В.С. ЗЮЗИН, Л.В. КУПРИЯНОВА

ОСНОВЫ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ В ПРИМЕНЕНИИ К СИСТЕМАМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Саратов-2003

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

В.С. ЗЮЗИН, Л.В. КУПРИЯНОВА

ОСНОВЫ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ В ПРИМЕНЕНИИ К СИСТЕМАМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Учебное пособие
для студентов специальности «Прикладная математика»

ИЗДАТЕЛЬСТВО САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2003

УДК 519.6, 519.61, 519.612, 519.612.2, 519.612.5, 519.67
ББК 22.19я73, 22.193я73
З98

Зюзин В.С., Куприянова Л.В.
З98 Основы интервальных вычислений в применении к системам алгебраических уравнений : Учебное пособие. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2003. – 48 с.ил.
ISBN 5-292

В учебном пособии рассматриваются теоретические и прикладные аспекты сравнительно нового и интенсивно развивающегося направления – интервальной математики. Изложены основы интервального подхода – классическая интервальная арифметика и арифметика Каухера, понятия интервальных расширений вещественных функций, понятия решения и множеств решений интервальных уравнений, основные теоремы о связи алгебраического решения интервальной системы линейных алгебраических уравнений с различными множествами её решений, а также итерационные методы нахождения алгебраических решений.

Для студентов, аспирантов и специалистов в области применения компьютеров для научных расчётов.

Рекомендуют к печати:

Кафедра математической физики и вычислительной математики
Саратовского государственного университета
Кандидат экономических наук *О.С.Балаш*

УДК 519.6, 519.61, 519.612, 519.612.2, 519.612.5, 519.67
ББК 22.19я73, 22.193я73

Работа издана в авторской редакции

ISBN 5-292

1. Введение. Необходимость использования интервальных вычислений

Рассмотрим некоторые примеры вычислений на компьютере, использующих в качестве приближения одно число.

Пример 1 ([2]).

Вычислить интеграл $I_n = \frac{1}{e}\int_0^1 x^n e^x dx$.

Получим рекуррентную формулу вычисления интеграла, для этого интегрируем по частям.

$$I_n = \frac{1}{e}\int_0^1 x^n e^x dx = \frac{1}{e}\int_0^1 x^n de^x = \frac{1}{e} x^n e^x \Big|_0^1 - \frac{1}{e}\int_0^1 e^x dx^n =$$

$$= \frac{1}{e}(1^n e^1 - 0^n e^0) - \frac{1}{e} n\int_0^1 x^{n-1} e^x dx = 1 - n(\frac{1}{e}\int_0^1 x^{n-1} e^x dx) = 1 - n \cdot I_{n-1}.$$

На разных ЭВМ вычисления по рекуррентной формуле $I_n = 1 - n \cdot I_{n-1}$, $I_0 = 1 - 1/e$, давали разные результаты (таблица).

Тип ЭВМ	n=10	n=14
D2 (Дрезден)	0,084470	14,313816
Минск32 (Прага)	0,077711	-148,068
БЭСМ-6 (Новосибирск)	0,083	0,121224
ЕС-1022 (ВЦ СГУ)	-0,0506	-797

Пример 2.

Значение выражения $b^2(4a^4 + b^2 - 4a^2) - 8a^6$ при a = 470832 и b = 665857 равно 1. Однако при вычислении, например, на мини-ЭВМ Z80 с 12-ю знаками получили результат $+5.0 \cdot 10^{23}$.

Вычисления в Excel на персональном компьютере типа IBM PC дают результат 0.

Пример 3. (Moore R.E. [12]).

Пусть $x_{n+1} = x_n^2$ и положим $x_0 = 1 - 10^{-21}$.

Требуется вычислить x_{75}. Если мы используем десять знаков десятичной арифметики, получим приближённые значения

$$x_0 = 1,\ x_1 = 1,\ \ldots,\ x_{75} = 1.$$

Если мы используем 20 знаков, получим те же приближённые значения. Однако точное значение можно оценить сверху следующим образом:

$$x_{75} = (1-10^{-21})^{2^{75}} < (1-10^{-21})^{10^{22,2}} < \{(1-10^{-21})^{10^{21}}\}^{31,6} < e^{-31,6} < 10^{-10}.$$

Интервальные методы, применённые к данному примеру, при использовании интервальной арифметики с 10-ю знаками дают интервал, близкий к [0,1], но при использовании большего количества знаков дадут интервал произвольно малой величины. Очевидно, необходимо более 21 знака, чтобы избежать получения 1.

В настоящее время существует достаточно большое количество численных методов, оперирующих с различными абстрактными математическими объектами. Одним и наиболее важным из этих объектов является вещественное число. Основная проблема, возникающая при применении этих методов – соотнесение вычисленного результата и истинного решения задачи, т.е. оценка погрешности.

Отметим некоторые причины возникновения погрешностей.

1. **Неточность исходных данных.** Значительная часть алгоритмов оперирует не с точными входными данными, а с их приближениями. Такие приближения могут возникать, например, при снятии измерений физическими приборами, при обработке экспертных знаний, как результат работы других численных алгоритмов и т.д.
2. **Принципиальная неточность алгоритма.** Например, итерационные методы дают последовательность приближений искомого решения, как правило, его не достигая.
3. **Невозможность точной реализации алгоритма на цифровой вычислительной машине.** Даже если мы имеем точный алгоритм, не всегда можно точно вычислить результат. Пример – вычисление корней квадратного уравнения. Соответствующая формула является абсолютно точной, однако, если корни уравнения иррациональны, мы можем их вычислить только с некоторой точностью. Т.е. источником погрешности является необходимость округления промежуточных и конечных результатов до чисел, представимых на данной машине.

В настоящее время существует два основных подхода к решению проблемы оценки погрешности. Первый из них состоит в замене операндов рациональными числами из некоторого конечного множества (множества машинных чисел) и построении для каждого численного алгоритма аналитической зависимости погрешности результата от погрешности исходных данных. Такой подход имеет свои недостатки. Назовём некоторые из них.

1. Вычисления по формулам, связывающим погрешность исходных данных с погрешностью результата, сами неизбежно производятся с погрешностью.
2. В формулах, учитывающих погрешность округлений, присутствуют параметры (разрядность, основание системы счисления и т.п.), харак-

теризующие систему команд компьютера, на котором будет происходить вычисление, что не позволяет применить эти формулы для любой вычислительной системы.

3. В этих формулах невозможно учесть индивидуальную точность операндов – отсюда грубость оценки конечного результата.
4. Для достаточно нетривиального вычисления трудность получения оценки погрешности результата по сложности бывает сопоставима с разработкой самого численного метода.
5. В случае замены точного значения приближённым, вообще говоря, не гарантируется корректность проверки числовых соотношений. Если в программе, например, имеется оператор вида

$$if\ x<0\ then\ A\ else\ B,$$

а x вычисляется приближённо, то нельзя быть уверенным в правильности ветвления, т.к. например, вычисленное значение 0,00000005 на самом деле может соответствовать точному значению –0,00000001.

Тем не менее, этот подход оказался во многих случаях полезен (особенно в линейной алгебре) для исследования сравнительной точности и устойчивости численных методов, но не позволил гарантировать корректность вычислений по ветвящимся алгоритмам, а главное – не дал надёжного ответа на вопрос: сколько верных цифр присутствует в полученном численном результате.

Второй подход состоит в том, что неизвестное точное значение заменяется не единственным приближённым числом, как при первом подходе, а конечно-представимым множеством элементов, содержащим в себе неизвестный элемент. Простейшим видом такого множества является интервал, представимый обычно парой рациональных чисел – границ. Поэтому данный подход получил название – интервальный. Он позволяет учесть все виды погрешностей вычислительного процесса:

- приближённо известные исходные данные заключаются в гарантированно содержащие точное значение замкнутые интервалы;
- погрешности округлений лишь несколько расширяют интервалы промежуточных результатов;
- остановка бесконечного математического процесса хотя и ограничивает точность локализации результата, но не приводит к отсутствию гарантированности.

Главные преимущества интервального подхода – автоматический учёт всех видов погрешностей в процессе самого вычисления и гарантированная точность результата. Если вы получили результат [2.73212, 2.73916], то вам гарантируется верность его первых трёх цифр. Интервальный подход гарантирует корректность проверки числовых соотношений, достаточно предусмотреть в программе все случаи взаимного расположения сравниваемых величин. Благодаря такой гарантированности интервальные вычисления обладают доказательной силой и используются для автоматизации процесса доказательства. С помощью интервальных вычислений удалось доказать целый ряд важных теорем, предполагающих в процессе доказательства сравнение сложных числовых выражений. Кроме того, приложения интервальных вычислений возможны всюду, где неопределённость исходных данных может быть представлена в интервальном виде. Во многих случаях такой подход оказался более простым и естественным, чем основанный на вероятностно-статистическом подходе. Известны публикации, связанные с использованием интервальных вычислений в машиноведении, метрологии, биологии, химии, электротехнике, радиоэлектронике, геофизике, геодезии, экономическом планировании и прогнозировании, теории автоматического управления, космических исследованиях, автоматизированном проектировании, машинной графике, разработке программного обеспечения, организации пожаротушения и огранке драгоценных камней.

Один из самых старых примеров интервального подхода, известных авторам, это предложенный Архимедом способ нахождения отношения длины окружности к её диаметру (число π). Архимед рассматривал вписанные и описанные многоугольники и получал возрастающую последовательность нижних границ и, одновременно, убывающую последовательность верхних границ ([12]). Книга Moore R.E. "Interval analysis" положила начало оформлению интервальных вычислений в самостоятельное математическое направление. В нашей стране интервальные вычисления начали развиваться с середины 70-х годов. С 1991 года стал выходить журнал «Интервальные вычисления», переименованный затем в связи с расширением тематики статей в «Надёжные вычисления» («Reliable computing»).

Известные книги на русском языке приведены в списке литературы [1], [3], [4], [7], [8].

Условно в области развития интервальных вычислений можно выделить три направления:

- математическое – включающее исследование математических проблем интервального анализа;
- компьютерное – рассматривающее вопросы создания и использования компьютерных средств для выполнения интервальных вычислений;
- прикладное – связанное с применением результатов интервальной математики и соответствующих компьютерных средств в различных областях науки и техники.

Возникнув как подход к решению задачи получения гарантированного результата, интервальный анализ находит своё применение в исследованиях, объекты которых имеют изначально интервальную природу. Таких, как проблема повышения живучести управляемых систем. Например, состояние человеческого организма характеризуется такими параметрами, как температура тела, давление крови в сосудах, содержание в ней определённых веществ. Для этих параметров существуют некоторые интервалы, в пределах которых любое их значение является допустимым для нормального функционирования организма. Любая система подвержена влиянию разнообразных факторов, которые в количественном выражении могут изменяться в каких-либо границах, при этом система остаётся жизнеспособной (отвечает своему целевому назначению), если её параметры не выходят за границы допустимых значений. Следовательно, математическая модель системы может включать различные типы интервальной неопределённости:

- интервал рассматривается как приближённые оценки (верхняя и нижняя) одного числа, т.е. в данном интервале существует ($\exists$) единственное число, для которого справедливо какое-либо соотношение;
- интервал рассматривается как множество вещественных чисел, для каждого ($\forall$) из которых соотношение справедливо.

2. Интервальная арифметика и её свойства

Пусть R – множество всех вещественных чисел. Вещественные числа будем обозначать строчными греческими буквами, а также латинскими с точкой снизу или с чертой снизу или сверху. В классической интервальной арифметике под интервалом понимается замкнутое ограниченное подмножество R вида $[\underline{x}, \overline{x}] := \{\xi \mid \xi \in R \,\&\, \underline{x} \le \xi \le \overline{x}\}$. Интервалы обозначим строчными латинскими буквами. Множество всех интервалов вещественной оси обозначим *I(R)*:

$$I(R) := \{x = [\underline{x}, \overline{x}] \mid \underline{x}, \overline{x} \in R \,\&\, \underline{x} \le \overline{x}\}.$$

Симметричным будем называть интервал, у которого $-\underline{x} = \overline{x}$.

Шириной интервала называется величина $w(x) := \overline{x} - \underline{x}$.

Середина интервала есть полусумма концов интервала

$$m(x) := (\underline{x} + \overline{x}) / 2.$$

Абсолютная величина понимается как $|x| := \max\{|\underline{x}|, |\overline{x}|\}$.

Расстояние между элементами (*метрика*) $x, y \in I(R)$ есть

$$\rho(x, y) := \max\{|\underline{x} - \underline{y}|, |\overline{x} - \overline{y}|\}.$$

Нетрудно показать, что *I(R)* с введённой метрикой является полным метрическим пространством.

Другие определения и обозначения:

$$\mu(x) := \min\{|\underline{x}|, |\overline{x}|\}, \quad s(x) := (|\underline{x}| + |\overline{x}|) / 2,$$

$$(x \subseteq y) \Leftrightarrow ((\underline{y} \le \underline{x}) \,\&\, (\overline{x} \le \overline{y})),$$

$$(x \le y) \Leftrightarrow (\overline{x} \le \underline{y}).$$

Интервалы с совпадающими концами называются *вырожденными* интервалами или вещественными числами.

Пусть R^n – множество всех n-мерных вещественных векторов. Через $I(R^n)$ обозначим множество всех n-мерных интервальных векторов:

$$I(R^n) := \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in I(R), i = 1,..., n\}.$$

Для элементов x, y этого множества и вещественного вектора ξ соотношения

$(\xi \in x) \Leftrightarrow (\xi_i \in x_i, \forall i=1,\dots,n)$, $(x \subseteq y) \Leftrightarrow (y_i \subseteq x_i, \forall i=1,\dots,n)$ понимаются покомпонентно. Для $x,y \in I(R^n)$ определим ширину, середину и расстояние следующим образом:

$$w(x) := \max_{1 \le i \le n} w(x_i),$$

$$m(x) := (m(x_1), m(x_2), ..., m(x_n))^{\mathrm{T}},$$

$$\rho(x, y) := \max_{1 \le i \le n} \rho(x_i, y_i).$$

Арифметические операции над интервалами понимаются следующим образом. Пусть $* \in \{+, -, \cdot, /\}$, $a,b \in I(R)$. Тогда

$$a * b := \{\alpha * \beta \mid \alpha \in a, \beta \in b\},$$

причём в случае деления $0 \notin b$. Из определения следует

$$a + b = [\underline{a} + \underline{b}, \overline{a} + \overline{b}],$$

$$a - b = [\underline{a} - \overline{b}, \overline{a} - \underline{b}],$$

$$a \cdot b = [\min\{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\}, \max\{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\}],$$

$$a / b = a \cdot [1/\overline{b}, 1/\underline{b}].$$

Легко видеть, что операции сложения и умножения коммутативны и ассоциативны.

Правила интервального умножения выглядят так

1) $a \ge 0, b \ge 0, \quad ab = [\underline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}]$;

2) $a \ge 0, b \le 0, \quad ab = [\overline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}]$;

3) $a \ge 0, 0 \in b, \quad ab = [\overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}]$;

4) $a \le 0, b \le 0, \quad ab = [\overline{a}\overline{b}, \underline{a}\underline{b}]$;

5) $a \le 0, 0 \in b, \quad ab = [\underline{a}\overline{b}, \underline{a}\underline{b}]$;

6) $0 \in a, 0 \in b, \quad ab = [\min\{\underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}\}, \max\{\underline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\}]$.

Только в последнем случае для нахождения произведения требуется четыре умножения, а в остальных достаточно двух умножений. Если a и b – вырожденные интервалы, то интервальные арифметические операции совпадают с арифметическими операциям над вещественными числами.

Основные свойства интервальных арифметических операций:

1) $a+b=b+a$, $a \cdot b=b \cdot a$ (коммутативность);
2) $(a+b)+c=a+(b+c)$, $(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$ (ассоциативность);
3) $\forall a \in I(R)$ $a+0=0+a$, $a \cdot 1=1 \cdot a$, т.е. $0=[0,0]$ и $1=[1,1]$ являются единственными нейтральными элементами для сложения и умножения соответственно;

4) для невырожденных интервалов не существует обратных по сложению и умножению элементов, но $0 \in a - a$, $1 \in a/a$;
5) $a \cdot (b+c) \subseteq a \cdot b + a \cdot c$ (субдистрибутивность);
6) $(a \subseteq b \ \& \ x \subseteq y) \Rightarrow (a*x \subseteq b*y)$, где $* \in \{+,-,\cdot,/\}$ (монотонность по включению);
7) $(\lim\limits_{k\to\infty} a^{(k)} = a \ \& \lim\limits_{k\to\infty} b^{(k)} = b) \Rightarrow (\lim\limits_{k\to\infty} (a^{(k)} * b^{(k)}) = a*b)$ (непрерывность).

Свойства 1-3 следуют из определения интервальных арифметических операций. Непосредственно из определения следует также, что если один из операндов является невырожденным интервалом, то и результат также невырожден, исключение составляет умножение на ноль. Поэтому для того, чтобы выполнялись равенства $a+b=0$ и $a \cdot c=1$, интервалы a, b, c должны быть вырожденными (свойство 4). Свойство 7 легко получить непосредственно из определения операций и определения метрики. Докажем свойство 5.

