

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
НАУКИ ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ  
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

*На правах рукописи*

**Людвин Дмитрий Юрьевич**

**РАЗРАБОТКА ИНТЕРВАЛЬНЫХ МЕТОДОВ  
ДЛЯ СИНТЕЗА, АНАЛИЗА И ДИАГНОСТИКИ  
НЕКОТОРЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ**

05.13.18 «Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ»

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
д. ф.-м. н. Шарый Сергей Петрович

Новосибирск – 2014

# Оглавление

Введение . . . . .	5
Глава 1. Постановки интервальных задач моделирования и диагностики механических конструкций . . . . .	14
1.1 Синтез рычажных механизмов . . . . .	14
1.2 Анализ многомерных перемещений элементов конструкции лопаточной силовой установки . . . . .	26
Выводы к главе 1 . . . . .	32
Глава 2. Интервальные системы линейных уравнений . . . . .	33
2.1 Интервальные арифметики . . . . .	33
2.2 Интервальные векторы и матрицы . . . . .	38
2.3 Задачи внешнего и внутреннего оценивания множеств решений интервальных систем линейных уравнений . . . . .	41
2.4 Методы внешнего оценивания множеств решений интервальных систем линейных уравнений . . . . .	46
2.4.1 Интервальный метод Гаусса . . . . .	48
2.4.2 Интервальный метод Гаусса-Зейделя . . . . .	49
2.4.3 Метод Кравчика и его модификация . . . . .	50
2.4.4 Процедура Хансена-Блика-Рона . . . . .	52
2.4.5 Формальный подход . . . . .	53
2.4.6 Метод дробления параметров для интервальных линейных систем уравнений . . . . .	57
2.5 Методы внутреннего оценивания множеств решений интервальных систем линейных уравнений . . . . .	64
2.5.1 Формальный подход . . . . .	65
2.5.2 «Центровой» подход . . . . .	67
2.6 Интервальные линейные системы со связями . . . . .	69

2.7	Методы внешнего оценивания множеств решений интервальных линейных систем со связями . . . . .	73
2.8	Методы внутреннего оценивания множеств решений интервальных линейных систем со связями . . . . .	77
2.8.1	Адаптивное дробление параметров и вычисление внутрен- них оценок на основе формального подхода . . . . .	78
2.8.2	Адаптивное дробление параметров и вычисление внутрен- них оценок на основе «центрового» подхода . . . . .	80
2.8.3	Модификация «центрового» подхода . . . . .	82
2.9	Результаты использования предложенных методов для решения тестовых задач . . . . .	85
	Выводы к главе 2 . . . . .	92
	Глава 3. Системы интервальных полиномиальных уравнений . . . . .	93
3.1	Естественное интервальное расширение функций . . . . .	93
3.2	Центрированные формы интервального расширения функций .	96
3.3	Интервальные полиномы . . . . .	101
3.3.1	Внешняя оценка множества значений интервального полинома на заданном бруске . . . . .	101
3.3.2	Интервальные корни интервального полинома одной переменной . . . . .	106
3.4	Методы внешнего оценивания множеств решений систем нелиней- ных уравнений . . . . .	109
3.5	Задачи внешнего и внутреннего оценивания множеств решений систем интервальных полиномиальных уравнений . . . . .	117
3.6	Методы внешнего оценивания множеств решений систем интер- вальных полиномиальных уравнений . . . . .	118
3.6.1	Многомерный интервальный метод Ньютона . . . . .	118
3.6.2	Интервальные методы распространения ограничений . .	123
3.6.3	Процедуры дробления и сжатия бруса . . . . .	129

3.7	Методы внутреннего оценивания множеств решений интервальных систем полиномиальных уравнений . . . . .	132
3.8	Результаты использования предложенных методов для решения тестовых и прикладных задач . . . . .	137
	Выводы к главе 3 . . . . .	154
	Заключение . . . . .	155
	Литература . . . . .	157

## Введение

**Актуальность темы.** В последние десятилетия математическое моделирование явлений окружающего мира неизбежно сталкивается с неопределённостями, вызванными неполнотой или неполной определёностью информации, неточностями исходных данных, погрешностями приближённых вычислений и т. п. Для описания факторов неопределённости могут быть использованы различные способы. При вероятностно-статистическом подходе неопределённые параметры модели рассматриваются как случайные величины, имеющие тот или иной закон распределения. Однако во многих прикладных задачах часто нет оснований рассматривать факторы неопределённости как случайные, т. е. подчиняющиеся теоретико-вероятностным моделям. В этом случае целесообразно использовать интервальный подход. В основу интервального описания положена достаточно простая идея, заключающаяся в представлении величины двумя оценками – оценкой снизу и оценкой сверху. Интервальное представление факторов неопределённости является наименее ограничительным, отвечает требованиям широкого класса задач, поскольку позволяет исследовать модели, когда относительно рассматриваемых величин ничего не известно, кроме их свойства принимать значения из заданных ограниченных множеств.

Проведенный обзор литературы свидетельствует о возрастающем в последнее время интересе к интервальному анализу — математической дисциплине, изучающей задачи с интервальными неопределённостями и неоднозначностями в данных и методы их решения. Основные результаты математических исследований в данной области опубликованы в работах отечественных учёных Б.С. Добронца, С.И. Жилина, А.В. Лакеева, С.П. Шарого, Ю.И. Шокина и др., а также зарубежных авторов таких, как Г. Алефельд, Э. Каухер, Р.Б. Кирфотт, В. Крейнович, Г. Майер, Р. Мур, А. Ноймайер, И. Рон, З. Румп, Э. Хансен и др.

Интервальные методы нашли широкое применение в самых различных областях исследований, в том числе для проектирования и диагностики современных механизмов и машин [54, 79, 88, 89, 97]. Совершенствование существующего и создание нового высокопроизводительного оборудования является одной из основных тенденцией развития современного машиностроения. В продукции машиностроения нуждаются космическая отрасль и горно-металлургическая промышленность, технологии атомной и возобновляемой энергетики. В этих отраслях широко используются робототехнические и манипуляционные системы на основе механических конструкций, предназначенные для переработки и перемещения объектов производства. За последние годы значительно возрос интерес к задачам оптимального проектирования механизмов и машин, разработке и реализации эффективных программ их автоматизированного анализа и диагностики.

Математические модели механизмов часто описываются системами линейных или нелинейных алгебраических уравнений, коэффициенты которых принимают значения из некоторых заданных интервалов. Преимущества интервальных методов решения такого рода систем уравнений по сравнению с классическими «точечными» в инженерных приложениях вполне очевидны. Во-первых, интервальный анализ позволяет автоматически учитывать погрешности в задании исходных данных и погрешности, вызванные машинными округлениями. Во-вторых, любая математическая модель механизма неточна и описывает реальный объект приближённо, а интервальный анализ может использоваться как средство учёта неопределённости параметров и структуры модели механизма.

Как правило, множество решений системы интервальных уравнений имеет достаточно сложную структуру, и точное описание этого множества является весьма трудоёмкой задачей. По этой причине для практических целей удобнее находить некоторое его приближение или оценку с помощью более простых множеств. В данной работе мы будем рассматривать оценки в виде

интервальных векторов или брусов со сторонами, параллельными осям координат.

В современном интервальном анализе наиболее популярными способами оценивания являются:

- внешнее интервальное оценивание, когда ищется брус, объемлющий множество решений,
- внутреннее интервальное оценивание, когда ищется брус, содержащийся во множестве решений.

К настоящему времени наиболее полно исследована задача оценивания множеств решений интервальных систем линейных уравнений (ИСЛАУ), для решения которой разработаны различные интервальные методы и алгоритмы [2, 37, 57, 66, 91, 93, 102, 106].

В практических задачах, в частности при моделировании механических конструкций, часто встречаются интервальные системы линейных уравнений, компоненты матрицы и вектора правых частей которых зависят от одного или нескольких параметров, принимающих значения из заданных интервалов. Такого рода системы являются частным случаем ИСЛАУ со связями. Мы говорим, что на интервальные компоненты матрицы ИСЛАУ и вектора правых частей наложены связи, если имеются некоторые соотношения для них в виде равенств, неравенств и т. п.

На сегодняшний день разработано немало методов внешнего оценивания множества решений интервальных линейных систем со связями [40, 43, 62, 68, 69, 98, 100, 107, 110]. Значительно меньшее внимание уделено проблеме нахождения внутренних оценок этих множеств [100, 107]. Кроме того, большинство разработанных методов оценивания применимы к ИСЛАУ, связанность параметров которых имеет некоторый специальный вид. Поэтому актуальной является задача применения уже существующих, а также разработка новых эффективных методов решения интервальных линейных систем со связями в области анализа и синтеза механических конструкций.

Для проектирования новых высокоэкономичных и надёжных механизмов и машин большое значение имеет их техническая диагностика, например, анализ диапазона и характера перемещений элементов конструкции. Как правило, данные перемещения многомерны. Вычисление многомерных перемещений элементов конструкции производится с использованием семейств градуировочных характеристик средств измерений, построенных по экспериментальным данным. Традиционно задача аппроксимации градуировочных характеристик по данным наблюдений решается на основе вероятностно-статистических методов регрессионного анализа [1, 7, 24, 25]. В настоящее время достаточно эффективно развиваются интервальные методы построения и анализа эмпирических зависимостей [8, 26, 30, 31, 51]. Данные методы не требуют наличия априорной информации о вероятностной структуре эмпирических данных, позволяют существенно обогатить сведения, получаемые традиционными статистическими методами.

Градуировочные характеристики, построенные с помощью метода интервальной идентификации полиномиальной регрессии [30, 50], имеют вид интервальных полиномов, т. е. полиномов с интервальными коэффициентами. В этом случае задача вычисления многомерных перемещений элементов механической конструкции, соответствующих определённым значениям цифровых кодов, сводится к оценке множества решений системы интервальных полиномиальных уравнений.

В настоящее время недостаточное внимание уделяется задаче оценивания множеств решений систем интервальных нелинейных уравнений. Однако существует достаточно большое число работ, посвященных интервальным методам решения точечных нелинейных систем. Среди них широкое применение нашли такие методы, как многомерный интервальный метод Ньютона [42, 58], его модификации [59, 61, 71], методы удовлетворения ограничений [35, 67]. Поэтому актуальной является задача распространения данных методов на систе-



мы интервальных уравнений, а также разработка новых алгоритмов внешнего и внутреннего оценивания их множеств решений.

**Цель исследования.** Целью данной работы является разработка интервальных методов оценивания множеств решений систем алгебраических уравнений с интервально заданными параметрами и применение их для анализа, синтеза и диагностики механических конструкций некоторых типов.

**Задачи исследования.**

1. Разработка и реализация методов внутреннего оценивания множеств решений интервальных линейных систем со связями на основе адаптивного дробления параметров с использованием формального и «центрового» подходов.
2. Модификация «центрового» подхода для внутреннего оценивания множества решений интервальных линейных систем со связями, коэффициенты матрицы которой зависят от параметров, а вектор правых частей не является интервальным.
3. Разработка алгоритма внешнего оценивания множеств решений систем интервальных полиномиальных уравнений на основе интервальных методов распространения ограничений, многомерного интервального метода Ньютона, методов дробления решений.
4. Разработка методов внутреннего оценивания множества решений системы интервальных полиномиальных уравнений. Разработка способов построения регулярного покрытия этого множества брусами.
5. Апробация разработанных методов на тестовых примерах и при решении конкретных практических задач анализа и диагностики механических конструкций.

**Научная новизна:** В данной диссертационной работе предлагается использовать адаптивное дробление параметров интервальной линейной системы уравнений со связями и методы внутреннего оценивания множества ее

решений на основе двух подходов – формального и «центрового». Разработана модификация «центрового» подхода для интервальных линейных систем со связями, правые части уравнений которой не являются интервальными.

В работе показано, что интервальные методы решения точечных систем нелинейных уравнений (многомерный интервальный метод Ньютона, методы удовлетворения ограничений) можно распространить на системы интервальных полиномиальных уравнений. На их основе разработана процедура внешнего оценивания множеств решений системы интервальных полиномиальных уравнений. Для вычисления интервальных наклонов и проверки существования решений системы на заданном бруске разработаны методы оценивания множеств значений интервальных полиномов и их интервальных корней.

Разработаны методы построения внутренних оценок множеств решений систем интервальных полиномиальных уравнений и регулярного покрытия этих множеств брусками.

**Методы исследования.** В диссертационной работе используются методы интервального анализа, математического программирования, вычислительной математики и численного анализа, вычислительного моделирования на ЭВМ.

**Практическая значимость исследования** заключается в том, что предложенные алгоритмы оценивания систем интервальных уравнений могут использоваться для решения задач моделирования, анализа и диагностики механических конструкций, о чем свидетельствуют результаты вычислительных экспериментов, представленные в диссертационной работе.

**Обоснованность и достоверность научных положений и выводов** обеспечивается использованием строгих математических методов при разработке алгоритмов, подтверждается сопоставлением результатов модельных исследований с теоретическими результатами, а также сравнением результатов тестовых экспериментов, полученных на основе разных методов.

**Апробация работы.** Основные положения и отдельные результаты исследования докладывались и обсуждались на XII Всероссийской конференции молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям (Новосибирск, 2011), Международной конференции "Современные проблемы прикладной математики и механика: теория, эксперимент и практика посвященной 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Яненко (Новосибирск, 2011), XIII Всероссийской конференции молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям (Новосибирск, 2012), XV Международном симпозиуме GAMM - IMACS по научным вычислениям, компьютерным арифметикам и доказательным численным методам – SCAN'2012 (Новосибирск, 2012), XIV Всероссийской конференции молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям (Томск, 2013).

**Объём и структура работы.** Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, списка литературы.

**Во введении** дана общая характеристика работы, обоснована актуальность выбранной темы, определены цель, задачи, объект и методы исследования, научная новизна и практическая значимость работы, указаны положения, выносимые на защиту.

**В первой главе** описаны постановки задач моделирования и диагностики механических конструкций, учитывающих наличие неопределённости в исходных данных (параметрический синтез рычажных механизмов, анализ многомерных перемещений элементов конструкции лопаточной силовой установки); определены используемые для решения этих задач математические модели в виде систем интервальных алгебраических уравнений.

**Вторая глава** посвящена задачам внешнего и внутреннего оценивания множеств решений интервальных линейных систем уравнений. В начале главы изложены основы интервального анализа, описаны интервальные арифметики, приведены основные сведения об интервальных матрицах и векторах. Рас-

смотрены существующие методы оценивания множеств решений интервальных линейных систем уравнений. Особое внимание уделено интервальным линейным системам со связями. Предложены методы внутреннего оценивания множества решений интервальной линейной системы, коэффициенты матрицы и компоненты вектора правых частей которой зависят от интервально заданных параметров. Методы основаны на адаптивном дроблении параметров с использованием формального и «центрового» подходов. Предложена модификация «центрового» подхода для интервальных линейных систем со связями, правые части уравнений которой не являются интервальными. Приведены результаты апробации предложенных алгоритмов на тестовых примерах.

**Третья глава** посвящена задачам внешнего и внутреннего оценивания множеств решений систем интервальных полиномиальных уравнений. В начале главы приведены необходимые сведения о различных формах интервальных расширений функций, рассмотрены интервальные полиномы, т.е. полиномы с интервально заданными коэффициентами. Предложены алгоритмы оценивания множества значений интервального полинома и его интервальных корней на заданном бруске. Приведён обзор интервальных методов решения точечных (неинтервальных) систем нелинейных уравнений, среди которых рассмотрены многомерный интервальный метод Ньютона на основе наклонов, методы удовлетворения ограничений. В диссертационной работе показано, что указанные методы можно распространить на системы интервальных уравнений. Для поиска внешней оценки множества решений системы интервальных полиномиальных уравнений на заданном бруске предложена процедура дробления и сжатия бруска, основанная на интервальном методе Ньютона, анализе совместности по бруску. Описан алгоритм нахождения внутренней оценки множества решений системы интервальных полиномиальных уравнений. Приведены результаты применения разработанных алгоритмов при решении задачи анализа многомерных перемещений торца лопатки силовой установки.

В заключении изложены основные теоретические и практические выводы настоящего исследования.

Общий объём работы составляет 170 страниц с 28 рисунками и 6 таблицами. Список литературы содержит 115 наименований.

Основные результаты работы опубликованы в [17]– [22], [83]– [84].

# Глава 1. Постановки интервальных задач моделирования и диагностики механических конструкций

## 1.1. Синтез рычажных механизмов

К рычажным относятся механизмы, в состав которых входят только так называемые низшие кинематические пары, к достоинствам которых относится небольшой износ соприкасающихся поверхностей, долговечность и надёжность в работе. Эти механизмы могут передавать значительные усилия и мощности и обладают достаточно высоким КПД.

Известно [3], что широчайшая гамма конструкций механизмов в различных отраслях современной промышленности и бытовой техники основана на применении рычажных механизмов, реализующих разнообразные технологические и кинематические задачи в машинах и агрегатах. Достаточно много рычажных механизмов и в металлургических производствах, например, в прокатных цехах: толкатели (сталкиватели), кантователи, подъёмно-качающие столы, маятниковые пилы, рычажно-кривошипные летучие ножницы и другие. Поэтому их рациональное проектирование с достижением оптимальных значений критериальных функций является весьма прагматичной и часто решаемой конструкторской задачей. Многозвенные рычажные механизмы представляют интерес также в связи с развитием робототехники и технологического оборудования на её основе.

Проектирование механизмов представляет собой сложную комплексную проблему. Первоначально выбирается кинематическая схема механизма, которая бы обеспечивала реализацию выбранного закона движения. Затем разрабатываются конструкторские формы механизма, обеспечивающие его прочность и долговечность, после чего определяются его технологические и

технико-экономические показатели. При проектировании различают два вида синтеза механизма:

1. Структурный синтез, в ходе которого устанавливается структурная схема механизма по справочным материалам или на основе анализа видов движения, которые должны быть реализованы. При этом из нескольких возможных структурных схем следует выбрать наиболее простую.
2. Определение постоянных параметров выбранной схемы механизма с учётом заданных свойств. Этот этап начинается с кинематического синтеза, под которым понимается определение постоянных параметров кинематической схемы механизма по заданным его кинематическим свойствам. Если требуется учесть и динамические свойства механизма, то решается задача динамического синтеза, под которым понимается проектирование кинематической схемы механизма с определением параметров, характеризующих распределение масс звеньев.

Под параметрами синтеза понимаются независимые между собой параметры, определяющие схему механизма. К ним относятся длины звеньев, положения точек, описывающих заданные траектории или имеющие заданные значения скоростей и ускорений, массы звеньев, моменты инерции и т. п. Часть этих параметров может быть задана (входные параметры), другие определяются в процессе синтеза (выходные параметры).

При синтезе механизма требуется учитывать многие условия, связанные с его назначением, технологией изготовления и т. п. Из этих условий выбирают одно основное (например, получение заданной траектории или угла размаха). Все остальные условия являются дополнительными (например, ограничения длин звеньев или углов давления, минимальные габариты). Основное условие выражается в виде функции, называемой целевой. Дополнительные условия (ограничения) выражаются в виде неравенств, устанавливающих допустимые области существования параметров синтеза.

Основы синтеза механизмов в его аналитической форме были заложены в XIX в. в работах русского математика и механика П.Л. Чебышёва. Исследуя его работы, можно представить всю последовательность решения задач синтеза механизмов в виде трёх этапов. Первый этап — выбор основного критерия синтеза и ограничивающих условий. На этом этапе технологические и конструктивные задачи превращаются в математические. Вторым этапом — установление аналитического выражения функции, характеризующей величину основного критерия синтеза. Выбор основного критерия определяется назначением механизма. Третьим этапом — вычисление постоянных параметров механизма из условий оптимизации основного критерия с учётом ограничивающих условий (ограничений). Указанные три этапа синтеза механизмов составляют основное содержание задачи при их проектировании, так как все последующие операции по расчёту на прочность деталей и по установлению конструктивных форм уже не могут существенно изменить его кинематических и динамических свойств.

Дальнейшее развитие методов синтеза механизмов в работах русских учёных А. П. Котельникова, В. В. Добровольского и других отечественных и зарубежных учёных состояло в отыскании наиболее целесообразных методов выполнения отдельных этапов синтеза и применения их к различным видам механизмов. При этом выяснилось, что в простейших случаях можно удовлетворить требованиям, предъявляемым к основному критерию и ограничивающим условиям, используя несложные графические методы. Однако применение этих методов не избавляет от необходимости решать задачу синтеза в нескольких вариантах для получения результата, близкого к оптимальному.

Только появление ЭВМ дало возможность эффективно и быстро выполнять третий этап синтеза, определяя оптимальные сочетания параметров механизма и даже решая такие задачи синтеза, которые ранее не могли быть решены из-за сложности и трудоёмкости вычислений. В 1965-1972 гг. для типовых задач синтеза механизмов были составлены программы вычислений на



ЭВМ, позволяющие оптимизировать различные критерии и учитывать большое количество кинематических, динамических и конструктивных ограничений. В развитие методов синтеза рычажных механизмов большой вклад внесли И.И. Артоболевский, З.Ш. Блох, А.З. Зиновьев, Н.И. Левитский, Э.Е. Пейсах и др. [3, 10, 16, 28]. По способу реализации эти методы можно разделить на аналитические, графоаналитические и графические. Ниже рассмотрим только аналитические методы, которые можно разделить на аппроксимационные и оптимизационные.

Рассмотрим подробнее исследования в области аналитического синтеза многозвенных плоских рычажных механизмов. В работах Э.Е. Пейсаха [27, 28] на основе кинематических возможностей шестизвенного шарнирного механизма второго класса первой модификации поставлены и аналитически решены часто встречающиеся на практике типы задач синтеза этого механизма. Ю.Л. Саркисян [33] предлагает выполнять синтез плоских шарнирных механизмов методом квадратического приближения функции. Метод квадратического приближения для синтеза четырёх- и шестизвенного шарнирных направляющих механизмов рассмотрен в работе [6]. Основные различия аналитических способов синтеза рычажных механизмов заключаются в характере используемых для синтеза уравнений, числе и составе определяемых в этих уравнениях неизвестных, характере, накладываемых на область решений ограничений и методе решения уравнений.

Большое количество работ посвящено решению задач оптимизационного синтеза рычажных механизмов. При синтезе механизма необходимо учитывать ряд условий кинематического, конструктивного, технологического характера и т. д., среди которых одно, как правило, является основным, а остальные – второстепенными (дополнительными). Основное условие синтеза формулируется в виде требования минимизации некоторой целевой функции параметров механизма, дополнительные ограничения — в виде равенств или неравенств относительно этих параметров. Задача оптимального синтеза сводится

к поиску параметров механизма, при которых целевая функция имеет минимальное значение и выполняются все дополнительные ограничения, т. е. к задаче нелинейного программирования. Полученное с помощью методов нелинейной оптимизации решение может и не быть самым лучшим, его качество во многом зависит от выбранного начального решения. В работе Э.Е. Пейсаха [29] дано систематическое изложение оптимизационного синтеза плоских рычажных механизмов.

Большинство современных методов синтеза рычажных механизмов основано на применении широких возможностей вычислительной техники, для чего разрабатывается соответствующее программное обеспечение. В настоящее время существует большое число пакетов программ, посвященных кинематическому анализу и синтезу рычажных механизмов. Однако существующие программы синтеза рычажных механизмов в большинстве своём ориентированы на решение задач определённого конкретного класса и не могут претендовать на общность.

По этой причине интенсивно продолжаются попытки разработки общего метода параметрического синтеза рычажного механизма высокого класса. Напомним, что задача параметрического синтеза состоит в определении геометрических параметров механизма с целью обеспечения заданного движения определённого звена (звеньев) и обеспечения требуемой траектории движения определённой точки (точек), принадлежащей какому-либо звену (звеньям) механизма.

Проведенные в работе [13] – [15], [75]– [78] исследования открывают возможности применения интервальных методов в области анализа и синтеза рычажных механизмов. В этих работах показано, что любой рычажный механизм может быть представлен в виде механической цепи последовательно соединённых диад и входных (выходных) рычагов (по числу степеней подвижности механизма). Диада — это простейшая рычажная система, состоящая из двух рычагов, образующих кинематическую пару.

Каждая диада обладает передаточной функцией. Общая передаточная функция механизма может быть выражена через передаточные функции всех диад, входящих в его состав. Передаточная функция описывается системой линейных относительно скоростей точек уравнений. Данная система одновременно является системой обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) относительно координат точек, в которых располагаются шарниры. В результате решения ОДУ (задачи Коши) могут быть определены траектории движения кинематических пар механизма. Как известно, для решения задачи Коши необходимо задать начальные условия интегрирования ОДУ. В данном случае необходимо задать начальные значения координат точек, в которых расположены кинематические пары.

Выбор начальных условий интегрирования ОДУ осуществляется методом глобальной оптимизации целевой функции, построенной определённым образом. При проведении такого глобального поиска нужно обоснованно задать возможные интервалы изменения начальных условий для решения ОДУ.

Обоснованную оценку интервалов для начальных условий можно осуществить, если использовать для этого систему линейных уравнений, о которой говорилось выше, и решать ее как интервальную. Интервальные коэффициенты системы вычисляются исходя из условий работоспособности механизма. Заметим, что на интервальные элементы матрицы системы наложены связи в виде соотношений, которые имеют место для элементов матриц передаточных функций.

Таким образом, математическая модель, на основании которой можно оценить интервалы изменения начальных условий, описывается интервальной системой линейных алгебраических уравнений со связями.

В качестве примера рассмотрим синтез восьмизвенного рычажного механизма [75]. На рис. 1.1 приведена схема механизма, на которой шарниры обозначены числами  $0, 1, \dots, 10$ . Положение входного звена (3-4-10) задаётся обобщенным координатным углом  $(\varphi + \varphi_0)$ .

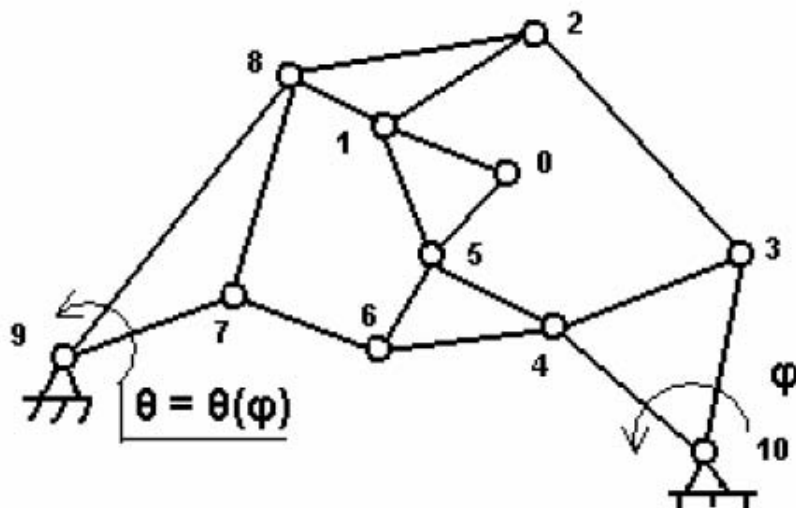


Рис. 1.1. Схема плоского восьмизвенного рычажного механизма, предназначенного для воспроизведения заданного движения звена 7-8-9 и точки 0.

Требуется определить длины всех рычагов и углы начальных положений: входного  $\varphi_0$  и выходного  $\theta_0$  звеньев, таким образом, чтобы точка 0 двигалась по заданной траектории, описываемой заданной функцией  $S = S(\varphi)$ , а выходное звено (7-8-9) совершало вращательное движение в соответствии с заданным законом  $\theta = \theta(\varphi)$  при  $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_{max}$ .

В рассматриваемом примере механизм образуется из цепи диад, представленных на рис. 1.2, и рычага 8-9.

