left. + \frac{\mu^2}{4} r r^T \left(\eta_C \underline{\mathbf{b}^T \mathbf{b}} + (1-\eta_C) \overline{\mathbf{b}^T \mathbf{b}} \right) \right) \eta_{\hat{A}_1} = \\
= & \sum_{\hat{A}_1 \in \mathrm{vert}\ \mathbf{A}_1} \left(\hat{A}_1^T H + H \hat{A}_1 + HH + \frac{\mu^2}{4} r r^T \underline{\mathbf{b}^T \mathbf{b}} \right) \eta_C \eta_{\hat{A}_1} + \\
& + \sum_{\hat{A}_1 \in \mathrm{vert}\ \mathbf{A}_1} \left(\hat{A}_1^T H + H \hat{A}_1 + HH + \frac{\mu^2}{4} r r^T \overline{\mathbf{b}^T \mathbf{b}} \right) (1-\eta_C) \eta_{\hat{A}_1}.
\end{aligned}
$$

Матрицы

$$
\hat{A}_1^T H + H \hat{A}_1 + HH + \frac{\mu^2}{4} r r^T \underline{\mathbf{b}^T \mathbf{b}}, \qquad \hat{A}_1^T H + H \hat{A}_1 + HH + \frac{\mu^2}{4} r r^T \overline{\mathbf{b}^T \mathbf{b}}, \qquad \hat{A}_1 \in \mathrm{vert}\ \mathbf{A}_1
$$

являются симметрическими. По условию теоремы эти матрицы также отрицательно определены, а так как $\eta_C \eta_{\hat{A}_1} \geq 0$ и $(1-\eta_C)\eta_{\hat{A}_1} \geq 0$, то матрица $-Q$ является отрицательно-определенной для любых $A \in \mathbf{A}$ и $b \in \mathbf{b}$. Поэтому в области пространства $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, выделяемую ограничениями секторного типа (5), для любых значений $A \in \mathbf{A}$ и $b \in \mathbf{b}$ имеет место соотношение

$$
\dot{V}(x) \leq -x^T Q x < 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}.
$$

Следовательно, тривиальное решение $x(t) \equiv 0$ экспоненциально устойчиво. Теорема доказана.

Для постоянных N и α справедливы следующие соотношения

$$
N = \sqrt{\max_p \lambda_p(H) / \min_p \lambda_p(H)},
$$

$$
\alpha = \min_{A \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{b}} \min_p \lambda_p(Q) / \left(2 \max_p \lambda_p(H) \right),
$$

где $\lambda_p(\cdot)$ — собственные значения матриц. В силу симметричности матриц H и Q собственные значения этих матриц вещественны.

Список литературы

1. Лурье А.И. *Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования.* – М.: Гостехиздат, 1951.
2. Попов В.М. *Гиперустойчивость автоматических систем.* – М.: Наука, 1970.
3. Джури Э.И., Премаратне К., Эканайаке М.М. Робастная абсолютная устойчивость дискретных систем // *Автоматика и Телемеханика.* – 1999. – №3. – С. 97–118.
4. Ивлев Р.С. Абсолютная устойчивость нелинейных динамических систем с параметрической неопределенностью интервального типа и запаздывающим аргументом // Материалы Международной конференции "Вычислительные технологии и математическое моделирование в науке, технике и образовании" – ВТММ-2002, Новосибирск-Алматы, 2002. – С. 27–34.
5. Демидович Б.П.*Лекции по математической теории устойчивости.* – М.: Наука, 1967.
6. Алефельд Г., Херцбергер Ю. *Введение в интервальные вычисления.* – М.: Мир, 1987.
7. Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. *Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия.* – М.: Наука, 1978.