Пусть

$$g(\alpha) = [\underline{g}(\alpha), \overline{g}(\alpha)] := \bigcup_{\beta \in b} \alpha\beta \quad \text{и} \quad h(\alpha) = [\underline{h}(\alpha), \overline{h}(\alpha)] := \bigcup_{\gamma \in c} \alpha\gamma$$

– интервальнозначные функции вещественной переменной α с границами в виде вещественных функций, тогда

$$a \cdot (b+c) = \bigcup_{\alpha \in a} \bigcup_{\beta \in b} \bigcup_{\gamma \in c} \alpha \cdot (\beta + \gamma) = [\min_{\alpha \in a} (\underline{g}(\alpha) + \underline{h}(\alpha)), \max_{\alpha \in a} (\overline{g}(\alpha) + \overline{h}(\alpha))] \subseteq$$

$$\subseteq [\min_{\alpha \in a} \underline{g}(\alpha) + \min_{\alpha \in a} \underline{h}(\alpha), \max_{\alpha \in a} \overline{g}(\alpha) + \max_{\alpha \in a} \overline{h}(\alpha)] =$$

$$= [\min_{\alpha \in a} \underline{g}(\alpha), \max_{\alpha \in a} \overline{g}(\alpha)] + [\min_{\alpha \in a} \underline{h}(\alpha), \max_{\alpha \in a} \overline{h}(\alpha)] =$$

$$= \bigcup_{\alpha \in a} \bigcup_{\beta \in b} \alpha\beta + \bigcup_{\alpha \in a} \bigcup_{\gamma \in c} \alpha\gamma = ab + ac.$$

Для доказательства свойства 6 докажем сначала, что $(x \subseteq y) \Rightarrow (a*x \subseteq a*y)$.

$$a*x = [\min_{\alpha \in a} \min_{\xi \in x} \alpha * \xi, \max_{\alpha \in a} \max_{\xi \in x} \alpha * \xi],$$

$$a*y = [\min_{\alpha \in a} \min_{\xi \in y} \alpha * \xi, \max_{\alpha \in a} \max_{\xi \in y} \alpha * \xi],$$

$$(((x \subseteq y) \Rightarrow (\min_{\xi \in y} \alpha * \xi \le \min_{\xi \in x} \alpha * \xi)$$

$$\Rightarrow (\underline{a*y} = \min_{\alpha \in a} \min_{\xi \in y} \alpha * \xi \le \min_{\alpha \in a} \min_{\xi \in x} \alpha * \xi = \underline{a*x}) \Rightarrow (\underline{a*y} \le \underline{a*x})) \ \&$$

$$(((x \subseteq y) \Rightarrow (\max_{\xi \in x} \alpha * \xi \le \max_{\xi \in y} \alpha * \xi)$$

$$\Rightarrow (\overline{a*x} = \max_{\alpha \in a} \max_{\xi \in x} \alpha * \xi \le \max_{\alpha \in a} \max_{\xi \in y} \alpha * \xi = \overline{a*y}) \Rightarrow (\overline{a*x} \le \overline{a*y})))$$

$$\Rightarrow a*x \subseteq a*y.$$

Аналогично можно показать, что $(a \subseteq b) \Rightarrow (a*y \subseteq b*y)$, отсюда $(a*x \subseteq a*y \subseteq b*y) \Rightarrow (a*x \subseteq b*y)$.

Из свойства 6, учитывая, что отношение включения транзитивно, получаем следующую теорему, называемую ***основной теоремой интервальной арифметики***.

Теорема 1 [12]. Если $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ является рациональным выражением от интервальных переменных $x_1,x_2,\ldots,x_n$, т.е. конечной комбинацией интервалов $x_1,x_2,\ldots,x_n$ и конечного набора постоянных интервалов, соединённых знаками интервальных арифметических операций, то из $x_i \subseteq y_i$ $(i = 1,\ldots,n)$ следует

$$F(x_1,x_2,...,x_n) \subseteq \mathrm{F}(y_1,y_2,...,y_n)$$

при любом наборе интервальных чисел, для которого интервальные арифметические операции в выражении имеют смысл (т.е. не встречается деление на интервал, содержащий нуль).

3. Интервальные расширения вещественных функций

Для вещественнозначной функции $f(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ вещественных переменных, $\xi = (\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)^{\mathrm{T}}$, $\xi \in a = (a_1,a_2,...,a_n)^{\mathrm{T}}$, $a \in I(R^n)$, *интервальным расширением* будем называть интервальнозначную функцию F интервальных переменных $x_1,x_2,...,x_n$, $(x_i \subseteq a_i,\ i = 1,...,n)$ такую, что для вещественных аргументов имеет место равенство

$$f(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n) = \mathrm{F}(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n).$$

Объединённым интервальным расширением функции f называется функция $f_{un}(x)$, задаваемая равенством

$$f_{un}(x) := \bigcup_{\substack{\xi_i \in x_i \\ 1\le i\le n}} f(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n).$$

Очевидно, что если $f(\xi)$ – непрерывная функция, то $f_{un}(x) \in I(R)$ при $x \subseteq a$.

Теорема 1 [12]. Если $f\colon a \to I(R)$ – непрерывная функция, то её объединённое интервальное расширение также непрерывно. □

Непрерывность понимается в смысле метрики ρ, введённой в разделе 2.

Важным свойством объединённых расширений является то, что из $x \subseteq y$ следует $f_{un}(x) \subseteq f_{un}(y)$. Т.е. объединённое интервальное расширение является монотонным по включению.

Теорема 2 [13]. Если F – монотонное по включению интервальное расширение функции f, то

$$f_{un}(x_1,x_2,...,x_n) \subseteq \mathrm{F}(x_1,x_2,...,x_n).$$

Доказательство. В силу монотонности по включению имеем

$$(\forall(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)\in(x_1,x_2,...,x_n))$$
$$f(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)=\mathrm{F}(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)\subseteq\mathrm{F}(x_1,x_2,...,x_n))\Rightarrow$$
$$\bigcup_{\substack{\xi_i\in x_i\\ 1\le i\le n}} f(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)=f_{un}(x_1,x_2,...,x_n)\subseteq\mathrm{F}(x_1,x_2,...,x_n). \quad \square$$

Интервальное расширение определено не однозначно. Например, если $F(x)$ – интервальное расширение функции $f(\xi)$, то $F(x)+x–x$ – также является интервальным расширением $f(\xi)$.

Пусть $f(\xi)$ – вещественная рациональная функция n вещественных переменных, *естественным интервальным расширением* $f(\xi)$ называется рациональная интервальная функция $F(x)$, которая получается, если все вещественные переменные в аналитическом выражении для $f(\xi)$ заменить интервальными, а вещественные арифметические операции заменить соответствующими интервальными арифметическими операциями.

Согласно теореме 1 раздела 2 (основная теорема интервальной арифметики) любая рациональная интервальная функция монотонна по включению. Следовательно, используя естественное интервальное расширение, можно получать нижние и верхние границы множества значений рациональной вещественной функции. Рассмотрим классический пример.

Пример 1.

$$f(\xi) = \xi(1 - \xi),$$

её естественным интервальным расширением является функция $F(x) = x(1 - x)$.

При x=[0,1] имеем

$$\mathrm{F}([0,1])=[0,1](1-[0,1])=[0,1]\cdot[0,1]=[0,1].$$

Объединённое интервальное расширение

$$f_{un}(x)=\{\xi(1-\xi)\,|\,\xi\in[0,1]\}=[0,1/4].$$

Как и утверждает теорема 2, $f_{un}([0,1])\subseteq F([0,1])$.

Однако, эти значения не равны между собой. Отсюда возникает задача нахождения более точных оценок множества значений функции, а также встаёт вопрос о точности интервальных оценок, получаемых с помощью интервальных расширений.

Теорема 3 [12]. Пусть $f(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ – рациональное выражение, в котором каждая переменная встречается не более одного раза и только в первой степени, $\mathrm{F}(x_1,x_2,...,x_n)$ – естественное интервальное расширение $f(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$. Тогда

$$f_{un}(x_1,x_2,...,x_n)=\mathrm{F}(x_1,x_2,...,x_n)$$

для любого набора $(x_1,x_2,...,x_n)$, такого, что $\mathrm{F}(x_1,x_2,...,x_n)$ имеет смысл.

□

Доказательство этой теоремы легко получается с помощью теоретико-множественных рассуждений.

Лемма 1 [13]. Если F – естественное интервальное расширение вещественной рациональной функции f, определённое при $x \subseteq x^*$, где $x, x^* \in I(R^n)$, то существует такая постоянная $\alpha/2 \geq 0$, что $w(F(x)) \leq (\alpha/2)w(x)$ при всех $x \subseteq x^*$.

Доказательство. Нетрудно показать, что при любых $\alpha, \beta \in R$, $x_i, y_i \in I(R)$ справедливы соотношения

$$w(\alpha \cdot x_i + \beta \cdot y_i) \leq |\alpha| \cdot w(x_i) + |\beta| \cdot w(y_i),$$
$$w(x_i \cdot y_i) \leq |x_i| \cdot w(y_i) + |y_i| \cdot w(x_i), \quad (3.1)$$
$$w(1/y_i) \leq |1/y_i|^2 \cdot w(y_i).$$

Поскольку значение $F(x)$ естественного интервального расширения вычисляется путём выполнения конечного числа интервальных арифметических операций над вещественными константами и компонентами вектора x и справедливо неравенство $|x_i| \leq \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i^*|, i = 1,...n$, то, применяя конечное число раз соотношения (3.1), мы получим постоянную $\alpha/2$ такую, что $w(F(x)) \leq (\alpha/2)w(x)$. □

Теорема 4 [12]. Пусть $F(x_1, x_2, ..., x_n)$, $x_i \in a_i, i = 1,..., n$, – рациональная интервальная функция, вещественное сужение которой, т.е. функция $F(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, совпадает с вещественной функцией $f(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$:

$$F(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) = f(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n), \xi_i \in a_i, i = 1,..., n.$$

Разобьём каждый из интервалов a_i на равные подынтервалы так, что

$$x_i = \bigcup_{j=1}^{p} x_{ij}, w(x_{ij}) = w(x_i)/p.$$

Тогда существует положительная постоянная α такая, что справедливо равенство

$$\bigcup_{j_1,...,j_n} F(x_{1j_1}, ..., x_{nj_n}) = f_{un}(x_1, x_2, ..., x_n) + E_p, \quad (3.2)$$

где $$0 \in E_p, w(E_p) \leq (\alpha/p) \max_{1 \leq i \leq n} w(x_i).$$

Объединение в (3.2) берётся по $j_1,\dots,j_n$, пробегающим независимо значения от 1 до p.

Доказательство. Включение $0 \in Ep$ следует из того, что

$$f_{un}(x_1, x_2, ..., x_n) \subseteq \bigcup_{j_1,...,j_n} F(x_{1j_1}, ..., x_{nj_n}).$$

Далее $F(x_{1j_1}, ..., x_{nj_n}) = f_{un}(x_{1j_1}, ..., x_{nj_n}) + E_{j_1 j_2 \dots j_n}$, где $0 \in E_{j_1 j_2 \dots j_n}$.

Поскольку $E_p = \bigcup_{j_1,\ldots,j_n} E_{j_1 j_2 \ldots j_n}$, то $|E_p| = \max |E_{j_1 j_2 \ldots j_n}|$, и, учитывая, что $w(E_p) \le 2|E_p|$, достаточно показать, что $w(E_{j_1 j_2 \ldots j_n}) \le (\alpha/2p) \max_{1 \le i \le n} w(x_i)$ с константой α, не зависящей от p, $j_1,\ldots,j_n$. Пользуясь леммой, будем иметь

$$w(E_{j_1 j_2 \ldots j_n}) = w(F.(x_{1j_1},\ldots,x_{nj_n})) - w(\overline{f}(x_{1j_1},\ldots,x_{nj_n})) \le$$

$$\le w(F.(x_{1j_1},\ldots,x_{nj_n})) \le \alpha/2\, w(x)/p = (\alpha/2p) w(x),$$

что и требовалось доказать. □

Выпишем объединённые интервальные расширения для некоторых элементарных функций [4, с.63].

Тригонометрические функции:

$$\sin x = \begin{cases} [\sin \underline{x}, \sin \overline{x}], \text{ если } & x \subseteq [-\pi/2, \pi/2] + 2k\pi, \\ [\sin \overline{x}, \sin \underline{x}], \text{ если } & x \subseteq [-\pi/2, \pi/2] + (2k+1)\pi, \\ [\min\{\sin \underline{x}, \sin \overline{x}\}, 1], \text{ если } \underline{x} \in [-\pi/2, \pi/2] + 2k\pi, \\ \qquad \overline{x} \in [-\pi/2, \pi/2] + (2k+1)\pi, \\ [-1, \max\{\sin \underline{x}, \sin \overline{x}\}], \text{ если } \underline{x} \in [-\pi/2, \pi/2] + (2k-1)\pi, \\ \qquad \overline{x} \in [-\pi/2, \pi/2] + 2k\pi. \end{cases}$$

$$\cos x = \sin(\pi/2 - x),$$

$$\mathrm{tg}\, x = [\mathrm{tg}\, \underline{x}, \mathrm{tg}\, \overline{x}],\ \pi/2 + k\pi \notin x,$$

$$\mathrm{ctg}\, x = [\mathrm{ctg}\, \overline{x}, \mathrm{ctg}\, \underline{x}],\ k\pi \notin x.$$

Обратные тригонометрические функции:

$$\arcsin x = [\arcsin \underline{x}, \arcsin \overline{x}], x \subseteq [-1,1],$$
$$\arccos x = [\arccos \overline{x}, \arccos \underline{x}], x \subseteq [-1,1],$$
$$\mathrm{arctg}\, x = [\mathrm{arctg}\, \underline{x}, \mathrm{arctg}\, \overline{x}],$$
$$\mathrm{arcctg}\, x = [\mathrm{arcctg}\, \overline{x}, \mathrm{arcctg}\, \underline{x}].$$

Гиперболические функции:

$$\mathrm{sh}\, x = [\mathrm{sh}\, \underline{x}, \mathrm{sh}\, \overline{x}],$$

$$\mathrm{ch}\, x = \begin{cases} [\mathrm{ch}\, \overline{x}, \mathrm{ch}\, \underline{x}], x < 0, \\ [1, \max\{\mathrm{ch}\, \underline{x}, \mathrm{ch}\, \overline{x}\}], 0 \in x, \\ [\mathrm{ch}\, \underline{x}, \mathrm{ch}\, \overline{x}], x > 0. \end{cases}$$

Степенная функция x^n для натурального n имеет следующее объединённое расширение:

$$x^n = \begin{cases} [\underline{x}^n, \overline{x}^n], \text{ если } n \text{ - нечётно или } n \text{ - чётно и } \underline{x} \geq 0, \\ [\overline{x}^n, \underline{x}^n], \text{ если } n \text{ - чётно и } \overline{x} \leq 0, \\ [0, |x|^n], \text{ если } n \text{ - чётно и } 0 \in x. \end{cases}$$

Для степени $\alpha = 1/n$, где n – натуральное:

$$\sqrt[n]{x} = [\sqrt[n]{\underline{x}}, \sqrt[n]{\overline{x}}]$$

при n нечётном, или при n чётном и $\underline{x} \geq 0$.

Для степени $\alpha = m/n$, где m и n взаимно просты:

$$x^{m/n} = [\sqrt[n]{\underline{x}^m}, \sqrt[n]{\overline{x}^m}]$$

при m и n нечётных, или при чётном n и $\underline{x} \geq 0$,

$$x^{m/n} = (\sqrt[n]{x})^m$$

при нечётном n и чётном m.

Для случая, когда степень α – иррациональное число:

$$x^\alpha = [\underline{x}^\alpha, \overline{x}^\alpha], x \geq 0.$$

Экспонента

$$e^x = e^{[\underline{x}, \overline{x}]} = [e^{\underline{x}}, e^{\overline{x}}].$$

Логарифм

$$\ln x = [\ln \underline{x}, \ln \overline{x}], x > 0.$$

При реализации приведённых формул на ЭВМ необходимо учитывать некоторые дополнительные свойства элементарных функций, например, что $\sin x \in [-1,1]$, $e^x > 0$, $\mathrm{arctg}\, x \in (-\pi/2, \pi/2)$. Кроме того, учитывая, что число π не может быть представлено точно, вместо него нужно использовать интервал $[\underline{\pi}, \overline{\pi}]$, который можно выбрать как угодно узким. Если $\sin \underline{x} = [\underline{y}, \overline{y}], \sin \overline{x} = [\underline{z}, \overline{z}]$ вычислены с применением интервальной арифметики, то в качестве $\sin x$ надо взять $\sin x = [\underline{y}, \overline{z}] \cap [-1,1]$.

4. Множества решений интервального алгебраического уравнения.

Пусть F: $\mathbf{D} \subset I(R^s) \times I(R^n) \Rightarrow I(R^m)$, $F(a,x)$ – интервальное расширение для $f(\alpha,\xi)$,
f: $D \subset R^s \times R^n \Rightarrow R^m$ и дано уравнение относительно ξ

$$f(\alpha,\xi) = \beta \tag{4.1}$$

с приближёнными параметрами, так что

$$\alpha \in a, \ \beta \in b, \text{ где } a \in I(R^s), \ b \in I(R^m). \tag{4.2}$$

Рассмотрим уравнение относительно x

$$F(a,x) = b \tag{4.3}$$

Определение 1. ***Множеством точечных решений*** *уравнения (4.1) называется множество* $X_{\exists\exists} := \{\xi \in R^n \mid (\exists\alpha \in a)(\exists\beta \in b) f(\alpha,\xi) = \beta\}$. □

Множество точечных решений – это множество всех решений вещественных уравнений (4.1), коэффициенты которых пробегают всевозможные значения из заданных интервалов. Это трудно описываемое множество и в реальных задачах требуется найти легко описываемое множество (интервал или интервальный вектор), которое гарантированно включает в себя это множество (верхнюю оценку), либо множество, которое включается в него (нижнюю оценку). В связи с этим возникает две задачи.