Рис. 1.2. Схема построения механизма из диад и связей между диадами.

Каждая диада является простейшим преобразующим механическим устройством с двумя входами (внешние кинематические пары) и одним выхо-

дом (внутренняя кинематическая пара). На входы «подаются» сигналы (скорости, перемещения) с одними значениями, а на выходе они «снимаются» с преобразованными значениями (рис. 1.3).

Рис. 1.3. Схема диады.

Каждая диада обладает передаточной функцией:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix} = I \cdot \begin{pmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{pmatrix} + J \cdot \begin{pmatrix} x'_3 \\ y'_3 \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

где  $\begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \end{pmatrix}$  — проекции скоростей (малых перемещений)  $i$ -ой точки диады в выбранной системе координат,

$I = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ i_3 & i_4 \end{pmatrix}$ ,  $J = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 \\ j_3 & j_4 \end{pmatrix}$  — матрицы обратных передаточных функций диады от точки 2 к точке 1 и от точки 3 к точке 1 соответственно.

Заметим, что имеют место следующие соотношения:

$$j_1 = i_4, \quad j_2 = -i_2, \quad j_3 = -i_3, \quad j_4 = i_1, \quad (1.2)$$

т. е. матрица  $J = \begin{pmatrix} i_4 & -i_2 \\ -i_3 & i_1 \end{pmatrix}$ .

Элементы матрицы  $I$  определяются следующими соотношениями:

$$i_1 = \frac{\operatorname{tg} \varphi_{13}}{\operatorname{tg} \varphi_{13} - \operatorname{tg} \varphi_{12}}, \quad i_2 = \frac{\operatorname{tg} \varphi_{12} \cdot \operatorname{tg} \varphi_{13}}{\operatorname{tg} \varphi_{13} - \operatorname{tg} \varphi_{12}}, \quad (1.3)$$

$$i_3 = \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_{13} - \operatorname{tg} \varphi_{12}}, \quad i_4 = \frac{-\operatorname{tg} \varphi_{12}}{\operatorname{tg} \varphi_{13} - \operatorname{tg} \varphi_{12}}. \quad (1.4)$$

Тангенсы углов в этих соотношениях выражаются через координаты точек, в которых расположены шарниры диады. Элементы  $i_1, i_2, i_3, i_4$  матриц передаточных функций зависят от положения входного звена и заранее неизвестны. Однако, исходя из условий работоспособности механизма можно задать интервалы изменения углов  $\varphi_{12}, \varphi_{13}$  и на основе соотношений (1.3)-(1.4) найти интервалы  $i_1, i_2, i_3, i_4$  возможных значений элементов  $i_1, i_2, i_3, i_4$  матриц передаточных функций.

Заметим, что для элементов  $i_1, i_2, i_3, i_4$  справедливы равенства:

$$i_2 = \frac{i_1 \cdot (1 - i_1)}{i_3}, \quad i_4 = 1 - i_1. \quad (1.5)$$

Следовательно, матрицы  $I$  и  $J$  обратных передаточных функций могут быть представлены в виде:

$$I = \begin{pmatrix} i_1 & \frac{i_1 \cdot (1 - i_1)}{i_3} \\ i_3 & 1 - i_1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 - i_1 & -\frac{i_1 \cdot (1 - i_1)}{i_3} \\ -i_3 & i_1 \end{pmatrix}$$

Общая передаточная функция механизма может быть выражена через передаточные функции всех диад, входящих в его состав. Общая передаточная функция рассматриваемого механизма описывается следующей системой

линейных (относительно скоростей точек) уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} x'_7 \\ y'_7 \end{pmatrix} = I_8 \cdot \begin{pmatrix} x'_8 \\ y'_8 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x'_6 \\ y'_6 \end{pmatrix} = I_7 \cdot \begin{pmatrix} x'_7 \\ y'_7 \end{pmatrix} + J_7 \cdot \begin{pmatrix} x'_4 \\ y'_4 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x'_5 \\ y'_5 \end{pmatrix} = I_6 \cdot \begin{pmatrix} x'_6 \\ y'_6 \end{pmatrix} + J_6 \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x'_4 \\ y'_4 \end{pmatrix} = I_5 \cdot \begin{pmatrix} x'_5 \\ y'_5 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x'_3 \\ y'_3 \end{pmatrix} = I_4 \cdot \begin{pmatrix} x'_4 \\ y'_4 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{pmatrix} = I_3 \cdot \begin{pmatrix} x'_3 \\ y'_3 \end{pmatrix} + J_3 \cdot \begin{pmatrix} x'_8 \\ y'_8 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix} = I_2 \cdot \begin{pmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{pmatrix} + J_2 \cdot \begin{pmatrix} x'_8 \\ y'_8 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x'_0 \\ y'_0 \end{pmatrix} = I_1 \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix} + J_1 \cdot \begin{pmatrix} x'_5 \\ y'_5 \end{pmatrix}. \end{array} \right. \quad (1.6)$$

Скорости  $x'_0, y'_0$  считаются известными.

Обозначим элементы матрицы  $I_k$  следующим образом:

$$I_k = \begin{pmatrix} i_{k1} & i_{k2} \\ i_{k3} & i_{k4} \end{pmatrix}$$

Представим (1.6) в виде системы  $Av = b$  линейных уравнений относительно скоростей  $v = (x'_1, y'_1, \dots, x'_8, y'_8)^\top$  точек механизма. Тогда матрица  $A$

имеет вид:

$$\begin{pmatrix} -i_{81} - i_{82} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i_{83} - i_{84} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i_{71} - i_{72} & 1 & 0 & 0 & 0 & -i_{74} & i_{72} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i_{73} - i_{74} & 0 & 1 & 0 & 0 & i_{73} & -i_{71} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i_{61} - i_{62} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i_{64} & i_{62} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i_{63} - i_{64} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i_{63} & -i_{61} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i_{51} - i_{52} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i_{53} - i_{54} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i_{41} - i_{42} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i_{43} - i_{44} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i_{34} & i_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i_{31} - i_{32} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i_{33} & i_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i_{33} - i_{34} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -i_{24} & i_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i_{21} - i_{22} & 1 & 0 & 0 \\ i_{23} & i_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i_{23} - i_{24} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i_{14} & -i_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i_{11} & i_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i_{13} & i_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i_{13} & i_{14} \end{pmatrix},$$

а вектор правых частей  $b = (0, \dots, 0, x'_0, y'_0)^\top$ .

Система (1.6) одновременно является системой обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) относительно координат точек, в которых располагаются шарниры. В результате решения ОДУ (задачи Коши) могут быть определены траектории движения кинематических пар механизма. Для решения задачи Коши необходимо задать начальные условия интегрирования ОДУ. В данном случае необходимо задать начальные значения координат точек, в которых расположены кинематические пары.

Выбор начальных условий интегрирования системы (1.6) осуществляется методом глобальной оптимизации целевой функции, построенной определённым образом. При проведении такого глобального поиска нужно задать интервалы возможных значений координат точек, в которых располагаются шарниры механизма. Задача параметрического синтеза механизма заключается, таким образом, в том, чтобы при решении ОДУ из данных интервалов



выбрать такие начальные условия, которые бы обеспечивали требуемые траектории движения кинематических пар при постоянстве длин всех рычагов механизма.

Оценку интервалов возможных значений координат точек, в которых располагаются шарниры механизма, можно осуществить следующим образом. Заменим в матрице  $A$  системы (1.6) вещественные элементы  $i_1, i_2, i_3, i_4$  на их интервальные оценки  $\dot{i}_1, \dot{i}_2, \dot{i}_3, \dot{i}_4$ . Получим интервальную систему линейных уравнений  $Av = b$ , причем на элементы  $a_{ij}$  матрицы системы  $A$  наложены связи в виде равенств (1.2), (1.5). Решением задачи оценивания множества решений данной интервальной системы линейных уравнений является интервальный вектор  $v$  внешних оценок возможных скоростей точек, в которых расположены шарниры механизма.

Далее для диад механизма записывается интервальная система линейных уравнений относительно координат этих точек. Коэффициенты матрицы системы рассчитываются на основе полученного интервального вектора  $v$  скоростей точек. В результате решения данной интервальной системы получим оценку возможных значений координат всех подвижных точек механизма, в которых расположены шарниры. Полученные интервалы координат точек дают область изменения аргументов целевой функции, описанной выше, которая используется далее для оптимизационного параметрического синтеза механизма.

Таким образом, для параметрического синтеза рычажных механизмов на этапе нахождения интервалов возможных значений координат точек, в которых расположены шарниры механизма, необходимо оценить множества решений интервальных систем линейных уравнений со связями, т. е. систем линейных уравнений, на элементы матрицы которой наложены связи в виде равенств.

## 1.2. Анализ многомерных перемещений элементов конструкции лопаточной силовой установки

Методы технической диагностики механических конструкций предназначены для обеспечения более высокого уровня их надежности и эффективности. В силовых лопаточных установках зазоры между основными подвижными и неподвижными элементами конструкции оказывают существенное влияние на коэффициент полезного действия, сохраняемость характеристик в процессе эксплуатации, снижение эксплуатационных расходов. Актуальной является задача создания автоматизированных средств анализа текущей информации о состоянии нагруженных вращающихся элементов силовой установки, т. е. о характере их многомерных перемещений (радиальных, осевых, угловых смещений и колебаний торцов лопаток, радиальных деформациях и осевых смещениях колеса ротора, радиальных деформациях статора и т. п.).

Измерение многомерных перемещений элементов конструкции силовой установки осуществляется с помощью методов, использующих кластеры одновитковых вихретоковых датчиков, т. е. групп одинаковых датчиков, чувствительные элементы которых определённым образом ориентированы относительно элементов конструкции, а число датчиков в составе кластера соответствует числу искомым координат смещений [12, 23]. Такие методы измерений, получившие название «кластерных», обеспечивают повышение достоверности информации о многомерных перемещениях элементов конструкции силовой установки.

На рис. 1.4 схематически представлена ступень лопаточной силовой установки. Здесь элементы конструкции ротора (диск колеса и вал) при его вращении совершают угловые статические (в виде закрутки) и динамические (в виде колебаний) перемещения относительно оси вала  $OO$ , линейные перемещения в направлении осей  $X$  и  $Y$ . Под действием рабочего тела на лопатки силовой установки их торцы подвергаются осевым перемещениям вдоль оси

X и радиальным перемещениям (в пределах рабочего зазора) вдоль оси Y. Торце лопатки в результате закрутки ее пера может совершать угловые перемещения, также статические и динамические, в пределах некоторого угла в плоскости XOZ. Кроме этого, в результате изгиба пера лопатки ее торец перемещается вдоль оси Z, при этом нормаль торца лопатки отклоняется от исходного состояния на некоторый угол.

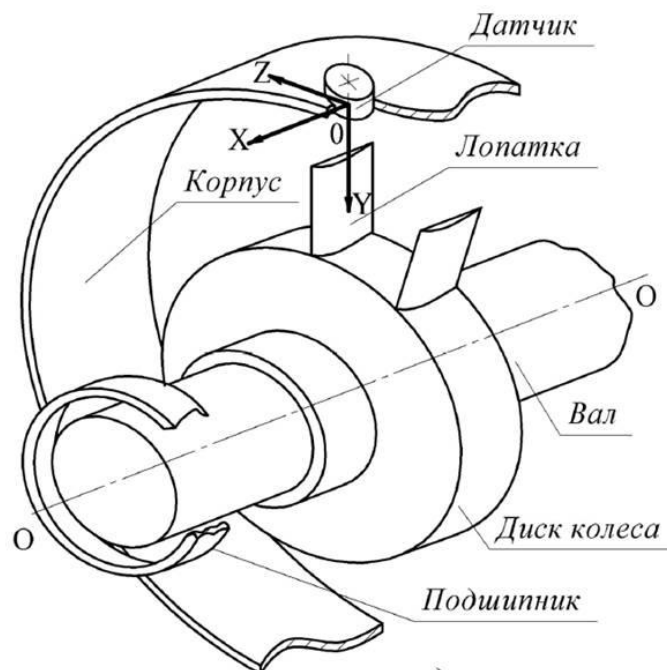


Рис. 1.4. Схема ступени лопаточной силовой установки.

Вычисление многомерных перемещений элементов конструкции лопаточной силовой установки производится с использованием семейств градуировочных характеристик измерительных каналов, полученных экспериментально при заданных эталонных значениях координатных составляющих перемещений.

Аппроксимация градуировочных характеристик по данным наблюдений заключается в построении зависимостей измерительных (цифровых) кодов АЦП для каналов преобразования сигналов датчиков системы измерения от координатных составляющих перемещений элементов конструкции. Традиционно задача построения зависимостей по экспериментальным данным решает-

ся на основе вероятностно-статистической модели с использованием методов регрессионного анализа. В настоящее время методы построения регрессий хорошо изучены и широко применяются на практике [1, 7, 24, 25].

Регрессионные методы построения градуировочных характеристик [34] основаны на предварительном выборе некоторого класса функций, которые, по мнению исследователя, адекватно описывают искомую зависимость. В рассматриваемых задачах используются линейная или полиномиальная модели зависимостей. Затем в рамках этого класса функций осуществляется поиск наилучшей в смысле определённого критерия аппроксимации. В качестве критерия, как правило, применяют критерий наименьших квадратов. Поэтому при практическом построении параметрических моделей приходится решать ряд проблем, формализация которых практически невозможна.

Кроме того на практике зачастую не известна информация о вероятностной структуре эмпирических данных, особенно для выборок небольшого объема. В таких случаях целесообразным является интервальный подход. При этом подходе неопределённости в данных описываются ограниченными множествами, чаще всего задаваемыми интервалами или их декартовыми произведениями – брусами. На множествах неопределённости не вводятся никаких дополнительных мер.

В настоящее время методы построения и анализа эмпирических зависимостей на базе интервального подхода достаточно эффективно развиваются отечественными и зарубежными исследователями [8, 26, 30, 31, 51]. Выработанная техника оценивания параметров и построения прогнозов зависимостей позволяет существенно обогатить сведения, получаемые традиционными вероятностно-статистическими методами.

Рассмотрим построение градуировочных характеристик на основе метода интервальной полиномиальной регрессии [30, 50]. Пусть вектор  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  характеризует перемещение торца лопатки в выбранной системе координат. К многомерным перемещениям торцов лопаток силовой установ-

найти минимум  $L(a_{(i)0\dots 0}, \dots, a_{(i)K_1\dots K_n}, \varepsilon_i) = \varepsilon_i$

при ограничениях  $|c_{ij} - g_{ij}(a_{(i)0\dots 0}, \dots, a_{(i)K_1\dots K_n})| \leq \varepsilon_i, \quad j = \overline{1, N}$ .

ки могут относиться перемещения в радиальном направлении, в направлении оси вала, в плоскости вращения, а также угловые перемещения относительно оси вала. Обозначим через  $c_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) цифровой код  $i$ -го измерительного канала системы измерения.

Пусть в результате  $N$  измерений получена таблица

$$T = \{c_{ij}, x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj} \mid i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, N\}$$

значений цифровых кодов  $c_{ij}$  для эталонных значений  $x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj}$  координатных составляющих перемещений. На основе данной таблицы производится аппроксимация градуировочной характеристики  $f_i$   $i$ -го измерительного канала в классе функций вида

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k_1=0}^{K_1} \sum_{k_2=0}^{K_2} \dots \sum_{k_n=0}^{K_n} a_{(i)k_1 k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}.$$

Рассмотрим полином  $f_i$ , где  $i \in \{1, \dots, n\}$ . В множестве значений его коэффициентов  $a_{(i)k_1 k_2 \dots k_n}$ , удовлетворяющих ограничениям

$$|c_{ij} - f_i(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj})| \leq \varepsilon_i, \quad j = \overline{1, N}, \quad \varepsilon_i \geq 0,$$

определим такие значения  $a_{(i)k_1 k_2 \dots k_n}$ , при которых достигается минимум величины  $\varepsilon_i$ . Для этого представим полином  $f_i(x_1, \dots, x_n)$  как линейную функцию  $g_i$  относительно его коэффициентов  $a_{(i)k_1 k_2 \dots k_n}$ . Обозначим через  $g_{ij}(a_{(i)0\dots 0}, \dots, a_{(i)K_1\dots K_n})$  функцию, полученную в результате подстановки в  $g_i$  вместо  $x_1, \dots, x_n$  значений  $x_{1j}, \dots, x_{nj}$  из таблицы  $T$ . Решим задачу линейного программирования:

Найденные значения  $a_{(i)k_1 k_2 \dots k_n}$  и  $\varepsilon_i$  определяют интервальный полином

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = [-\varepsilon_i, \varepsilon_i] + \sum_{k_1=0}^{K_1} \sum_{k_2=0}^{K_2} \dots \sum_{k_n=0}^{K_n} a_{(i)k_1 k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}, \quad (1.7)$$

свободный член которого  $\mathbf{a}_{(i)00\dots 0} = [-\varepsilon_i, \varepsilon_i] + a_{(i)00\dots 0}$ . Под интервальным полиномом  $\mathbf{f}_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  будем понимать множество вещественных полиномов  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , свободный член которых принимает любое значение из интервала  $\mathbf{a}_{(i)00\dots 0} = [-\varepsilon_i, \varepsilon_i] + a_{(i)00\dots 0}$ .

Отметим, что для каждого набора  $x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj}$  экспериментальных значений из таблицы  $T$  справедливо

$$f_i(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj}) \in \mathbf{f}_i(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj}) = \mathbf{c}_i, \quad j = 1, \dots, N.$$

На рис. 1.5 представлены результаты интервальной полиномиальной регрессии в классе полиномов одной переменной  $f(x) = \sum_{k=0}^K a_k x^k$ . На этом рисунке изображены:

- точки  $(x_j, c_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ , полученные в результате измерений (для наглядности точки соединены пунктирной линией);
- графики функций  $\underline{\mathbf{f}}(x) = -\varepsilon + \sum_{k=0}^K a_k x^k$  и  $\overline{\mathbf{f}}(x) = \varepsilon + \sum_{k=0}^K a_k x^k$ , ограничивающие интервальный полином  $\mathbf{f}(x) = [-\varepsilon, \varepsilon] + \sum_{k=0}^K a_k x^k$  (сплошной чёрной линией);
- график регрессии, построенной методом наименьших квадратов (красной штрих-пунктирной линией).

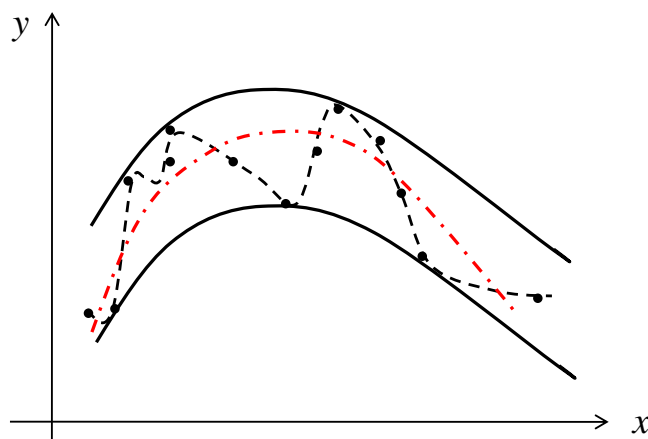


Рис. 1.5. Интервальная полиномиальная регрессия.

В результате описанной выше процедуры интервальной полиномиальной регрессии имеем для каждого измерительного канала аппроксимацию градуировочной характеристики в виде интервального полинома (1.7).

На основе полученных семейств градуировочных характеристик необходимо вычислить координатные составляющие перемещений торца лопатки, соответствующие определённым значениям цифровых кодов. Эта задача сводится к решению интервальной системы полиномиальных уравнений

$$\mathbf{F}(X) = \mathbf{C},$$

где  $\mathbf{F}(X) = (\mathbf{f}_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \mathbf{f}_n(x_1, x_2, \dots, x_n))^\top$  — вектор интервальных полиномов,  $\mathbf{C} = (\mathbf{c}_i) \in \mathbb{IR}^n$  — интервалы значений цифровых кодов. Отметим, что значения цифровых кодов с учётом погрешностей измерения задаются интервалами  $\mathbf{c}_i = [\underline{\mathbf{c}}_i, \bar{\mathbf{c}}_i]$ .

Определим функцию  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , зависящую от параметра  $P = (p_i) \in \mathbb{R}^n$ , где  $p_i \in \mathbf{p}_i = [-\varepsilon_i, \varepsilon_i] - \mathbf{c}_i$ , компоненты которой

$$\varphi_i(X, p_i) = \sum_{k_1=0}^{K_1} \sum_{k_2=0}^{K_2} \dots \sum_{k_n=0}^{K_n} a_{(i)k_1 k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} + p_i. \quad (1.8)$$

Тогда интервальную систему  $\mathbf{F}(X) = \mathbf{C}$  можно представить в виде

$$\varphi_i(X, \mathbf{p}_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

или

$$\Phi(X, P) = 0, \quad (1.9)$$

где  $\varphi_i(X, \mathbf{p}_i)$  — интервальное расширение функции (1.8) на интервале  $\mathbf{p}_i$ .

Таким образом, задача вычисления многомерных перемещений торца лопатки силовой установки с использованием семейств градуировочных характеристик, полученных на основе интервальной регрессии, и с учётом погрешностей измерения цифровых кодов состоит в нахождении оценки множества решений нелинейной системы уравнений, левые части которых представляют собой интервальные полиномы.

## Выводы к главе 1

В данной главе рассмотрены задачи моделирования и диагностики механических конструкций — параметрический синтез рычажных механизмов, вычисление многомерных перемещений элементов конструкции лопаточной силовой установки:

1. Приведён обзор существующих подходов и методов решения рассматриваемых задач.
2. Изложены математические постановки данных задач, в которых особое внимание уделяется наличию интервальных неопределённостей в исходных данных.

Можно сделать следующие выводы:

1. Анализ работ в области моделирования механических конструкций свидетельствует о целесообразности применения интервальных методов. Основными преимуществами интервальных методов является возможность в достаточно простой форме представлять факторы неопределённости и учитывать их при решении прикладных задач.
2. При параметрическом синтезе рычажных механизмов необходимо решать задачу оценивания множества решений интервальной системы линейных уравнений, на элементы матрицы которой наложены дополнительные связи в виде равенств.
3. Для анализа смещений торца лопатки силовой установки необходимо решать задачу оценивания множества решений системы интервальных полиномиальных уравнений.



## Глава 2. Интервальные системы линейных уравнений

### 2.1. Интервальные арифметики

Под *интервалом*  $\mathbf{a}$  будем понимать замкнутый отрезок  $[\underline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{a}}]$  вещественной оси  $\mathbb{R}^n$ , т. е. множество

$$[\underline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{a}}] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \underline{\mathbf{a}} \leq x \leq \overline{\mathbf{a}}\}.$$

Всюду далее интервалы и другие интервальные величины (векторы, матрицы) в отличие от неинтервальных или точечных величин обозначаются жирным шрифтом. Левую и правую границы интервала  $\mathbf{a}$  будем обозначать символами нижнего и верхнего подчеркивания, т. е.  $\underline{\mathbf{a}}$  и  $\overline{\mathbf{a}}$ , или  $\inf \mathbf{a}$  и  $\sup \mathbf{a}$  соответственно.

Введем в рассмотрение следующие характеристики интервала  $\mathbf{a}$ :

$$\text{mid } \mathbf{a} = \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{a}}) \text{ — середина,}$$

$$\text{rad } \mathbf{a} = \frac{1}{2}(\overline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{a}}) \text{ — радиус,}$$

$$\text{wid } \mathbf{a} = \overline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{a}} \text{ — ширина,}$$

$$\langle \mathbf{a} \rangle = \min\{|a| \mid a \in \mathbf{a}\} = \begin{cases} \min\{|\underline{\mathbf{a}}|, |\overline{\mathbf{a}}|\}, & \text{если } 0 \notin \mathbf{a}, \\ 0, & \text{если } 0 \in \mathbf{a} \end{cases} \text{ — мигнитуда,}$$

$$|\mathbf{a}| = \max\{|a| \mid a \in \mathbf{a}\} = \max\{|\underline{\mathbf{a}}|, |\overline{\mathbf{a}}|\} \text{ — абсолютная величина (магнитуда).}$$

Интервал  $\mathbf{a}$  называется *положительным (неотрицательным)*, если  $\underline{\mathbf{a}} > 0$  ( $\underline{\mathbf{a}} \geq 0$ ). Аналогично определяется *отрицательный (неположительный)* интервал. Если нижняя граница интервала равна верхней, то интервал содержит одно число и называется *вырожденным*.

Два интервала  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  равны тогда и только тогда, когда  $\underline{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{b}}$  и  $\overline{\mathbf{a}} = \overline{\mathbf{b}}$ . Можно распространить отношение « $\leq$ » между вещественными числами на множество интервалов, т.е. задать на этом множестве частичный порядок. Это

можно сделать неединственным образом, например,

$$\mathbf{a} \leq \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\mathbf{a}} \leq \underline{\mathbf{b}},$$

или

$$\mathbf{a} \leq \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\mathbf{a}} \leq \underline{\mathbf{b}} \quad \text{и} \quad \bar{\mathbf{a}} \leq \bar{\mathbf{b}}.$$

Поскольку интервалы являются по сути дела множествами, то естественно определить частичное упорядочение по включению:

$$\mathbf{a} \subseteq \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\mathbf{a}} \geq \underline{\mathbf{b}} \quad \text{и} \quad \bar{\mathbf{a}} \leq \bar{\mathbf{b}}.$$

Над интервалами определим операции сложения, вычитания, умножения и деления:

$$\mathbf{a} \star \mathbf{b} = \{a \star b \mid a \in \mathbf{a}, b \in \mathbf{b}\}, \quad \text{где } \star \in \{+, -, \cdot, /\},$$

т. е. интервал  $\mathbf{a} \star \mathbf{b}$  содержит всевозможные числа  $a \star b$ , где  $a \in \mathbf{a}$ , и  $b \in \mathbf{b}$ .

Тогда имеют место следующие соотношения:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = [\underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}],$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = [\underline{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}}],$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = [\min\{\underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}}\}, \max\{\underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}}\}],$$

$$\mathbf{a}/\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (1/\mathbf{b}), \quad \text{где } 1/\mathbf{b} = [1/\bar{\mathbf{b}}, 1/\underline{\mathbf{b}}], \quad 0 \notin \mathbf{b}.$$

Алгебраическая система  $\langle \mathbb{IR}, +, -, \cdot, / \rangle$ , образованная множеством всех вещественных интервалов  $\mathbf{a} = [\underline{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}]$  с бинарными операциями сложения, вычитания, умножения и деления, которые определены выше, называется *классической интервальной арифметикой*.

Определим также для неотрицательного целого  $n$

$$\mathbf{a}^n = \begin{cases} [1, 1], & \text{если } n = 0, \\ [\underline{\mathbf{a}}^n, \bar{\mathbf{a}}^n], & \text{если } \underline{\mathbf{a}} \geq 0 \text{ или если } n \text{ нечетное,} \\ [\bar{\mathbf{a}}^n, \underline{\mathbf{a}}^n], & \text{если } \bar{\mathbf{a}} \leq 0 \text{ и } n \text{ четное,} \\ [0, \max\{\underline{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}\}], & \text{если } \underline{\mathbf{a}} \leq 0 \leq \bar{\mathbf{a}} \text{ и } n > 0 \text{ четное.} \end{cases}$$

Легко проверить, что интервальные операции обладают следующими свойствами:

$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$  — коммутативность сложения,

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$  — коммутативность умножения,

$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$  — ассоциативность сложения,

$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$  — ассоциативность умножения.