Внешняя задача для множества точечных решений.

Найти минимальный интервальный вектор, содержащий вещественные решения всех уравнений (4.1), коэффициенты которых удовлетворяют условиям (4.2). Или

найти минимальный $x \in I(R^n)$ такой, что

$$(\forall\alpha\in a)(\forall\beta\in b)(\exists\xi\in x)\quad f(\alpha,\xi)=\beta.$$

Легко видеть, что интервальный вектор, удовлетворяющий последнему свойству, является внешней оценкой для $X_{\exists\exists}$.

Внутренняя задача для множества точечных решений.

Найти максимальный интервальный вектор, включающийся во множество решений уравнений (4.1), коэффициенты которых удовлетворяют условиям (4.2). Или

Найти максимальный $x \in I(R^n)$ такой, что

$$(\forall\ \xi\in x)(\exists\ \alpha\in a)(\exists\ \beta\in b)\quad f(\alpha,\xi)=\beta.$$

Очевидно, что интервальный вектор с таким свойством является внутренней оценкой для $X_{\exists\exists}$.

Минимальность и максимальность в приведённых задачах понимается в смысле частичного порядка по включению.

Определение 2. ***Допустимым множеством решений*** *уравнения (4.1) называется множество*

$$X_{\forall\exists} = \{\xi \in R^n \mid (\forall\alpha \in a)(\exists\beta \in b) f(\alpha,\xi) = \beta\}\ . \ \square$$

Другие возможные характеризации этого множества следующие

$$(\forall\xi \in x)(\forall\alpha \in a)(\exists\beta \in b)\ \ f(\alpha,\xi) = \beta,$$
$$(\forall\xi \in x)(\forall\alpha \in a)\ \ f(\alpha,\xi) \in b.$$

Определение 3. ***Управляемым множеством решений*** *уравнения (4.1) называется множество*

$$X_{\exists\forall} = \{\xi \in R^n \mid (\forall\beta \in b)(\exists\alpha \in a) f(\alpha,\xi) = \beta\}\ . \ \square$$

Множество точечных решений называют также объединённым множеством решений, а допустимое множество решений - множеством точечных включений.

Для допустимого и управляемого множеств решений рассматриваются задачи внутренней оценки, как более актуальные для прикладных задач.

Внутренняя задача для допустимого множества решений.

Найти максимальный интервальный вектор, включающийся в допустимое множество решений уравнения (4.1), коэффициенты которого удовлетворяют условиям (4.2). Или

Найти максимальный $x \in I(R^n)$ такой, что

$$(\forall\ \xi \in x)(\forall\ \alpha \in a)(\exists\ \beta \in b)\quad f(\alpha,\xi)=\beta.$$

Внутренняя задача для управляемого множества решений.

Найти максимальный интервальный вектор, включающийся в управляемое множество решений уравнения (4.1), коэффициенты которого удовлетворяют условиям (4.2). Или

Найти максимальный $x \in I(R^n)$ такой, что

$$(\forall\ \xi \in x)(\forall\ \beta \in b)(\exists\ \alpha \in a)\quad f(\alpha,\xi)=\beta.$$

Определение 4. ***Алгебраическим интервальным решением*** *уравнения (4.3) называется интервальный вектор x, при подстановке которого в это уравнение оно превращается в тождество.* □

Везде далее мы будем для краткости называть введённое решение *алгебраическим решением* (что вполне соответствует его смыслу) или, иногда, просто *решением*. Слово “*интервальное”* подчёркивает его отличие от множеств решений в том, что оно является решением интервального уравнения в интервальном пространстве, и, следовательно, интервалом.

Возникает вопрос, связаны ли введённые множества решений уравнения (4.1) между собой, а также с алгебраическим интервальным решением уравнения (4.3), и как именно. Выяснением последнего вопроса мы и займёмся в последующих разделах. Сейчас же заметим только, что множество точечных решений включает в себя все другие решения и множества решений.

Пример 1. Для уравнения $\alpha+\xi=\beta$, где $\alpha \in [1,2]$, $\beta \in [2,4]$ искомые множества решений есть $X_{\exists\exists}=[0,3]$, $X_{\forall\exists}=[1,2]$, $X_{\exists\forall}=\{\varnothing\}$. Заметим также, что допустимое множество решений является ещё и алгебраическим решением интервального уравнения

$$[1,2]+x=[2,4],$$

причём с помощью интервальной арифметической операции вычитания мы получим не алгебраическое решение, а множество точечных решений:

$$X_{\exists\exists}=[2,4]-[1,2]=[2-2,4-1]=[0,3].$$

Для того чтобы найти алгебраическое решение, нам понадобилось бы добавить к обеим частям уравнения обратный по сложению элемент для интервала [1,2], а такого элемента в $I(R)$ не существует. Этим элементом мог быть интервал [-1,-2], в самом деле,

$$x = [2,4] + [-1,-2] = [1,2].$$

Получили алгебраическое решение.

Приведённый пример показывает, что в интервальном множестве из-за отсутствия для большинства элементов обратных по сложению (и умножению) эквивалентные преобразования невозможны даже в таком простейшем случае. Поэтому возникает необходимость расширения интервального множества путём добавления в него, так называемых неправильных (негативных) интервалов, левый конец которых больше правого. Здесь можно провести некоторую аналогию с вещественными числами. Решая вещественное уравнение с положительными коэффициентами, и зная, что искомое решение также положительно (например, выражает количество вещества), мы всё же часто не можем до конца осуществить эквивалентные преобразования, оперируя только с положительными числами. Так в математике возникла настоятельная необходимость введения отрицательных чисел. А в интервальной математике возникла необходимость использования негативных (неправильных) интервалов.

Следующий пример показывает, решением какого интервального уравнения является управляемое множество решений.

Пример 2. Для уравнения $\alpha+\xi=\beta$, где $\alpha\in[2,4]$, $\beta\in[1,2]$ искомые множества решений есть $X_{\exists\exists}=[1,2]-[2,4]=[-3,0]$, $X_{\forall\exists}=\{\varnothing\}$, $X_{\exists\forall}=[-2,-1]$. Управляемое множество решений является алгебраическим решением интервального уравнения

$$[4,2] + x = [2,1]$$

с коэффициентами из расширенного множества интервалов.

Арифметические операции с неправильными интервалами будут введены в следующем разделе, здесь отметим только, что сумма вычисляется через концы интервалов так же, как и в $I(R)$.

Пример 3. Рассмотрим введённые множества решений на примере системы линейных алгебраических уравнений с интервальной неопределённостью параметров. На рис.1 показаны множество точечных решений, допустимое множество решений и внутренние интервальные оценки этих множеств, управляемых решений для этой системы не существует.

$$\underset{\bullet}{A}\,\underset{\bullet}{x} = \underset{\bullet}{b},\quad \underset{\bullet}{A} \in A,\ \underset{\bullet}{b} \in b,$$

$$A = \begin{pmatrix} [2,4] & [-2,1] \\ [-1,2] & [2,4] \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} [-2,2] \\ [-2,2] \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} [-1,1] \\ [-1,1] \end{pmatrix} \subseteq X_{\exists\exists} \subseteq \begin{pmatrix} [-4,4] \\ [-4,4] \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} [-1/3\,,1/3] \\ [-1/3\,,1/3] \end{pmatrix} \subseteq X_{\forall\exists},\quad X_{\exists\forall} = \{\varnothing\}.$$

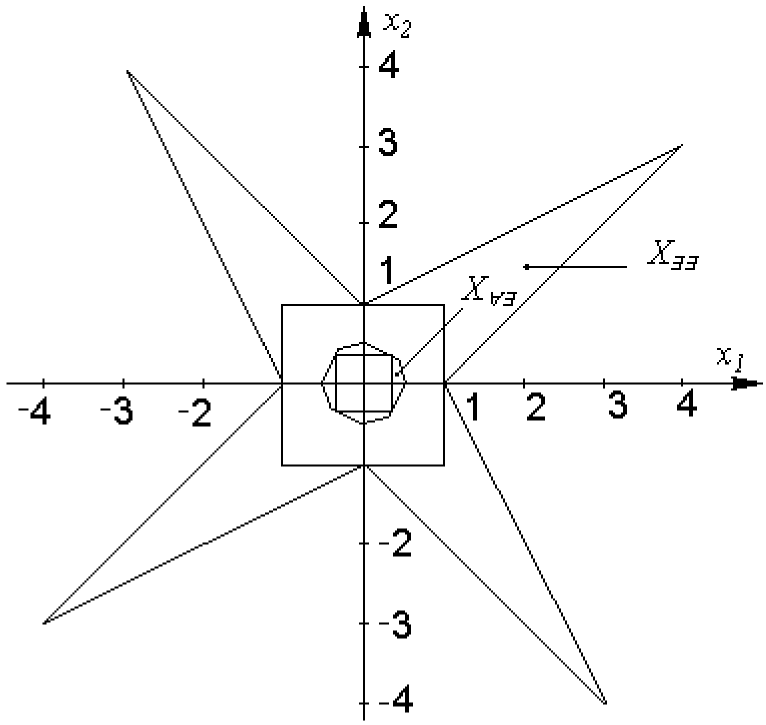

Рис.1

5. Расширенная интервальная арифметика Каухера

Как видно из примеров предыдущего раздела, невозможно решить поставленные задачи, оставаясь в рамках интервального множества *I*(*R*). Расширенная интервальная арифметика впервые была предложена Каухером [11]. Им же были доказаны основные свойства этой арифметики. Снимая ограничение $\underline{x} \le \overline{x}$, получим расширенное множество интервалов

$$I^*(R) := \{x = [\underline{x}, \overline{x}] \mid \underline{x}, \overline{x} \in R\}.$$

Определение 1. *Будем называть интервал* $x \in I^*(R)$ ***правильным (позитивным)****, если* $\underline{x} \le \overline{x}$*,* ***неправильным (негативным)****, если* $\underline{x} \ge \overline{x}$*. Интервал, являющийся одновременно правильным и неправильным, будем называть вырожденным интервалом или вещественным числом.* □

Ширина, середина, абсолютная величина интервала, расстояние между интервалами и отношение включения определяются так же, как и для интервалов множества *I*(*R*) (с.8). Например, определение включения:

$$(x \subseteq y) \Leftrightarrow (\underline{y} \le \underline{x} \ \&\ \overline{x} \le \overline{y}).$$

Определим унарные операции для $x \in I^*(R)$.

$-x := [-\overline{x}, -\underline{x}]$;

$\mathrm{opp}\, x := [-\underline{x}, -\overline{x}]$ (противоположный по сложению для x);

$\mathrm{dual}\, x := [\overline{x}, \underline{x}]$;

$$\mathrm{pr}(x) := \begin{cases} x, & \text{если } x - \text{правильный}; \\ \mathrm{dual}\, x, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Перечислим основные свойства введённых операций. Пусть $x \in I^*(R)$, тогда

1) $\mathrm{dual}(-x) = -\mathrm{dual}(x) = \mathrm{opp}(x)$;
2) $\mathrm{opp}(-x) = -\mathrm{opp}(x) = \mathrm{dual}(x)$;
3) $\mathrm{dual}(\mathrm{opp}(x)) = \mathrm{opp}(\mathrm{dual}(x)) = -x$;
4) $\mathrm{pr}(-x) = -\mathrm{pr}(x)$.

Пусть $x, y \in I^*(R)$, $x \subseteq y$, тогда

1) $-x \subseteq -y$;
2) $\mathrm{dual}(x) \supseteq \mathrm{dual}(y)$;
3) $\mathrm{opp}(x) \supseteq \mathrm{opp}(y)$;
4) $\mathrm{pr}(x) \cap \mathrm{pr}(y) \neq \{\varnothing\}$.

Доказательство перечисленных свойств оставляем читателю в качестве упражнения.

Для множества интервальных векторов

$$I^*(R^n) = \{x = (x_1, ..., x_n) \mid x_i \in I^*(R), i = 1, ..., n\}$$

включение одного интервального вектора в другой будем понимать покомпонентно.

Определение 2. *Будем называть интервальный вектор $x \in I^*(R^n)$ **правильным**, если все его компоненты являются правильными интервалами, т.е. $\forall i = 1,...,n$ $\underline{x}_i \leq \overline{x}_i$, и **неправильным**, если все его компоненты являются неправильными интервалами, т.е. $\forall i = 1,...n$ $\underline{x}_i \geq \overline{x}_i$. Интервальный вектор, компонентами которого являются вырожденные интервалы, будем называть **вырожденным** или **вещественным вектором**.* □

Определение 3. *Пусть $v, w \in I^*(R^n)$ и $v \subseteq w$. **Отрезком** $<v,w>$ в $I^*(R^n)$ назовём множество интервальных векторов, удовлетворяющих неравенству*

$$v \subseteq x \subseteq w. \;\square$$

Отношения порядка $\leq$ и $<$ для $I^*(R)$ определим следующим образом:

$$(x \leq y) \Leftrightarrow ((\forall \xi \in x)(\forall \eta \in y)\xi \leq \eta),$$
$$(x < y) \Leftrightarrow ((\forall \xi \in x)(\forall \eta \in y)\xi < \eta).$$

Определение 4. (структурных операций на $I^*(R)$).

Для $a_i \in I^*(R)$, $i \in I$, где I-некоторое множество индексов, следующие операции

$$\bigvee_{i \in I} a_i := \sup_{\subseteq}\{a_i \mid i \in I\} = [\inf_{i \in I} \underline{a}_i, \sup_{i \in I} \overline{a}_i],$$

$$\bigwedge_{i\in I} a_i := \inf_{\subseteq}\{a_i \mid i\in I\} = [\sup_{i\in I} \underline{a}_i, \inf_{i\in I} \overline{a}_i]$$

будем называть верхней и нижней гранью по включению, соответственно.

Пример 1.

$[3,4] \vee [3.5,6] = [3,6]$; $[4,5] \vee [7,8] = [4,8]$; $[4,1] \vee [5,6] = [4,6]$;

$[3,4] \wedge [3.5,6] = [3.5,4]$; $[4,5] \wedge [7,8] = [7,5]$; $[4,1] \wedge [5,6] = [5,1]$.

Из определения с учётом того, что вещественные числа являются вырожденными интервалами, следует, в частности, для $\alpha_i \in R$

$$\bigvee_{i\in I} \alpha_i = [\inf_{i\in I} \alpha_i, \sup_{i\in I} \alpha_i], \; \bigwedge_{i\in I} \alpha_i = [\sup_{i\in I} \alpha_i, \inf_{i\in I} \alpha_i].$$

Каждому интервалу $I^*(R)$ сопоставим одну из структурных операций следующим образом

$$\Omega^x := \begin{cases} \bigvee, & x - \text{правильный;} \\ \bigwedge, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Определим теперь арифметические операции над элементами расширенного множества интервалов.

Определение 5. (арифметических операций на $I^*(R)$)**.**
Пусть $a,b \in I^*(R)$, $* \in \{+,-,\cdot,/\}$ и при делении $0 \notin b$, тогда

$$a * b = \underset{\alpha\in \mathrm{pr}(a)}{\Omega^a} \; \underset{\beta\in \mathrm{pr}(b)}{\Omega^b} \; \alpha * \beta \; . \; \square$$

Для правильных интервалов

$a * b = \sup_{\subseteq}\{\alpha * \beta \mid \alpha \in a, \beta \in b\}$

$= [\min\{\underline{a} * \underline{b}, \underline{a} * \overline{b}, \overline{a} * \underline{b}, \overline{a} * \overline{b}\}, \max\{\underline{a} * \underline{b}, \underline{a} * \overline{b}, \overline{a} * \underline{b}, \overline{a} * \overline{b}\}]$,

что совпадает с арифметическими операциями для элементов $I(R)$.

Для неправильных интервалов

$a * b = \inf_{\subseteq}\{\alpha * \beta \mid \alpha \in \mathrm{dual}(a), \beta \in \mathrm{dual}(b)\}$

$= [\max\{\underline{a} * \underline{b}, \underline{a} * \overline{b}, \overline{a} * \underline{b}, \overline{a} * \overline{b}\}, \min\{\underline{a} * \underline{b}, \underline{a} * \overline{b}, \overline{a} * \underline{b}, \overline{a} * \overline{b}\}]$.

Если a – правильный интервал, b – неправильный интервал, то

$$a * b = \bigvee_{\alpha\in a} \bigwedge_{\beta\in \mathrm{dual}(b)} \alpha * \beta = [\min_{\alpha\in a} \max_{\beta\in \mathrm{dual}(b)} \alpha * \beta, \max_{\alpha\in a} \min_{\beta\in \mathrm{dual}(b)} \alpha * \beta].$$

Если a – неправильный интервал, b – правильный интервал, то

$$a * b = \bigwedge_{\alpha\in \mathrm{dual}(a)} \bigvee_{\beta\in b} \alpha * \beta = [\max_{\alpha\in \mathrm{dual}(a)} \min_{\beta\in b} \alpha * \beta, \min_{\alpha\in \mathrm{dual}(a)} \max_{\beta\in b} \alpha * \beta].$$

Согласно определению введённые операции можно определить как операции с границами следующим образом:

Сложение

$$a + b = [\underline{a} + \underline{b}, \overline{a} + \overline{b}].$$

Вычитание

$$a - b = [\underline{a} - \overline{b}, \overline{a} - \underline{b}].$$

Умножение

1) $a \geq 0, b \geq 0, \quad ab = [\underline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}]$;

2) $a \geq 0, b \leq 0, \quad ab = [\overline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}]$;

3) $a \geq 0, b \supseteq 0, \quad ab = [\overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}]$;

4) $a \geq 0, b \subseteq 0, \quad ab = [\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}]$;

5) $a \leq 0, b \leq 0, \quad ab = [\overline{a}\overline{b}, \underline{a}\underline{b}]$;

6) $a \leq 0, b \supseteq 0, \quad ab = [\underline{a}\overline{b}, \underline{a}\underline{b}]$;

7) $a \leq 0, b \subseteq 0, \quad ab = [\overline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}]$;

8) $a \supseteq 0, b \supseteq 0, \quad ab = [\min\{\underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}\}, \max\{\underline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\}]$;

9) $a \subseteq 0, b \subseteq 0, \quad ab = [\max\{\underline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\}, \min\{\underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}\}]$;

10) $a \subseteq 0, b \supseteq 0, \quad ab = [0,0]$.