Свойство дистрибутивности умножения относительно сложения не выполняется, поскольку в общем случае  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \neq \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ . Имеет место более слабое свойство субдистрибутивности:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \subseteq \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}.$$

Заметим также, что  $\mathbb{IR}$  не является полем: элемент  $\mathbf{a} \in \mathbb{IR}$ , где  $\mathbf{a}$  — невырожденный интервал, не имеет обратных элементов по сложению и умножению, так как если  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = 0$ ,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 1$ , то интервалы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  должны быть вырожденными.

Для улучшения алгебраических и порядковых свойств интервальной арифметики  $\mathbb{IR}$  в работах Э. Каухера [63–65] предложено её расширение, получившее название *полной интервальной арифметики*  $\mathbb{KIR}$ . Элементами интервальной арифметики Каухера являются любые пары вещественных чисел  $[\underline{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}]$ . Если  $\underline{\mathbf{a}} \leq \bar{\mathbf{a}}$ , то интервал  $\mathbf{a}$  называется *правильным*, в противном случае — *неправильным*.

Правильные и неправильные интервалы меняются местами в результате отображения *дуализации*  $\text{dual} : \mathbb{KIR} \rightarrow \mathbb{KIR}$ , переворачивающего концы интервала, т. е. такого что

$$\text{dual } \mathbf{a} = [\bar{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{a}}].$$

Правильной проекцией интервала  $\mathbf{a}$  называется величина

$$\text{pro } \mathbf{a} = \begin{cases} \mathbf{a}, & \text{если } \mathbf{a} \text{ правильный,} \\ \text{dual } \mathbf{a}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Аналогично классической интервальной арифметике  $\mathbb{IR}$  отношение включения одного интервала в другой определяется в  $\mathbb{KR}$  следующим образом:

$$\mathbf{a} \subseteq \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\mathbf{a}} \geq \underline{\mathbf{b}} \text{ и } \bar{\mathbf{a}} \leq \bar{\mathbf{b}}.$$

Для интервалов  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{KR}$  условимся считать, что  $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$  тогда и только тогда, когда  $\underline{\mathbf{a}} \leq \underline{\mathbf{b}}$  и  $\bar{\mathbf{a}} \leq \bar{\mathbf{b}}$ . Интервал называется неотрицательным, т. е.  $\mathbf{a} \geq 0$ , если неотрицательны оба его конца. Интервал называется неположительным, т. е.  $\mathbf{a} \leq 0$ , если неположительны оба его конца.

Сложение, вычитание и деление интервалов в  $\mathbb{KR}$  вычисляются так же, как в классической интервальной арифметике. Для умножения в полной интервальной арифметике можно использовать формулы, предложенные А.В. Лакеевым в [80, 81]. Если через  $a^+$  и  $a^-$  обозначить положительную и отрицательную части числа  $a$ , т. е.  $a^+ = \max\{a, 0\}$  и  $a^- = \max\{-a, 0\}$ , то для любых интервалов в  $\mathbb{KR}$  справедливо

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = [\max\{\underline{\mathbf{a}}^+ \underline{\mathbf{b}}^+, \bar{\mathbf{a}}^- \bar{\mathbf{b}}^-\} - \max\{\bar{\mathbf{a}}^+ \underline{\mathbf{b}}^-, \underline{\mathbf{a}}^- \bar{\mathbf{b}}^+\}, \\ \max\{\bar{\mathbf{a}}^+ \bar{\mathbf{b}}^+, \underline{\mathbf{a}}^- \underline{\mathbf{b}}^-\} - \max\{\underline{\mathbf{a}}^+ \bar{\mathbf{b}}^-, \bar{\mathbf{a}}^- \underline{\mathbf{b}}^+\}].$$

Из этой формулы можно получить более простые формулы для частных случаев: когда один из интервалов является правильным и когда один интервал правильный, а другой неправильный.

Каждый элемент  $\mathbf{a}$  из  $\mathbb{KR}$  имеет единственный обратный по сложению (противоположный), обозначаемый через  $\text{орр } \mathbf{a}$ , и из равенства  $\mathbf{a} + \text{орр } \mathbf{a} = 0$  следует  $\text{орр } \mathbf{a} = [-\underline{\mathbf{a}}, -\bar{\mathbf{a}}]$ . Операция, обратная сложению, так называемое внутреннее (алгебраическое) вычитание в  $\mathbb{KR}$ , обозначается через  $\ominus$  и определяется следующим образом

$$\mathbf{a} \ominus \mathbf{b} = \mathbf{a} + \text{орр } \mathbf{b} = [\underline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{b}}].$$

Для интервалов  $\mathbf{a}$  из  $\mathbb{KR}$ , которые не содержат нуль и сами не содержатся в нуле, существует единственный обратный относительно умножения

элемент, который обозначается через  $\text{inv } \mathbf{a}$ , и из равенства  $\mathbf{a} \cdot \text{inv } \mathbf{a} = 1$  следует

$$\text{inv } \mathbf{a} = [1/\underline{\mathbf{a}}, 1/\overline{\mathbf{a}}].$$

Операция, обратная умножению, так называемое внутреннее (алгебраическое) деление в  $\mathbb{KR}$ , обозначается через  $\odot$  и определяется как

$$\mathbf{a} \odot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \text{inv } \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot [1/\underline{\mathbf{b}}, 1/\overline{\mathbf{b}}].$$

Отметим, что полная интервальная арифметика является группой по сложению, а группу по умножению в  $\mathbb{KR}$  образуют интервалы  $\mathbf{a}$ , для которых  $0 \notin \text{pro } \mathbf{a}$ .

Все операции как классической, так и полной интервальных арифметик являются монотонными по включению, т. е. если  $\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}'$  из  $\mathbb{IR}$  или  $\mathbb{KR}$ , то

$$\mathbf{a} \subseteq \mathbf{a}', \mathbf{b} \subseteq \mathbf{b}' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \star \mathbf{b} \subseteq \mathbf{a}' \star \mathbf{b}'$$

для любой арифметической операции  $\star \in \{+, -, \cdot, /\}$ .

Расстояние  $\text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  между интервалами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  из  $\mathbb{IR}$  или  $\mathbb{KR}$  определяется следующим образом

$$\text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \max\{|\underline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}}|, |\overline{\mathbf{a}} - \overline{\mathbf{b}}|\}.$$

Множества интервалов  $\mathbb{IR}$  и  $\mathbb{KR}$  с введенной выше метрикой являются полными метрическими пространствами. Последовательности интервалов сходятся, если сходятся последовательности границ интервалов. Арифметические операции в  $\mathbb{IR}$  и  $\mathbb{KR}$  являются непрерывными.

Более подробное описание интервальных арифметик можно найти в работах [5, 37, 41]. Классическая интервальная арифметика реализована на многих компьютерных платформах и поддерживается несколькими языками программирования. В частности, в пакете интервальных арифметических программ INTLAB [109] реализована интервальная арифметика в рамках среды MATLAB.

## 2.2. Интервальные векторы и матрицы

*Интервальный вектор* — это упорядоченный кортеж из интервалов, расположенный вертикально (вектор-столбец) или горизонтально (вектор-строка). Интервальный вектор  $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$  есть декартово произведение интервалов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ , следовательно, геометрически он представляет собой прямоугольный параллелепипед в пространстве  $\mathbb{R}^n$  со сторонами, параллельными координатным осям, который мы будем называть *брусом*. Множество интервальных векторов, компоненты которых принадлежат  $\mathbb{IR}$ , мы будем обозначать через  $\mathbb{IR}^n$ , а множество интервальных векторов с компонентами из  $\mathbb{KR}$  — через  $\mathbb{KR}^n$ .

*Интервальная матрица* — это прямоугольная таблица, составленная из интервалов  $\mathbb{IR}$  либо  $\mathbb{KR}$

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \cdots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \cdots & \mathbf{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_{m1} & \mathbf{a}_{m2} & \cdots & \mathbf{a}_{mn} \end{pmatrix},$$

которую можно обозначать как  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$ .

Для интервальной матрицы  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$  определим точечные матрицы  $\underline{\mathbf{A}}$  и  $\overline{\mathbf{A}}$ , как матрицы, образованные элементами  $\underline{\mathbf{a}}_{ij}$  и  $\overline{\mathbf{a}}_{ij}$  соответственно. Аналогичным образом для интервального вектора  $\mathbf{a}$  определяются точечные векторы  $\underline{\mathbf{a}}$  и  $\overline{\mathbf{a}}$ . Операции взятия середины интервала, его радиуса и ширины, абсолютного значения (магнитуды), а также операции dual, pro, opp к интервальным векторам и матрицам будут применяться покомпонентно и поэлементно. Например,  $\text{mid } \mathbf{A}$  — точечная матрица, составленная из середин интервальных элементов матрицы  $\mathbf{A}$ .

Если  $S$  — непустое ограниченное множество в  $\mathbb{R}^n$  (или  $\mathbb{R}^{m \times n}$ ), то его *интервальной оболочкой*  $\square S$  называется наименьший по включению интервальный вектор (или матрица), содержащий  $S$ .

Требование того, чтобы результаты интервальных матричных операций совпадали с множествами всевозможных результатов тех же операций между точечными представителями этих матриц оказывается в общем случае невыполнимым. Поэтому ограничиваются более слабым требованием

$$\mathbf{A} \star \mathbf{B} = \square\{A \star B \mid A \in \mathbf{A}, B \in \mathbf{B}\},$$

где  $\star \in \{+, -, \cdot\}$ . Теперь определим операции над интервальными матрицами следующим образом.

*Сумма (разность) двух интервальных матриц* одинакового размера есть интервальная матрица того же размера, образованная поэлементными суммами (разностями) операндов. Если  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$  и  $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_{ij})$  — интервальные матрицы размеров  $m \times l$  и  $l \times n$  соответственно, то *произведение матриц*  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  есть матрица  $\mathbf{C} = (\mathbf{c}_{ij})$  размера  $m \times n$ , такая что

$$\mathbf{c}_{ij} = \sum_{k=1}^l \mathbf{a}_{ik} \mathbf{b}_{kj}.$$

Взятие интервальной оболочки точечных результатов при интервальном матрично-векторном умножении приводит к так называемому *эффекту обёртывания*. Эффект обёртывания возникает в интервальных вычислениях вследствие многократной замены сложных по конфигурации множеств точечных результатов на более простые по форме оценивающие множества - брусы, что приводит в итоге к округлению конечного результата.

Отметим, что из-за отсутствия дистрибутивности в интервальных арифметиках интервальные векторы и матрицы не образуют линейных векторных пространств относительно введённых выше операций. Сложение интервальных матриц обладает свойствами коммутативности и ассоциативности. Для интервального матричного умножения не выполняются свойства дистрибутивности и ассоциативности.

Для интервальных векторных и матричных операций аналогично одномерному случаю имеет место важное свойство монотонности по включению:

для любых интервальных матриц  $\mathbf{A}, \mathbf{A}', \mathbf{B}, \mathbf{B}'$  соответствующих размеров и любой операции  $\star \in \{+, -, \cdot\}$

$$\mathbf{A} \subseteq \mathbf{A}', \mathbf{B} \subseteq \mathbf{B}' \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A} \star \mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}' \star \mathbf{B}'.$$

Интервальная матрица  $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  называется *неособенной*, если неособенны все точечные  $n \times n$ -матрицы  $A \in \mathbf{A}$ , в противном случае матрица  $\mathbf{A}$  называется *особенной*.

Интервальная матрица  $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  имеет *диагональное преобладание*, если диагонально преобладающими являются все точечные матрицы  $A \in \mathbf{A}$ . Отсюда следует, что  $\mathbf{A}$  имеет диагональное преобладание, если

$$\langle \mathbf{a}_{ii} \rangle > \sum_{j \neq i} |\mathbf{a}_{ij}| \quad \text{для всех } i = 1, 2, \dots, n.$$

Для неособенной матрицы  $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  *обратной интервальной матрицей* называют интервальную оболочку множества всех обратных для точечных матриц, содержащихся в  $\mathbf{A}$ , т. е.

$$\mathbf{A}^{-1} = \square\{A^{-1} \mid A \in \mathbf{A}\}.$$

Нахождение обратной интервальной матрицы является NP-трудной задачей в общем случае [53]. Поэтому в качестве обратной интервальной матрицы  $\mathbf{A}^{-1}$  часто берут по возможности наиболее точную внешнюю оценку множества  $\{A^{-1} \mid A \in \mathbf{A}\}$ .

Матрица  $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  называется *интервальной M-матрицей*, если каждая вещественная матрица  $A \in \mathbf{A}$  является M-матрицей, т. е. представима в виде  $A = sI - P$ , где  $P$  — неотрицательная матрица,  $s > \rho(P)$ ,  $\rho(P)$  — спектральный радиус матрицы  $P$ . Справедливо также, что матрица  $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  является M-матрицей тогда и только тогда, когда её внедиагональные элементы неположительны и существует положительный вектор  $v > 0$ , такой что  $\mathbf{A}v > 0$ .



Компаратом интервальной матрицы  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij}) \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  называется точечная матрица  $\langle \mathbf{A} \rangle = (a_{ij}^*) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , такая что

$$a_{ij}^* = \begin{cases} \langle \mathbf{a}_{ij} \rangle, & \text{если } i = j, \\ -|\mathbf{a}_{ij}|, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Матрица  $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  является *интервальной H-матрицей* тогда и только тогда, когда её компарант  $\langle \mathbf{A} \rangle$  является *M-матрицей*. Можно показать, что матрица  $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  является *H-матрицей* тогда и только тогда, когда существует положительный вектор  $v > 0$ , такой что  $\langle \mathbf{A} \rangle v > 0$ . Положив вектор  $v = (1, 1, \dots, 1)^\top$ , получим следующее утверждение: интервальные матрицы, имеющие диагональное преобладание, являются *H-матрицами*.

Заметим, что интервальные *M-матрицы* и *H-матрицы* являются неособенными.

### 2.3. Задачи внешнего и внутреннего оценивания множеств решений интервальных систем линейных уравнений

Одной из типичных задач интервального анализа, часто встречающейся на практике, является решение интервальной системы линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ). Предположим, известно, что компоненты матрицы системы и вектора правых частей лежат в заданных границах, т. е. матрица системы  $\mathbf{A}$  и вектор правых частей  $\mathbf{b}$  являются интервальными. Такая ситуация возможна в случае, когда данные системы изменяются в пределах некоторых допустимых отклонений или заданы с некоторыми ошибками.

В данной работе мы будем рассматривать ИСЛАУ вида

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{11}x_1 + \mathbf{a}_{12}x_2 + \dots + \mathbf{a}_{1n}x_n = \mathbf{b}_1, \\ \mathbf{a}_{21}x_1 + \mathbf{a}_{22}x_2 + \dots + \mathbf{a}_{2n}x_n = \mathbf{b}_2, \\ \vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \mathbf{a}_{n1}x_1 + \mathbf{a}_{n2}x_2 + \dots + \mathbf{a}_{nn}x_n = \mathbf{b}_n \end{cases} \quad (2.1)$$

с интервальными коэффициентами  $\mathbf{a}_{ij}$  и интервальными правыми частями  $\mathbf{b}_i$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , или, кратко,

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b}, \quad (2.2)$$

где  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$  — интервальная  $n \times n$ -матрица и  $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_i)$  —  $n$ -вектор.

Системы (2.1)–(2.2) мы мыслим как семейства обычных точечных (неинтервальных) линейных систем  $Ax = b$  той же структуры с матрицами  $A \in \mathbf{A}$  и векторами  $b \in \mathbf{b}$ .

Задача решения интервальной системы линейных уравнений в большинстве случаев формулируется следующим образом: необходимо найти или оценить её множество решений

$$\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(Ax = b) \}, \quad (2.3)$$

образованное всевозможными решениями точечных систем  $Ax = b$  с  $A \in \mathbf{A}$  и  $b \in \mathbf{b}$ . Множество  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  называется *объединённым множеством решений* ИСЛАУ.

Для описания множества  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , как видно из (2.3), мы применили логические кванторы существования по отношению к интервально заданным параметрам системы, т. е.  $(\exists A \in \mathbf{A})$  и  $(\exists b \in \mathbf{b})$ .

Для интервальных систем уравнений существуют другие множества решений, различающиеся использованием логических кванторов — либо квантора всеобщности « $\forall$ », либо квантора существования « $\exists$ ». В первом случае говорят о  $\forall$ -типе (А-типе) неопределённости, во втором случае — о  $\exists$ -типе (Е-типе) неопределённости интервальных элементов ИСЛАУ. Множества решений интервальных линейных систем уравнений, для которых выделяющий предикат имеет АЕ-форму, т. е. такой, что все вхождения кванторов существования « $\exists$ » предшествуют в нём вхождениям кванторов всеобщности « $\forall$ », называются *множествами АЕ-решений* [37].

Для интервальной линейной системы  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  можно описать  $2^{m(n+1)}$  всевозможных множеств АЕ-решений, выбирая тот или иной тип логического

квантора для элементов  $m \times n$ -матрицы  $\mathbf{A}$  и компонентов  $m$ -вектора  $\mathbf{b}$ . Распределение типов неопределённости по интервальным элементам системы уравнений можно задать в виде дизъюнктивного разложения интервальной матрицы  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\vee + \mathbf{A}^\exists$  и правой части  $\mathbf{b} = \mathbf{b}^\vee + \mathbf{b}^\exists$ . Здесь элементы матрицы  $\mathbf{A}^\vee = (a_{ij}^\vee)$  равны соответствующим элементам матрицы  $\mathbf{A}$ , если они имеют А-тип неопределённости, остальные элементы матрицы равны нулю. Аналогичным образом определяются матрица  $\mathbf{A}^\exists = (a_{ij}^\exists)$  и векторы  $\mathbf{b}^\vee = (b_i^\vee)$ ,  $\mathbf{b}^\exists = (b_i^\exists)$ .

Интервальные матрицу  $\mathbf{A}^c$  и вектор  $\mathbf{b}^c$ , определяемые посредством  $\mathbf{A}^c := \mathbf{A}^\vee + \text{dual } \mathbf{A}^\exists$ ,  $\mathbf{b}^c := \text{dual } \mathbf{b}^\vee + \mathbf{b}^\exists$ , станем называть *характеристическими* для множества АЕ-решений ИСЛАУ, задаваемого дизъюнктивными разложениями  $\mathbf{A}$  на  $\mathbf{A}^\vee$  и  $\mathbf{A}^\exists$  и  $\mathbf{b}$  на  $\mathbf{b}^\vee$  и  $\mathbf{b}^\exists$ .

В данной работе мы рассматриваем только объединенное множество решений  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , поэтому в дальнейшем будем называть его термином «множество решений». Будем полагать также, что интервальная матрица  $\mathbf{A}$  является неособенной, т. е. содержит только неособенные (невырожденные) точечные матрицы. Тогда множество решений  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  системы (2.1)–(2.2) ограничено.

Известно, что объединённое множество решений интервальной линейной алгебраической системы имеет следующую элегантную характеристику Оеттли-Прагера:

**Теорема 2.1** (теорема Оеттли-Прагера) [96]. *Точка  $x \in \mathbb{R}^n$  принадлежит множеству  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  решений системы  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  тогда и только тогда, когда*

$$|(\text{mid } \mathbf{A})x - \text{mid } \mathbf{b}| \leq \text{rad } \mathbf{A} \cdot |x| + \text{rad } \mathbf{b}. \quad (2.4)$$

Суть теоремы Оеттли-Прагера состоит в том, что множество решений  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  описывается простым векторным неравенством (2.4). В общем случае множество  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  невыпуклое. Если  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  принадлежит одному из ортантов  $\mathbb{R}^n$ , то компоненты правой части неравенства (2.4) являются линейными

функциями и, следовательно, в этом случае  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  представляет собой выпуклый политоп.

Для описания множества  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  решений интервальной системы  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  можно использовать также следующий результат [49].

**Теорема 2.2** (характеризация Бека). Если  $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{IR}^m$ , то

$$\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}x \cap \mathbf{b} \neq \emptyset\}.$$

**Пример 2.1.** Рассмотрим множество решений интервальной системы линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & [0, 1] \\ [0, 1] & [-4, -1] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [0, 2] \\ [0, 2] \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Если вектор  $x$  принадлежит квадранту  $\mathcal{O}_1 = \{(x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ , то

$$\begin{aligned} [x_1, x_1 + x_2] \cap [0, 2] &\neq \emptyset, \\ [-4x_2, x_1 - x_2] \cap [0, 2] &\neq \emptyset. \end{aligned}$$

Отсюда получим систему неравенств

$$\begin{cases} x_1 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \geq 0, \\ -4x_2 \leq 2, \\ x_1 - x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Следовательно, в квадранте  $\mathcal{O}_1$  множество решений  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  описывается неравенствами:

$$0 \leq x_1 \leq 2, \quad 0 \leq x_2 \leq x_1.$$

Неравенства

$$-2 \leq x_2 \leq 0, \quad 0 \leq x_1 \leq 2 - x_2,$$

описывающие  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  в квадранте  $\mathcal{O}_4 = \{(x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0, x_2 \leq 0\}$  находим аналогичным образом. Пересечение  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  с квадрантами  $\mathcal{O}_2$  и  $\mathcal{O}_3$  пусто. На рис. 2.1 изображено множество  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  решений системы (2.5).

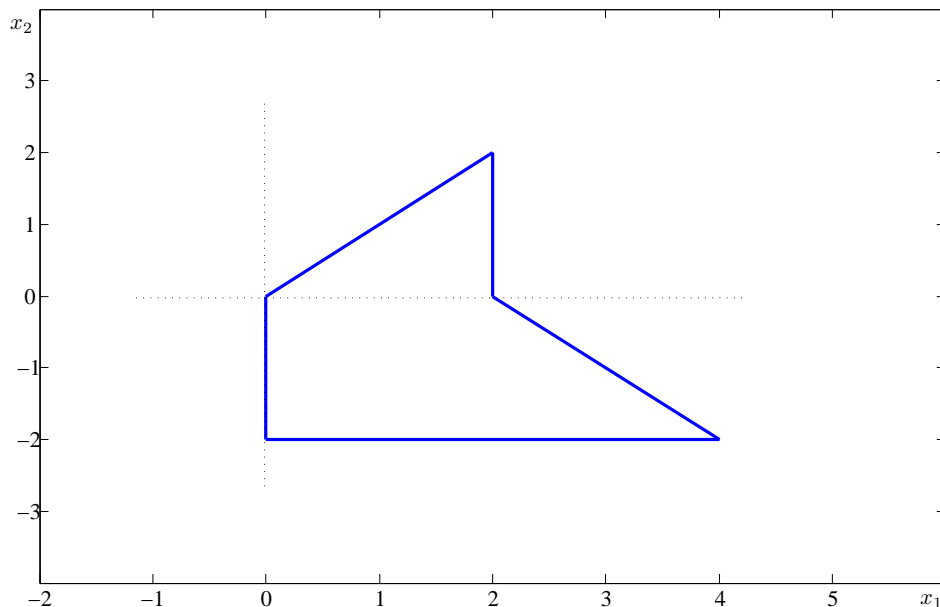


Рис. 2.1. Множество решений системы (2.5).

Очевидно при большой размерности интервальной системы линейных уравнений множество её решений может иметь достаточно сложную конфигурацию. Прямое описание этого множества, при котором выписываются все ограничивающие гиперплоскости, становится трудоёмким и практически бесполезным. По этой причине для практических целей удобнее находить приближения или оценки множества решений в виде интервальных векторов или брусков со сторонами, параллельными осям координат.

В диссертационной работе будут использоваться следующие способы оценивания:

- 1) *внешнее интервальное оценивание*, когда ищется брус  $\mathbf{V} \subset \mathbb{I}\mathbb{R}^n$ , объёмлющий множество  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  решений интервальной системы уравнений  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ , т. е.  $\mathbf{V} \supseteq \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ;

- 2) *внутреннее интервальное оценивание*, когда ищется брус  $\mathbf{U} \subset \mathbb{IR}^n$ , содержащийся во множестве  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  решений интервальной системы уравнений  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , т.е.  $\mathbf{U} \subseteq \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ .

Если интервальная матрица  $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  неособенна и для неё вычислена обратная матрица  $\mathbf{A}^{-1}$ , то вектор  $\mathbf{V} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$  является внешней оценкой множества решений  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , т.е.  $\square \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \subseteq \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ . Однако эта оценка может достаточно сильно отличаться от интервальной оболочки множества  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ .

Если брус  $\mathbf{V}$  имеет наименьшую возможную ширину по каждой компоненте, т.е. является интервальной оболочкой множества  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , то  $\mathbf{V}$  называется *оптимальной внешней оценкой* множества решений интервальной системы  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ .

#### 2.4. Методы внешнего оценивания множеств решений интервальных систем линейных уравнений

Задаче внешнего оценивания множества решений ИСЛАУ, различным аспектам её решения посвящено значительное количество монографий и статей [2, 37, 57, 66, 91, 93, 102, 106]. Для получения внешней оценки множества решений можно использовать интервальные аналоги хорошо известных в линейной алгебре методов Гаусса и Гаусса-Зейделя. В случае, когда интервальная матрица  $\mathbf{A}$  является  $M$ -матрицей, внешняя оценка, полученная в результате применения интервального метода Гаусса является оптимальной (см. [93]). Однако если элементы ИСЛАУ существенно интервальные, то качество оценивания множества  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  интервальным методом Гаусса достаточно низкое.

Интервальный метод Гаусса-Зейделя относится к так называемым локальным оценивающим процедурам, суть которых состоит в последовательном уточнении внешней оценки не всего множества решений ИСЛАУ, а той его части, которая принадлежит некоторому заданному начальному брусу. Размеры начального бруса определяются в большинстве практических задач исходя из

физических или каких-либо иных соображений. Априори задаваемый начальный брус может содержать все множество решений интервальной системы.

Среди итерационных методов можно назвать также метод Кравчика [72] и его модификацию, предложенную Роном [103].

Для получения внешней оценки множества решений ИСЛАУ широко применяется процедура Хансена-Блика-Рона [56,57]. Метод применим для ИСЛАУ, матрица  $\mathbf{A}$  которой является интервальной  $H$ -матрицей, а если средняя матрица для  $\mathbf{A}$  диагональна, полученная внешняя оценка оптимальна. Качество оценивания в случае когда средняя матрица для  $\mathbf{A}$  не является диагональной можно улучшить, применяя процедуру Хансена-Блика-Рона совместно с интервальным методом Гаусса-Зейделя [94].

С середины 90-х годов применяется так называемый формальный (алгебраический) подход к внешнему и внутреннему оцениванию множества решений ИСЛАУ, который сводит исходную постановку к задаче нахождения формального решения некоторой вспомогательной интервальной системы уравнений [37].

Для оптимального внешнего оценивания множеств решений интервальных систем линейных уравнений можно использовать метод Рона [9, 102], методы дробления решений (PSS-методы), методы дробления параметров (PPS-методы), а также их модификации [19, 37, 83, 84, 111, 112].

Отметим, что вычисление для множества решений внешних покоординатных оценок с заданной точностью является NP-трудной задачей, т.е. для её решения требуются не менее, чем экспоненциальные в зависимости от размерности системы  $n$  трудозатраты [73, 74, 82, 104]. В силу труднорешаемости этой задачи соответствующие численные методы по своей структуре близки переборным алгоритмам дискретной оптимизации.

### 2.4.1. Интервальный метод Гаусса

Интервальный метод Гаусса является интервальным аналогом хорошо известного в линейной алгебре метода исключения Гаусса, состоящего в преобразовании матрицы системы к верхнему треугольному виду (прямой ход) и последовательном вычислении значений неизвестных (обратный ход). Алгоритм интервального метода такой же, как и в вещественном случае, с той лишь разницей, что он оперирует интервальными величинами с помощью операций интервальной арифметики (описание метода см. [37, 93]). Из свойства монотонности интервальной арифметики  $\mathbb{IR}$  по включению следует, что результат выполнения интервального метода Гаусса содержит объединённое множество решений ИСЛАУ.

Нетривиальным моментом реализации интервального метода Гаусса является деление на диагональные элементы: оно оказывается невозможным, если эти интервальные элементы содержат нуль. При выполнении прямого хода алгоритма можно использовать перестановку строк матрицы системы для выбора диагонального элемента с наибольшей мигнитудой. Именно, сначала среди элементов первого столбца матрицы выбираем элемент с наибольшей мигнитудой, перемещаем его, если это необходимо, на крайнее верхнее положение перестановкой строк и вычитаем получившуюся после перестановки первую строку из остальных строк, домножив её на величину, равную отношению первого элемента каждой из этих строк к первому элементу первой строки. После этого первую строку и первый столбец мысленно вычёркиваем и совершаем указанные выше преобразования над оставшейся матрицей.

Работоспособность интервального метода Гаусса зависит от свойств интервальной матрицы системы. Если матрица  $\mathbf{A}$  является  $H$ -матрицей, то интервальный метод Гаусса применим к интервальной линейной системе  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  для любого  $\mathbf{b} \in \mathbb{IR}^n$  (теорема Алефельда [37]). В случае, когда матрица  $\mathbf{A}$  есть  $M$ -матрица и справедливо хотя бы одно из условий  $\mathbf{b} < 0$ ,  $0 \in \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{b} > 0$ , то



результатом работы интервального метода Гаусса будет оптимальная внешняя оценка множества решений.

Для придания интервальной матрице системы требуемых свойств можно применить так называемое *предобуславливание* — одновременное домножение матрицы  $\mathbf{A}$  и вектора правой части  $\mathbf{b}$  слева на некоторую точечную матрицу, например, обратную среднюю матрицу  $(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}$ . Таким образом, вместо исходной системы получаем *предобусловленную интервальную систему*

$$((\text{mid } \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}) x = (\text{mid } \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b},$$

матрица которой является  $H$ -матрицей, если в исходной ИСЛАУ интервальная матрица  $\mathbf{A}$  сильно неособена. В этом случае предобуславливание обратной средней матрицей гарантирует работу интервального метода Гаусса [90].

Отметим, что качество внешних оценок объединённого множества решений ИСЛАУ, получаемых интервальным методом Гаусса, не очень высокое и ухудшается с возрастанием размерности матрицы системы и увеличением радиусов её интервальных элементов.

#### 2.4.2. Интервальный метод Гаусса-Зейделя

Интервальный метод Гаусса-Зейделя является итерационной процедурой для уточнения внешней оценки множества решений. Пусть  $\mathbf{x}^{(k)} \in \mathbb{IR}^n$  — некоторое приближение множества решений ИСЛАУ  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  с матрицей  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$ , в которой элементы главной диагонали не содержат нуля, т. е.  $0 \notin \mathbf{a}_{ii}$  для  $i = 1, 2, \dots, n$ . Уточненную оценку  $\tilde{\mathbf{x}}$  находим следующим образом

$$\tilde{x}_i = x_i^{(k)} \cap \left( \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \mathbf{a}_{ij} \tilde{x}_j - \sum_{j=i+1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j^{(k)} \right) / \mathbf{a}_{ii}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Если расстояние между векторами  $\mathbf{x}^{(k)}$  и  $\tilde{\mathbf{x}}$  больше заданной малой величины  $\varepsilon > 0$ , полагаем

$$\mathbf{x}^{(k+1)} \leftarrow \tilde{\mathbf{x}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

В этом итерационном процессе компоненты нового внешнего приближения множества решений находим последовательно друг за другом посредством пересечения старой и новой оценок, причём уточнённые новые компоненты сразу же привлекаются для расчёта следующих компонент нового приближения.

Интервальный метод Гаусса-Зейделя применяют обычно после предобуславливания системы. Сходимость метода зависит от свойств матрицы системы. Если матрица  $\mathbf{A}$  системы является  $H$ -матрицей, то любой достаточно широкий начальный интервальный вектор  $\mathbf{x} \in \mathbb{IR}^n$  улучшается методом Гаусса-Зейделя (теорема Ноймайера). Если  $\mathbf{A}$  является  $M$ -матрицей, то метод Гаусса-Зейделя сходится к оптимальной интервальной оценке множества решений  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , будучи начатым из любого начального приближения (теорема Барта-Нудинга).

### 2.4.3. Метод Кравчика и его модификация

Пусть интервальная линейная система  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  предобусловлена обратной средней матрицей  $\mathbf{C} = (\text{mid } \mathbf{A})^{-1}$ . Предположим, что интервальный вектор  $\mathbf{x}^{(k)}$  ограничивает множество решений ИСЛАУ, т. е.  $\mathbf{x}^{(k)} \supseteq \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ . Тогда для любой точечной матрицы  $\tilde{\mathbf{A}} \in \mathbf{A}$  и точечного вектора  $\tilde{\mathbf{b}} \in \mathbf{b}$  справедливо

$$\tilde{\mathbf{A}}^{-1}\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{C}\tilde{\mathbf{b}} + (\mathbf{I} - \mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}})\tilde{\mathbf{A}}^{-1}\tilde{\mathbf{b}} \in \mathbf{C}\mathbf{b} + (\mathbf{I} - \mathbf{C}\mathbf{A})\mathbf{x}^{(k)},$$

и можно заключить, что

$$\text{из } \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \subseteq \mathbf{x}^{(k)} \text{ следует } \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \subseteq (\mathbf{C}\mathbf{b} + (\mathbf{I} - \mathbf{C}\mathbf{A})\mathbf{x}^{(k)}) \cap \mathbf{x}^{(k)}. \quad (2.6)$$

Отсюда получим итерационный метод Кравчика [72]

$$\mathbf{x}^{(k+1)} \leftarrow (\mathbf{C}\mathbf{b} + (\mathbf{I} - \mathbf{C}\mathbf{A})\mathbf{x}^{(k)}) \cap \mathbf{x}^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.7)$$

где в качестве начального приближения  $\mathbf{x}^{(0)}$  можно взять брус

$$\mathbf{x}^{(0)} = ([-\alpha, \alpha], \dots, [-\alpha, \alpha])^\top,$$

$$\text{с } \alpha = \frac{\|C\mathbf{b}\|_\infty}{1 - \beta} \text{ и } \beta = \|I - C\mathbf{A}\|_\infty < 1.$$

Итерационный процесс (2.7) будет остановлен в том случае, когда расстояние между векторами  $\mathbf{x}^{(k+1)}$  и  $\mathbf{x}^{(k)}$ , полученными на текущем и предыдущем шагах алгоритма, будет незначительно отличаться от нуля.

Рассмотрим теперь модификацию метода Кравчика, которая реализована в пакете INTLAB — популярном свободно распространяемом интервальном расширении МАТЛАВ'а [60]. Умножим обратную среднюю матрицу  $C = (\text{mid } \mathbf{A})^{-1}$  на средний вектор  $\text{mid } \mathbf{b}$  правой части ИСЛАУ и вычислим точечное решение  $x_s = C \cdot \text{mid } \mathbf{b}$ . Применив (2.6) к внешней оценке  $\mathbf{d}^{(k)}$  множества решений  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b} - \mathbf{A}x_s)$ , получим модифицированный метод Кравчика

$$\mathbf{d}^{(k+1)} \leftarrow (C(\mathbf{b} - \mathbf{A}x_s) + (I - C\mathbf{A})\mathbf{d}^{(k)}) \cap \mathbf{d}^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

Итерационный процесс (2.8) осуществляется с помощью так называемого «эпсилон-раздутия» ( $\varepsilon$ -раздутия) [85]. Оно состоит в том, что некоторый интервал  $\mathbf{a}$ , полученный на текущем шаге алгоритма, заменяется на объемлющий интервал  $\mathbf{a}_\varepsilon \supset \mathbf{a}$ . Это можно сделать, например, следующим образом

$$\mathbf{a}_\varepsilon = \begin{cases} \mathbf{a} + [-\varepsilon, \varepsilon] \text{rad } \mathbf{a}, & \text{если } \text{rad } \mathbf{a} \neq 0, \\ \mathbf{a} + [-\eta, \eta], & \text{если } \text{rad } \mathbf{a} = 0, \end{cases}$$

или

$$\mathbf{a}_\varepsilon = \mathbf{a} + [-\varepsilon, \varepsilon] \text{rad } \mathbf{a} + [-\eta, \eta].$$

Значения  $\varepsilon$  и  $\eta$  выбираются, исходя из эвристических соображений. На основе своего вычислительного опыта Э. Румп в [108] предложил в качестве  $\eta$  брать наименьшее положительное вещественное число, которое может быть представлено в ЭВМ, и  $\varepsilon = 0.1$ . Тогда итерационная процедура (2.8) на основе «эпсилон-раздутия» примет вид:

$$\mathbf{d}^{(k+1)} \leftarrow C(\mathbf{b} - \mathbf{A}x_s) + (I - C\mathbf{A})(\mathbf{d}^{(k)} + [-0.1, 0.1] \text{rad } \mathbf{d}^{(k)} + [-\eta, \eta] e),$$

где  $e = (1, 1, \dots, 1)^\top$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Критерием остановки данной процедуры служит условие:  $\mathbf{d}^{(k+1)} \subseteq \mathbf{d}^{(k)}$ . Поскольку

$$\begin{aligned} x_s + C(\mathbf{b} - \mathbf{A}x_s) &= x_s + C\mathbf{b} - C(\mathbf{A}x_s) \\ &= C\mathbf{b} - (C\mathbf{A})x_s + x_s \\ &= C\mathbf{b} + (I - C\mathbf{A})x_s, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} x_s + C(\mathbf{b} - \mathbf{A}x_s) + (I - C\mathbf{A})\mathbf{d}^{(k)} &= C\mathbf{b} + (I - C\mathbf{A})x_s + (I - C\mathbf{A})\mathbf{d}^{(k)} \\ &\supseteq C\mathbf{b} + (I - C\mathbf{A})(x_s + \mathbf{d}^{(k)}) \\ &= C\mathbf{b} + (I - C\mathbf{A})\mathbf{y}^{(k)}, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{y}^{(k)} = x_s + \mathbf{d}^{(k)}$ , то окончательно имеем

$$\mathbf{y}^{(k+1)} = x_s + \mathbf{d}^{(k+1)} \supseteq (C\mathbf{b} + (I - C\mathbf{A})\mathbf{y}^{(k)}) \cap \mathbf{y}^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

#### 2.4.4. Процедура Хансена-Блика-Рона

Опишем процедуру Хансена-Блика-Рона так, как она изложена А. Ноймайером в [94]. Процедура основана на следующем результате.

**Теорема 2.3** Пусть в интервальной линейной системе  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  матрица  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij}) \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  является интервальной  $H$ -матрицей и пусть

$$u_i = (\langle \mathbf{A} \rangle^{-1} |\mathbf{b}|)_i, \quad d_i = (\langle \mathbf{A} \rangle^{-1})_{ii}, \quad (2.9)$$

$$\alpha_i = \langle \mathbf{a}_{ii} \rangle - 1/d_i, \quad \beta_i = u_i/d_i - |\mathbf{b}_i|, \quad (2.10)$$

где  $\langle \mathbf{A} \rangle$  — компарант матрицы  $\mathbf{A}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Тогда множество решений  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  содержится в интервальном векторе  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_i)$  с компонентами

$$\mathbf{x}_i = \frac{\mathbf{b}_i + \beta_i[-1, 1]}{\mathbf{a}_{ii} + \alpha_i[-1, 1]}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.11)$$

Заметим, что необходимо знать строгую оценку сверху для  $\langle \mathbf{A} \rangle^{-1}$ , чтобы далее найти оценки сверху для  $\alpha_i$  и  $\beta_i$ . Известно, что если  $\mathbf{A}$  является  $H$ -матрицей, то  $\langle \mathbf{A} \rangle^{-1}$  — неотрицательная матрица. Следовательно, верхняя оценка  $B$  матрицы  $\langle \mathbf{A} \rangle^{-1}$  может быть выражена через некоторую оценку  $\tilde{B}$  матрицы  $\langle \mathbf{A} \rangle^{-1}$  и векторы  $v, w \in \mathbb{R}^n$ , удовлетворяющие неравенству  $I - \langle \mathbf{A} \rangle \tilde{B} \leq \langle \mathbf{A} \rangle vw^\top$ , следующим образом

$$B = \tilde{B} + vw^\top. \quad (2.12)$$

Из определения  $H$ -матрицы следует, что существует вектор  $v > 0$  такой, что  $u = \langle \mathbf{A} \rangle v > 0$ . Чтобы этот вектор  $v$  удовлетворял (2.12), необходимо взять вектор  $w$  с компонентами вида

$$w_k = \max_i \frac{-R_{ik}}{u_i},$$

где  $R = \langle \mathbf{A} \rangle \tilde{B} - I$ .

Теперь остается найти вектор  $v$ . Предположим, что существует  $\tilde{u}$ , такой что  $v = \tilde{B}\tilde{u} \approx \langle \mathbf{A} \rangle^{-1}\tilde{u} > 0$ , тогда  $\mathbf{A}$  есть  $H$ -матрица и, если  $u = \langle \mathbf{A} \rangle v \approx \tilde{u}$  — положительный вектор, то оценка  $\tilde{B}$  достаточно точна. Поскольку  $\langle \mathbf{A} \rangle^{-1}$  неотрицательная матрица, то можно в качестве  $\tilde{u}$  взять единичный вектор  $(1, \dots, 1)^\top$ , чтобы обеспечить выполнение условия  $\langle \mathbf{A} \rangle^{-1}\tilde{u} > 0$ .

Вычислительный опыт свидетельствует, что процедура Хансена-Блика-Рона всегда дает результаты не хуже, чем метод Кравчика.

#### 2.4.5. Формальный подход

Формальное решение интервальной системы уравнений  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  — это интервальный вектор  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)^\top$ , обращающий её в равенство после подстановки в систему и выполнения всех операций по правилам интервальной

арифметики (в качестве которой может выступать либо классическая интервальная арифметика  $\mathbb{IR}$ , либо полная интервальная арифметика Каухера  $\mathbb{KR}$ , либо какая-то другая интервальная алгебраическая система).

Нахождение внешней оценки множества решений ИСЛАУ можно свести к нахождению формального решения специальной интервальной системы уравнений на основе следующего результата [37, 38, 113].

**Предложение 2.1** Пусть  $\Lambda$  — неособенная диагональная матрица. Множество решений интервальной линейной системы уравнений  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  с  $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  и  $\mathbf{b} \in \mathbb{IR}^n$  совпадает с множеством решений интервальной системы

$$x = \mathbf{C}x + \mathbf{d}, \quad (2.13)$$

где  $\mathbf{C} = I - \Lambda\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{d} = \Lambda\mathbf{b}$ .

Данный подход, позволяющий свести задачу внешнего интервального оценивания множества решений ИСЛАУ к задаче нахождения формального решения уравнения (2.13), называется *формальным*. В рамках формального подхода нахождение внешней оценки множества решений ИСЛАУ является задачей численного анализа, рассматриваемой в интервальной арифметике  $\mathbb{IR}$ . Уравнение (2.13) можно также записать в полной интервальной арифметике  $\mathbb{KR}$  в виде

$$\mathbf{C}x \ominus x + \mathbf{d} = 0. \quad (2.14)$$

Заметим, что в  $\mathbb{IR}$  формальное решение системы (2.13) существует не всегда. В полной интервальной арифметике  $\mathbb{KR}$  некоторые компоненты формального решения (2.13) могут оказаться неправильными интервалами. Условия существования правильного формального решения (2.13) изложены в следующей теореме [37, 48]

**Теорема 2.5** (теорема Апостолатоса-Кулиша). Если спектральный радиус  $\rho(|\mathbf{C}|)$  матрицы  $|\mathbf{C}|$ , составленной из модулей элементов матрицы  $\mathbf{C} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$

, меньше чем 1, то интервальная линейная система уравнений (2.13) имеет единственное правильное формальное решение. Оно может быть найдено с помощью итерационного процесса

$$\mathbf{x}^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

при любом начальном векторе  $\mathbf{x}^{(0)}$  и является внешней интервальной оценкой множества решений интервальной системы (2.13).

Отметим, что задача нахождения формального решения в полной арифметике Каухера для интервальных систем линейных уравнений является NP-трудной [80].

В качестве эффективного численного метода нахождения формальных решений интервальных систем уравнений можно использовать субдифференциальный метод Ньютона [113]. Напомним, что  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$  не является линейным пространством. Поэтому, чтобы перенести процесс отыскания формального решения (2.14) в линейное пространство, рассмотрим погружение интервального пространства  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$  в линейное  $\mathbb{R}^{2n}$ .

Для интервального отображения  $\varphi : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$  и некоторого вложения (биективного отображения)  $\iota : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow U$ , где  $U$  — линейное пространство, будем называть отображение

$$\iota \circ \varphi \circ \iota^{-1} : U \rightarrow U$$

линейного пространства  $U$  в себя *индуцированным отображением* для  $\varphi$ .

Пусть в интервальном пространстве  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$  задано уравнение

$$\varphi(x) = \psi(x) \tag{2.15}$$

где  $\varphi, \psi : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$  — некоторые отображения, и фиксировано вложение  $\iota : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow U$ . Будем называть *индуцированным уравнением* для (2.15) такое уравнение

$$\Phi(x) = \Psi(x)$$

в линейном пространстве  $U$ , что  $\Phi$  и  $\Psi$  являются индуцированными отображениями для  $\varphi$  и  $\psi$  соответственно, т. е.  $\Phi = \iota \circ \varphi \circ \iota^{-1}$  и  $\Psi = \iota \circ \psi \circ \iota^{-1}$ .

Итак, вместо исходного уравнения в интервальном пространстве решается уравнение в линейном пространстве. При этом искомое решение  $x$  в  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$  однозначно восстанавливается по решению  $y$  уравнения (2.14) соотношением  $x = \iota^{-1}(y)$ .

Погружение  $\text{sti} : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ , которое действует по правилу

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) \mapsto (-\underline{\mathbf{x}}_1, -\underline{\mathbf{x}}_2, \dots, -\underline{\mathbf{x}}_n, \bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2, \dots, \bar{\mathbf{x}}_n), \quad (2.16)$$

будем называть *стандартным погружением интервального пространства  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}^{2n}$* .

Всякое погружение  $\iota : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  порождает на линейном пространстве  $\mathbb{R}^{2n}$  некоторый частичный порядок « $\sqsubseteq$ »

$$x \sqsubseteq y \text{ в } \mathbb{R}^{2n} \quad \Leftrightarrow \quad \iota^{-1}(x) \subseteq \iota^{-1}(y) \text{ в } \mathbb{K}\mathbb{R}^n,$$

который называется *индуцированным*.

Отметим, что частичный порядок, индуцированный стандартным погружением, совпадает с покомпонентным порядком

$$x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad x_i \leq y_i, \quad i = 1, 2, \dots, 2n,$$

который является простейшим и наиболее удобным заданием порядка на евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^{2n}$ . Поэтому выбор стандартного погружения, как правило, более предпочтителен.

В [37] показано, что для оператора умножения на вещественную матрицу

$$\phi(\mathbf{x}) = Q\mathbf{x}$$

для некоторой  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Q = (q_{ij})$ , индуцированное отображение  $\text{sti} \circ \phi \circ \text{sti}^{-1}$  при стандартном погружении  $\text{sti}$  является линейным преобразованием пространства  $\mathbb{R}^{2n}$ , а матрица этого индуцированного линейного преобразования



является блочной  $2n \times 2n$ -матрицей вида

$$Q = \left( \begin{array}{c|c} Q^+ & Q^- \\ \hline Q^- & Q^+ \end{array} \right) \quad (2.17)$$

где  $n \times n$ -подматрицы  $Q^+ = (q_{ij}^+)$  и  $Q^- = (q_{ij}^-)$  образованы положительными и отрицательными частями элементов  $Q$  соответственно. Матрица  $Q$  называется *сопутствующей* для  $Q$ .

Следовательно, задача вычисления формального решения интервального уравнения (2.14) сводится к решению индуцированного уравнения

$$\mathfrak{F}(y) = 0, \quad (2.18)$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(y) &= \text{sti}(\mathbf{C} \text{sti}^{-1}(y) \ominus \text{sti}^{-1}(y) + \mathbf{d}) \\ &= \text{sti}(\mathbf{C} \text{sti}^{-1}(y)) - y + \text{sti}(\mathbf{d}). \end{aligned}$$

Для решения индуцированного уравнения (2.18) используется субдифференциальный метод Ньютона

$$y^{(k+1)} \leftarrow y^{(k)} - \tau(D^{(k)})^{-1} \mathfrak{F}(y^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $\tau \in ]0, 1]$  — некоторая константа,  $y^{(0)} \in \mathbb{R}^{2n}$  — начальный вектор,  $D^{(k)}$  — какой-нибудь субградиент отображения  $\mathfrak{F}$  в точке  $y^{(k)}$ . Методику вычисления субдифференциала для индуцированного отображения  $\mathfrak{F}$  можно найти в [37].

Далее решение  $x \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n$  исходного уравнения (2.14) находится по решению  $y \in \mathbb{R}^{2n}$  уравнения (2.18) следующим образом:

$$\mathbf{x} = ([-y_1, y_{n+1}], [-y_2, y_{n+2}], \dots, [-y_n, y_{2n}])^\top.$$

#### 2.4.6. Метод дробления параметров для интервальных линейных систем уравнений

Выше был рассмотрен ряд интервальных методов (например, интервальный метод Гаусса, интервальный метод Гаусса-Зейделя, метод Кравчи-

ка и т. д.), позволяющих получить внешнюю интервальную оценку множества  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ . Эти методы позволяют вычислить интервальный вектор, гарантированно содержащий множество решений ИСЛАУ, но не обеспечивают его оптимальность. Для нахождения оптимальных внешних оценок можно использовать так называемые *методы дробления параметров* (или PPS-методы<sup>1</sup>) [37, 111, 112].

Задача оптимального внешнего оценивания состоит в нахождении интервального вектора  $\mathbf{U} \subset \mathbb{IR}^n$ , имеющего наименьшую возможную ширину и содержащего множество решений  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ . Данную задачу можно переформулировать в виде:

$$\text{найти } \min\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})\} \text{ и } \max\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}, \nu = 1, 2, \dots, n,$$

либо как можно более точные их оценки снизу и сверху соответственно.

Далее рассмотрим задачу нахождения нижних по координатных оценок, поскольку при поиске верхних оценок будем учитывать, что

$$\max\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})\} = -\min\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{A}, -\mathbf{b})\}.$$

Обозначим через *Encl* какой-нибудь фиксированный метод внешнего оценивания множества решений ИСЛАУ и в дальнейшем будем называть его *базовым*. Пусть  $Encl(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \in \mathbb{IR}^n$  — интервальный вектор, получаемый с помощью этого метода, т. е.

$$Encl(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \supseteq \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}).$$

Пусть  $\Upsilon(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  — нижний конец  $\nu$ -ой компоненты ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ) внешней интервальной оценки множества решений, получаемой методом *Encl*, так что  $\Upsilon(\mathbf{A}, \mathbf{b}) := \underline{Encl(\mathbf{A}, \mathbf{b})}_\nu$ .

Метод дробления параметров заключается в последовательном улучшении оценки  $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$  посредством дробления системы  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

---

<sup>1</sup>PPS — Partitioning Parameter Set

на две ИСЛАУ-потомка, получающиеся из этой системы рассечением на концы одного интервального элемента либо в матрице  $\mathbf{A}$ , либо в векторе  $\mathbf{b}$ . Так можно делать в силу следующей теоремы Бека-Никеля [49, 95].

**Теорема 2.6** (теорема Бека-Никеля). *Для любого  $\nu \in \{1, 2, \dots, n\}$  точные покоординатные оценки точек из объединённого множества решений — экстремальные значения  $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$  и  $\max\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$  — достигаются на решениях крайних точечных систем уравнений  $Ax = b$ , т. е. таких, что матрица  $A$  и вектор  $b$  образованы концами интервальных элементов из  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{b}$  соответственно.*

Потребуем от базового метода *Encl* удовлетворения следующему условию: оценка  $\Upsilon(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  монотонна по включению относительно матрицы  $\mathbf{A}$  и вектора  $\mathbf{b}$ , т. е. для всех  $\mathbf{A}', \mathbf{A}'' \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  и  $\mathbf{b}', \mathbf{b}'' \in \mathbb{IR}^n$  при  $\mathbf{A}' \subseteq \mathbf{A}''$  и  $\mathbf{b}' \subseteq \mathbf{b}''$  верно неравенство

$$\Upsilon(\mathbf{A}', \mathbf{b}') \geq \Upsilon(\mathbf{A}'', \mathbf{b}''). \quad (2.19)$$

В дальнейшем будем обозначать ИСЛАУ-потомки, получающиеся из интервальной системы  $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$  рассечением на концы одного интервального элемента либо в матрице  $\mathbf{Q}$ , либо в векторе  $\mathbf{r}$ , через  $\mathbf{Q}'x = \mathbf{r}'$  и  $\mathbf{Q}''x = \mathbf{r}''$ . Здесь  $\mathbf{Q}'$  и  $\mathbf{Q}''$  — матрицы, полученные из  $\mathbf{Q}$  заменой элемента  $q_{ij}$  на  $\underline{q}_{ij}$  и  $\bar{q}_{ij}$  соответственно, а  $\mathbf{r}'$  и  $\mathbf{r}''$  — векторы, полученные из  $\mathbf{r}$  заменой элемента  $r_i$  на  $\underline{r}_i$  и  $\bar{r}_i$  соответственно.

Решив две интервальных «системы-потомка»  $\mathbf{Q}'x = \mathbf{r}'$  и  $\mathbf{Q}''x = \mathbf{r}''$ , можно получить в силу свойства (2.19) более точную оценку снизу для искомого  $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{Q}, \mathbf{r})\}$  в виде

$$\min\{\Upsilon(\mathbf{Q}', \mathbf{r}'), \Upsilon(\mathbf{Q}'', \mathbf{r}'')\}.$$

Доказательство данного утверждения можно найти в [37]. Аналогичный эффект имеет и распадение в векторе правых частей  $\mathbf{r}$  какого-нибудь интервального элемента  $r_i$  на концы  $\underline{r}_i$  и  $\bar{r}_i$ .

Процедуру улучшения оценки для  $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{Q}, \mathbf{r})\}$  посредством дробления параметров можно повторить по отношению к системам-потомкам  $\mathbf{Q}'x = \mathbf{r}'$  и  $\mathbf{Q}''x = \mathbf{r}''$ , затем снова разбить потомков и улучшить оценку и т. д. Данную процедуру можно оформить в соответствии с хорошо известным методом «ветвей и границ»:

во-первых, все возникающие в процессе дробления исходной ИСЛАУ системы  $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$ , где  $\mathbf{Q} = (q_{ij}) \subseteq \mathbf{A}$  и  $\mathbf{r} = (r_i) \subseteq \mathbf{b}$ , вместе с их оценками  $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$  организуем в некоторый список  $\mathcal{L}$ ,

во-вторых, дроблению каждый раз будем подвергать лишь ту из интервальных систем-потомков  $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$ , которая обеспечивает наименьшую на данный момент оценку  $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$ .

Образующие список  $\mathcal{L}$  записи упорядочим по возрастанию значений оценки  $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$ . Первую запись списка, а также соответствующую ИСЛАУ  $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$  и наименьшую в списке оценку  $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$  будем называть *ведущими* на данном шаге.

В целях обеспечения наиболее быстрой сходимости алгоритма рекомендуется рассекать ведущие ИСЛАУ по элементам, на которых достигается максимум величин

$$\left| \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial q_{ij}} \right| \cdot \text{wid } \mathbf{q}_{ij}, \quad \left| \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial r_i} \right| \cdot \text{wid } \mathbf{r}_i, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (2.20)$$

т. е. по элементам, на которых достигается максимум произведения модуля интервальной оценки производной решения на ширину соответствующего интервала.