Остальные случаи сводятся к перечисленным в силу коммутативности умножения, которая будет доказана ниже для некоторых случаев, остальные оставляем читателю в качестве упражнения.

Деление

$$a / b = a \cdot (1 / b);$$

$$1 / b = [1 / \overline{b}, 1 / \underline{b}] (0 \notin \mathrm{pr}(b)).$$

Формулы для умножения доказываются несложно, но требуют громоздких выкладок. Докажем формулы умножения для случаев 1), 3), 10).

1) $a \geq 0$, $b \geq 0$,

1.1) a, b – правильные интервалы, тогда

$$0 \leq \underline{a} \leq \alpha \leq \overline{a}, \quad 0 \leq \underline{b} \leq \beta \leq \overline{b},$$

$$ab = [\min_{\alpha} \min_{\beta} \alpha\beta, \max_{\alpha} \max_{\beta} \alpha\beta] = [\underline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}];$$

$$ba = [\min_{\beta} \min_{\alpha} \alpha\beta, \max_{\beta} \max_{\alpha} \alpha\beta] = [\underline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}].$$

1.2) a – правильный интервал, b – неправильный интервал, тогда

$$0 \leq \underline{a} \leq \alpha \leq \overline{a}, \quad 0 \leq \overline{b} \leq \beta \leq \underline{b},$$

$$ab = [\min_{\alpha} \max_{\beta} \alpha\beta, \max_{\alpha} \min_{\beta} \alpha\beta] = [\min_{\alpha} \alpha\underline{b}, \max_{\alpha} \alpha\overline{b}] = [\underline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}];$$

$$ba = [\max_{\beta} \min_{\alpha} \alpha\beta, \min_{\beta} \max_{\alpha} \alpha\beta] = [\max_{\beta} \underline{a}\beta, \min_{\beta} \overline{a}\beta] = [\underline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}].$$

1.3) a, b – неправильные интервалы, тогда

$$0 \leq \overline{a} \leq \alpha \leq \underline{a}, \quad 0 \leq \overline{b} \leq \beta \leq \underline{b},$$

$$ab = [\max_{\alpha} \max_{\beta} \alpha\beta, \min_{\alpha} \min_{\beta} \alpha\beta] = [\underline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}];$$

$$ab = [\max_{\alpha} \max_{\beta} \alpha\beta, \min_{\alpha} \min_{\beta} \alpha\beta] = [\underline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}];.$$

3) $a \geq 0$, $b \supseteq 0$, ($\underline{b} \leq 0 \leq \overline{b}$, т.е. b – правильный интервал,

3.1) a – правильный интервал, $0 \leq \underline{a} \leq \alpha \leq \overline{a}$,

$$ab = [\min_\alpha \min_\beta \alpha\beta, \max_\alpha \max_\beta \alpha\beta] = [\min_\alpha \alpha\underline{b}, \max_\alpha \alpha\overline{b}] = [\overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}],$$

для доказательства коммутативности введём следующие вещественные функции:

$$f(\beta) := \begin{cases} \overline{a}\beta, & \text{если } \beta \le 0 \\ \underline{a}\beta, & \text{если} \beta > 0 \end{cases} \qquad g(\beta) := \begin{cases} \underline{a}\beta, & \text{если } \beta \le 0 \\ \overline{a}\beta, & \text{если} \beta > 0 \end{cases},$$

тогда

$$ba = [\min_\beta \min_\alpha \alpha\beta, \max_\beta \max_\alpha \alpha\beta] = [\min_\beta f(\beta), \max_\beta g(\beta)] = [\overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}].$$

3.2) a – неправильный интервал, $0 \le \overline{a} \le \alpha \le \underline{a}$,

$$ab = [\max_\alpha \min_\beta \alpha\beta, \min_\alpha \max_\beta \alpha\beta] = [\max_\alpha \alpha\underline{b}, \min_\alpha \alpha\overline{b}] = [\overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}];$$

$$ba = [\min_\beta \max_\alpha \alpha\beta, \max_\beta \min_\alpha \alpha\beta] = [\min_\beta f(\beta), \max_\beta g(\beta)] = [\overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}].$$

10) $a \subseteq 0, b \supseteq 0$, ($\overline{a} \le 0 \le \underline{a}$, $\underline{b} \le 0 \le \overline{b}$, т.е. a – неправильный интервал, b – правильный,

$$ab = [\max_\alpha \min_\beta \alpha\beta, \min_\alpha \max_\beta \alpha\beta].$$

Пусть

$$u(\alpha) := \begin{cases} \alpha\overline{b}, & \text{если } \alpha \le 0 \\ \alpha\underline{b}, & \text{если } \alpha > 0 \end{cases} \qquad v(\alpha) := \begin{cases} \alpha\underline{b}, & \text{если } \alpha \le 0 \\ \alpha\overline{b}, & \text{если } \alpha > 0 \end{cases}$$

Для наглядности рассмотрим графики этих функций (рис.2).

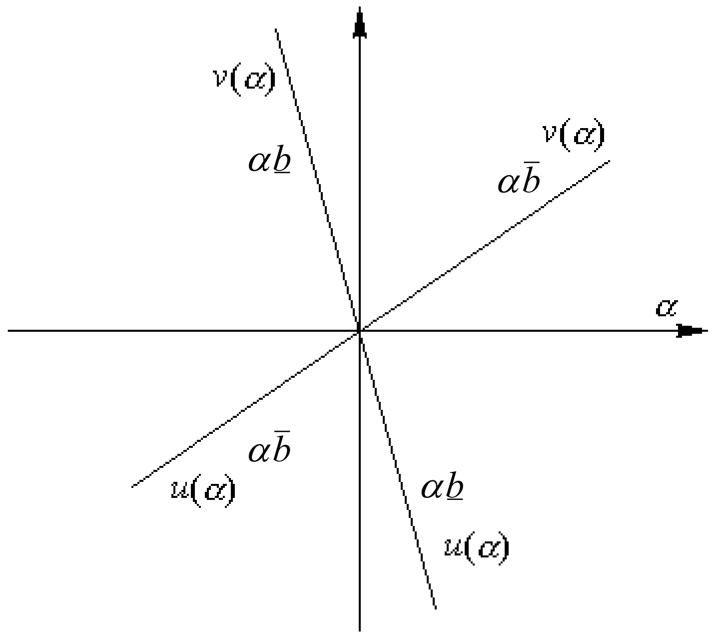

Рис.2

$$ab = [\max_\alpha u(\alpha), \min_\alpha v(\alpha)] = [0,0].$$

Равенство ba=[0,0] доказывается аналогично. □

Если один из интервалов – вырожденный, получим правило умножения интервала $a \in I^*(R)$ на вещественное число $\lambda \in \mathrm{R}$:

$$\lambda a = \begin{cases} [\lambda \overline{a}, \lambda \underline{a}], & \text{если} \quad \lambda < 0 \\ [\lambda \underline{a}, \lambda \overline{a}], & \text{если} \quad \lambda \geq 0. \end{cases}$$

Свойства умножения

Пусть $a, b \in I^*(R)$, $\lambda \in R$, тогда

1) $ab = ba$;
2) $(ab)c = a(bc)$;
3) $\mathrm{dual}(a)\mathrm{dual}(b) = \mathrm{dual}(ab)$;
4) $-(ab) = (-a)b = a(-b)$;
5) $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$;
6) $(-a)(-b) = ab$;
7) $\mathrm{opp}(a)\mathrm{opp}(b) = \mathrm{dual}(ab)$;

Из семи основных свойств интервальных арифметических операций (см. раздел 2) в расширенной интервальной арифметике не выполняется только четвёртое. Обратный элемент по сложению существует для любого интервала $x \in I^*(R)$ и равен $\mathrm{opp}(x)$, обратный элемент по умножению существует для любого интервала, правильная проекция которого $\mathrm{pr}(x)$ не содержит нуля, он равен

$$1/.x := [1/\underline{x}, 1/\overline{x}].$$

В дальнейшем нам понадобится ещё одно определение деления:

$$a/.b := a \cdot (1/.b) \ \ (0 \notin \mathrm{pr}(b)).$$

Докажем свойства субдистрибутивности и монотонности по включению для арифметических операций над элементами $I^*(R)$.

Теорема 1. (о субдистрибутивности).

Пусть $a, b, c \in I^*(R)$, тогда

$a(b+c) \subseteq ab + ac$, если a – правильный,

$a(b+c) \supseteq ab + ac$, если a – неправильный.

Доказательство.

Обозначим

$$g(\alpha) = [\underline{g}(\alpha), \overline{g}(\alpha)] := \underset{\beta \in pr(b)}{\Omega^b} \alpha\beta \quad \text{и} \quad h(\alpha) = [\underline{h}(\alpha), \overline{h}(\alpha)] := \underset{\gamma \in pr(c)}{\Omega^c} \alpha\gamma$$

интервальнозначные функции вещественной переменной α с границами в виде вещественных функций, тогда

$$a(b+c) = \underset{\alpha \in pr(a)}{\Omega^a} \ \underset{\beta \in pr(b)}{\Omega^b} \ \underset{\gamma \in pr(c)}{\Omega^c} \alpha(\beta + \gamma) = \underset{\alpha \in pr(a)}{\Omega^a} \ \underset{\beta \in pr(b)}{\Omega^b} \ \underset{\gamma \in pr(c)}{\Omega^c} \alpha\beta + \alpha\gamma =$$

$$= \underset{\alpha\in pr(a)}{\Omega^a}\,(\underset{\beta\in pr(b)}{\Omega^b}\,\alpha\beta + \underset{\gamma\in pr(c)}{\Omega^c}\,\alpha\gamma) = \underset{\alpha\in pr(a)}{\Omega^a}([\underline{g}(\alpha),\overline{g}(\alpha)] + [\underline{h}(\alpha),\overline{h}(\alpha)]) =$$

$$= \underset{\alpha\in pr(a)}{\Omega^a}([\underline{g}(\alpha)+\underline{h}(\alpha),\overline{g}(\alpha)+\overline{h}(\alpha)]).$$

Если a – правильный, $\Omega^a = \vee = \sup_{\subseteq}$, имеем

$$a(b+c) = [\min_{\alpha\in a}(\underline{g}(\alpha)+\underline{h}(\alpha)), \max_{\alpha\in a}(\overline{g}(\alpha)+\overline{h}(\alpha))] \subseteq$$

$$\subseteq [\min_{\alpha\in a}\underline{g}(\alpha) + \min_{\alpha\in a}\underline{h}(\alpha), \max_{\alpha\in a}\overline{g}(\alpha) + \max_{\alpha\in a}\overline{h}(\alpha)] =$$

$$= [\min_{\alpha\in a}\underline{g}(\alpha), \max_{\alpha\in a}\overline{g}(\alpha)] + [\min_{\alpha\in a}\underline{h}(\alpha), \max_{\alpha\in a}\overline{h}(\alpha)] = \underset{\alpha\in a}{\Omega^a}\, g(\alpha) + \underset{\alpha\in a}{\Omega^a}\, h(\alpha) =$$

$$= \underset{\alpha\in pr(a)}{\Omega^a}\ \underset{\beta\in pr(b)}{\Omega^b}\,\alpha\beta + \underset{\alpha\in pr(a)}{\Omega^a}\ \underset{\gamma\in pr(c)}{\Omega^c}\,\alpha\gamma = ab + ac.$$

Если a – неправильный, $\Omega^a = \wedge = \inf_{\subseteq}$, имеем

$$a(b+c) = [\max_{\alpha\in a}(\underline{g}(\alpha)+\underline{h}(\alpha)), \min_{\alpha\in a}(\overline{g}(\alpha)+\overline{h}(\alpha))] \supseteq$$

$$\supseteq [\max_{\alpha\in a}\underline{g}(\alpha) + \max_{\alpha\in a}\underline{h}(\alpha), \min_{\alpha\in a}\overline{g}(\alpha) + \min_{\alpha\in a}\overline{h}(\alpha)] =$$

$$= [\max_{\alpha\in a}\underline{g}(\alpha), \min_{\alpha\in a}\overline{g}(\alpha)] + [\max_{\alpha\in a}\underline{h}(\alpha), \min_{\alpha\in a}\overline{h}(\alpha)] = \underset{\alpha\in a}{\Omega^a}\, g(\alpha) + \underset{\alpha\in a}{\Omega^a}\, h(\alpha) =$$

$$= \underset{\alpha\in pr(a)}{\Omega^a}\ \underset{\beta\in pr(b)}{\Omega^b}\,\alpha\beta + \underset{\alpha\in pr(a)}{\Omega^a}\ \underset{\gamma\in pr(c)}{\Omega^c}\,\alpha\gamma = ab + ac. \ \square$$

Области дистрибутивности.

Каждый интервал $a \in I^*(R)$ определяет области дистрибутивности $D_1(a)$, $D_2(a)$, $D_3(a)$, $D_4(a)$ и если $\exists\, r \in \{1, 2, 3, 4\}$, что $b, c \in D_r(a)$, то $a(b + c) = ab + ac$. На рис.3–5 изображены области дистрибутивности.

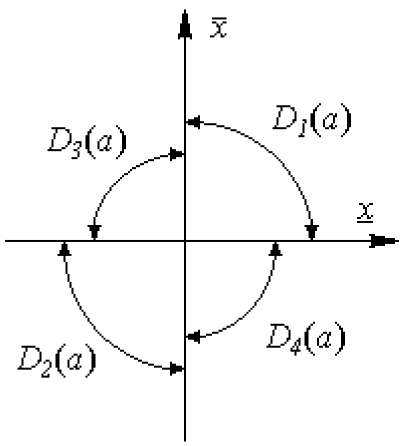

Рис. 3

$(0 \notin \mathrm{int}(\mathrm{pr}(a))$ $(a \geq 0$ или $a \leq 0)$)

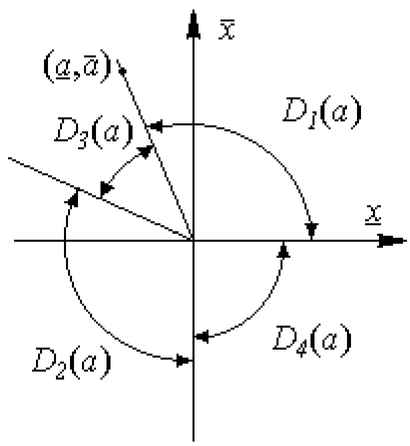

Рис. 4 $(0 \subseteq a)$

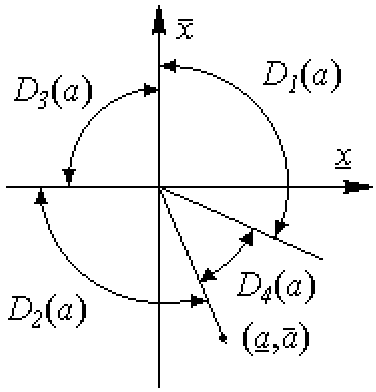

Рис. 5 $(0 \supseteq a)$

Теорема 2. (о монотонности по включению).

Пусть $a, b, x, y \in I^*(R)$, $* \in \{+,-,\cdot,/\}$ тогда

$$(a \subseteq b \;\&\; x \subseteq y) \Rightarrow (a * x \subseteq b * y).$$

Доказательство.

Покажем сначала, что $(x \subseteq y) \Rightarrow (a * x \subseteq a * y)$.

I. Пусть a – правильный.

1) x, y – правильные, для правильных интервалов монотонность по включению доказана в разделе 2.

2) x, y – неправильные

$$a * x = [\min_{\alpha \in a} \max_{\xi \in \mathrm{dual}(x)} \alpha * \xi, \max_{\alpha \in a} \min_{\xi \in \mathrm{dual}(x)} \alpha * \xi],$$

$$a * y = [\min_{\alpha \in a} \max_{\xi \in \mathrm{dual}(y)} \alpha * \xi, \max_{\alpha \in a} \min_{\xi \in \mathrm{dual}(y)} \alpha * \xi],$$

$(x \subseteq y) \Leftrightarrow (\mathrm{dual}(y) \subseteq \mathrm{dual}(x))$, где $\mathrm{dual}(x)$, $\mathrm{dual}(y)$ – правильные интервалы, тогда

$$((\mathrm{dual}(y) \subseteq \mathrm{dual}(x)) \Rightarrow (\max_{\xi \in \mathrm{dual}(y)} \alpha * \xi \le \max_{\xi \in \mathrm{dual}(x)} \alpha * \xi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\underline{a * y} = \min_{\alpha \in a} \max_{\xi \in \mathrm{dual}(y)} \alpha * \xi \le \min_{\alpha \in a} \max_{\xi \in \mathrm{dual}(x)} \alpha * \xi = \underline{a * x}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\underline{a * y} \le \underline{a * x})) \;\&$$

$$((\mathrm{dual}(y) \subseteq \mathrm{dual}(x)) \Rightarrow (\min_{\xi \in \mathrm{dual}(x)} \alpha * \xi \le \max_{\xi \in \mathrm{dual}(y)} \alpha * \xi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\overline{a * x} = \max_{\alpha \in a} \min_{\xi \in \mathrm{dual}(x)} \alpha * \xi \le \max_{\alpha \in a} \min_{\xi \in \mathrm{dual}(y)} \alpha * \xi = \overline{a * y}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\overline{a * x} \le \overline{a * y}))) \Rightarrow$$

$$a * x \subseteq a * y;$$

3) x – неправильный, y – правильный

$$a * x = [\min_{\alpha \in a} \max_{\xi \in \mathrm{dual}(x)} \alpha * \xi, \max_{\alpha \in a} \min_{\xi \in \mathrm{dual}(x)} \alpha * \xi],$$

$$a * y = [\min_{\alpha \in a} \min_{\xi \in y} \alpha * \xi, \max_{\alpha \in a} \max_{\xi \in y} \alpha * \xi],$$

$((x \subseteq y) \,\&\, (x \subseteq \mathrm{dual}\, x)) \Rightarrow (\mathrm{pr}\, x \cap \mathrm{pr}\, y \neq \varnothing)$

$\Rightarrow (\exists \xi \in \mathrm{pr}\, x \cap \mathrm{pr}\, y) \Rightarrow (\xi \subseteq y \,\&\, x \subseteq \xi)$

$\Rightarrow (a * x \subseteq a * \xi$ (в силу п.2) & $a * \xi \subseteq a * y$ (в силу п.1))

$\Rightarrow (a * x \subseteq a * y,$ т.к. отношение включения транзитивно);

II. a – неправильный, доказательство аналогично случаю 1, если везде $\min\limits_{\alpha \in a}$ заменить на $\max\limits_{\alpha \in \mathrm{dual}(a)}$, и наоборот.

Итак, мы показали, что $a * x \subseteq a * y$, если $x \subseteq y$, аналогично показывается, что $a * y \subseteq b * y$, если $a \subseteq b$, отсюда утверждение теоремы $a * x \subseteq a * y \subseteq b * y$. □

Из этой теоремы непосредственно следует основная теорема интервальной арифметики, которая остаётся верной и для расширенной интервальной арифметики.

Теорема 3. Если $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – является рациональным выражением от интервальных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, т.е. конечной комбинацией интервалов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и конечного набора постоянных интервалов, соединённых знаками интервальных арифметических операций, то из $x_i \subseteq y_i$ $\forall\, i=1,\ldots,n$ следует

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \subseteq \mathrm{F}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

при любом наборе интервальных чисел, для которого интервальные арифметические операции в выражении имеют смысл (т.е. не встречается деление на интервал, содержащий нуль). □

Как и в $I(R)$, метрика в $I^*(R)$ вводится следующим определением

$$\rho(x, y) := \max\{|\, \underline{x} - \underline{y} \,|, |\, \overline{x} - \overline{y} \,|\}.$$

Или $\rho(x, y) := |\, x + opp(y)\, |$. Для $x,y \in I^*(R^n)$

$$\rho(x, y) := \max_{1 \le i \le n} \rho(x_i, y_i).$$

Легко видеть, что для неё также выполняются все аксиомы метрики, причём $I^*(R)$, как и $I(R)$, с введённой метрикой является полным метрическим пространством, а интервальные арифметические операции непрерывны, т.е.

$$\lim_{k \to \infty} (a^{(k)} * b^{(k)}) = \lim_{k \to \infty} a^{(k)} * \lim_{k \to \infty} b^{(k)}.$$

В дальнейшем нам понадобятся некоторые свойства метрики [11] $\rho(x,y)$, $x,y \in I^*(R)$.

Свойства метрики

Пусть $a,b,c \in I^*(R)$, $\alpha \in R$, тогда

1. $\rho(a+b,\ a+c) = \rho(b,c)$;

2. $\rho(a+b,\ c+d) \le \rho(a,c) + \rho(b,d)$;

3. $\rho(\alpha b,\ \alpha c) = |\alpha|\rho(b,c)$;

4. $\rho(ab,\ ac) \le |a|\rho(b,c)$.

Докажем последнее свойство, которое Каухер выводит из более общей теоремы. Мы даём доказательство для $I^*(R)$, аналогичное доказательству Алефельда-Херцбергера [1] для $I(R)$.

Доказательство свойства 4. Пусть $x = [\underline{x}, \overline{x}]$, обозначим для удобства $i(x) = \underline{x}$, $s(x) = \overline{x}$. Запишем 4) в виде

$$\max\{|i(ab)-i(ac)|,\ |s(ab)-s(ac)|\} \le |a|\rho(b,\mathrm{c}).$$

Покажем, что $|i(ab)-i(ac)| \le |a|\rho(b,\mathrm{c})$. Неравенство $|s(ab)-s(ac)| \le |a|\rho(b,\mathrm{c})$ доказывается точно также. Для $\alpha \in R$

$$\max\{|i(\alpha b)-i(\alpha c)|,\ |s(\alpha b)-s(\alpha c)|\} =$$

$$= \max\{|\,\alpha\underline{b}-\alpha\underline{c}\,|, |\,\alpha\overline{b}-\alpha\overline{c}\,|\} = \max\{|\,\alpha\,|\cdot|\,\underline{b}-\underline{c}\,|, |\,\alpha\,|\cdot|\,\overline{b}-\overline{c}\,|\} \le |\alpha|\rho(b,\mathrm{c}). \quad (5.1)$$

Пусть $i(ab) \ge i(ac)$ (случай $i(ab) < i(ac)$ рассматривается аналогично), тогда

1) a – правильный интервал. Из определения интервальной операции умножения (см., например, правила умножения 1)–10), приведённые выше в этом разделе), следует, что существует такое $\alpha \in \mathrm{pr}(a)$, что $i(\alpha c) = i(ac)$.

$$(a \text{ – правильный } \& \ \alpha \in \mathrm{pr}(a)) \Rightarrow (\alpha \in a) \ \Rightarrow (\alpha b \subseteq ab) \Rightarrow (i(\alpha b) \ge i(ab)) \Rightarrow$$

$$(i(\alpha b) - i(\alpha c) \ge i(ab) - i(ac)) \ge 0) \Rightarrow$$

$$(|i(ab) - i(ac)| = i(ab) - i(ac) \le i(\alpha b) - i(\alpha c) = |i(\alpha b) - i(\alpha c)|.$$

Учитывая (5.1), имеем

$$|i(ab) - i(ac)| \le$$

$$\le |i(\alpha b) - i(\alpha c)| = |\alpha|\rho(b,c) \le (\max_{\alpha \in \mathrm{pr}(a)} |\,\alpha\,|)\rho(b,c) = |a|\rho(b,c). \qquad (5.2)$$

2) a – неправильный интервал, тогда возьмём такое α, что $i(\alpha b) = i(ab)$.

$$(a \text{ – неправильный } \& \ \alpha \in \mathrm{pr}(a)) \Rightarrow (a \subseteq \alpha) \ \Rightarrow (ac \subseteq \alpha c) \Rightarrow (i(\alpha c) \le i(ac)) \Rightarrow$$

$$(-i(\alpha c) \ge -i(ac)) \Rightarrow (i(\alpha b) - i(\alpha c) \ge i(ab) - i(ac)) \ge 0) \Rightarrow$$

$$(|i(ab) - i(ac)| = i(ab) - i(ac) \le i(\alpha b) - i(\alpha c) = |i(\alpha b) - i(\alpha c)|.$$

Дальше, как и в п.1, имеет место (5.2). □

Интервальные расширения непрерывных вещественных функций на $I^*(R^n)$

Рассмотрим вещественно-значную функцию многих переменных $f(\zeta_1,\zeta_2,...,\zeta_n)$, непрерывную по каждой из переменных $\zeta_1,\zeta_2,...,\zeta_n$. Пусть $z=(z_1,z_2,...,z_n)^{\mathrm{T}}\in I^*(R^n)$ – множество аргументов, на котором мы хотим определить интервальное расширение. Разобьём его на два подмножества. Из правильных аргументов составим правильный интервальный вектор $x=(x_1,x_2,...,x_p)^{\mathrm{T}}$, а из неправильных – неправильный интервальный вектор $y=(y_1,y_2,...,y_q)^{\mathrm{T}}$, где p+q=n. Для функции с изменённым порядком следования аргументов сохраним прежнее обозначение $f(\xi,\eta)$, где $\xi=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_p)^{\mathrm{T}}$, $\eta=(\eta_1,\eta_2,...,\eta_q)^{\mathrm{T}}$. Определим для f следующие интервальные расширения [10]:

$$f^*(x,y):=\bigvee_{\xi\in x}\ \bigwedge_{\eta\in \mathrm{dual}\, y} f(\xi,\eta),\quad f^{**}(x,y):=\bigwedge_{\eta\in \mathrm{dual}\, y}\ \bigvee_{\xi\in x} f(\xi,\eta). \tag{6.1}$$

В общем случае эти две функции могут не совпадать.

Нетрудно видеть, что интервальные арифметические операции, введённые в разделе 5, являются интервальными расширениями соответствующих вещественных функций (рассматриваемых как функции двух переменных), для которых $f^*=f^{**}$ (при делении $0\notin pr(b)$). Любое рациональное выражение, составленное из интервалов и интервальных арифметических операций, также будет интервальным расширением соответствующей вещественной функции и $f^*=f^{**}$, если каждая переменная встречается в записи этого выражения не более одного раза. Для введённых интервальных расширений справедливы следующие теоремы [10].

Теорема 1. $f^*\subseteq f^{**}$.

Доказательство.

$$f^*=[\inf_{\xi\in x}\ \sup_{\eta\in \mathrm{dual}\, y} f(\xi,\eta),\sup_{\xi\in x}\ \inf_{\eta\in \mathrm{dual}\, y} f(\xi,\eta)],$$
$$f^{**}=[\sup_{\eta\in \mathrm{dual}\, y}\ \inf_{\xi\in x} f(\xi,\eta),\ \inf_{\eta\in \mathrm{dual}\, y}\ \sup_{\xi\in x} f(\xi,\eta)],$$
$$\underline{f^*}=\inf_{\xi\in x}\ \sup_{\eta\in \mathrm{dual}\, y} f(\xi,\eta)\geq \sup_{\eta\in \mathrm{dual}\, y}\ \inf_{\xi\in x} f(\xi,\eta)=\underline{f}^{**},$$
$$\overline{f^{**}}=\inf_{\eta\in \mathrm{dual}\, y}\ \sup_{\xi\in x} f(\xi,\eta)\geq \sup_{\xi\in x}\ \inf_{\eta\in \mathrm{dual}\, y} f(\xi,\eta)=\overline{f^*},$$

$$(\underline{f}^{**}\leq \underline{f^*}\ \&\ \overline{f^*}\leq \overline{f^{**}})\Leftrightarrow (f^*\subseteq f^{**}).\quad \square$$

Теорема 2. $f^*(x,y)$ = dual(f^{**}(dual(x),dual(y)).

Доказательство. Непосредственно следует из определений (6.1). □

Теорема 3. Если $f^*(x,y)$ – правильный интервал, то

$$(\forall \xi \in x)(\exists \eta \in \mathrm{dual}\, y) \quad f(\xi, \eta) \in f^*(x, y).$$

Если $f^*(x,y)$ – неправильный интервал, то

$$(\forall \xi \in x)(\forall \zeta \in \mathrm{dual}\, f^*(x, y))(\exists \eta \in \mathrm{dual}\, y) \quad f(\xi, \eta) = \zeta.$$

Доказательство. f – функция непрерывная по каждому аргументу, при этом каждый из аргументов принимает значения на замкнутом множестве, и, следовательно, функция достигает наибольшего и наименьшего значения по любому из аргументов при фиксированном значении остальных. Поэтому

$$f^*(x, y) = [\min_{\xi \in x} \max_{\eta \in \mathrm{dual}\, y} f(\xi, \eta), \max_{\xi \in x} \min_{\eta \in \mathrm{dual}\, y} f(\xi, \eta)].$$

Докажем первое утверждение теоремы. Предположим противное

$$((\exists \xi_0 \in x)(\forall \eta \in \mathrm{dual}\, y) \quad f(\xi_0, \eta) \notin f^*(x, y)) \Rightarrow ((\forall \eta \in \mathrm{dual}\, y)$$
$$(f(\xi_0, \eta) < \min_{\xi \in x} \max_{\eta \in \mathrm{dual}\, y} f(\xi, \eta)) \text{ или } (f(\xi_0, \eta) > \max_{\xi \in x} \min_{\eta \in \mathrm{dual}\, y} f(\xi, \eta).$$

Предположим, что верно первое неравенство (для второго доказательство аналогично), пусть η_0 – точка, где достигается максимум. Тогда

$$f(\xi_0, \eta_0) < \min_{\xi \in x} f(\xi, \eta_0).$$

Т.е. для η_0 существует такая точка ξ_0 из интервала (интервального вектора) x, значение функции в которой меньше минимального значения функции на x. Получили противоречие.

Докажем второе утверждение теоремы. Как и для первого проведём доказательство от противного. Пусть

$$((\exists \xi_0 \in x)(\exists \zeta_0 \in \mathrm{dual}\, f^*(x, y))(\forall \eta \in \mathrm{dual}\, y) \quad f(\xi_0, \eta) \neq \zeta_0 \Rightarrow$$
$$\zeta_0 \notin [\min_{\eta \in \mathrm{dual}\, y} f(\xi_0, \eta), \max_{\eta \in \mathrm{dual}\, y} f(\xi_0, \eta)] \Rightarrow$$
$$(\zeta_0 < \min_{\eta \in \mathrm{dual}\, y} f(\xi_0, \eta)) \text{ или } (\zeta_0 > \max_{\eta \in \mathrm{dual}\, y} f(\xi_0, \eta)).$$

Учитывая, что

$$\zeta_0 \in \mathrm{dual}\, f^*(x, y) = [\max_{\xi \in x} \min_{\eta \in \mathrm{dual}\, y} f(\xi, \eta), \min_{\xi \in x} \max_{\eta \in \mathrm{dual}\, y} f(\xi, \eta)] \Rightarrow$$
$$\max_{\xi \in x} \min_{\eta \in \mathrm{dual}\, y} f(\xi, \eta) \le \zeta_0 \le \min_{\xi \in x} \max_{\eta \in \mathrm{dual}\, y} f(\xi, \eta),$$

имеем

$$\max_{\xi \in x} \min_{\eta \in \mathrm{dual}\, y} f(\xi, \eta) \le \zeta_0 < \min_{\eta \in \mathrm{dual}\, y} f(\xi_0, \eta)$$
$$\text{или} \quad \max_{\eta \in \mathrm{dual}\, y} f(\xi_0, \eta) < \zeta_0 \le \min_{\xi \in x} \max_{\eta \in \mathrm{dual}\, y} f(\xi, \eta).$$

В обоих случаях получаем противоречие. □

Доказательства теорем 4-8 аналогичны доказательству теоремы 3, а также следуют из теорем 2-3. Оставляем их читателю в качестве упражнения.

Теорема 4. Если $f^{**}(x,y)$ – правильный интервал, то

$$(\forall \eta \in \mathrm{dual}\ y)(\forall \zeta \in f^{*}(x, y))(\exists \xi \in x)\quad f(\xi, \eta) = \zeta.$$

Если $f^{**}(x,y)$ – неправильный интервал, то

$$(\forall \eta \in \mathrm{dual}\ y)(\exists \xi \in x)\quad f(\xi, \eta) \in \mathrm{dual}\ f^{**}(x, y).\ \square$$

Теорема 5. $(\forall \eta \in \mathrm{dual}\ y)(\exists \xi \in x)(\exists \zeta \in \mathrm{pr}(f^{*}(x, y)))\quad f(\xi, \eta) = \zeta$,

и если $f^{*}(x,y)$ – правильный интервал, то

$$(\forall \eta \in \mathrm{dual}\ y)(\forall \zeta \in \mathrm{dual}\ f^{*}(x, y))(\exists \xi \in x)\quad f(\xi, \eta) = \zeta.\ \square$$

Теорема 6. $(\forall \xi \in x)(\exists \eta \in \mathrm{dual}\ y)(\exists \zeta \in \mathrm{pr}(f^{**}(x, y)))\quad f(\xi, \eta) = \zeta$,

и если $f^{**}(x,y)$ – неправильный интервал, то

$$(\forall \xi \in x)(\forall \zeta \in \mathrm{dual}\ f^{**}(x, y))(\exists \eta \in \mathrm{dual}\ y)\quad f(\xi, \eta) = \zeta.\ \square$$

Теорема 7. Если $f^{**}(x,y)$ – неправильный (и невырожденный) интервал, то

$$(\forall \zeta \in \mathrm{dual}\ f^{**}(x, y))(\exists \eta \in \mathrm{dual}\ y)\quad \zeta \notin f^{**}(x, \eta).\ \square$$

Теорема 8. Если $f^{*}(x,y)$ – правильный (и невырожденный) интервал, то

$$(\forall \zeta \in \mathrm{dual}\ f^{**}(x, y))(\exists \xi \in x)\quad \zeta \notin \mathrm{dual}\ f^{*}(\xi, y).\ \square$$

Связь алгебраического решения интервальной системы линейных алгебраических уравнений с решениями внутренних задач

Уравнение вида

$$A \cdot x = b, \tag{7.1}$$

где A – $m\times n$ матрица, x, b – векторы соответствующей размерности, a_{ij}, x_j, $b_i \in \Gamma^{*}(R)$, $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$, а умножение матрицы на вектор понимается в обычном смысле, как

$(Ax)_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$, где вместо операций над вещественными числами стоят соответствующие интервальные операции, назовём интервальной системой линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ).