Перед дроблением ведущей ИСЛАУ целесообразно выполнить исследование её на монотонность. Пусть дана интервальная система линейных алгебраических уравнений  $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$ , и нам известны

$$\frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial q_{ij}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial r_i}$$

— интервальные расширения соответствующих частных производных

$$\frac{\partial x_\nu(Q, r)}{\partial q_{ij}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial x_\nu(Q, r)}{\partial r_i}$$

от  $\nu$ -ой компоненты вектора решения системы  $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$  по  $ij$ -му элементу матрицы  $Q$  и  $j$ -му элементу вектора  $r$ . Если интервальная  $n \times n$ -матрица  $\tilde{\mathbf{Q}}$ , и интервальный  $n$ -вектор  $\tilde{\mathbf{r}}$  образованы из элементов

$$\tilde{q}_{ij} = \begin{cases} [\underline{q}_{ij}, \underline{q}_{ij}] & \text{при } \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial q_{ij}} \geq 0, \\ [\bar{q}_{ij}, \bar{q}_{ij}] & \text{при } \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial q_{ij}} \leq 0, \\ \mathbf{q}_{ij}, & \text{при } \text{int} \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial q_{ij}} \ni 0, \end{cases} \quad (2.21)$$

$$\tilde{r}_i = \begin{cases} [\underline{r}_i, \underline{r}_i] & \text{при } \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial r_i} \geq 0, \\ [\bar{r}_i, \bar{r}_i] & \text{при } \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial r_i} \leq 0, \\ \mathbf{r}_i, & \text{при } \text{int} \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial r_i} \ni 0, \end{cases} \quad (2.22)$$

то, очевидно,

$$\min\{x_\nu \mid x \in \Xi(\tilde{\mathbf{Q}}, \tilde{\mathbf{r}})\} = \min\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{Q}, \mathbf{r})\}.$$

Поскольку количество существенно интервальных (с ненулевой шириной) элементов в  $\tilde{\mathbf{Q}}$  и  $\tilde{\mathbf{r}}$  может быть значительно меньшим, чем в  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{r}$ , то переходя от исходной ИСЛАУ  $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$  к решению системы  $\tilde{\mathbf{Q}}x = \tilde{\mathbf{r}}$ , мы, тем самым, упрощаем задачу вычисления  $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{Q}, \mathbf{r})\}$ .

Известно, что если  $Y = (y_{ij})$  — обратная матрица для  $Q = (q_{ij})$ , то производные решения вещественной линейной системы  $Qx = r$  по её коэффициентам определяются формулами [11]

$$\frac{\partial x_\nu}{\partial q_{ij}} = -y_{\nu i} x_i, \quad \frac{\partial x_\nu}{\partial r_i} = y_{\nu i}.$$

Следовательно, в случае, когда  $\mathbf{Y} = (\mathbf{y}_{ij})$  — «обратная интервальная матрица» для  $\mathbf{Q}$ , т. е.

$$\mathbf{Y} \supseteq \{Q^{-1} \mid Q \in \mathbf{Q}\},$$

а  $x_j$  —  $j$ -ая компонента некоторого интервального вектора  $\mathbf{x}$ , такого что  $\mathbf{x} \supseteq \Xi(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$ , то мы можем принять следующие интервальные оценки производных

$$\frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial q_{ij}} = -\mathbf{y}_{\nu i} x_j, \quad \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial r_i} = \mathbf{y}_{\nu i}. \quad (2.23)$$

Таким образом, тест на монотонность перед дроблением ведущей ИСЛАУ приводит к овестествлению («сжатию») интервальных элементов на основе (2.21)-(2.22). Поэтому в дробимой ИСЛАУ  $\mathbf{Q}\mathbf{x} = \mathbf{r}$  ненулевую ширину будут иметь лишь те элементы, производные по которым оцениваются интервалами, содержащими внутри себя нуль.

Опишем теперь алгоритм дробления параметров для внешнего оценивания объединённого множества решений ИСЛАУ. Для начала работы этого алгоритма необходимо

- найти предварительные внешние оценки для множества решений исходной системы и «обратной интервальной матрицы», т.е. вычислить  $\mathbf{x} = \text{Encl}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \supseteq \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  и  $\mathbf{Y} \supseteq \mathbf{A}^{-1}$ ,
- назначить точность оценки  $\varepsilon > 0$ ,
- присвоить  $\mathbf{Q} \leftarrow \mathbf{A}$  и  $\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{b}$ ,
- положить  $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}) \leftarrow \underline{\mathbf{x}}_\nu$  и  $\omega \leftarrow +\infty$ ,
- инициализировать рабочий список  $\mathcal{L}$  записью  $(\mathbf{Q}, \mathbf{r}, \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}), \mathbf{Y}, \mathbf{x})$ .

В процессе выполнения алгоритма мы будем поддерживать список  $\mathcal{L}$ , состоящий из записей вида

$$(\mathbf{Q}, \mathbf{r}, \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}), \mathbf{Y}, \mathbf{x}),$$

где

$\mathbf{Q}$  — интервальная  $n \times n$ -матрица,  $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{A}$ ;

$\mathbf{r}$  — интервальный  $n$ -вектор,  $\mathbf{r} \subseteq \mathbf{b}$ ;

$\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}) = (\underline{\text{Encl}(\mathbf{Q}, \mathbf{r})})_\nu$  — нижний конец  $\nu$ -ой компоненты внешней интервальной оценки множества решений системы, получаемой методом *Encl*;

$\mathbf{Y}$  — внешняя оценка «обратной интервальной матрицы»  $\mathbf{Q}^{-1}$ ;

$\mathbf{x} = \text{Encl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  — внешняя интервальная оценка множества решений системы, полученная на текущем шаге алгоритма.

На каждом итерационном шаге по формулам (2.23) вычисляем интервальные расширения для производных решения ИСЛАУ и «сжимаем» в соответствии с (2.21)–(2.22) те элементы матрицы  $\mathbf{Q}$  и вектора  $\mathbf{r}$ , на которых была выявлена монотонная зависимость  $\nu$ -ой компоненты вектора решения от элементов матрицы системы или вектора её правой части.

Рассекаем ведущую ИСЛАУ по интервальному элементу  $\mathbf{h}$ , которому соответствует наибольшая из величин (2.20), на две системы-потомка  $\mathbf{Q}'x = \mathbf{r}'$  и  $\mathbf{Q}''x = \mathbf{r}''$ . Соответствующие этим системам записи  $(\mathbf{Q}', \mathbf{r}', \Upsilon(\mathbf{Q}', \mathbf{r}'), \mathbf{Y}', \mathbf{x}')$  и  $(\mathbf{Q}'', \mathbf{r}'', \Upsilon(\mathbf{Q}'', \mathbf{r}''), \mathbf{Y}'', \mathbf{x}'')$  заносим в список  $\mathcal{L}$  в порядке возрастания значений третьего поля.

Условием остановки метода дробления параметров является «овеществление» ведущей ИСЛАУ  $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$ , когда матрица  $\mathbf{Q}$  и вектор  $\mathbf{r}$  — точечные (неинтервальные). Заметим однако, что некоторые итерационные методы внешнего оценивания множества решений (например, метод Гаусса-Зейделя) дают точную оценку  $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$  даже в том случае, когда часть элементов в  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{r}$  могут быть интервалами. Поэтому достаточным условием оптимальности вычисленной оценки  $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$ , т.е. для того, чтобы она была равна  $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$ , является выполнение следующего «условия точности»:  $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}) = (\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{r})_\nu$  для всех  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ .

Наряду с оценкой  $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$  для интервальных систем  $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$ , порождаемых алгоритмом, вычисляются ещё и величины  $\Upsilon(\text{mid } \mathbf{Q}, \text{mid } \mathbf{r})$ . Очевидно, что

$$\Upsilon(\text{mid } \mathbf{Q}, \text{mid } \mathbf{r}) \geq \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}),$$

и значения  $\Upsilon(\text{mid } \mathbf{Q}, \text{mid } \mathbf{r})$  приближают  $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$  сверху: если для каждого шага алгоритма определять

$$\omega = \min \Upsilon(\text{mid } \mathbf{Q}, \text{mid } \mathbf{r}) \quad (2.24)$$

по всем интервальным линейным системам  $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$ , когда-либо побывавшим в списке  $\mathcal{L}$  до этого шага, то

$$\min\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})\} \leq \omega.$$

С другой стороны, если  $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$  — ведущая ИСЛАУ, то

$$\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}) \leq \min\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})\},$$

и потому одним из критериев остановки алгоритма может служить достижение требуемой малости величины  $(\omega - \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}))$ .

Заметим, что запись  $(\mathbf{Q}, \mathbf{r}, \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}), \mathbf{Y}, \mathbf{x})$ , удовлетворяющая на некотором шаге условию

$$\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}) > \omega,$$

при дальнейшем выполнении алгоритма уже никогда не станет ведущей, поэтому такая запись либо вообще не вносится в список, либо удаляется при чистке списка. Чистка списка проводится после изменения (уменьшения) параметра  $\omega$ .

## 2.5. Методы внутреннего оценивания множеств решений интервальных систем линейных уравнений

Внутреннему оцениванию множеств решений ИСЛАУ посвящено сравнительно небольшое число работ. В [37] предлагается использовать формальный подход для нахождения внутренней оценки множества решений квадратной ИСЛАУ. Данный метод позволяет свести задачу внутреннего интервального оценивания множества решений ИСЛАУ к задаче решения уравнения в дуализациях, т. е. к задаче численного анализа.



Для интервальных линейных систем с прямоугольной матрицей разработан так называемый «центральной» подход [39]. Его основная идея состоит в выборе некоторой точки из множества  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  решений и построении вокруг неё интервального решения задачи, т.е. бруса  $\mathbf{U} \subseteq \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ . Вычисление размеров данного бруса сводится к задаче максимизации некоторой специальной функции по брусу.

### 2.5.1. Формальный подход

В § 2.4.5 был описан формальный подход к внешнему оцениванию множества  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  решений интервальной системы линейных уравнений  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ . Этот же подход может использоваться и для нахождения внутренней оценки  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , о чем свидетельствует следующий результат [37].

**Теорема 2.7** *Если правильный интервальный вектор  $\mathbf{x}$  есть формальное решение уравнения*

$$(\text{dual } \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (2.25)$$

*то  $\mathbf{x} \subseteq \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , т.е.  $\mathbf{x}$  является внутренней интервальной оценкой объединённого множества решений системы  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ .*

Таким образом, задачу внутреннего интервального оценивания множества решений ИСЛАУ можно свести к нахождению формального решения уравнения в дуализациях (2.25). Для этого можно воспользоваться описанным в § 2.4.5 субдифференциальным методом Ньютона. Представим уравнение (2.25) в интервальном пространстве  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$  в виде

$$\mathbf{C}\mathbf{x} \ominus \mathbf{d} = \mathbf{0}. \quad (2.26)$$

Используя стандартное погружение (2.16) интервального пространства  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}^{2n}$ , вместо уравнения (2.26) в интервальном пространстве  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$  получим индуцированное уравнение в линейном пространстве

$$\mathfrak{G}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}, \quad (2.27)$$

где

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}(y) &= \text{sti}(\mathbf{C}\text{sti}^{-1}(y) \ominus \mathbf{d}) \\ &= \text{sti}(\mathbf{C}\text{sti}^{-1}(y)) - \text{sti}(\mathbf{d}).\end{aligned}$$

Для решения индуцированного уравнения (2.27) используется субдифференциальный метод Ньютона

$$y^{(k+1)} \leftarrow y^{(k)} - \tau(D^{(k)})^{-1}\mathfrak{G}(y^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $\tau \in ]0, 1]$  — некоторая константа,  $y^{(0)} \in \mathbb{R}^{2n}$  — начальный вектор,  $D^{(k)}$  — какой-нибудь субградиент отображения  $\mathfrak{G}$  в точке  $y^{(k)}$ .

Далее решение  $\mathbf{x} \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n$  исходного уравнения (2.26) находится по решению  $y \in \mathbb{R}^{2n}$  уравнения (2.27) следующим образом:

$$\mathbf{x} = ([-y_1, y_{n+1}], [-y_2, y_{n+2}], \dots, [-y_n, y_{2n}])^\top.$$

Нередко компоненты вектора решений, полученные с помощью формального подхода, могут оказаться неправильными интервалами. Для коррекции внутренних оценок можно использовать следующий результат, являющийся частным случаем теоремы о «сжатии и раздутии» параметров в ИСЛАУ [37].

**Теорема 2.8** *Если брус  $\mathbf{x}$  является внутренней оценкой объединённого множества решений  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  интервальной линейной системы  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , то  $\mathbf{x}$  также является внутренней интервальной оценкой множества решений  $\Xi(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{b}})$  системы  $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{b}}$ , где*

$$\mathbf{A} \subseteq \tilde{\mathbf{A}}, \quad \mathbf{b} \subseteq \tilde{\mathbf{b}}.$$

Следовательно, при необходимости коррекции внутренних оценок множества решений  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , полученных на основе формального подхода, имеет смысл попробовать решить тем же методом ту же задачу для вспомогательной

интервальной системы, у которой «сжаты» элементы матрицы  $\mathbf{A}$  и компоненты вектора  $\mathbf{b}$ . Формальное решение такой модифицированной интервальной системы очень часто оказывается правильным, тогда как уравнение в дуализациях, выписанное по исходной системе уравнений, не имеет правильных решений.

### 2.5.2. «Центровой» подход

Предположим, что известна некоторая точка  $t$ , принадлежащая множеству  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  решений интервальной системы линейных уравнений  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ . «Центровой» подход к решению задачи внутреннего оценивания  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  состоит в построении бруса  $U \subseteq \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  вокруг точки-центра  $t$ . Отметим, что точка-центр  $t$  должна принадлежать внутренности множества  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , поскольку в противном случае вокруг неё невозможно построить телесный брус  $U \subseteq \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ .

Если матрица  $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  системы неособенная, то в качестве центра  $t$  можно взять решение любой точечной системы  $Ax = b$  с  $A \in \mathbf{A}$  и  $b \in \mathbf{b}$ , например, решение «средней», системы

$$\text{mid } \mathbf{A}x = \text{mid } \mathbf{b}.$$

Если  $\mathbf{A}$  особенная, то можно найти неособенную точечную матрицу  $A \in \mathbf{A}$  путем подбора ее элементов  $a_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , в пределах соответствующих интервалов  $\mathbf{a}_{ij}$  ненулевой ширины. Это можно сделать, поскольку во множестве всех вещественных  $n \times n$ -матриц особенные матрицы образуют гладкое многообразие коразмерности 1, которое является множеством лебеговой меры нуль в  $\mathbb{R}^{n \times n}$ . Далее в качестве центра  $t$  можно взять решение точечной системы  $Ax = b$  с некоторым  $b \in \mathbf{b}$ . Для поиска центра  $t$  в случае особенной матрицы  $\mathbf{A}$  можно использовать также распознающий функционал, предложенный в [39].

Далее, используя координаты найденной точки  $t$ , необходимо вычислить по-возможности наибольшие размеры интервальных компонент бруса  $\mathbf{U}$  с центром в точке  $t$  так, чтобы  $\mathbf{U} \subseteq \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ . В простейшем случае радиусы всех интервальных компонент вектора  $\mathbf{U}$  можно считать одинаковыми, т.е.  $\text{rad } \mathbf{U}_i = \text{rad } \mathbf{U}_j$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . Заметим однако, что к этому случаю всегда можно свести задачу построения вектора  $\mathbf{U}$ , радиусы компонент которого пропорциональны соответствующим компонентам некоторого вещественного положительного вектора  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ , где  $w_i > 0$ . Об этом свидетельствует следующий результат [39].

**Предложение 2.2** Пусть  $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}W$ , где  $W = \text{diag } \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  — неособенная диагональная матрица. Интервальный вектор  $\tilde{\mathbf{U}}$ , для которого  $\text{rad } \tilde{\mathbf{U}}_i = \text{rad } \tilde{\mathbf{U}}_j$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ , является внутренней оценкой множества решений модифицированной системы  $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  тогда и только тогда, когда интервальный вектор  $\mathbf{U}$ , для которого  $\text{rad } \mathbf{U}_i = \text{rad } \mathbf{U}_j$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ , есть решение задачи внутреннего оценивания для исходной системы  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ .

Искомый интервальный вектор  $\mathbf{U}$ , компоненты которого имеют равную ширину, представим в виде

$$\mathbf{U} = t + \rho \mathbf{e},$$

где  $\mathbf{e} = ([-1, 1], \dots, [-1, 1])^\top$ .

Размер  $\rho$  внутренней оценки  $\mathbf{U}$  можно вычислить по формуле [37]:

$$\rho = \min_{1 \leq i \leq n} \max_{A \in \mathbf{A}} \left\{ \frac{\text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j \right|}{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|} \right\}. \quad (2.28)$$

Таким образом, при построении внутренней интервальной оценки объединённого множества решений ИСЛАУ необходимо решить для каждого  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  задачу максимизации функции:

$$\Phi_i(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) = \frac{\text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j \right|}{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|}, \quad (2.29)$$

на множестве  $\mathcal{D}(\Phi_i) = (\mathbf{a}_{i1}, \mathbf{a}_{i2}, \dots, \mathbf{a}_{in})$ , и затем найти  $\rho = \min_{1 \leq i \leq n} \Phi_i$ .

Отметим, что функция  $\Phi_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) непрерывна и почти всюду дифференцируема на  $\mathcal{D}(\Phi_i)$ . Кроме того данная функция квазивогнута на множестве точек из  $\mathcal{D}(\Phi_i)$ , на которых она неотрицательна. Напомним, что функция  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $D$  — выпуклое множество в  $\mathbb{R}^n$ , называется *квазивогнутой*, если для любых  $x, y \in D$  и  $0 \leq \lambda \leq 1$  имеет место

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{f(x), f(y)\}.$$

Таким образом, для решения сформулированной выше оптимизационной задачи можно воспользоваться методом градиентного подъёма.

## 2.6. Интервальные линейные системы со связями

В § 2.3 были рассмотрены интервальные линейные системы вида  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ , элементы матриц и компоненты векторов правых частей которых являются интервалами. Пусть на элементы матрицы  $A = (a_{ij}) \in \mathbf{A}$  и вектора  $b = (b_i) \in \mathbf{b}$  наложены дополнительные связи, т.е.  $a_{11}, \dots, a_{nn}$  и  $b_1, \dots, b_n$  удовлетворяют некоторым условиям в виде равенств из заданного семейства

$$C = \{f_\nu(a_{11}, \dots, a_{nn}, b_1, \dots, b_n) = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, l\}.$$

Под *интервальной системой линейных уравнений со связями* будем понимать множество

$$\{Ax = b \mid a_{ij} \in \mathbf{a}_{ij}, b_i \in \mathbf{b}_i, f_\nu(a_{11}, \dots, a_{nn}, b_1, \dots, b_n) = 0, \quad i, j = \overline{1, n}, \nu = \overline{1, l}\},$$

точечных линейных систем  $Ax = b$  с матрицами  $A \in \mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  и векторами  $b \in \mathbf{b} \in \mathbb{IR}^n$ , для которых выполняются соотношения из  $C$ .

*Объединённым множеством решений интервальной линейной системы уравнений со связями* называется множество

$$\Xi_C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(Ax = b)(\text{справедливы условия из } C)\}.$$

Далее объединённое множество решений ИСЛАУ со связями будем называть просто множеством решений ИСЛАУ со связями, поскольку другие множества решений в работе не рассматриваются.

Примером интервальной линейной системы со связями является симметричная ИСЛАУ с матрицей  $\mathbf{A} = \{A \in \mathbf{A} \mid A = A^\top\}$ , содержащей точечные матрицы, обладающие свойством симметричности.

В данной работе мы рассмотрим частный случай интервальной линейной системы со связями, элементы матрицы и компоненты вектора правых частей которой зависят от некоторых параметров  $p_1, p_2, \dots, p_k$ , принимающих значения из интервалов  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_k$  соответственно, т.е.

$$a_{ij} = a_{ij}(p), \quad b_i = b_i(p), \quad (2.30)$$

где  $p = (p_i)$ ,  $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_i)$  и  $p \in \mathbf{p}$ . Данная система, которую будем записывать в виде

$$A(p)x = b(p), \quad p \in \mathbf{p}, \quad (2.31)$$

представляет собой множество

$$\{A(p)x = b(p) \mid a_{ij} = a_{ij}(p), b_i = b_i(p), p \in \mathbf{p} \ i, j = \overline{1, n}\}. \quad (2.32)$$

Множеством решений системы, матрица и вектор правых частей которой зависят от параметров  $p = (p_1, p_2, \dots, p_k)^\top$ , принимающих значения из заданного бруса  $\mathbf{p} \in \mathbb{I}\mathbb{R}^k$ , будем называть множество

$$\Xi_{\mathbf{p}} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists p \in \mathbf{p})(A(p)x = b(p))\}, \quad (2.33)$$

образованное всевозможными решениями точечных систем  $A(p)x = b(p)$  с  $p \in \mathbf{p}$ . Например, матрица упомянутой выше симметричной ИСЛАУ содержит точечные матрицы вида

$$A = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1n} & p_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix},$$

где параметры  $p_{ij} \in \mathbf{p}_{ij}$ ,  $i \leq j$ ,  $j = \overline{1, n}$ .

Если матрицы  $A(p)$ , где  $p \in \mathbf{p}$ , неособенные, то множество решений системы (2.31) является замкнутым и связным (см. [45]). Отметим, что множество  $\Xi_{\mathbf{p}}$  решений интервальной линейной системы со связями имеет более сложную форму, чем множество решений ИСЛАУ без связей. Множество  $\Xi_{\mathbf{p}}$  не является политопом, его границами могут быть криволинейные поверхности. В работах [46, 47] показано, что множество решений симметричной ИСЛАУ в каждом ортанте пространства  $\mathbb{R}^n$  может быть представлено как пересечение множества решений  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  соответствующей системы без связей и некоторых множеств, имеющих границами поверхности второго порядка.

В случае, когда на матрицу  $A(p) = (a_{ij}(p))$  и вектор  $b(p) = (b_i(p))$  правых частей системы наложены аффинные связи, т.е.

$$a_{ij} = a_{ij}^{(0)} + \sum_{\alpha=1}^k a_{ij\alpha} \cdot p_{\alpha}, \quad b_i = b_i^{(0)} + \sum_{\alpha=1}^k b_{i\alpha} \cdot p_{\alpha}, \quad (2.34)$$

где  $a_{ij}^{(0)}$ ,  $a_{ij\alpha}$ ,  $b_i^{(0)}$ ,  $b_{i\alpha}$  — некоторые вещественные числа, а параметр  $p_{\alpha}$  принимает значения из интервала  $\mathbf{p}_{\alpha}$ , то  $\Xi_{\mathbf{p}}$  является полуалгебраическим множеством. Для его описания можно использовать предложенный в [44] метод, основанный на процессе исключения Фурье-Мощкина для линейных неравенств. Однако этот метод оказывается весьма трудоёмким для систем большой размерности.

**Пример 2.2.** Рассмотрим интервальную симметричную систему линейных уравнений [46]

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

где  $p_1 = 1$ ,  $p_2 \in [0, 1]$ ,  $p_3 \in [-4, -1]$ ,  $\mathbf{b}_i = [0, 2]$ ,  $i = 1, 2$ .

Множество решений  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  соответствующей системы (2.5) без связей описано в Примере 2.1 и определяется системой неравенств

$$\begin{cases} 0 \leq x_1 \leq 2, \\ 0 \leq x_2 \leq x_1, \\ -2 \leq x_2 \leq 0, \\ 0 \leq x_1 \leq 2 - x_2. \end{cases}$$

Для описания множества  $\Xi_p$  решений симметричной системы (2.35) требуются ещё два неравенства

$$\begin{cases} (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \leq 1, \\ (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 \leq 2. \end{cases}$$

На рис. 2.2 изображены множества  $\Xi_p$  и  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  решений ИСЛАУ (2.35) и (2.5) соответственно.

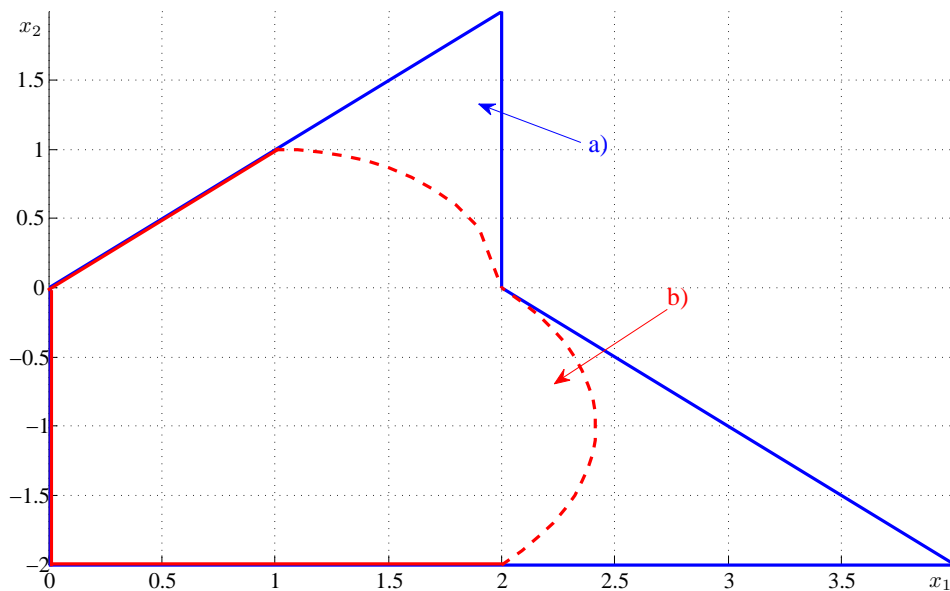


Рис. 2.2. Множества решений ИСЛАУ (2.5) без связей (a) и (2.35) со связями (b).

Интервальные системы со связями часто встречаются на практике, в частности, в задачах проектирования и анализа механических конструкций



[79, 88, 89, 97]. Если математическая модель механической конструкции может быть описана системой линейных уравнений, коэффициенты которой зависят от неизвестных параметров, причем известны диапазоны изменения параметров, то задача анализа механической системы сводится к решению интервальной системы линейных уравнений со связями.

В данной работе интервальные линейные системы со связями используются при решении задачи синтеза рычажного механизма, описанной в § 1.1.

## **2.7. Методы внешнего оценивания множеств решений интервальных линейных систем со связями**

На сегодняшний день разработано немало методов оценивания множества  $\Xi_p$  решений ИСЛАУ, матрица и вектор правых частей которой зависят от параметров. Подавляющее большинство этих работ посвящено нахождению внешней оценки множества  $\Xi_p$ , т.е. по-возможности наименьшего бруса, содержащего это множество. Среди них можно называть метод, предложенный Г. Алефельдом и Г. Майером в [43], который является интервальным аналогом метода Холесского для вещественных систем уравнений. На практике этот метод мало используется вследствие неудовлетворительной точности получаемых оценок.

Ряд методов разработан для ИСЛАУ со связями специального вида, например, метод Янссона [62] — для симметричных и кососимметричных матриц. Для линейных систем, на матрицу и вектор правых частей которых наложены аффинные связи (2.34), можно использовать итерационный метод Румпа (метод неподвижной точки) [107], его модификации [98, 100, 110], а также метод Колева [68, 69]. Для случая, когда зависимости (2.30) являются рациональными функциями, разработан метод, изложенный в [99].