Замечание. Уравнение (7.1), вообще говоря, не является линейным, поскольку $\Gamma^{*}(R)$ не является линейным пространством. Так, в силу свойства субдистрибутивности, для n=m=1, произвольных вещественных α,β и интервалов x, y выполняется включение

$$a\cdot(\alpha x+\beta y) \subseteq \alpha ax+\beta ay, \text{ если } a \text{ – правильный},$$

$$a\cdot(\alpha x+\beta y) \supseteq \alpha ax+\beta ay, \text{ если } a \text{ – неправильный}.$$

Пусть матрица и правая часть уравнения (7.1) состоят из правильных интервалов. Рассмотрим вещественную систему линейных алгебраических уравнений

$$\underset{\bullet}{A}\xi = \underset{\bullet}{b}, \qquad (7.2)$$

коэффициенты которых меняются в интервалах, так что $\underset{\bullet}{A} \in A, \underset{\bullet}{b} \in b$.

Для этого уравнения объединённое, допустимое и управляемое множества решений есть

$$X_{\exists\exists} = \{\xi \mid (\exists\, \underset{\bullet}{A} \in A)(\exists\, \underset{\bullet}{b} \in b)\ \underset{\bullet}{A}\xi = \underset{\bullet}{b}\},$$

$$X_{\forall\exists} = \{\xi \mid (\forall\, \underset{\bullet}{A} \in A)(\exists\, \underset{\bullet}{b} \in b)\ \underset{\bullet}{A}\xi = \underset{\bullet}{b}\},$$

$$X_{\exists\forall} = \{\xi \mid (\forall\, \underset{\bullet}{b} \in b)(\exists\, \underset{\bullet}{A} \in A)\ \underset{\bullet}{A}\xi = \underset{\bullet}{b}\}.$$

Следующие теоремы показывают связь между решениями внутренних задач для этих множеств и алгебраическими решениями соответствующих ИСЛАУ.

Теорема 1. Если правильный интервальный вектор x является максимальным алгебраическим решением уравнения (7.1), то он является максимальной по включению внутренней оценкой допустимого множества решений. Т.е.

$$(x \subseteq X_{\forall\exists})\ \&\ ((\forall y \supset x)\ y \not\subset X_{\forall\exists}).$$

Доказательство. Если Ax=b, то

$$(\forall i = 1,\dots,m)\ b_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n.$$

Все интервалы в этом уравнении правильные, как следует из определения интервальных арифметических операций, для правильных интервалов это означает

$$(\forall i = 1,\dots,m)\,(\forall \xi_j \in x_j,\, j = 1,\dots,n)\,(\forall \alpha_{ij} \in a_{ij},\, j = 1,\dots,n)$$

$$\alpha_{i1}\xi_1 + \alpha_{i2}\xi_2 + \dots + \alpha_{in}\xi_n \subseteq b_i\ ,$$

и для всей системы

$$(\forall \xi \in x)(\forall\, \underset{\bullet}{A} \in A)\ \ \underset{\bullet}{A}\xi \subseteq b,$$

что эквивалентно следующему

$$(\forall \xi \in x)(\forall\, \underset{\bullet}{A} \in A)(\exists\, \underset{\bullet}{b} \in b)\ \ \underset{\bullet}{A}\xi = \underset{\bullet}{b}.$$

Это и означает, что $x \subseteq X_{\forall\exists}$. Докажем теперь, что эта оценка максимальна.

Пусть $y \supset x$. Запишем для краткости строку системы (7.1) как

$$(a_i, x) = a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \ldots + a_{in} \cdot x_n .$$

В силу монотонности по включению интервальных арифметических операций $y \supset x \Rightarrow (a_i , y) \supseteq (a_i , x)$. Учитывая, что $(a_i , x) = b_i$, имеем

$$(a_i , y) \supseteq b_i .$$

Причём хотя бы для одной строки системы выполняется строгое включение, иначе y было бы алгебраическим решением, а это противоречит условию теоремы. Таким образом, для некоторого i

$$(a_i , y) \supset b_i ,$$

это означает, что $\inf\limits_{\alpha_i \in a_i} \inf\limits_{\xi \in y} (\alpha_i , \xi) \le \underline{b_i}$ или $\sup\limits_{\alpha_i \in a_i} \sup\limits_{\xi \in y} (\alpha_i , \xi) \ge \overline{b_i}$, где хотя бы одно из неравенств строгое. Возьмём пару α_i, ξ, обеспечивающую строгое неравенство, тогда $(\alpha_i , \xi) < \underline{b_i}$ или $(\alpha_i , \xi) > \overline{b_i}$. В любом случае $(\alpha_i, \xi) \notin b$. Это означает, что

$$((\exists \xi \in y)(\exists \underset{\bullet}{A} \in A)\ \underset{\bullet}{A}\, \xi \notin b) \Rightarrow ((\exists \xi \in y)(\exists \underset{\bullet}{A} \in A)(\forall \underset{\bullet}{b} \in b)\ \underset{\bullet}{A}\, \xi \ne \underset{\bullet}{b}) .$$

Интервальный вектор y содержит вещественный вектор, который не является допустимым решением, и, следовательно, $y \not\subset X_{\forall\exists}$. □

Теорема 2. Если правильный интервальный вектор x является максимальным алгебраическим решением уравнения

$$\mathrm{dual}(A) \cdot x = b, \tag{7.3}$$

то он является максимальной по включению внутренней оценкой объединённого множества решений. Т.е.

$$(x \subseteq X_{\exists\exists}) \,\&\, ((\forall y \supset x)\, y \not\subset X_{\exists\exists}) .$$

Доказательство. Если $\mathrm{dual}(A) \cdot x = b$, то

$$(\forall i = 1,\ldots,m)\ b_i = \mathrm{dual}\, a_{i1} x_1 + \mathrm{dual}\, a_{i2} x_2 + \ldots + \mathrm{dual}\, a_{in} x_n .$$

Для вещественной функции $f_i\ (\alpha_i , \xi) = (\alpha_i , \xi)$ запишем интервальное расширение f_i^* на интервалах $\mathrm{dual}(a_i) = (\mathrm{dual}(a_{i1}), \mathrm{dual}(a_{i2}), \ldots , \mathrm{dual}(a_{in}))$ и $x = (x_1, x_2, \ldots ,x_n)$, где $\mathrm{dual}(a_i)$ – неправильный интервальный вектор, а x – правильный интервальный вектор.

$$f_i^* (\mathrm{dual}\, a_i , x) = \bigvee_{\xi \in x} \bigwedge_{\alpha_i \in a_i} f_i^* (\alpha_i , \xi) = \mathrm{dual}\, a_{i1} x_1 + \mathrm{dual}\, a_{i2} x_2 + \ldots + \mathrm{dual}\, a_{in} x_n ,$$

$f_i^* (\mathrm{dual}\, a_i , x) = b_i$ $(i = 1, \ldots , m)$. По условию b_i (и $f_i^* (\mathrm{dual}\, a_i , x)$)– правильный интервальный вектор, тогда по теореме 3 раздела 6 имеем

$$(\forall i = 1,\ldots,m)\,(\forall \xi \in x)\,(\exists \alpha_i \in a_i)\ \alpha_{i1} \xi_1 + \alpha_{i2} \xi_2 + \ldots + \alpha_{in} \xi_n \in b_i$$

или

$$(\forall i = 1,...m)(\forall \xi \in x)(\exists \alpha_i \in a_i)(\exists \underset{\bullet}{b_i} \in b_i)\ \alpha_{i1}\xi_1 + \alpha_{i2}\xi_2 + ... + \alpha_{in}\xi_n = \underset{\bullet}{b_i},$$

и для всей системы

$$(\forall \xi \in x)(\exists \underset{\bullet}{A} \in A)(\exists \underset{\bullet}{b} \in b)\ \underset{\bullet}{A}\xi = \underset{\bullet}{b}.$$

Следовательно, каждый вещественный вектор из x является решением какой-либо вещественной системы (7.2). Это и означает, что $x \subseteq X_{\exists\exists}$. Докажем теперь, что эта оценка максимальна.

В силу монотонности по включению интервальных арифметических операций $y \supset x \Rightarrow (\mathrm{dual}\ a_i, y) \supseteq (\mathrm{dual}\ a_i, x)$. Учитывая, что $(\mathrm{dual}\ a_i, x) = b_i$, имеем

$$(\mathrm{dual}\ a_i, y) \supseteq b_i\ .$$

Причём хотя бы для одной строки системы выполняется строгое включение, иначе y было бы алгебраическим решением, а это противоречит условию теоремы. Таким образом, для некоторого i

$$(\mathrm{dual}\ a_i, y) \supset b_i\ ,$$

это означает, что $\inf\limits_{\xi \in y} \sup\limits_{\alpha_i \in a_i} (\alpha_i, \xi) \le \underline{b_i}$ или $\sup\limits_{\xi \in y} \inf\limits_{\alpha_i \in a_i} (\alpha_i, \xi) \ge \overline{b_i}$, где хотя бы одно из неравенств строгое. Пусть ξ - значение из интервала y, которое обеспечивает строгое неравенство, тогда $\sup\limits_{\alpha_i \in a_i} (\alpha_i, \xi) < \underline{b_i}$ или $\inf\limits_{\alpha_i \in a_i} (\alpha_i, \xi) > \overline{b_i}$. Любое из этих неравенств означает, что интервалы $[\inf\limits_{\alpha_i \in a_i} (\alpha_i, \xi), \sup\limits_{\alpha_i \in a_i} (\alpha_i, \xi)]$ и $[\underline{b_i}, \overline{b_i}]$ не пересекаются. То есть

$$\bigvee_{\alpha_i \in a_i} (\alpha_i, \xi) \cap b_i = \varnothing \text{ или } (\forall \alpha_i \in a_i)(\forall \underset{\bullet}{b_i} \in b_i)\ (\alpha_i, \xi) \ne \underset{\bullet}{b_i}\ .$$

Если равенство не выполняется для одной строки системы, то ξ не является решением системы в целом. Таким образом, мы показали, что

$$((\exists \xi \in y)(\forall \underset{\bullet}{A} \in A)(\forall \underset{\bullet}{b} \in b)\ \underset{\bullet}{A}\xi \ne \underset{\bullet}{b}).$$

То есть, в любом интервальном векторе более широком, чем x, найдётся точка, не являющаяся решением ни одной из вещественных систем, и, следовательно, $y \not\subset X_{\exists\exists}$. □

Теорема 3. Если правильный интервальный вектор x является максимальным алгебраическим решением уравнения

$$\mathrm{dual}(A)\cdot x = \mathrm{dual}(b), \tag{7.4}$$

то он является максимальной по включению внутренней оценкой управляемого множества решений. То есть,

$$(x \subseteq X_{\forall\exists})\ \&\ ((\forall y \supset x)\ y \not\subset X_{\exists\forall}).$$

Доказательство. Докажем сначала, x включается в управляемое множество решений, x удовлетворяет системе (7.4), тогда

$$(\forall i = 1,\dots, m)\ \ \mathrm{dual} a_{i1} x_1 + \mathrm{dual}\, a_{i2} x_2 + \dots + \mathrm{dual}\, a_{in} x_n = \mathrm{dual}\, b_i .$$

Левая часть этого равенства является интервальным расширением f^* функции (α_i , ξ) на интервальных векторах dual a_i и x, первый из которых – неправильный, а второй – правильный. Это интервальное расширение является неправильным интервалом. Тогда по теореме 3 раздела 6

$$\begin{gathered}(\forall i = 1,\dots,m)(\forall \xi \in x)(\forall \zeta \in \mathrm{dual}(f^* (\mathrm{dual}\, a_i,x))(\exists \alpha_i \in a_i) \\ \alpha_{i1}\xi_1 + \alpha_{i2}\xi_2 + \dots + \alpha_{in}\xi_n = \zeta\end{gathered} \quad ,$$

или

$$(\forall i = 1,\dots,m)(\forall \xi \in x)(\forall \underset{\bullet}{b_i} \in b_i)(\exists \alpha_i \in a_i)\ \ \alpha_{i1}\xi_1 + \alpha_{i2}\xi_2 + \dots + \alpha_{in}\xi_n = \underset{\bullet}{b_i} ,$$

и для всей системы

$$(\forall \xi \in x)(\forall \underset{\bullet}{b} \in b)(\exists \underset{\bullet}{A} \in A)\ \ \underset{\bullet}{A}\, \xi = \underset{\bullet}{b} .$$

Это и означает, что $x \subseteq X_{\exists\forall}$. Докажем теперь, что эта оценка максимальна. Пусть $y \supset x$. В силу монотонности по включению интервальных арифметических операций $y \supset x \Rightarrow (\mathrm{dual}\, a_i , y) \supseteq (\mathrm{dual}\, a_i , x)$. Учитывая, что $(\mathrm{dual}\, a_i , x) = \mathrm{dual}\, b_i$, имеем

$$(\mathrm{dual}\, a_i , y) \supseteq \mathrm{dual}\, b_i .$$

При этом хотя бы для одной строки системы выполняется строгое включение, иначе y было бы алгебраическим решением, а это противоречит условию теоремы. Таким образом, для некоторого i

$$(\mathrm{dual}\, a_i , y) \supset \mathrm{dual}\, b_i ,$$

это означает, что $\inf\limits_{\xi\in y} \sup\limits_{\alpha_i \in a_i} (\alpha_i , \xi) \le \overline{b_i}$ или $\sup\limits_{\xi\in y} \inf\limits_{\alpha_i \in a_i} (\alpha_i , \xi) \ge \underline{b_i}$, где хотя бы одно из неравенств строгое. Пусть ξ – та точка y, которая обеспечивает строгое неравенство, тогда $\inf\limits_{\alpha_i \in a_i} (\alpha_i , \xi) > \underline{b_i}$ или $\sup\limits_{\alpha_i \in a_i} (\alpha_i , \xi) < \overline{b_i}$. Следовательно, $(\forall \alpha_i \in a_i)(\alpha_i , \xi) > \underline{b_i}$ или $(\alpha_i , \xi) < \overline{b_i}$. В любом случае $\exists \underset{\cdot}{b} \in b$ ($\underline{b_i}$ или $\overline{b_i}$), такое, что $\forall \alpha_i \in a_i$ $(\alpha_i, \xi) \ne b$. Итак, мы получили

$$(\exists \xi \in y)(\exists \underset{\cdot}{b_i} \in b_i)(\forall \alpha_i \in a_i)\ (\alpha_i, \xi) \neq \underset{\cdot}{b_i}\,.$$

Или, для всей системы

$$(\exists \xi \in y)(\exists \underset{\cdot}{b} \in b)(\forall \underset{\cdot}{A} \in A)\ \underset{\cdot}{A}\,\xi \neq \underset{\cdot}{b}\,.$$

Интервальный вектор y содержит вещественный вектор, не принадлежащий управляемому множеству решений, и, следовательно, $y \not\subset X_{\exists\forall}$. □

В примере 3 раздела 4 (рис. 1) можно видеть, что приведённые внутренние оценки объединённого и допустимого множеств решений как раз и являются алгебраическими решениями уравнений $\mathrm{dual}(A)\cdot x=b$ и $A\cdot x=b$, соответственно. Доказанные теоремы позволяют сводить внутренние задачи к задачам поиска алгебраического решения интервального уравнения в интервальном пространстве. В следующем разделе мы даём итерационный метод для нахождения алгебраического решения ИСЛАУ.

Итерационный метод решения интервальной системы линейных алгебраических уравнений

Как следует из предыдущего изложения, нахождение максимальных внутренних оценок различных множеств решений ИСЛАУ сводится к нахождению алгебраического решения соответствующих интервальных систем, коэффициенты которых могут быть как правильными, так и неправильными. Поэтому нужно уметь находить это решение в наиболее общем случае. Рассмотрим уравнение

$$A\cdot x = b, \tag{8.1}$$

где A – $n\times n$ матрица, x, b – n-векторы, a_{ij}, x_j, $b_i \in I^*(R)$ ($i = 1,\ldots,n$, $j = 1,\ldots,n$) и могут быть как правильными, так и неправильными интервалами. Кроме того, будем предполагать, что $\forall\, \underset{\cdot}{A} \in pr(A)\ \det(\underset{\cdot}{A}) \neq 0$. Приведём (8.1) к следующему виду

$$x = B(x), \tag{8.2}$$

где

$$B(x)_i := (b_i + \mathrm{opp}(\sum_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{n} a_{ik} x_k))\ /.\ a_{ii}\,,\ i = 1,\ldots,n. \tag{8.3}$$

Не нарушая общности, можно считать, что $0 \notin pr(a_{ii})$. В самом деле, если $\forall\, \underset{\cdot}{A} \in \mathrm{pr}(A)\ \det(\underset{\cdot}{A}) \neq 0$, то с помощью простой перестановки строк мы всегда можем добиться, чтобы правильные проекции элементов главной диагонали ($\mathrm{pr}(a_{ii})$) не содержали нулей. Очевидно, что алгебраическое решение уравнения (8.2) одновременно является и алгебраическим решением и для (8.1). Неподвижную точку оператора B будем искать по следующей итерационной схеме:

$$x^{k+1} = B(x^k) \quad (k = 0,1, \ldots). \tag{8.4}$$

Выясним условия сходимости этого итерационного процесса. Для этого воспользуемся общим принципом сжатия.