В [70] предлагается метод внешнего оценивания  $\Xi_p$ , в котором на зависимости (2.30) не накладывается никаких ограничений, кроме непрерыв-

ности. Эти зависимости определённым образом аппроксимируются линейными функциями. Далее вычисляется интервальный вектор  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_i)$ , содержащий множество  $\Xi_p$ . Середины компонент этого вектора, т.е.  $\text{mid } \mathbf{x}$  находятся в результате решения определённой системы линейных уравнений. Вектор  $r$ , компоненты которого равны радиусам интервалов  $\mathbf{x}_i$ , т.е.  $r = \text{rad } \mathbf{x}$ , определяется как положительное решение, если оно существует, другой системы уравнений. Отметим, что условие  $r > 0$  существенно ограничивает применение данного метода.

Для решения задачи оптимального внешнего оценивания множества решений ИСЛАУ со связями С. П. Шарым в [40] были развиты методы дробления параметров (PPS-методы), основанные на идее адаптивного дробления интервальных исходных данных задачи [92].

В § 2.4.6 были описаны методы дробления параметров (PPS-методы) для внешнего оценивания множества решений интервальной системы линейных уравнений без связей. Стратегия дробления в случае систем с независимыми величинами основана на теореме Бека-Никеля, в которой доказано, что точные покоординатные оценки объединённого множества решений достигаются на решениях крайних точечных систем уравнений  $Ax = b$ , т.е. таких, что матрица  $A$  и вектор  $b$  образованы концами интервальных элементов из  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{b}$  соответственно. В силу этой теоремы дробление параметров сводится к замене интервальных элементов матрицы  $\mathbf{A}$  или компонент вектора правых частей  $\mathbf{b}$  системы на их правые или левые границы.

Как отмечалось в § 2.6 множество решений ИСЛАУ со связями имеет более сложную форму, в общем случае оно не является политопом и может быть ограничено криволинейными поверхностями. Поэтому в [40] предложена модификация PPS-методов применительно к ИСЛАУ со связями. Предлагается дробить интервальный параметр системы на подинтервалы ненулевой ширины, дающие в объединении исходный интервал. Кроме того, полученные при

дроблении системы-потомки должны удовлетворять связям, накладываемым на систему.

Например, если матрица ИСЛАУ симметричная, то системы-потомки также должны обладать этим же свойством. Очевидно, дробление элемента  $\mathbf{a}_{ij}$ , где  $i \neq j$  и  $i, j = 1, \dots, n$ , приведет к нарушению симметричности интервальных матриц систем-потомков, поэтому необходимо одновременно с данным элементом дробить симметричный ему относительно главной диагонали элемент  $\mathbf{a}_{ji}$ .

Воспользуемся обозначениями, введенными в § 2.4.6. Пусть  $Encl$  — базовый метод внешнего оценивания множества решений ИСЛАУ, а  $Encl(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \in \mathbb{IR}^n$  — интервальный вектор, получаемый с помощью этого метода, т.е.  $Encl(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \supseteq \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ .

Потребуем от базового метода  $Encl$  удовлетворения следующему условию: оценка  $\Upsilon(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  монотонна по включению относительно матрицы  $\mathbf{A}$  и вектора  $\mathbf{b}$ , т.е. для всех  $\mathbf{A}', \mathbf{A}'' \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  и  $\mathbf{b}', \mathbf{b}'' \in \mathbb{IR}^n$  при  $\mathbf{A}' \subseteq \mathbf{A}''$  и  $\mathbf{b}' \subseteq \mathbf{b}''$  верно неравенство

$$\Upsilon(\mathbf{A}', \mathbf{b}') \geq \Upsilon(\mathbf{A}'', \mathbf{b}'').$$

Применим методы дробления параметров для нахождения внешней оценки множества  $\Xi_p$  решений системы

$$A(p)x = b(p),$$

матрица и вектор правых частей которой зависят от параметров  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , принимающих значения из заданных интервалов  $\mathbf{p}_i$ , т.е.

$$a_{ij} = a_{ij}(p), \quad b_i = b_i(p),$$

где  $p = (p_i)$ ,  $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_i)$  и  $p \in \mathbf{p}$ .

Будем дробить интервалы параметров на подинтервалы ненулевой ширины, в объединении дающие исходные дробимые интервалы. Для этого в

интервальном векторе параметров  $\mathbf{p}$  выбираем элемент  $\mathbf{p}_r$ , имеющий наибольшую ширину. Порождаем два интервальных вектора-потомка  $\mathbf{p}'$  и  $\mathbf{p}''$ . Вектор  $\mathbf{p}'$  получается из  $\mathbf{p}$  заменой элемента  $\mathbf{p}_r$  ( $r = 1, \dots, k$ ) на  $[\underline{\mathbf{p}}_r, \text{mid } \mathbf{p}_r]$ . Вектор  $\mathbf{p}''$  получается из  $\mathbf{p}$  заменой элемента  $\mathbf{p}_r$  на  $[\text{mid } \mathbf{p}_r, \overline{\mathbf{p}}_r]$ .

Далее вычисляем элементы  $\mathbf{a}'_{ij}$  матрицы  $\mathbf{A}'$  и компоненты  $\mathbf{b}'_i$  вектора  $\mathbf{b}'$  как интервальные расширения вещественных функций  $a_{ij}(p)$  и  $b_i(p)$  на брус  $\mathbf{p}'$  соответственно. Аналогичным образом находим матрицу  $\mathbf{A}''$  и вектор  $\mathbf{b}''_i$ , заменяя брус  $\mathbf{p}'$  на  $\mathbf{p}''$ . Используя некоторый базовый метод *Encl*, находим внешние оценки  $\mathbf{x}' = \text{Encl}(\mathbf{A}', \mathbf{b}')$  и  $\mathbf{x}'' = \text{Encl}(\mathbf{A}'', \mathbf{b}'')$  множеств решений интервальных систем-потомков  $\mathbf{A}'x = \mathbf{b}'$  и  $\mathbf{A}''x = \mathbf{b}''$  соответственно.

Процедуру дробления повторяем по отношению к полученным ранее векторам-потомкам. В процессе дробления организуем список  $\mathcal{L}$ , состоящий из записей вида

$$(\tilde{\mathbf{p}}, \text{Encl}(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{b}}), \Upsilon(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{b}})),$$

где  $\tilde{\mathbf{p}}$  — интервальный вектор параметров, полученный при дроблении,  $\text{Encl}(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{b}})$  — внешняя оценка множества решений ИСЛАУ  $\tilde{\mathbf{A}}x = \tilde{\mathbf{b}}$  с матрицей  $\tilde{\mathbf{A}}$  и вектором правых частей  $\tilde{\mathbf{b}}$ , элементы которых являются интервальными расширениями  $a_{ij}(p)$  и  $b_i(p)$  на брус  $\tilde{\mathbf{p}}$  соответственно,  $\Upsilon(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{b}})$  — нижний конец  $\nu$ -ой компоненты ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ) внешней оценки множества решений, получаемой методом *Encl*.

Образующие список  $\mathcal{L}$  записи упорядочим по возрастанию значений оценки  $\Upsilon(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{b}})$ . Первую запись списка, а также её поля будем называть *ведущими* на данном шаге. Для дробления каждый раз выбираем ту компоненту ведущего вектора  $\tilde{\mathbf{p}}$ , которая имеет наибольшую величину  $\max_{1 \leq i \leq k} \text{wid } \tilde{\mathbf{p}}_i$ . Процесс дробления продолжаем до тех пор, пока все ширины компонент интервальных векторов параметров систем-потомков, находящихся в списке  $\mathcal{L}$ , не станут меньше некоторой пороговой константы  $\varepsilon > 0$ .

## 2.8. Методы внутреннего оценивания множеств решений интервальных линейных систем со связями

Задаче внутреннего оценивания множества решений ИСЛАУ со связями посвящено небольшое число работ. В большинстве из них рассматриваются ИСЛАУ, элементы матрицы и компоненты вектора правых частей которых зависят от параметров, причем данные зависимости имеют некоторый специальный вид. Предложенный Румпом метод неподвижной точки [107] и его модификация [100] могут использоваться для нахождения внутренних оценок множества  $\Xi_p$  решений ИСЛАУ, на матрицу и вектор правых частей которых наложены аффинные связи. Вектор полученных оценок является брусом  $U = (\mathbf{u}_i) \in \mathbb{IR}^n$ , таким что

$$\inf_{x \in \Xi_p} x_i \leq \underline{\mathbf{u}}_i, \quad \sup_{x \in \Xi_p} x_i \geq \overline{\mathbf{u}}_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Заметим, что не все точки бруса  $U$  принадлежат множеству решений  $\Xi_p$ , т.е.  $U \not\subseteq \Xi_p$ . Если некоторое свойство выполняется лишь для некоторых точек бруса, не обязательно для всех, то оно называется слабым [37]. Следовательно, брус  $U$  является в общем случае *слабой* внутренней оценкой множества решений  $\Xi_p$ .

В [99] предложен метод нахождения слабой внутренней оценки множества  $\Xi_p$  для интервальных линейных систем, в которых зависимости элементов матрицы  $A \in \mathbf{A}$  и компонентов вектора  $b \in \mathbf{b}$  от параметра  $p = (p_1, p_2, \dots, p_k)^\top$ ,

$$a_{ij} = a_{ij}(p), \quad b_i = b_i(p), \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (2.36)$$

представляют собой рациональные функции.

В диссертационной работе на зависимости (2.36) мы не накладываем никаких ограничений, кроме непрерывности. Предлагается два подхода к решению задачи внутреннего оценивания множества  $\Xi_p$ .

В § 2.8.1 описывается алгоритм, основанный на адаптивном дроблении параметров [40] и вычислении внутренних оценок на основе формального подхода.

В § 2.8.2 используется так называемый «центровой» подход, суть которого состоит в построении бруса, содержащегося во множестве решений, вокруг а priori известной точки-центра из этого множества. Найденная таким образом внутренняя оценка неединственна. В целях наилучшего исчерпывания множества решений ИСЛАУ со связями (получения его наиболее «представительной» оценки) в работе предлагается находить объединение брусов, построенных вокруг нескольких центровых точек.

Заметим, что применение последнего подхода возможно только для ИСЛАУ с интервальной правой частью. Поэтому в § 2.8.3 предложена модификация «центрального» подхода применительно к системам со связями, правая часть которых точечная.

### **2.8.1. Адаптивное дробление параметров и вычисление внутренних оценок на основе формального подхода**

При решении задачи внутреннего оценивания множества  $\Xi_p$  решений интервальной линейной системы (2.31), на элементы матрицы и вектора правых частей которой наложены связи в виде равенств (2.30), будем использовать формально-алгебраический подход, описанный в § 2.5.1.

Напомним, что формальное решение интервальной системы уравнений  $Ax = b$  — это интервальный вектор  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , обращающий её в равенство после подстановки в систему и выполнения всех операций по правилам интервальной арифметики (в качестве которой может выступать либо классическая интервальная арифметика  $\mathbb{IR}$ , либо полная интервальная арифметика Каухера  $\mathbb{KR}$ , либо какая-то другая интервальная алгебраическая система).

Нахождение внутренней оценки множества решений ИСЛАУ можно свести к нахождению формального решения специальной интервальной системы уравнений. А именно, если правильный интервальный вектор  $\mathbf{x}$  есть формальное решение уравнения

$$(\text{dual } \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

то  $\mathbf{x}$  является внутренней интервальной оценкой объединенного множества решений системы  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ . Таким образом, формальный подход позволяет свести задачу внутреннего интервального оценивания множества решений ИСЛАУ к задаче решения уравнения в дуализациях, т. е. к задаче численного анализа.

В качестве эффективного численного метода нахождения формальных решений интервальных систем уравнений можно использовать субдифференциальный метод Ньютона (см. § 2.5.1).

При нахождении формальных решений описанным выше способом не учитываются связи, наложенные на параметры системы. Поэтому полученные внутренние оценки множества решений ИСЛАУ могут содержать решения, как удовлетворяющие соотношениям (2.30), так и не удовлетворяющие им. Таким образом, наличие ограничений на параметры системы значительно усложняет задачу внутреннего оценивания её множества решений.

Если элементы матрицы системы зависят от параметров, принимающих значения из интервалов достаточно малой ширины, то формальное решение соответствующей интервальной системы без связей не будет сильно отличаться от внутренней оценки её множества решений с учетом имеющихся ограничений на параметры. Причем это отличие будет тем меньше, чем меньше ширина интервалов изменения параметров. Поэтому для внутреннего оценивания множества решений  $\Xi_p$  ИСЛАУ (2.31) предлагается применить адаптивное дробление интервальных параметров системы уравнений [40, 92] (или регулярное покрытие множества параметров [32]) и нахождение формальных решений полученных при этом систем-потомков.

Будем дробить интервалы параметров так, как это описано в § 2.7. Получим два интервальных вектора-потомка  $\mathbf{p}'$  и  $\mathbf{p}''$ , где  $\mathbf{p}'$  получается из  $\mathbf{p}$  заменой элемента  $\mathbf{p}_r$  на  $[\underline{\mathbf{p}}_r, \text{mid } \mathbf{p}_r]$ , а  $\mathbf{p}''$  получается из  $\mathbf{p}$  заменой элемента  $\mathbf{p}_r$  на  $[\text{mid } \mathbf{p}_r, \overline{\mathbf{p}}_r]$ . Находим формальные решения  $\mathbf{x}'$  и  $\mathbf{x}''$ , если они существуют, интервальных систем  $\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}$  и  $\mathbf{A}''\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{A}' = \{A(p) \mid p \in \mathbf{p}'\}$  и  $\mathbf{A}'' = \{A(p) \mid p \in \mathbf{p}''\}$ .

Процедуру дробления повторяем по отношению к полученным ранее векторам-потомкам. В процессе дробления организуем список  $\mathcal{L}$ , в котором храним найденные формальные решения систем-потомков и их интервальные векторы параметров. Из списка  $\mathcal{L}$  для дробления каждый раз выбираем тот вектор параметров  $\mathbf{p}$ , который имеет наибольшую величину  $\max_{1 \leq i \leq k} \text{wid } \mathbf{p}_i$ . Процесс дробления продолжаем до тех пор, пока ширина интервальных параметров всех систем-потомков, находящихся в списке  $\mathcal{L}$ , не станет меньше некоторой пороговой константы  $\varepsilon > 0$ .

В качестве искомой внутренней оценки множества  $\Xi_{\mathbf{p}}$  решений интервальной системы (2.31) можно взять объединение правильных формальных решений, содержащихся в списке  $\mathcal{L}$ .

### 2.8.2. Адаптивное дробление параметров и вычисление внутренних оценок на основе «центрового» подхода

Описанный в § 2.5.2 «центральной» подход может использоваться для внутреннего оценивания множества решений ИСЛАУ со связями [17], [18], [21]. Рассмотрим интервальную систему  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  с интервальной матрицей  $\mathbf{A}$  размерности  $m \times n$ , элементы которой удовлетворяют условиям в виде равенств из заданного множества

$$C = \{f_{\nu}(a_{11}, \dots, a_{mn}) = 0, \nu = 1, 2, \dots, l\}. \quad (2.37)$$

Сначала найдём некоторую точку  $t \in \mathbb{R}^n$ , принадлежащую множеству  $\Xi_C$  решений данной ИСЛАУ со связями. Затем, используя координаты



найденной точки, по специальным формулам вычислим брус  $\mathbf{U} = t + \rho \mathbf{e}$ ,  $\mathbf{e} = ([-1, 1], \dots, [-1, 1])^\top$  с центром в точке  $t$ , содержащийся во множестве решений  $\Xi_C$ .

Размер  $\rho$  внутренней оценки  $\mathbf{U}$  можно вычислить по формуле

$$\rho = \min_{1 \leq i \leq m} \max_{A \in \mathbf{A}} \left\{ \frac{\text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j \right|}{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|} \right\}, \quad (2.38)$$

причем максимумы по  $A \in \mathbf{A}$  для всех  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  находятся с учетом ограничений (2.37).

Таким образом, при построении внутренней интервальной оценки объединенного множества решений ИСЛАУ со связями необходимо решить для каждого  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  задачу условной оптимизации

$$\text{максимизировать функцию: } \Phi(a_{i1}, \dots, a_{in}) = \frac{\text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j \right|}{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|}$$

$$\begin{aligned} \text{при условиях:} \quad & f_\nu(a_{11}, \dots, a_{nn}) = 0, \quad a_{ij} \in \mathbf{a}_{ij}, \\ & j = 1, 2, \dots, n, \quad \nu = 1, 2, \dots, l. \end{aligned}$$

Для интервальной линейной системы  $\mathbf{A}(p) = \mathbf{b}$ , элементы матрицы которой зависят от параметров  $p_i \in \mathbf{p}_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , описанная выше оптимизационная задача примет вид

$$\text{максимизировать функцию: } \Phi(p) = \frac{\text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}(p) t_j \right|}{\sum_{j=1}^n |a_{ij}(p)|}$$

$$\text{при условиях:} \quad p \in \mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k).$$

Для решения задачи условной оптимизации используем метод проекции градиента [4]. На каждой итерации находится точка

$$p^{(r+1)} := \text{Pr} \left( p^{(r)} + \gamma^{(r)} \nabla \Phi(p^{(r)}) \right), \quad r = 0, 1, \dots,$$

где  $\nabla \Phi(p^{(r)})$  — градиент целевой функции в точке  $p^{(r)}$ ,  $\gamma^{(r)} \in \mathbb{R}$  — длина шага на  $r$ -ой итерации,  $\text{Pr} \left( p^{(r)} + \gamma^{(r)} \nabla \Phi(p^{(r)}) \right)$  — проекция точки  $p^{(r)} + \gamma^{(r)} \nabla \Phi(p^{(r)})$

на множество допустимых значений, определяемое заданными ограничениями.

В качестве центральной точки естественно взять решение точечной системы  $A(\text{mid } \mathbf{p})x = \text{mid } \mathbf{b}$ . Очевидно, данное решение принадлежит множеству  $\Xi_{\mathbf{p}}$ .

С целью уточнения внутренней оценки множества  $\Xi_{\mathbf{p}}$  имеет смысл выбрать не одной, а нескольких центральных точек и объединение построенных вокруг них интервальных оценок.

Для нахождения новых центральных точек можно использовать алгоритм адаптивного дробления параметров ИСЛАУ с учетом наложенных на неё связей, описанный § 2.8.1. В интервальном векторе параметров  $\mathbf{p}$  определяем компоненту с наибольшей шириной. В результате процедуры дробления этой интервальной компоненты порождаем два интервальных вектора-потомка  $\mathbf{p}'$  и  $\mathbf{p}''$ . Строим внутренние интервальные оценки вокруг точек  $t'$  и  $t''$ , являющихся решениями точечных систем  $A(\text{mid } \mathbf{p}')x = \text{mid } \mathbf{b}$  и  $A(\text{mid } \mathbf{p}'')x = \text{mid } \mathbf{b}$  соответственно. В списке  $\mathcal{L}$  храним найденные интервальные оценки множеств решений систем-потомков и их интервальные векторы параметров. Процесс дробления продолжаем до тех пор, пока ширины всех компонент интервальных векторов параметров систем-потомков, находящихся в списке  $\mathcal{L}$ , не станут меньше некоторой пороговой константы  $\varepsilon > 0$ .

Искомой внутренней оценкой множества решений интервальной системы (3) служит объединение интервальных решений, содержащихся в списке  $\mathcal{L}$ .

### 2.8.3. Модификация «центрального» подхода

Описанный в § 2.8.2 «центральной» подход применим к ИСЛАУ, компоненты вектора правых частей которой являются невырожденными интервалами. В противном случае воспользоваться формулой (2.38) для вычисления размера  $\rho$  внутренней оценки  $\mathbf{U}$  не представляется возможным, поскольку  $\rho = 0$  при

$\text{grad } \mathbf{b}_i = 0, i \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Однако при решении практических задач, в частности при синтезе рычажных механизмов (см. § 2.8.1), встречаются ИСЛАУ с неинтервальными правыми частями. Предлагается следующая модификация «центрового» подхода применительно к системам со связями, правая часть которых точечная [21].

Сначала найдём координаты центральной точки  $t \in \mathbb{R}^n$ , принадлежащей множеству  $\Xi_{\mathbf{p}}$  решений интервальной системы со связями. Напомним, что компоненты  $a_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ ) матрицы системы зависят от параметров  $p = (p_1, \dots, p_k)$ , где  $p \in \mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k)$ . Поэтому в качестве центральной точки можно взять решение  $t \in \mathbb{R}^n$  точечной системы  $A(\text{mid } \mathbf{p})x = b$ , положив параметры системы равными серединам соответствующих интервалов.

Далее решим задачу условной максимизации функции

$$\Phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \min_{1 \leq i \leq m} d_i(p),$$

где

$$d_i(p) = \frac{\left| b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j \right|}{\left( \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.39)$$

при условии  $p \in \mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k)$ .

Поясним суть алгоритма на примере ИСЛАУ с интервальной  $2 \times 2$ -матрицей, элементы которой зависят от параметров  $p = (p_1, \dots, p_k)$ . Если  $t \in \Xi_{\mathbf{p}}$  — центровая точка, то величины  $d_i(p)$ ,  $i = 1, 2$ , определяемые соотношениями (2.39), равны расстояниям от точки  $t$  до пары прямых, описываемых уравнениями системы (см. Рис. 2.3). Рассмотрим две задачи условной максимизации функции

$$\Phi(p) = \frac{\sqrt{2}}{4} (|d_1(p) + d_2(p)| - |d_1(p) - d_2(p)|)$$

при двух вариантах условий:

- 1)  $b_i - \sum_{j=1}^2 a_{ij}(p) t_j \leq 0, i = 1, 2, p \in \mathbf{p}$ ,
- 2)  $b_i - \sum_{j=1}^2 a_{ij}(p) t_j \geq 0, i = 1, 2, p \in \mathbf{p}$ .

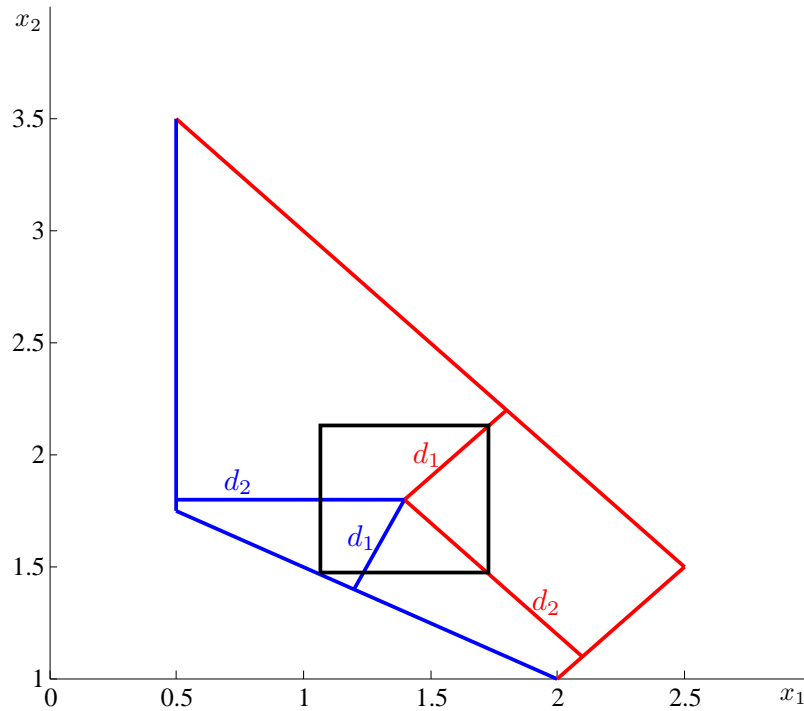


Рис. 2.3. Геометрический смысл целевой функции  $\Phi(p)$ .

Заметим, что значение функции  $\Phi(p)$  равно минимуму из расстояний  $d_1(p)$  и  $d_2(p)$ , делённому на  $\sqrt{2}$ . В результате решения задач условной оптимизации получим два максимальных значения  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  целевой функции. В качестве размера  $\rho$  внутренней оценки  $\mathbf{U}$  возьмём минимальное из этих двух значений, т.е.

$$\rho = \min \{\Phi_1, \Phi_2\}.$$

Можно гарантированно утверждать, что брус  $\mathbf{U} = t + \rho \mathbf{e}$ ,  $\mathbf{e} = ([-1, 1], \dots, [-1, 1])^\top$ , принадлежит объединённому множеству решений ИСЛАУ  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  без учета наложенных связей. Однако множество  $\Xi_p$  решений ИСЛАУ со связями имеет более сложную структуру. В § 2.8.1 мы отмечали, что если на элементы матрицы ИСЛАУ наложены аффинные связи, то множество её решений является полуалгебраическим множеством. Поэтому некоторые точки бруса  $\mathbf{U}$  могут не принадлежать множеству решений ИСЛАУ со

связями. Следовательно, брус  $\mathbf{U}$  является, в общем случае, слабой внутренней оценкой.

В целях наилучшего исчерпывания множества решений ИСЛАУ со связями (получения его наиболее «представительной» оценки) имеет смысл находить брусы  $\mathbf{U}$  не для одной, а нескольких центровых точек. Новые центры можно выбирать на гранях уже построенных ранее брусов. Полученные в результате работы алгоритма брусы будем хранить в списке  $\mathcal{L}$ .

Выбор нового центра  $t$  выполняем следующим образом. Для очередного бруса из списка  $\mathcal{L}$  на каждой его грани пытаемся найти точку, которая:

- 1) принадлежит множеству  $\Xi_p$ , т.е. существует такой вектор  $p \in \mathbf{p}$ , что  $A(p)x = b$ ,
- 2) не принадлежит внутренности какой-либо интервальной оценки, находящейся в списке  $\mathcal{L}$ .

Вокруг найденных центровых точек строим внутренние оценки  $\mathbf{U} = (t + \rho e)$  и заносим их в список  $\mathcal{L}$ , если размер  $\rho$  внутренних оценок  $\mathbf{U}$  не меньше некоторой заданной величины  $\varepsilon > 0$ . Далее выбираем следующий по порядку брус из списка и повторяем описанную процедуру.

## 2.9. Результаты использования предложенных методов для решения тестовых задач

В данном параграфе мы приводим результаты численных экспериментов, на которых были апробированы предложенные выше алгоритмы внутреннего оценивания множества решений ИСЛАУ со связями [21].

**Пример 2.3.** Рассмотрим интервальную симметричную систему линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix}, \quad (2.40)$$

где  $p_1 = 1$ ,  $p_2 \in [0, 1]$ ,  $p_3 \in [-4, -1]$ ,  $\mathbf{b}_i = [0, 2]$ ,  $i = 1, 2$ .

Множество  $\Xi_p$  решений данной системы и множество решений  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  соответствующей системы без связей описаны в Примерах 1 и 2.

Для решения задачи внутреннего оценивания множества решений системы (2.40) был применён алгоритм адаптивного дробления параметров с использованием формального подхода (см. § 2.8.1). В результате работы алгоритма при заданной пороговой константе  $\varepsilon = 0.05$  были получены 397 правильных формальных решений, некоторые из которых изображены на рисунке 2.4.

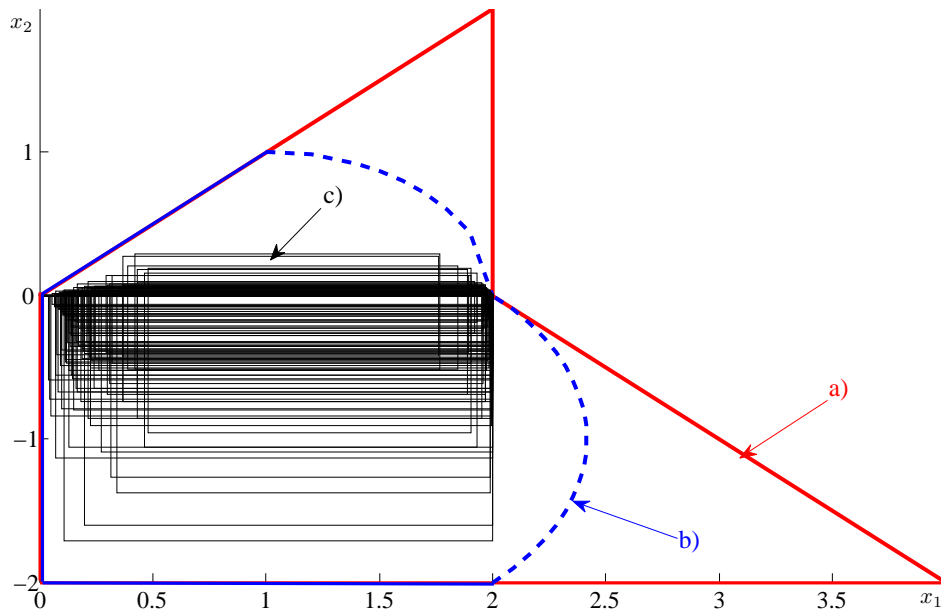


Рис. 2.4. Внутреннее оценивание множества решений ИСЛАУ (2.40) на основе формального подхода (а – множество решений ИСЛАУ без связей, б – множество решений ИСЛАУ со связями, с – правильные формальные решения).

К этой же системе применили алгоритм адаптивного дробления параметров, на каждом шаге которого для систем-потомков находили внутренние оценки «центровым» методом (см. § 2.8.2). На рисунке 2.5 изображены множества решений интервальной системы (2.40) без связей и с учетом заданных ограничений на параметры. В результате работы алгоритма при заданной по-

роговой константе  $\varepsilon = 0.05$  были получены 410 внутренних оценок, некоторые из которых изображены на рисунке 2.5.

**Пример 2.4.** Рассмотрим интервальную симметричную систему линейных уравнений с точечной правой частью:

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

где  $p_1 = 1$ ,  $p_2 \in [1, 2]$ ,  $p_3 \in [-1, 0]$ ,  $b_1 = 4$ ,  $b_2 = 1$ .

Множество решений  $\Xi_p$  симметричной ИСЛАУ (2.41) описывается системой неравенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} -4 + x_1 + x_2 \leq 0, \\ 4 - x_1 - 2x_2 \leq 0, \\ -1 + x_1 - x_2 \leq 0, \\ 1 - 2x_1 \leq 0, \\ x_1^2 - 4x_1 + x_2 \leq 0, \\ x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 + x_2 \leq 0. \end{array} \right.$$

Неравенства получены с помощью метода, основанного на процессе исключения Фурье-Мощкина [2]. Первые четыре неравенства характеризуют множество решений  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ИСЛАУ (2.41) без учета связей.

На рисунке 2.6 представлены множества решений интервальной системы (2.41) без связей и с учетом наложенных на неё связей. Для внутреннего оценивания множества решений ИСЛАУ со связями применили алгоритм, основанный на предложенной в § 2.8.3 модификации «центрового» подхода. В результате работы алгоритма при заданной пороговой константе  $\delta = 0.005$  были получены 306 внутренних оценок, которые изображены на рисунке 2.6.

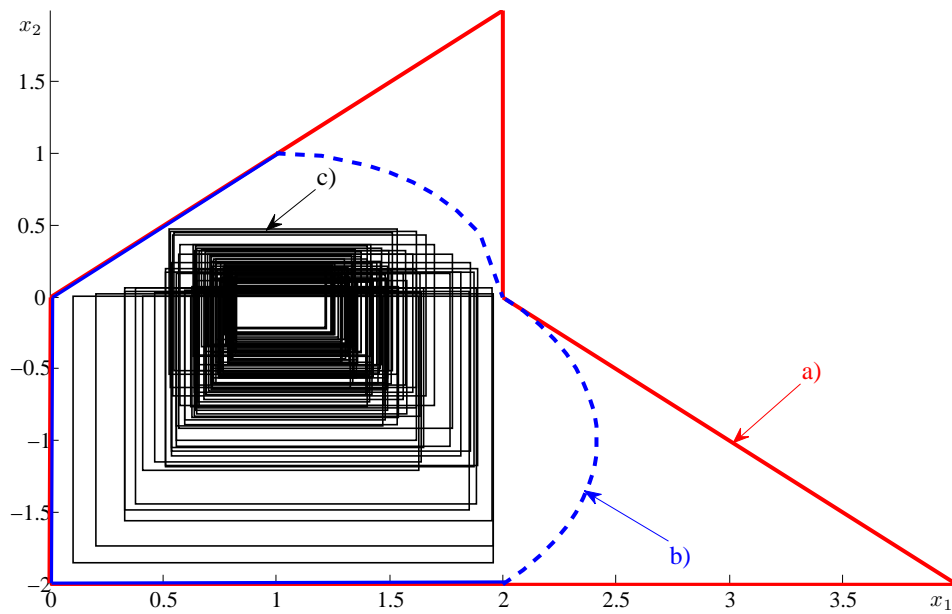


Рис. 2.5. Внутреннее оценивание множества решений ИСЛАУ (2.40) на основе «центрального» подхода (a – множество решений ИСЛАУ без связей, b – множество решений ИСЛАУ со связями, c – внутренние интервальные оценки).

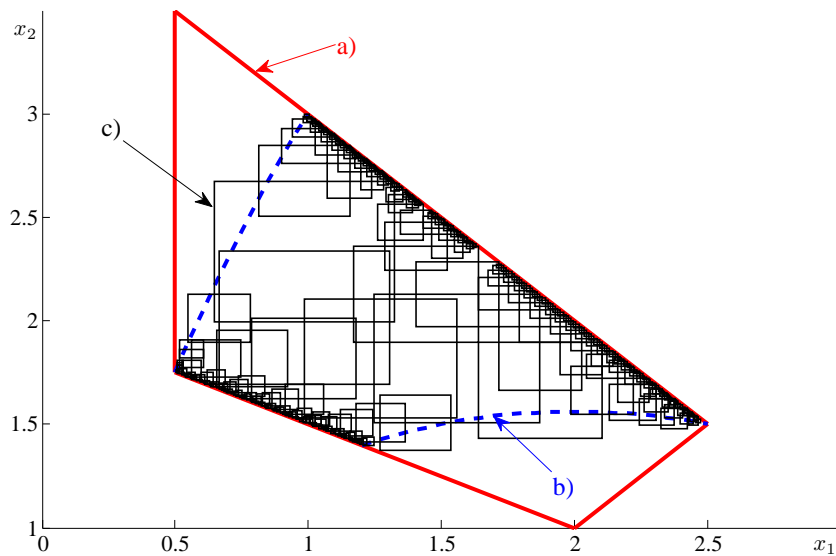


Рис. 2.6. Внутреннее оценивание множества решений ИСЛАУ (2.41) на основе модифицированного «центрального» подхода (a – множество решений ИСЛАУ без связей, b – множество решений ИСЛАУ со связями, c – внутренние интервальные оценки).



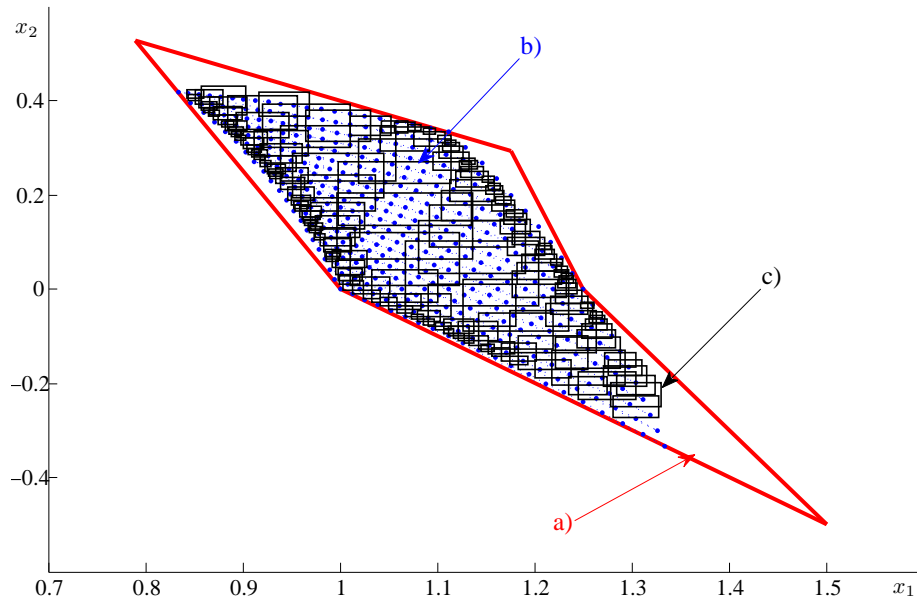


Рис. 2.7. Внутреннее оценивание множества решений ИСЛАУ (2.42) на основе модифицированного «центрального» подхода (a – множество решений ИСЛАУ без связей, b – множество решений ИСЛАУ со связями, c – внутренние интервальные оценки).

**Пример 2.5.** Рассмотрим интервальную систему линейных уравнений, элементы матрицы которой зависят нелинейно от параметров:

$$\begin{pmatrix} p_1 & \frac{p_1+1}{p_2} \\ p_2 & p_1 + 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

где  $p_1 \in [2, 3]$ ,  $p_2 \in [2, 3]$ ,  $b_1 = b_2 = 1$ .

Множество решений ИСЛАУ (2.42) со связями изображено на рисунке 2.7 в виде множества решений точечных систем  $A(p)x = b$ , где  $p \in \mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ ,  $p_i = \underline{p}_i + j/N_i$  wid  $\mathbf{p}_i$ ,  $j = 0, 1, \dots, N_i$ ,  $N_i \in \mathbb{N}$ ,  $i = 1, 2$ . В результате работы алгоритма, основанного на предложенной модификации «центрального» подхода, при заданной константе  $\delta = 0.005$  были получены 159 внутренних оценок, которые изображены на рисунке 2.7.

**Пример 2.6.** Рассмотрим интервальную систему линейных уравнений, элементы матрицы которой зависят нелинейно от параметров:

$$\begin{pmatrix} -\frac{p_1+p_2}{p_3} & p_2 + p_4 \\ p_3 + 1 & p_3 \cdot p_5 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad (2.43)$$

где  $b = (-3, -3)^\top$  и элементы матрицы системы зависят от параметров  $p_1, \dots, p_5$ .

Зададим две области изменения параметров системы:

$$P1 = \{(p_1, \dots, p_5)^\top \mid p_1 \in [1, 2], p_2 \in [1, 1.5], p_3 \in [2, 3], \\ p_4 \in [0.5, 1.5], p_5 \in [0.5, 1.5]\}$$

и

$$P2 = \{(p_1, \dots, p_5)^\top \mid p_1 \in [2, 3], p_2 \in [3, 4], p_3 \in [2, 3], \\ p_4 \in [0.5, 1.5], p_5 \in [-1.5, -0.5]\}.$$

В случае задания области  $P1$  матрица ИСЛАУ (2.43) без связей является неособенной. На рисунке 2.8 представлены множества решений данной системы без связей и с учетом наложенных на неё связей, а также 90 внутренних оценок этого множества, полученные в результате работы алгоритма при заданной константе  $\delta = 0.05$ .

В случае задания области  $P2$  матрица системы (2.43) без учета связей особенная. На рисунке 2.9 изображены множество решений ИСЛАУ со связями и 219 внутренних оценок, полученных в результате работы алгоритма при заданной константе  $\delta = 0.1$ .

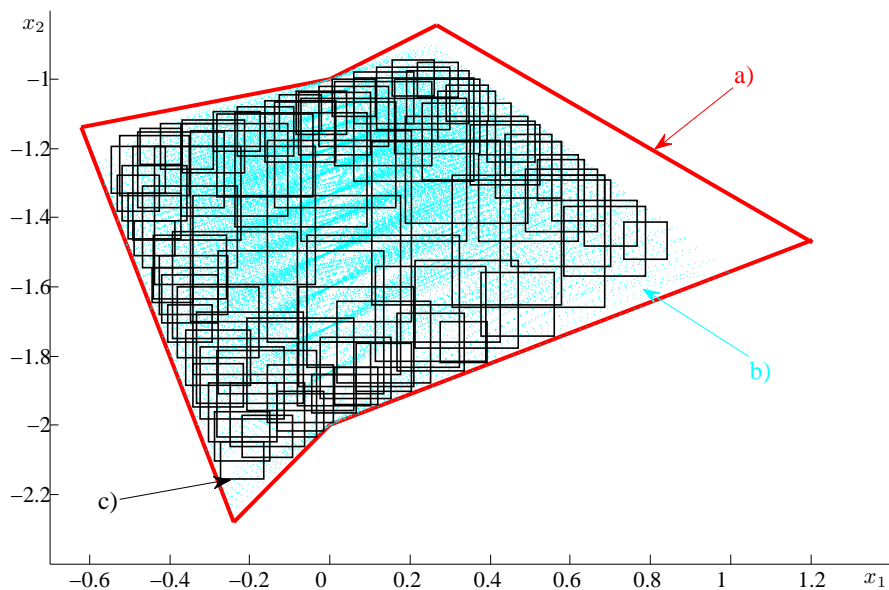


Рис. 2.8. Внутреннее оценивание множества решений ИСЛАУ (2.43), параметры которой принимают значения из области  $P1$  (а – множество решений ИСЛАУ без связей, b – множество решений ИСЛАУ со связями, c – внутренние интервальные оценки).

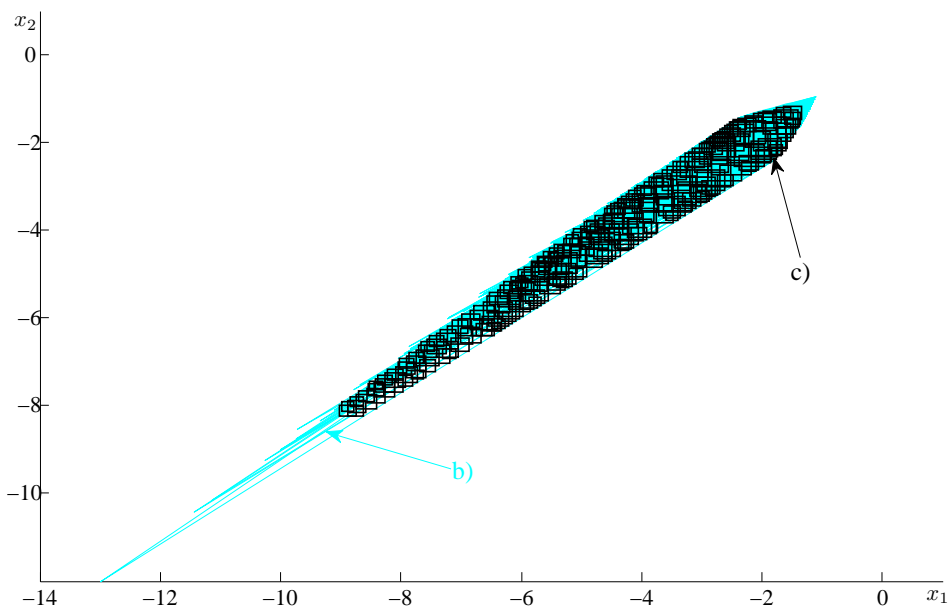


Рис. 2.9. Внутреннее оценивание множества решений ИСЛАУ (2.43), параметры которой принимают значения из области  $P2$  (а – множество решений ИСЛАУ без связей, b – множество решений ИСЛАУ со связями, c – внутренние интервальные оценки).

## Выводы к главе 2

Данная глава посвящена задачам внешнего и внутреннего оценивания множеств решений интервальных систем линейных уравнений. В начале главы изложены основы интервального анализа, описаны интервальные арифметики, приведены основные сведения об интервальных матрицах и векторах. Рассмотрены существующие методы оценивания множеств решений интервальных линейных систем уравнений. Особое внимание уделено интервальным линейным системам со связями.

Получены следующие результаты:

1. Разработаны методы внутреннего оценивания множеств решений интервальных линейных систем со связями, элементы матриц и компоненты векторов правых частей которых зависят от параметров. Методы основаны на адаптивном дроблении параметров. Для нахождения внутренней оценки предлагается использовать формальный и «центральной» подходы.
2. Разработана модификация «центрального» подхода для внутреннего оценивания множества решений ИСЛАУ, коэффициенты матрицы которой зависят от параметров, а вектор правых частей не является интервальным.
3. Разработаны методы построения регулярного покрытия брусками множества решений ИСЛАУ со связями в целях наилучшего исчерпывания этого множества.
4. Реализованы соответствующие алгоритмы и опробированы на тестовых примерах.
5. Приведены результаты численных экспериментов.

## Глава 3. Системы интервальных полиномиальных уравнений

### 3.1. Естественное интервальное расширение функций

При решении интервальными методами уравнений и систем уравнений часто возникает необходимость оценки множества значений функции на заданной области изменения её аргументов. Например, для того чтобы установить, существуют ли решения уравнения  $f(x) = 0$  на интервале  $\mathbf{x}$  требуется проверить, содержит ли нуль множество значений функции  $f(x)$  на этом интервале. В качестве интервальной оценки множества значений функции можно использовать её интервальные расширения. Известны различные формы интервального расширения, простейшей из которых является так называемое естественное интервальное расширение.

Обозначим через  $\mathbb{I}D$  множество интервальных векторов, содержащихся в множестве  $D \in \mathbb{R}^n$ , т.е.  $\mathbb{I}D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \subseteq D\}$ . Пусть  $D$  непустое множество. Интервальная функция  $\mathbf{f} : \mathbb{I}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{I}\mathbb{R}$  является *интервальным продолжением* вещественной функции  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  на множестве  $D$ , если  $\mathbf{f}(x) = f(x)$  для всех  $x \in D$ .

Заметим, что если аргументы  $x_1, \dots, x_n$  интервального продолжения  $\mathbf{f}$  являются вырожденными интервалами, то значение  $\mathbf{f}(x_1, \dots, x_n)$  есть вырожденный интервал, равный  $f(x_1, \dots, x_n)$ . Это возможно только если вычисления в интервальной арифметике точны. На практике при округлении чисел в большую сторону результатом вычисления интервального продолжения является интервал, содержащий значение  $f(x_1, \dots, x_n)$ .

Интервальная функция  $\mathbf{f} : \mathbb{I}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{I}\mathbb{R}$  является *интервальным расширением* вещественной функции  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  на множестве  $D$ , если

- 1)  $\mathbf{f}$  является интервальным продолжением вещественной функции  $f$  на множестве  $D$ ,

- 2)  $\mathbf{f}$  монотонна по включению на  $\mathbb{I}D$ , т. е.  $\mathbf{x} \subseteq \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}) \subseteq \mathbf{f}(\mathbf{y})$  для любых  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{I}D$ .

Обозначим область значений функции  $f$  на бруске  $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{I}D$  через  $\text{ran}(f, \mathbf{X})$ , т. е.

$$\text{ran}(f, \mathbf{X}) = \{f(x) \mid x \in \mathbf{X}\}.$$

Интервальная функция  $\mathbf{f} : \mathbb{I}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{I}\mathbb{R}$  называется оптимальным интервальным расширением вещественной функции  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  на  $D \subset \mathbb{R}^n$ , если  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \square(\text{ran}(f, \mathbf{x}))$  для любого  $\mathbf{x} \in \mathbb{I}D$ , т. е. значения  $\mathbf{f}$  являются интервальными оболочками областей значений  $f$  на брусках  $\mathbf{x} \in \mathbb{I}D$ .

Интервальное расширение рациональной функции  $f(x_1, \dots, x_n)$ , которое получается в результате замены его аргументов  $x_1, \dots, x_n$  на интервалы их изменения  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ , а арифметических операций — на соответствующие операции интервальной арифметики, называется *естественным интервальным расширением* и обозначается через  $\mathbf{f}_{\natural}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ .

Следующая теорема, названная основной теоремой интервальной арифметики, показывает, что естественное интервальное расширение рациональной функции является внешней оценкой её множества значений.

**Теорема 3.1** (основная теорема интервальной арифметики) [36, 37, 86].

Пусть  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — рациональная функция вещественных аргументов  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и для неё определён результат  $\mathbf{f}_{\natural}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$  подстановки вместо аргументов интервалов их изменения  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{I}\mathbb{R}$  и выполнения всех действий над ними по правилам интервальной арифметики. Тогда  $\mathbf{f}_{\natural}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  содержит множество значений функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  на  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ , т. е.

$$\{f(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in \mathbf{x}_1, \dots, x_n \in \mathbf{x}_n\} \subseteq \mathbf{f}_{\natural}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n). \quad (3.1)$$

Если в аналитическое выражение функции  $f(x_1, \dots, x_n)$  каждая переменная входит не более одного раза и не выше чем в первой степени, то в (3.1) имеет место точное равенство.

Заметим, что естественное интервальное расширение  $f_{\natural}(\mathbf{X})$  функции  $f$  на брус  $\mathbf{X} \in \mathbb{IR}^n$ , как правило, не является оптимальным и часто оказывается весьма грубой внешней оценкой области значений  $\text{ran}(f, \mathbf{X})$ . Это происходит вследствие *эффекта зависимости*. Суть этого эффекта заключается в следующем. Если интервальная переменная неоднократно входит в выражение, то каждое её вхождение обрабатывается при вычислении этого выражения как другая, независимая от предшествующих, переменная. Это приводит к значительному увеличению интервала, полученного в результате вычислений.

Например, если  $\mathbf{x} \in \mathbb{IR}$  и  $\text{wid } \mathbf{x} > 0$ , то вследствие эффекта зависимости

$$\mathbf{x} - \mathbf{x} \neq 0$$

и

$$\mathbf{x}/\mathbf{x} \neq 1,$$

поскольку

$$\mathbf{x} - \mathbf{x} = [-(\bar{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}), \bar{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}] = \text{wid } \mathbf{x} \cdot [-1, 1],$$

и

$$\mathbf{x}/\mathbf{x} = [\underline{\mathbf{x}}/\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}/\underline{\mathbf{x}}], \text{ если } \mathbf{x} > 0, \quad \mathbf{x}/\mathbf{x} = [\bar{\mathbf{x}}/\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{x}}/\bar{\mathbf{x}}], \text{ если } \mathbf{x} < 0.$$

Кроме того, точность внешнего оценивания области значений функции зависит от способа записи выражения для функции. Например, естественное интервальное расширение полиномиальной функции одной переменной

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

дает более точную оценку её области значений, если полином представить, используя схему Горнера, в виде

$$f(x) = a_0 + x \cdot \left( a_1 + x \cdot \left( a_2 + \dots + x \cdot (a_{n-1} + a_nx) \dots \right) \right).$$

**Пример 3.7.** Рассмотрим функцию

$$f(x) = x^2 + 2x + 1.$$

Запишем её в виде

$$f(x) = x \cdot (x + 2) + 1 \quad \text{и} \quad f(x) = (x + 1)^2.$$

Вычислим естественные интервальные расширения функции  $f(x)$  на интервале  $[1, 2]$ , используя приведённые выше аналитические выражения:

$$\mathbf{f}_1([1, 2]) = [1, 2]^2 + 2 \cdot [1, 2] + 1 = [-2, 3],$$

$$\mathbf{f}_2([1, 2]) = [1, 2] \cdot ([1, 2] + 2) + 1 = [-1, 1],$$

$$\mathbf{f}_3([1, 2]) = ([1, 2] + 1)^2 = [0, 1].$$

Как видим, во всех трех случаях получили разные оценки области значений  $\text{ran}(f, [1, 2]) = [0, 1]$  функции  $f(x)$  на интервале  $[1, 2]$ , причём более точную оценку получили для функции, представленной в форме Горнера. Отметим также, что  $\mathbf{f}_3([1, 2]) = \text{ran}(f, [1, 2])$ , поскольку переменная  $x$  входит только один раз в выражение  $(x + 1)^2$ .

### 3.2. Центрированные формы интервального расширения функций

Кроме естественного интервального расширения, рассмотренного выше, для оценивания области значений функции используются также центрированные формы интервального расширения.

Будем говорить, что интервальное расширение  $\mathbf{f}_c(\mathbf{X})$  функции  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  на  $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_i) \in \mathbb{IR}^n$  имеет центрированную форму с центром  $c \in \mathbb{R}^n$ , если для некоторой вектор-строки  $\mathbf{g} \in \mathbb{IR}^{1 \times n}$ , зависящей от  $\mathbf{X}$  и  $c$ , оно представимо в виде

$$\mathbf{f}_c(\mathbf{X}) = f(c) + \mathbf{g} \cdot (\mathbf{X} - c), \quad (3.2)$$

или

$$\mathbf{f}_c(\mathbf{X}) = f(c) + \sum_{i=1}^n \mathbf{g}_i(\mathbf{X}, c) \cdot (\mathbf{x}_i - c),$$

где  $\mathbf{g}_i(\mathbf{X}, c)$  — некоторые интервалы, зависящие от  $\mathbf{X}$  и  $c$ .

Точность центрированной формы интервального расширения при оценивании области значений функции исследована в работах [55, 101, 105]. Хансеном было доказано, что центрированная форма  $\mathbf{f}_c(\mathbf{X})$  имеет второй порядок



точности по отношению к  $d = \max_{1 \leq i \leq n} \{\text{wid } \mathbf{x}_i\}$ , т. е. качество оценки зависит от размеров бруса  $\mathbf{X}$ . В общем случае центрированная форма интервального расширения даёт неплохие оценки области значений функции на малых брусах.

Существуют разные виды центрированных форм, различающихся способом определения вектор-строки  $\mathbf{g} \in \mathbb{I}\mathbb{R}^{1 \times n}$  в (3.2), например, среднезначная и наклонная формы. Далее мы рассмотрим эти центрированные формы для рациональных функций.

Пусть  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  вещественная рациональная функция. По теореме Лагранжа о среднем значении существует точка  $\xi = c + \alpha(x - c)$ , где  $0 \leq \alpha \leq 1$  и  $x, c \in \mathbb{R}^n$ , такая что

$$f(x) = f(c) + f'(\xi)(x - c). \quad (3.3)$$

Если  $x, c$  принадлежат интервалу  $\mathbf{x}$ , то  $\xi$  также принадлежит этому интервалу. Возьмём интервальное расширение правой части равенства (3.3) по  $\xi \in \mathbf{x}$  и  $x \in \mathbf{x}$ , получим

$$f(x) \in f(c) + \mathbf{f}'(\mathbf{x})(\mathbf{x} - c),$$

где  $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$  — интервальное расширение производной  $f'(x)$ . Следовательно,

$$\mathbf{f}_{mv}(\mathbf{x}) = f(c) + \mathbf{f}'(\mathbf{x})(\mathbf{x} - c) \quad (3.4)$$

является внешней оценкой множества значений функции  $f$  на интервале  $\mathbf{x}$ .

Отметим, что интервальная функция (3.4) монотонна по включению, что доказано в теореме Капрани-Мадсена [52], поэтому она является интервальным расширением. Выражение  $\mathbf{f}_{mv}(\mathbf{x})$  называют *среднезначной или дифференциальной центрированной формой* интервального расширения.

Пусть теперь  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  вещественная рациональная функция  $n$  переменных и точки  $x, c$  принадлежат брусу  $\mathbf{X} \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n$ . Тогда существует точка

$\xi = c + \alpha(x - c)$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ), принадлежащая брусу  $\mathbf{X}$ , такая что

$$f(x) = f(c) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi)(x_i - c_i).$$

Обозначим через  $g = (g_i)$  градиент функции  $f$ , т. е.  $g_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Пусть  $\mathbf{g}_i(\mathbf{X})$  интервальное расширение  $g_i$  на брусе  $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_i) \in \mathbb{IR}^n$ . Тогда

$$f(x) \in f(c) + \sum_{i=1}^n \mathbf{g}_i(\mathbf{X})(x_i - c_i),$$

следовательно,

$$\text{ran}(f, \mathbf{X}) \in f(c) + \sum_{i=1}^n \mathbf{g}_i(\mathbf{X})(x_i - c_i).$$

К центрированным формам интервального расширения относится так называемая *наклонная форма*. Предположим, что для рациональной функции  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  и точек  $x, c \in \mathbb{R}$  построено разложение следующего вида

$$f(x) = f(c) + f^\angle(x, c)(x - c),$$

где функция  $f^\angle : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , определяемая как

$$f^\angle(x, c) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}, \quad (3.5)$$

называется *наклоном функции*  $f$  между точками  $c$  и  $x$  и равна угловому коэффициенту прямой, проходящей через точки  $(x, f(x))$  и  $(c, f(c))$ . Очевидно, что  $f^\angle(x, c) \rightarrow f'(c)$  при  $x \rightarrow c$ .