Определение 1. *Оператор B, действующий в полном метрическом пространстве (X,ρ), называется* ***оператором сжатия****, если для него выполняется следующее условие*

$$\forall x,y\in X \quad \rho(B(x),B(y)) \le \alpha\rho(x,y) \quad (0<\alpha <1). \tag{8.5}$$

Теорема 1 [5]. Если B – оператор сжатия и замкнутое множество X переводит в себя, то в X существует единственное решение x^* уравнения $x = B(x)$. При этом x^* может быть получено, как предел последовательности $\{x^k\}$, где $x^{k+1} = B(x^k)$ $(k = 0,1, \ldots)$, а x^0 – произвольный элемент из X. Быстрота сходимости $\{x^k\}$ к решению даётся неравенством

$$\rho(x^k, x^*) \le \frac{\alpha^k}{1-\alpha}\rho(x^1, x^0). \quad \square \tag{8.6}$$

Теорема 2. Если интервальная матрица A такова, что $\forall\, i=1,\ldots,n$ $\sum\limits_{\substack{k=1\\k\ne i}}^{n} |\, a_{ik} \,| < \min\{|\, \underline{a_{ii}} \,|, |\, \overline{a_{ii}} \,|\}$, то оператор B из (8.2) является оператором сжатия.

Доказательство. Получим условия, при которых B будет оператором сжатия. По определению метрики в $I^*(R^n)$ (раздел 5, с.27)

$$\rho(B(x), B(y)) = \max_{1\le i\le n} \rho(B(x)_i, B(y)_i),$$

пользуясь свойством метрики (4) (раздел 5 с.28), оценим $\rho(B(x)_i,B(y)_i)$:

$$\rho(B(x)_i, B(y)_i) = \rho((b_i + opp(\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} a_{ik}x_k))/.a_{ii}, (b_i + opp(\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} a_{ik}y_k))/.a_{ii}) =$$

$$= \rho((1/.a_{ii})\cdot(b_i + opp(\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} a_{ik}x_k)), (1/.a_{ii})\cdot(b_i + opp(\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} a_{ik}y_k))) \leq$$

$$\leq |1/.a_{ii}|\, \rho((b_i + opp(\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} a_{ik}x_k)), (b_i + opp(\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} a_{ik}y_k))) =$$

$$= |1/.a_{ii}|\cdot|\, b_i + opp(\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} a_{ik}x_k) + \mathrm{opp}(b_i) + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} a_{ik}y_k \,| =$$

$$= |1/.a_{ii}|\cdot|\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} a_{ik}x_k + \mathrm{opp}(\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} a_{ik}y_k)| = |1/.a_{ii}|\cdot|\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} (a_{ik}x_k + opp(a_{ik}y_k))| \leq$$

$$\leq |1/.a_{ii}|\cdot\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} |(a_{ik}x_k + opp(a_{ik}y_k))| = |1/.a_{ii}|\cdot\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \rho(a_{ik}x_k, a_{ik}y_k) \leq$$

$$\leq |1/.a_{ii}|\cdot\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} |a_{ik}|\, \rho(x_k, y_k).$$

Т.о. мы получили неравенство

$$\rho(B(x)_i, B(y)_i) \leq |1/.a_{ii}|\cdot\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} |a_{ik}|\, \rho(x_k, y_k). \tag{8.7}$$

Отсюда имеем

$$\rho(B(x)_i, B(y)_i) \leq$$

$$|1/.a_{ii}|\cdot\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} |a_{ik}| \max_{1\leq k\leq n} \rho(x_k, y_k) = |1/.a_{ii}|\cdot\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} |a_{ik}|\cdot\rho(x, y)\cdot$$

Таким образом, B удовлетворяет условию

$$\rho(B(x)_i, B(y)_i) \leq |1/.a_{ii}|\cdot\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} |a_{ik}|\cdot\rho(x, y). \tag{8.8}$$

Отсюда следует, что если $\forall\ i=1,\ldots,n$ $|1/.a_{ii}|\cdot\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} |a_{ik}| < 1$, то B – оператор сжатия. А это условие эквивалентно условию в формулировке теоремы:

$$(|1/.a_{ii}|\cdot\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}|a_{ik}|<1)\Leftrightarrow(\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}|a_{ik}|<\frac{1}{|1/.a_{ii}|}=\min\{|\underline{a_{ii}}|,|\overline{a_{ii}}|\}).$$

Теорема доказана. □

Проблема выбора начального приближения для (8.4) состоит в следующем. Если *B* является оператором сжатия, то метод сходится при любом начальном приближении. Однако полученное в результате приближённое решение не даёт гарантированной интервальной оценки. Например, для решения задач внутренней оценки необходимо гарантированное включение приближённого решения в точное.

Предложенный здесь способ выбора начального приближения обеспечивает получение гарантированной внутренней оценки решения и основан на характере монотонности оператора итерационной схемы.

Определение 2. *Оператор B: $I^*(R^n)\rightarrow I^*(R^n)$ назовём* ***изотонным по включению*** *(или просто* ***изотонным****), если $(x\subseteq y)\Rightarrow(B(x)\subseteq B(y))$, и* ***антитонным по включению*** *(или просто* ***антитонным****), если* $(x\subseteq y)\Rightarrow(B(x)\supseteq B(y))$. □

Теорема 3. Оператор B из (8.2)-(8.3) является антитонным оператором.

Доказательство. Покажем антитонность операции +opp: если если $(x\subseteq y)$, то a+opp(x) $\supseteq$ a+opp(y). В самом деле

$$a+\mathrm{opp}(x)=[\underline{a}-\underline{x},\overline{a}-\overline{x}],\quad a+\mathrm{opp}(y)=[\underline{a}-\underline{y},\overline{a}-\overline{y}],$$
$$(x\subseteq y)\Leftrightarrow(\underline{y}\le\underline{x}\ \ \&\ \ \overline{x}\le\overline{y})\Leftrightarrow(-\underline{x}\le-\underline{y}\ \ \&\ \ -\overline{y}\le-\overline{x})\Leftrightarrow$$
$$(\underline{a}-\underline{x}\le\underline{a}-\underline{y}\ \ \&\ \ \overline{a}-\overline{y}\le\overline{a}-\overline{x})\Leftrightarrow(a+\mathrm{opp}(x)\supseteq a+\mathrm{opp}(y)).$$

В силу антитонности +opp(x) и изотонности интервальных арифметических операций оператор B является антитонным, как композиция элементарных изотонных операторов и одного антитонного. □

При доказательстве теоремы 2 мы показали, что оператор *B* удовлетворяет условию (8.8)

$$\rho(B(x)_i,B(y)_i)\le|1/.a_{ii}|\cdot\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}|a_{ik}|\cdot\rho(x,y),$$

откуда

$$\rho(B(x),B(y))=\max_{1\le i\le n}\rho(B(x)_i,B(y)_i)\le\max_{1\le i\le n}(|1/.a_{ii}|\cdot\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}|a_{ik}|)\rho(x,y),$$

или

$$\rho(B(x),B(y)) = \le \alpha\rho(x,y),$$

где

$$\alpha = \max_{1\le i\le n}(\,|\,1/.\,a_{ii}\,|\cdot\sum_{\substack{k=1\\k\ne i}}^{n}|\,a_{ik}\,|).$$

Если $0<\alpha<1$, то B есть оператор сжатия.

Возьмём теперь произвольную точку $z\in I^*(R^n)$ и подберём такое $\tau\in R$, чтобы $\rho(B(z),z)\le(1-\alpha)\tau$. Тогда множество $X:=\{x\colon \rho(x,z)\le\tau\}$ переводится оператором B в себя. В самом деле, согласно третьей аксиоме метрики,

$$\rho(B(x),z)\le\rho(B(x),B(z))+\rho(B(z),z)\le\alpha\rho(x,z)+(1-\alpha)\tau\le\alpha\tau+(1-\alpha)\tau\le\tau.$$

Мы получили замкнутое множество которое оператор B переводит в себя, и, значит, согласно теореме 1, в X существует единственное решение x^* уравнения $x=B(x)$.

Наиболее простой вариант – взять $z=0$, тогда

$$B(z)_i = b_i/.\,a_{ii},$$

$$\rho(B(z),z)=\max_{1\le i\le n}\rho(b_i\,/.\,a_{ii},0)=\max_{1\le i\le n}|\,b_i\,/.\,a_{ii}\,|,$$

обозначим $\beta:=\max\limits_{1\le i\le n}|\,b_i\,/.\,a_{ii}\,|$, тогда τ выбирается так, чтобы выполнялось неравенство

$$\beta\le(1-\alpha)\tau\Rightarrow\tau\ge\beta/(1-\alpha),$$

можно взять

$$\tau=\beta/(1-\alpha), \tag{8.9}$$

где $\alpha:=\max\limits_{1\le i\le n}(\,|\,1/.\,a_{ii}\,|\cdot\sum\limits_{\substack{k=1\\k\ne i}}^{n}|\,a_{ik}\,|)$, $\beta:=\max\limits_{1\le i\le n}|\,b_i\,/.\,a_{ii}\,|$.

Согласно предыдущим рассуждениям, множество $X:=\{x\colon \rho(x,0)\le\tau\}$, где τ из (8.9), содержит x^*, неподвижную точку оператора B.

$$\{\rho(x,0)\le\tau)\Leftrightarrow(\max_{1\le i\le n}\rho(x_i,0)\le\tau)\Leftrightarrow(\max_{1\le i\le n}\max\{|\,\underline{x_i}\,|,|\,\overline{x_i}\,|\}\le\tau)$$

$$\Leftrightarrow(\forall i=1,\dots,n\quad|\,x_i\,|\le\tau)\Leftrightarrow(\forall i=1,\dots,n\quad[\tau,-\tau]\subseteq x_i\subseteq[-\tau,\tau]).$$

Обозначим w^0 – интервальный вектор с компонентами $w_i^0:=[-\tau,\tau]$. Тогда X – это отрезок в $I^*(R^n)$

$$X = \langle \mathrm{opp}(w^0), w^0\rangle,$$

а $x^*\in X$ означает, что $\mathrm{opp}(w^0)\subseteq x^*\subseteq w^0$.

Возьмём теперь в качестве начального приближения интервальный вектор w^0. В силу антитонности оператора B справедливо $(x^*\subseteq w^0)\Rightarrow(B(x^*)\supseteq B(w^0))$. Так как $B(x^*)=x^*$, то имеем $B(w^0)\subseteq x^*\subseteq w^0$, причём для

$B(w^0) \in X$ $(\mathrm{opp}(w^0) \subseteq B(w^0) \subseteq w^0)$ в силу инвариантности отрезка $\langle \mathrm{opp}(w^0), w^0 \rangle$. Затем обозначим $v^0 = B(w^0)$, тогда

1. $v^0 \subseteq x^* \subseteq w^0$ – получили двусторонние начальные приближения для x^*;
2. $B(w^0) \subseteq x^* \subseteq B(v^0)$ (в силу антитонности B), отсюда $v^0 \subseteq B(v^0)$ (т.к. $v^0 = B(w^0) \subseteq B(v^0)$) и кроме того $B(v^0) \subseteq w^0$ (в силу инвариантности $\langle \mathrm{opp}(w^0), w^0 \rangle$).

Таким образом, отрезок $\langle v^0, w^0 \rangle$ также инвариантен, а именно, правый конец переводится оператором B в левый, а левый – внутрь отрезка.

Выбирая в качестве начальных приближений v^0 и w^0, вычисляем на каждом шаге двусторонние приближения по следующей схеме:

$$v^k = B(w^k),\ \ w^{k+1} = B(v^k),\ \ (k = 1,\ldots,n)\ . \tag{8.10}$$

На первом шаге имеем

$$B(w^0) = v^0 \subseteq w^0.$$

Подействуем на это неравенство оператором B, получим

$$v^0 = B(w^0) \subseteq B(v^0) = w^1 \subseteq w^0,$$

учитывая, что $v^1 = B(w^1)$ и $v^0 \subseteq w^1$, имеем $B(w^1) \subseteq B(v^0)$, т.е. $v^1 \subseteq w^1$. Следовательно, можно записать

$$v^0 \subseteq v^1 \subseteq w^1 \subseteq w^0.$$

Продолжая этот процесс, получим по индукции

$$v^0 \subseteq v^1 \subseteq v^2 \subseteq \ldots \subseteq x^* \subseteq \ldots \subseteq w^2 \subseteq w^1 \subseteq w^0,$$

где x^* - неподвижная точка оператора B. Заканчивая процесс на некотором шаге, мы получаем внутреннюю и внешнюю оценки искомого решения. Из них мы можем выбрать оценку, соответствующую смыслу задачи. В случае решения внутренней задачи, мы, естественно, выбираем внутреннюю оценку.

Связь алгебраического решения интервальной системы линейных алгебраических уравнений с решением внешней задачи [9]

Внешнюю задачу (раздел 4) переформулируем для интервальной системы линейных алгебраических уравнений. Здесь и далее мы решаем внешнюю задачу, опуская требование минимальности внешней оценки в общем случае, но в теореме 2 даётся условие, при котором оценка будет минимальной. Дана система интервальных уравнений

$$A \cdot x = b, \tag{9.1}$$

где A – $n\times n$ матрица, x, b – n-векторы, a_{ij}, x_j, b_i $\in I(R)$ $(i = 1,\ldots,n,$ $j = 1,\ldots,n)$.

Найти интервальный вектор $x\in I(R^n)$ такой, что $x \supseteq X_{\exists\exists}$, где

$$X_{\exists\exists} = \{\xi \mid (\exists \underset{\cdot}{A} \in A)(\exists \underset{\cdot}{b} \in b)\ \underset{\cdot}{A}\xi = \underset{\cdot}{b}\}.$$

Утверждение 1. Множество решений системы (9.1) совпадает со множеством решений системы

$$x=C\cdot x+d, \tag{9.2}$$

если

$C = I - \underset{\cdot}{G} A,$

$d = \underset{\cdot}{G} b,$

$\underset{\cdot}{G}$ – невырожденная диагональная матрица,

I – единичная матрица.

Доказательство. $\underset{\cdot}{G}$ – диагональная матрица, следовательно, для любой интервальной матрицы H подходящего размера справедливо равенство

$$\underset{\cdot}{G} H = \{\underset{\cdot}{G}\underset{\cdot}{H} \mid \underset{\cdot}{H} \in H\},$$

а это означает, что $(\underset{\cdot}{H} \in H) \Leftrightarrow (\underset{\cdot}{G}\underset{\cdot}{H} \in \underset{\cdot}{G} H)$. Для недиагональной $\underset{\cdot}{G}$ можно утверждать только, что $(\underset{\cdot}{H} \in H) \Rightarrow (\underset{\cdot}{G}\underset{\cdot}{H} \in \underset{\cdot}{G} H)$.

Запишем множество решений $X_{\exists\exists}$ для (9.2)

$$\begin{aligned}
X_{\exists\exists} &= \{\xi \in R \mid (\exists \underset{\cdot}{C} \in (I - \underset{\cdot}{G} A)(\exists \underset{\cdot}{d} \in \underset{\cdot}{G} b) \quad \xi = \underset{\cdot}{C}\xi + \underset{\cdot}{d}\} = \\
&= \{\xi \in R \mid (\exists (I - \underset{\cdot}{C}) \in \underset{\cdot}{G} A)(\exists \underset{\cdot}{d} \in \underset{\cdot}{G} b) \quad (I - \underset{\cdot}{C})\xi = \underset{\cdot}{d}\} = \\
&= \{\xi \in R \mid (\exists \underset{\cdot}{Z} \in \underset{\cdot}{G} A)(\exists \underset{\cdot}{d} \in \underset{\cdot}{G} b) \quad \underset{\cdot}{Z}\xi = \underset{\cdot}{d}\} = \\
&= \{\xi \in R \mid (\exists\ \underset{\cdot}{G}^{-1}\underset{\cdot}{Z} \in A)(\exists \underset{\cdot}{G}^{-1}\underset{\cdot}{d} \in b) \quad \underset{\cdot}{G}^{-1}\underset{\cdot}{Z}\xi = \underset{\cdot}{G}^{-1}\underset{\cdot}{d}\} = \\
&= \{\xi \in R \mid (\exists \underset{\cdot}{A} \in A)(\exists \underset{\cdot}{b} \in b) \quad \underset{\cdot}{A}\xi = \underset{\cdot}{b}\}.
\end{aligned}$$

Последнее есть множество $X_{\exists\exists}$ для (9.1), поскольку

$$(\underset{\cdot}{C} \in (I - \underset{\cdot}{G} A)) \Leftrightarrow ((I - \underset{\cdot}{C}) \in I - (I - \underset{\cdot}{G} A) = \underset{\cdot}{G} A). \ \square$$

Пример.

Если для интервальной системы

$$\begin{pmatrix} [2,3] & [0,1] \\ [1,2] & [2,3] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [0,120] \\ [60,240] \end{pmatrix}$$

положить

$$G := \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix},$$

то множество решений исходной системы совпадает со множеством решений системы

$$x = \begin{pmatrix} [-0.5,0] & [-0.5,0] \\ [-1,-0.5] & [-0.5,0] \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} [0,60] \\ [30,120] \end{pmatrix}. \quad \square$$

Понятно, что описанное здесь сведение не является единственно возможным и приводится как пример возможного преобразования (9.1) в (9.2).

Теорема 1 [1]. Пусть C – интервальная $n{\times}n$-матрица. Итерационный процесс в $I(R^n)$

$$x^{(k+1)} := Cx^{(k)} + d, \quad k \geq 0, \tag{9.3}$$

для любого начального приближения $x^{(0)}$ сходится к единственной неподвижной точке $x^* \in I(R^n)$ интервального отображения

$$T(x) = Cx + d, \tag{9.4}$$

тогда и только тогда, когда спектральный радиус $r(|C|)$ матрицы $|C|$, составленной из модулей элементов C, меньше 1.

Доказательство.

Достаточность. Пусть также ρ - векторная метрика (вектор, компонентами которого являются расстояния между компонентами интервальных векторов), тогда

$$\rho(T(x),T(y)) = \rho(Cx+d, Cy+d) \leq |C|\rho(x,y).$$

Из того, что $r(|C|)<1$ и $|C|>0$ (0 – нулевая матрица соответствующего размера), следует существование матрицы $(I-|C|)^{-1}$ и соотношение

$$(I - |C|)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} |C|^j \geq \sum_{j=0}^{m-1} |C|^j \geq 0.$$

Тогда мы получаем для любых k и $m \geq 1$

$$\rho(x^{(k+m)}, x^{(k)}) \leq \sum_{j=0}^{m-1} |C|^j \ \rho(x^{(k+1)}, x^{(k)}) \leq (I - |C|)^{-1} \, |C|^k \ \rho(x^{(1)}, x^{(0)}).$$

Так как $\lim\limits_{k\to\infty} |C|^k = 0$ ([6], с.180), последовательность $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ удовлетворяет условию Коши. Т.к. пространство $I(R^n)$ – полно, а отображение T непрерывно (следует из непрерывности интервальных арифметических операций), мы получаем

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^* \text{ и } x^* = T(x^*).$$

Единственность неподвижной точки следует из соотношений

$$\rho(x^*, y^*) = \rho(T(x^*), T(y^*)) \le |C|\, \rho(x^*, y^*) \text{ и } (I - |C|)^{-1} \ge 0.$$

Итак, условие $r(|C|)<1$ достаточно для сходимости метода, существования и единственности неподвижной точки.

Необходимость. Пусть итерационный процесс (9.3) сходится к единственной неподвижной точке x^* при любом начальном приближении. Известно, что вещественная неотрицательная матрица $|C|$ имеет неотрицательный собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda=r(|C|)$. Обозначим $wid\,(x) := (w(x_0), w(x_1),..., w(x_n))^{\mathrm{T}}$.

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^* \Rightarrow \lim_{k\to\infty} wid\,(x^{(k)}) = wid\,(x^*).$$

Выберем теперь $x^{(0)}$ так, чтобы $wid(x^{(0)})$ был собственным вектором, соответствующим собственному значению $\lambda=r(|C|)$ матрицы $|C|$, причём хотя бы одна компонента вектора $wid(x^{(0)})$ была строго больше, чем соответствующая компонента вектора $wid(x^*)$.

Предположим противное, что $r(|C|)\ge 1$, тогда

$$wid(x^{(1)}) = wid(Cx^{(0)} + d) = wid(Cx^{(0)}) + wid\,(d) \ge wid\,(Cx^{(0)})$$

$$\ge |C| wid(x^{(0)}) = =\lambda wid(x^{(0)}) \ge wid\,(x^{(0)}),$$

$$wid(x^{(2)}) \ge |C| wid(x^{(1)}) \ge \lambda |C| wid(x^{(0)}) = \lambda^2 wid(x^{(0)}) \ge wid(x^{(0)}).$$

Для произвольного k получаем

$$wid(x^{(k+1)}) \ge |C| wid(x^{(k)}) \ge \ldots \ge \lambda^{k+1} wid(x^{(0)}) \ge wid(x^{(0)}).$$

Переходя к пределу при $k\to\infty$, получаем

$$wid(x^*) \ge wid(x^{(0)}),$$

что противоречит выбору $x^{(0)}$. Поэтому верно $r(|C|)<1$. □

Теорема 2 [1]. Пусть C – интервальная $n\times n$-матрица, для которой $r(|C|)<1$. Тогда для неподвижной точки x^* интервального отображения (9.4) (которая существует и единственна в силу теоремы 1) выполнено соотношение

$$\{(I - \underset{\bullet}{C})^{-1} \underset{\bullet}{d} \mid \underset{\bullet}{C} \in C, \underset{\bullet}{d} \in d\} \subseteq x^*,$$

т.е. эта неподвижная точка x^* является внешней интервальной оценкой множества решений интервальной системы (9.2).

Если при этом $c_{ij} \geq 0 \;\; \forall i = 1,\ldots,n,\; j = 1,\ldots,n$ (все компоненты матрицы C – неотрицательные интервалы), то x^* – минимальная внешняя оценка, т.е. $(\forall y \subset x^*)\; X_{\exists\exists} \not\subset y$.

Доказательство. $(\forall \underset{\cdot}{C} \in C)\;\; |\underset{\cdot}{C}| \leq |C|$. Тогда спектральные радиусы этих матриц связаны соотношением

$$r(\underset{\cdot}{C}) \leq r(|\underset{\cdot}{C}|) \leq r(|C|) < 1.$$

Следовательно, матрица $I - \underset{\cdot}{C}$ – невырождена и система $\underset{\cdot}{x} = \underset{\cdot}{C}\,\underset{\cdot}{x} + \underset{\cdot}{d}$ имеет решение $\underset{\cdot}{x} = (I - \underset{\cdot}{C})^{-1}\,\underset{\cdot}{d} \quad \forall \underset{\cdot}{C} \in C$ и $\forall \underset{\cdot}{d} \in d$. Возьмём любое решение $\underset{\cdot}{x}$ этой системы в качестве начального приближения для итерационного процесса (9.3). Тогда из монотонности по включению интервальных арифметических операций следует, что

$$x^{(0)} = \underset{\cdot}{x} = \underset{\cdot}{C}\,\underset{\cdot}{x} + \underset{\cdot}{d} \in Cx^{(0)} + d = x^{(1)},$$

и для произвольного k

$$\underset{\cdot}{x} = \underset{\cdot}{C}\,\underset{\cdot}{x} + \underset{\cdot}{d} \in Cx^{(k)} + d = x^{(k+1)}.$$

Из $r(|C|)<1$ следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$, а потому и $\underset{\cdot}{x} \in x^*$. Так как x^* не зависит от выбора начального вектора, то мы получили $((\forall \underset{\cdot}{x} \in X_{\exists\exists})\; \underset{\cdot}{x} \in x^*) \Rightarrow (X_{\exists\exists} \subseteq x^*)$, т.е. x^* является внешней интервальной оценкой объединённого множества решений.

Для доказательства второй части теоремы построим вещественные векторы $\underline{x}, \overline{x}$, составленные соответственно из нижних и верхних границ x^*. Тогда из $x^*=Cx^*+d$ следует по правилам интервальной арифметики, что

$$\underline{x} = \underset{\cdot}{C}^{*}\,\underline{x} + \underline{d} \quad \text{и} \quad \overline{x} = \underset{\cdot}{C}^{**}\,\overline{x} + \overline{d},$$

где

$$\underset{\cdot}{C}^{*} = (\gamma^*_{ij}), \qquad \gamma^*_{ij} = \begin{cases} \underline{c_{ij}}, & \underline{x_j} > 0, \\ \overline{c_{ij}}, & \underline{x_j} \leq 0, \end{cases}$$

$$\underset{\cdot}{C}^{**} = (\gamma^{**}_{ij}), \quad \gamma^{**}_{ij} = \begin{cases} \overline{c_{ij}}, & \overline{x_j} > 0, \\ \underline{c_{ij}}, & \overline{x_j} \leq 0. \end{cases}$$

Из этих равенств следует, что $\underline{x}, \overline{x}$ являются решениями вещественных систем, т.е. элементами множества $X_{\exists\exists}$. Следовательно, любой интервал, включающийся в x^*, не содержит одно (или оба) из этих вещественных решений, а, значит, и не включает $X_{\exists\exists}$. □

Классические результаты теорем 1 и 2 переформулируем в виде теоремы 3.

Теорема 3. Если интервальная $n\times n$-матрица C такова, что $r(|C|)<1$, то $\forall d\in I(R^n)$ алгебраическое решение уравнения

$$x=Cx+d$$

существует, единственно и является внешней интервальной оценкой объединённого множества решений этого уравнения. □

Этот результат можно распространить на случай нелинейных систем.

Определение 1. *Интервальное отображение $F: I(R^n)\to I(R^n)$ назовём **P-сжатием** (или **P-сжимающим**), если существует неотрицательная матрица P со спектральным радиусом $r(P)<1$ такая, что*

$$\forall x,y\in I(R^n)\ \ \rho(F(x),F(y)) \le P\cdot\rho(x,y),$$

где ρ – векторная метрика на $I(R^n)$.

Теорема 4. Пусть $f(\alpha,\xi)$ – рациональная функция от α,ξ, т.е. аналитическое выражение для f есть конечная комбинация символов переменных и арифметических операций, и пусть $F(a,x)$ – естественное интервальное расширение f. Если для некоторого фиксированного a отображение F: $I(R^n)\to I(R^n)$ $(x\to F(a,x))$ является P-сжатием, то интервальная система уравнений

$$x=F(a,x) \tag{9.5}$$

имеет единственное алгебраическое решение $x^*\in I(R^n)$, и для него справедливо соотношение

$$\{\xi\in R^n \mid (\exists\alpha\in a)\ \ \xi = f(\alpha,\xi)\} \subseteq x^*.$$

(Алгебраическое решение системы уравнений (9.5) является внешней интервальной оценкой объединённого множества решений).

Доказательство. $(r(P)<1\ \&\ P \ge 0) \Rightarrow$

$$(\exists(I-P)^{-1}\ \&\ (I-P)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} P^i \ge \sum_{i=0}^{m-1} P^i \ge 0).$$

Рассмотрим итерационный процесс

$$x^{(k+1)} = F(a, x^{(k)}).$$

$\forall\ k, m\ge 1$

$$\rho(x^{(k+m)}, x^{(k)}) \le \sum_{i=0}^{m-1} P^i (x^{(k+1)}, x^{(k)}) \le (I-P)^{-1} P^k \rho(x^{(1)}, x^{(0)}).$$

$\lim\limits_{k \to \infty} P^k = 0$ (см. [6], с. 180). Отсюда, последовательность $\{x^{(k)}\}$ удовлетворяет условию Коши. Так как пространство полно, а отображение F является P-сжатием и потому непрерывно, мы получаем

$$\exists \lim_{k \to \infty} x^{(k)} = x^* \;\; \& \;\; x^* = F(a, x^*).$$

Единственность неподвижной точки следует из соотношений

$$\rho(x^*, y^*) = \rho(F(a, x^*), F(a, y^*)) \le P \cdot \rho(x^*, y^*) \;\; \text{и} \;\; (I - P)^{-1} \ge 0.$$

Докажем теперь, что $X_{\exists\exists} \subseteq x^*$. Пусть $\underset{\bullet}{x} \in X_{\exists\exists}$, тогда возьмём $x^{(0)} := \underset{\bullet}{x}$, имеем

$$x^{(0)} = \underset{\bullet}{x} = f(\underset{\bullet}{a}, \underset{\bullet}{x}) \in F(a, \underset{\bullet}{x}) = x^{(1)}.$$

В силу монотонности по включению

$$x^{(1)} = F(a, x^{(0)}) \subseteq F(a, x^{(1)}) = x^{(2)}.$$

Продолжая рассуждения, для произвольного k получим

$$\underset{\bullet}{x} = x^{(0)} \subseteq x^{(1)} \subseteq x^{(2)} \subseteq \ldots \subseteq x^{(k)}.$$

Перейдя к пределу, получим $(\underset{\bullet}{x} \in x^* \;\; \forall \underset{\bullet}{x} \in X_{\exists\exists}) \Rightarrow (X_{\exists\exists} \subseteq x^*)$. □

Итерационный метод решения внешней задачи

В предыдущем разделе было доказано, что алгебраическое решение уравнения

$$x = Cx + d \tag{10.1}$$

является внешней интервальной оценкой объединённого множества решений этого уравнения. Таким образом, отыскивая решение интервального уравнения в интервальном пространстве $I(R^n)$, мы находим внешнюю оценку всех возможных решений вещественных систем уравнений, коэффициенты которых пробегают всевозможные значения из соответствующих интервалов. В теореме 1 предыдущего раздела была также предложена следующая итерационная схема нахождения алгебраического интервального решения этого уравнения

$$x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + d \tag{10.2}$$

и получены условия существования и единственности решения ($r(|C|)<1$).

Как и в любом интервальном итерационном методе, здесь мы должны на каждом шаге получать гарантированные оценки решения. И хотя при данном условии последовательность приближённых решений сходится для любого начального приближения, нет никакой гарантии, что приближённое решение будет включать точное решение. Поэтому важно выбрать начальное приближение так, чтобы оно заведомо включало точное решение $x^* \subseteq x^{(0)}$. Найдём отрезок X, инвариантный относительно оператора T

$$T(x):=Cx+d.$$

Для этого получим условие, при котором он является оператором сжатия. Заметим, что нахождение собственного значения матрицы является самостоятельной вычислительной задачей, и поэтому условие $r(|C|)<1$ труднопроверяемо и не может использоваться для выбора начального приближения. Ниже используется определение метрики, введённое в разделе 5.

$$\rho(T(x)_i, T(y)_i) =$$

$$=\left|\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j + \mathrm{opp}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}y_j\right| = \left|\sum_{j=1}^{n}(c_{ij}x_j + \mathrm{opp}(c_{ij}y_j))\right| \le \sum_{j=1}^{n}|c_{ij}x_j + \mathrm{opp}(c_{ij}y_j)| =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\rho(c_{ij}x_j, c_{ij}y_j) \le \sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|\,\rho(x_j, y_j),$$

$$\rho(T(x), T(y)) =$$

$$= \max_{1\le i\le n}\rho(T(x)_i, T(y)_i) \le \max_{1\le i\le n}\Big(\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|\Big)\max_{1\le i\le n}\rho(x_i, y_i)) = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|\,\rho(x, y).$$

Обозначим $\alpha := \max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{n}|c_{ij}|$. Если $\alpha<1$, то T является оператором сжатия.

Выберем z, τ так, чтобы выполнялось условие $\rho(T(z), z)<(1-\alpha)\tau$.

Обозначим $\beta:=\rho(T(z), z)$, тогда возьмём $\tau = \dfrac{\beta}{1-\alpha}$.

Например, для $z=0$ $T(z)=d$, тогда

$$\beta = \rho(T(z), z) = \rho(d, 0) = \max_{1\le i\le n}|d_i|,$$

$$\tau = \frac{\max\limits_{1\le i\le n}|d_i|}{1-\max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{n}|c_{ij}|}.$$

Аналогично тому, как это было показано в разделе 8, легко показать, что множество $X:=\{x\colon \rho(x, z) \le \tau\}$ оператором T переводится в себя. Это множество есть отрезок в $I^*(R^n)$

$$X = \langle\mathrm{opp}(x^{(0)}), x^{(0)}\rangle,$$

где $x^{(0)}=([-\tau,\tau], \ldots, [-\tau,\tau])^{\mathrm{T}}$.

В силу того, что интервальные арифметические операции изотонны по включению, оператор итерационной схемы T является изотонным, отсюда получаем

$$(x^* \subseteq x^{(0)}) \Rightarrow (x^*=T(x^*) \subseteq T(x^{(0)}) = x^{(1)}).$$

Множество X оператором T переводится в себя, следовательно, $x^{(1)} \subseteq x^{(0)}$. Получили

$$x^* \subseteq x^{(1)} \subseteq x^{(0)},$$

$$(T(x^{(1)}) \subseteq T(x^{(0)}) = x^{(1)}) \Rightarrow (x^{(2)} \subseteq x^{(1)})$$

Продолжая рассуждения, для произвольного k получим

$$x^* \subseteq x^{(k)} \subseteq x^{(k-1)} \subseteq \ldots \subseteq x^{(2)} \subseteq x^{(1)} \subseteq x^{(0)}.$$

На любом шаге имеем гарантированное включение точного решения в приближённое.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алефельд Г., Херцбергер Ю.* Введение в интервальные вычисления. – М.:Мир, 1987.
2. *Бабушка И., Витасек Э., Прагер М.* Численные процессы решения дифференциальных уравнений. – Мир. – 1969.
3. *Добронец Б.С., Шайдуров В.В.* Двусторонние численные методы. – Новосибирск: Наука, 1990.
4. *Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х.* Методы интервального анализа. – Новосибирск: Наука, 1986.
5. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. – Москва: Физматгиз, 1959.
6. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика. – Москва: Мир, 1969.
7. *Меньшиков Г.Г.* Интервальный анализ и методы вычислений (Конспект лекций). – Выпуски 1-9. – Санкт-Петербург, 1996-1999.
8. *Назаренко Т.И., Марченко Л.Н.* Введение в интервальные методы вычислительной математики. – Иркутск: ИГУ, 1982.
9. *Шарый С.П.* Алгебраический подход во “внешней задаче” для интервальных линейных систем. – Вычислительные технологии. – Т.3. – №2. – с.67-114
10. *Gardenes E., Trepat A., Mielgo H.* Present Perspective of the SIGLA Interval System // Freiburger Intervall-Berichte. – Freiburg, 1982. – p.2-54
11. *Kaucher E.* Interval analysis in the extended interval space IR // Computing Suplementum. – 1980. - №2. – p.33-49
12. *Moore R.E.* Interval analysis. – Englewood Cliffs. N.J.: Prentice Hall, 1966.
13. *Moore R.E.* Methods and applications of interval analysis. – Philadelphia: SIAM, 1979

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Зюзин Владимир Сергеевич,
Куприянова Людмила Викторовна

ОСНОВЫ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ
В ПРИМЕНЕНИИ К СИСТЕМАМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Учебное пособие для студентов
специальности «Прикладная математика»

Технический редактор Л.В.Агальцова

Подписано в печать 25.04.03. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Times. Печать офсетная. Усл.печ.л. 2,79(3). Уч.-изд.л.2,4.
Тираж 100 экз. Заказ №

Издательство Саратовского университета.
410012, Саратов, Астраханская, 83.
Типография Издательства Саратовского университета,
410012, Саратов, Астраханская, 83.