Если  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — полиномиальная функция, то в правой части равенства (3.5) можно в аналитическом виде выполнить деление, используя соотношение

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1},$$

либо вычислить коэффициенты наклона  $f^\angle(x, c)$  как полинома переменной  $x$  с помощью схемы Горнера.

Пусть  $\mathbf{f}^\angle(\mathbf{x}, c)$  внешняя интервальная оценка наклона  $f^\angle(x, c)$  на  $\mathbf{x}$ . Тогда интервальная функция

$$f_{sl}(\mathbf{x}, c) = f(c) + \mathbf{f}^\angle(\mathbf{x}, c)(\mathbf{x} - c) \quad (3.6)$$

называется наклонной формой интервального расширения функции  $f$  на интервале  $\mathbf{x}$  с центром в точке  $c$ .

Наклонная форма  $f_{sl}(\mathbf{x}, c)$  является внешней оценкой множества значений функции  $f$  при  $x \in \mathbf{x}$ . Отметим, что точка  $c$  может не принадлежать интервалу  $\mathbf{x}$ . Если  $c \in \mathbf{x}$ , то в силу теоремы Лагранжа о среднем значении справедливо включение  $\mathbf{f}'(\mathbf{x}, c) \subseteq \mathbf{f}'(\mathbf{x})$ . Следовательно, при  $c \in \mathbf{x}$  наклонное разложение даёт внешнюю оценку множества значений функции  $f(x)$  на  $\mathbf{x}$ , которая по крайней мере не шире, чем оценка, полученная с помощью среднезначимой формы интервального расширения.

Теперь рассмотрим многомерный случай. Как показано в [37], наклон функции нескольких переменных определяется неоднозначно. Наклонное разложение функции нескольких переменных можно получить с помощью процедуры последовательного разложения [36]. Поясним эту процедуру на примере функции 3-х переменных  $f(x_1, x_2, x_3)$ . Запишем наклонное разложение для  $f$  как функции аргумента  $x_3$

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, c_3) + f_3'(x_1, x_2, x_3, c_3)(x_3 - c_3), \quad (3.7)$$

где

$$f_3'(x_1, x_2, x_3, c_3) = \frac{f(x_1, x_2, x_3) - f(x_1, x_2, c_3)}{x_3 - c_3}.$$

Рассмотрим теперь  $f(x_1, x_2, c_3)$  как функцию переменной  $x_2$  и запишем для неё наклонное разложение

$$f(x_1, x_2, c_3) = f(x_1, c_2, c_3) + f_2'(x_1, x_2, c_2, c_3)(x_2 - c_2), \quad (3.8)$$

где

$$f_2'(x_1, x_2, c_2, c_3) = \frac{f(x_1, x_2, c_3) - f(x_1, c_2, c_3)}{x_2 - c_2}.$$

Наконец, разложим  $f(x_1, c_2, c_3)$  как функцию переменной  $x_1$

$$f(x_1, c_2, c_3) = f(c_1, c_2, c_3) + f_1'(x_1, c_1, c_2, c_3)(x_1 - c_1), \quad (3.9)$$

где

$$f_1^{\sphericalangle}(x_1, c_1, c_2, c_3) = \frac{f(x_1, c_2, c_3) - f(c_1, c_2, c_3)}{x_1 - c_1}.$$

Таким образом, получим наклонное разложение функции  $f(x_1, x_2, c_3)$  в виде

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= f(c_1, c_2, c_3) + \\ &+ f_1^{\sphericalangle}(x_1, c_1, c_2, c_3)(x_1 - c_1) + \\ &+ f_2^{\sphericalangle}(x_1, x_2, c_2, c_3)(x_2 - c_2) + \\ &+ f_3^{\sphericalangle}(x_1, x_2, x_3, c_3)(x_3 - c_3). \end{aligned}$$

Если  $f_1^{\sphericalangle}(\mathbf{x}_1, c_1, c_2, c_3)$ ,  $f_2^{\sphericalangle}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, c_2, c_3)$ ,  $f_3^{\sphericalangle}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, c_3)$  есть внешние интервальные оценки множеств значений соответствующих вещественных функций  $f_1^{\sphericalangle}$ ,  $f_2^{\sphericalangle}$  и  $f_3^{\sphericalangle}$  при  $x_i \in \mathbf{x}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , тогда

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &\in f(c_1, c_2, c_3) + \\ &+ f_1^{\sphericalangle}(\mathbf{x}_1, c_1, c_2, c_3)(x_1 - c_1) + \\ &+ f_2^{\sphericalangle}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, c_2, c_3)(x_2 - c_2) + \\ &+ f_3^{\sphericalangle}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, c_3)(x_3 - c_3). \end{aligned}$$

В силу неоднозначного определения многомерного наклона его прямая интервализация невозможна. В [37] вводится следующее понятие. Интервальным наклоном функции  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  на брус  $\mathbf{X} \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n$  относительно точки  $c$  называется интервальный вектор  $f^{\sphericalangle}(\mathbf{X}, c) \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n$ , такой что для любого  $x \in \mathbf{X}$  существует  $s \in f^{\sphericalangle}(\mathbf{X}, c)$ , являющийся наклоном функции  $f$  между точками  $x$  и  $c$ .

Тогда наклонная форма интервального расширения функции  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  на брус  $\mathbf{X} \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n$  с центром в точке  $c$

$$\mathbf{f}_{sl}(\mathbf{X}, c) = f(c) + f^{\sphericalangle}(\mathbf{X}, c)(\mathbf{X} - c),$$

где  $f^{\sphericalangle}(\mathbf{X}, c)$  — интервальный наклон функции  $f$  на  $\mathbf{X}$ , является внешней интервальной оценкой  $\text{ran}(f, \mathbf{X})$ .

Заметим, что точность этой оценки зависит от выбора точки  $c$ , от порядка, в котором выполняются последовательные одномерные разложения (3.7) – (3.9), а также от вида аналитической записи функций, участвующих в разложении.

### 3.3. Интервальные полиномы

#### 3.3.1. Внешняя оценка множества значений интервального полинома на заданном брус

Рассмотрим вещественный полином одной переменной

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \quad (3.10)$$

коэффициенты которого могут принимать значения из заданных интервалов, т. е.  $a_i \in \mathbf{a}_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Под интервальным полиномом

$$\mathbf{f}(x) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1x + \mathbf{a}_2x^2 + \dots + \mathbf{a}_nx^n \quad (3.11)$$

будем понимать множество вещественных полиномов (3.10), коэффициенты которых  $a_i \in \mathbf{a}_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Полином  $\mathbf{f}(x) = \sum_{i=0}^n \mathbf{a}_i x^i$  с интервальными коэффициентами  $\mathbf{a}_i$  можно ограничить двумя вещественными функциями

$$f^l(x) = \sum_{i=0}^n \text{lower}(\mathbf{a}_i, x, i) \quad \text{и} \quad f^u(x) = \sum_{i=0}^n \text{upper}(\mathbf{a}_i, x, i), \quad (3.12)$$

где

$$\text{lower}(\mathbf{a}_i, x, i) = \begin{cases} \underline{\mathbf{a}}_i x^i, & \text{если } x \geq 0 \text{ или } i\text{-четное,} \\ \bar{\mathbf{a}}_i x^i, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\text{upper}(\mathbf{a}_i, x, i) = \begin{cases} \bar{\mathbf{a}}_i x^i, & \text{если } x \geq 0 \text{ или } i\text{-четное,} \\ \underline{\mathbf{a}}_i x^i, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Внешнюю оценку множества значений интервального полинома (3.11) на интервале  $\mathbf{x} \in \mathbb{IR}$  можно получить как результат подстановки этого интервала вместо переменной  $x$  и выполнения соответствующих операций интервальной арифметики. Однако вследствие эффекта зависимости и погрешностей вычислений полученная оценка будет достаточно грубой.

Чтобы улучшить качество оценивания, вычислим интервальные расширения  $\mathbf{f}^l(\mathbf{x})$  и  $\mathbf{f}^u(\mathbf{x})$  соответствующих ограничивающих функций на интервале  $\mathbf{x}$ , используя схему Горнера, описанную в § 3.1. В качестве внешней оценки множества значений полинома (3.11) на  $\mathbf{x}$  возьмём интервал

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [ \inf \mathbf{f}^l(\mathbf{x}), \sup \mathbf{f}^u(\mathbf{x}) ]. \quad (3.13)$$

Очевидно, что

$$\text{ran}(\mathbf{f}, \mathbf{x}) \subseteq [ \inf \mathbf{f}^l(\mathbf{x}), \sup \mathbf{f}^u(\mathbf{x}) ].$$

**Пример 3.8.** Рассмотрим интервальный полином

$$\mathbf{f}(x) = [-0.5, 0.2]x^3 + [-2, -1.5]x^2 + [1.5, 2]x + [1, 2] \quad (3.14)$$

Вещественные функции  $f^l(x)$  и  $f^u(x)$ , ограничивающих данный интервальный полином, имеют вид

$$f^l(x) = \begin{cases} 0.2x^3 - 2x^2 + 2x + 1, & \text{если } x < 0, \\ -0.5x^3 - 2x^2 + 1.5x + 1, & \text{если } x \geq 0, \end{cases}$$

$$f^u(x) = \begin{cases} -0.5x^3 - 1.5x^2 + 1.5x + 2, & \text{если } x < 0, \\ 0.2x^3 - 1.5x^2 + 2x + 2, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

На рис. 3.1 изображены графики функций  $f^l(x)$  и  $f^u(x)$ , ограничивающих интервальный полином (3.14).

Найдём внешнюю оценку множества значений интервального полинома (3.14) на интервале  $[-2, 2]$ . Для этого вычислим естественные интервальные

расширения функций  $f^l(x)$  и  $f^u(x)$  на интервалах  $[-2, 0]$  и  $[0, 2]$ , используя схему Горнера:

$$\mathbf{f}^l([-2, 0]) = 1 + [-2, 0] \cdot (2 + [-2, 0] \cdot (-2 + 0.2 \cdot [-2, 0])) = [-12.6, 1],$$

$$\mathbf{f}^l([0, 2]) = 1 + [0, 2] \cdot (1.5 + [0, 2] \cdot (-2 - 0.5 \cdot [0, 2])) = [-8, 4],$$

$$\mathbf{f}^u([-2, 0]) = 2 + [-2, 0] \cdot (1.5 + [-2, 0] \cdot (-1.5 - 0.5 \cdot [-2, 0])) = [-7, 2],$$

$$\mathbf{f}^u([0, 2]) = 2 + [0, 2] \cdot (2 + [0, 2] \cdot (-1.5 + 0.2 \cdot [0, 2])) = [0, 6].$$

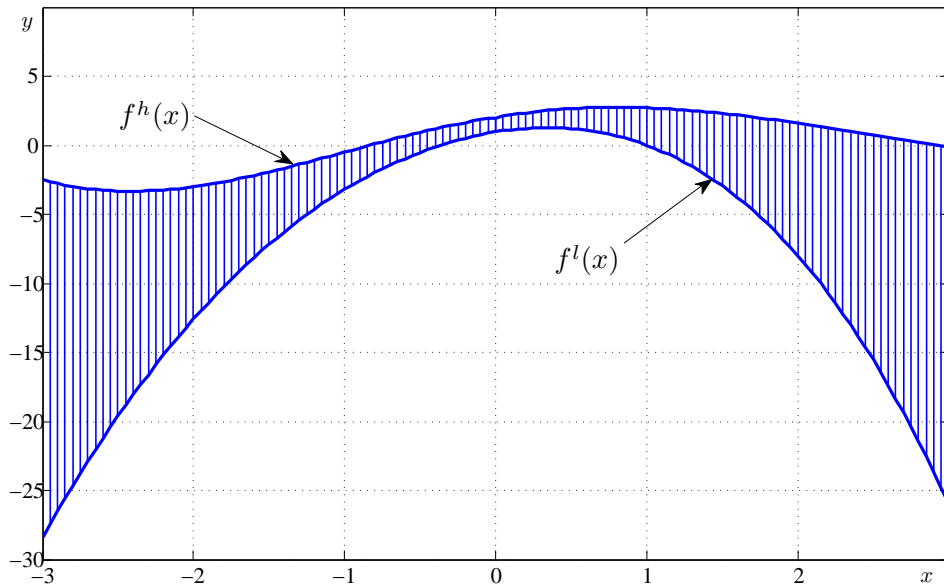


Рис. 3.1. Интервальный полином (3.14).

Тогда искомая внешняя оценка

$$\mathbf{f}([-2, 2]) = [\inf \mathbf{f}^l([-2, 2]), \sup \mathbf{f}^u([-2, 2])] = [-12.6, 6].$$

Заметим, что естественное интервальное расширение полинома (3.14) на  $[-2, 2]$  равно

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{f}}([-2, 2]) &= \\ &= [-0.5, 0.2] \cdot ([-2, 2])^3 + [-2, -1.5] \cdot ([-2, 2])^2 + [1.5, 2] \cdot ([-2, 2]) + [1, 2] = \\ &= [-15, 10]. \end{aligned}$$

Как видим,  $\mathbf{f}([-2, 2]) \subset \tilde{\mathbf{f}}([-2, 2])$ , т. е. оценка множества значений интервального полинома  $\mathbf{f}(x)$ , полученная на основе интервальных расширений

вещественных полиномов  $f^l(x)$  и  $f^u(x)$  лучше, чем естественное интервальное расширение этого полинома.

Рассмотрим теперь интервальный полином  $n$  переменных вида

$$\mathbf{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k_1=0}^{K_1} \sum_{k_2=0}^{K_2} \dots \sum_{k_n=0}^{K_n} \mathbf{a}_{k_1 k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}, \quad (3.15)$$

где  $\mathbf{a}_{k_1 k_2 \dots k_n} \in \mathbb{IR}$ ,  $K_1, K_2, \dots, K_n$  — натуральные числа.

Под интервальным полиномом (3.15) будем понимать множество вещественных полиномов

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k_1=0}^{K_1} \sum_{k_2=0}^{K_2} \dots \sum_{k_n=0}^{K_n} a_{k_1 k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$$

с коэффициентами  $a_{k_1 k_2 \dots k_n} \in \mathbf{a}_{k_1 k_2 \dots k_n}$ , где  $k_i = 1, \dots, K_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Для внешнего оценивания области значений полиномиальной функции (3.15) на брус  $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)$  запишем полином в так называемой вложенной форме [114].

Представим функцию  $\mathbf{f}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  в виде интервального полинома переменной  $x_n$

$$\mathbf{q}(x_n) = \mathbf{q}_0 + \dots + \mathbf{q}_{k_n} x_n^{k_n} + \dots + \mathbf{q}_{K_n} x_n^{K_n},$$

коэффициенты  $\mathbf{q}_{k_n}$  ( $k_n = 1, \dots, K_n$ ) которого являются интервальными полиномами переменных  $x_1, \dots, x_{n-1}$ .

Аналогичным образом представим  $\mathbf{q}_{k_n}$  ( $k_n = 1, \dots, K_n$ ) в виде интервальных полиномов переменной  $x_{n-1}$

$$\mathbf{q}_{k_n}(x_{n-1}) = \mathbf{q}_{k_n 0} + \dots + \mathbf{q}_{k_n k_{n-1}} x_{n-1}^{k_{n-1}} + \dots + \mathbf{q}_{k_n K_{n-1}} x_{n-1}^{K_{n-1}}$$

с коэффициентами  $\mathbf{q}_{k_n k_{n-1}}$  ( $k_{n-1} = 1, \dots, K_{n-1}$ ), которые в свою очередь запишем в виде

$$\mathbf{q}_{k_n k_{n-1}}(x_{n-2}) = \mathbf{q}_{k_n k_{n-1} 0} + \dots + \mathbf{q}_{k_n k_{n-1} k_{n-2}} x_{n-2}^{k_{n-2}} + \dots + \mathbf{q}_{k_n k_{n-1} K_{n-1}} x_{n-2}^{K_{n-1}},$$



и т. д.

$$\mathbf{q}_{k_n \dots k_3}(x_2) = \mathbf{q}_{k_n \dots k_3 0} + \dots + \mathbf{q}_{k_n \dots k_3 k_2} x_2^{k_2} + \dots + \mathbf{q}_{k_n \dots k_3 K_2} x_2^{K_2}, \quad (3.16)$$

$$\mathbf{q}_{k_n \dots k_2}(x_1) = \mathbf{q}_{k_n \dots k_2 0} + \dots + \mathbf{q}_{k_n \dots k_2 k_1} x_1^{k_1} + \dots + \mathbf{q}_{k_n \dots k_2 K_1} x_1^{K_1}, \quad (3.17)$$

$$\mathbf{q}_{k_n \dots k_2 k_1} = \mathbf{a}_{k_1 k_2 \dots k_n}.$$

Далее вычислим внешние оценки множеств значений полиномов  $\mathbf{q}_{k_n \dots k_2}(x_1)$  ( $k_j = 0, \dots, K_j$  и  $j = 2, \dots, n$ ) одной переменной  $x_1$  на интервале  $\mathbf{x}_1$ . Для этого, используя (3.12) и (3.13), найдём интервальные расширения вещественных полиномов  $q_{k_n \dots k_2}^l(x_1)$  и  $q_{k_n \dots k_2}^u(x_1)$ , ограничивающих  $\mathbf{q}_{k_n \dots k_2}(x_1)$ , и в качестве искомой оценки возьмём

$$\mathbf{q}_{k_n \dots k_2}(\mathbf{x}_1) = [\inf q_{k_n \dots k_2}^l(\mathbf{x}_1), \sup q_{k_n \dots k_2}^u(\mathbf{x}_1)].$$

Подставив найденные интервалы  $\mathbf{q}_{k_n \dots k_2}(\mathbf{x}_1)$  в (3.16), получим интервальные полиномы

$$\mathbf{q}_{k_n \dots k_3}(x_2) = \sum_{k_2=0}^{K_2} \mathbf{q}_{k_n \dots k_3 k_2}(\mathbf{x}_1) \cdot x_2^{k_2}, \quad k_j = 0, \dots, K_j, \quad j = 3, \dots, n. \quad (3.18)$$

Для каждого из интервальных полиномов (3.18) находим, используя (3.12), ограничивающие его вещественные полиномы  $q_{k_n \dots k_3}^l(x_2)$  и  $q_{k_n \dots k_3}^u(x_2)$ . Для этих вещественных полиномов вычисляем интервальные расширения  $q_{k_n \dots k_3}^l(\mathbf{x}_2)$  и  $q_{k_n \dots k_3}^u(\mathbf{x}_2)$  на  $\mathbf{x}_2$ , интервальную оболочку которых берем в качестве внешней оценки  $\mathbf{q}_{k_n \dots k_3}(\mathbf{x}_2)$  множества значений интервального полинома  $\mathbf{q}_{k_n \dots k_3}(x_2)$ .

Далее поступаем аналогичным образом пока не получим внешнюю оценку исходного интервального полинома (3.15) на брус  $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)^\top$  в виде

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = \mathbf{q}(\mathbf{x}_n).$$

### 3.3.2. Интервальные корни интервального полинома одной переменной

Рассмотрим интервальное полиномиальное уравнение

$$\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1x + \mathbf{a}_2x^2 + \cdots + \mathbf{a}_nx^n = 0, \quad (3.19)$$

где  $\mathbf{a}_i \in \mathbb{IR}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Обозначим через  $\mathbf{f}(x)$  интервальный полином в правой части уравнения (3.19), т. е.

$$\mathbf{f}(x) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1x + \mathbf{a}_2x^2 + \cdots + \mathbf{a}_nx^n, \quad (3.20)$$

через  $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)^\top$  — вектор его интервальных коэффициентов.

Под интервальным полиномом  $\mathbf{f}(x)$  мы понимаем семейство вещественных полиномов

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

с коэффициентами  $a_i \in \mathbf{a}_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Как показано в § 3.3.1, интервальный полином  $\mathbf{f}(x)$  можно ограничить вещественными полиномами  $f^l(x)$  и  $f^u(x)$ , используя соотношения (3.12).

Пусть существует число  $\hat{x} \in \mathbb{R}$  такое, что  $0 \in [f^l(\hat{x}), f^u(\hat{x})]$ . *Интервальный корень* уравнения (3.19) определим как наибольший интервал  $\mathbf{q}$ , содержащий  $\hat{x}$  такой, что для любой точки  $x \in \mathbf{q}$  имеет место включение

$$0 \in [f^l(x), f^u(x)].$$

Интервальный корень  $\mathbf{q}$  может быть конечным интервалом  $[q_1, q_2]$  как вырожденным, так и невырожденным, полубесконечным интервалом  $(-\infty, q_3]$  или  $[q_4, +\infty)$ , а также всем множеством действительных чисел. Заметим, что числа  $q_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , являются корнями вещественных полиномов  $f^l(x)$  и  $f^u(x)$ , ограничивающих интервальный полином  $\mathbf{f}(x)$ .

Предположим, что для полиномов  $f^l(x)$  и  $f^u(x)$  найдены все действительные корни. Пусть среди найденных корней  $k$  различных. Запишем их в

порядке возрастания

$$q_1 < \dots < q_j < \dots < q_k. \quad (3.21)$$

Рассмотрим интервалы

$$\mathbf{q}_1 = (-\infty, q_1], \dots, \mathbf{q}_j = [q_{j-1}, q_j], \dots, \mathbf{q}_{k+1} = [q_k, +\infty).$$

Невырожденный интервал  $\mathbf{q}_j$ ,  $j = 1, \dots, k + 1$ , является интервальным корнем уравнения (3.19), если для любой точки  $q$ , принадлежащей внутренности интервала  $\mathbf{q}_j$  справедливо

$$0 \in [f^l(q), f^u(q)].$$

Вырожденный интервал  $[q_j, q_j]$ ,  $j = 1, \dots, k$ , является интервальным корнем уравнения (3.19), если для любых точек  $q'$  и  $q''$ , принадлежащих внутренностям интервалов  $\mathbf{q}_j$  и  $\mathbf{q}_{j+1}$  соответственно, справедливо

$$0 \notin [f^l(q'), f^u(q')] \quad \text{и} \quad 0 \notin [f^l(q''), f^u(q'')].$$

Объединение интервальных корней полинома  $\mathbf{f}(x)$  является внешней оценкой множества решений

$$\Xi(\mathbf{f}, \mathbf{a}) = \{x \in \mathbb{R} \mid (\exists \mathbf{a} \in \mathbf{a})(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0)\}$$

интервального уравнения (3.19).

**Пример 3.9.** Рассмотрим интервальное уравнение

$$[-1, 0]x^3 + [1, 2]x^2 + [-1, 2]x + [1, 2] = 0. \quad (3.22)$$

Обозначим через  $\mathbf{f}(x)$  интервальный полином в левой части уравнения (3.22), т. е.

$$\mathbf{f}(x) = [-1, 0]x^3 + [1, 2]x^2 + [-1, 2]x + [1, 2]. \quad (3.23)$$

Вещественные функции  $f^l(x)$  и  $f^u(x)$ , ограничивающие полином (3.23), имеют вид

$$f^l(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1, & \text{если } x < 0, \\ -x^3 + x^2 - x + 1, & \text{если } x \geq 0, \end{cases}$$

$$f^u(x) = \begin{cases} -x^3 + 2x^2 - x + 2, & \text{если } x < 0, \\ 2x^2 + 2x + 2, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

Полином  $f^l(x)$  имеет корни  $q_1 = -1$ ,  $q_2 = 1$ , полином  $f^u(x)$  не имеет корней. Как видно из рис. 3.2, на котором изображен интервальный полином (3.23), интервальными корнями полинома (3.23) являются невырожденный интервал  $[1, +\infty)$  и вырожденный интервал  $[-1, -1]$ .

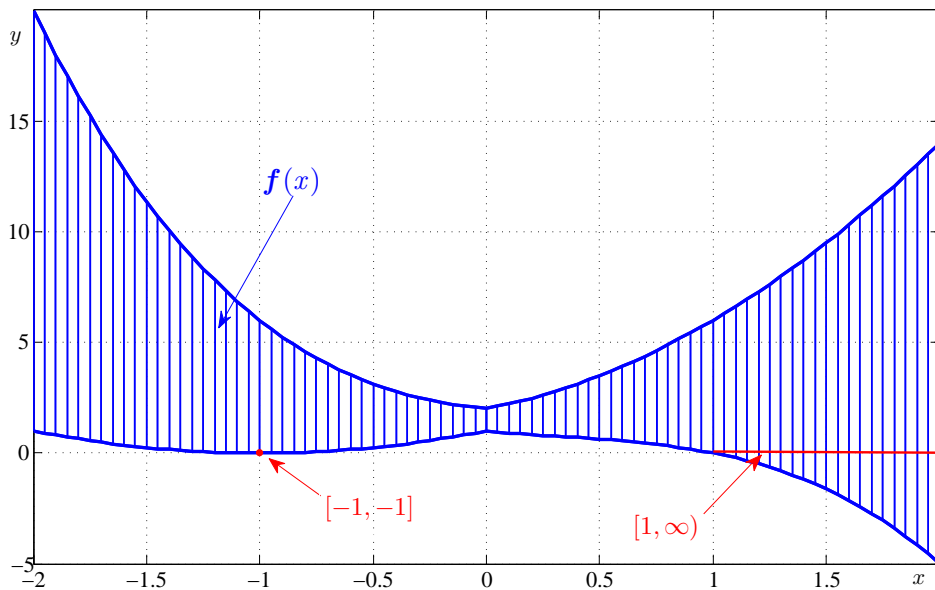


Рис. 3.2. Интервальный полином (3.23) и его корни.

Для нахождения интервальных корней интервального полиномиального уравнения (3.19) предлагается следующий алгоритм.

*Шаг 1.* Вычисляем корни вещественных полиномов  $f^l(x)$  и  $f^u(x)$ . Присваиваем компонентам вектора  $Q = (q_j)$  найденные различные корни так, что

$q_1 < q_2 < \dots < q_k$ , где  $k$  — длина вектора  $Q$ . Инициализируем пустые списки  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$ .

*Шаг 2.* Если  $k = 0$  и  $0 \in [f^l(q), f^u(q)]$ , где  $q \in \mathbb{R}$ , то интервальным корнем уравнения является вся числовая ось, поэтому в список  $\mathcal{L}_1$  заносим интервал  $(-\infty, +\infty)$ . Если  $k = 0$  и  $0 \notin [f^l(q), f^u(q)]$ , где  $q \in \mathbb{R}$ , то уравнение не имеет корней и список  $\mathcal{L}_1$  остается пустым.

*Шаг 3.* Если  $k \neq 0$ , заносим в список  $\mathcal{L}_2$  интервалы  $\mathbf{q}_1 = (-\infty, q_1]$ ,  $\mathbf{q}_2 = [q_1, q_2]$ ,  $\dots$ ,  $\mathbf{q}_k = [q_{k-1}, q_k]$ ,  $\mathbf{q}_{k+1} = [q_k, +\infty)$ . Присваиваем  $j := 1$ ,  $m := 0$ .

*Шаг 4.* Если  $j > k + 1$ , то заканчиваем работу алгоритма, в противном случае извлекаем  $j$ -ую запись из списка  $\mathcal{L}_2$ . Если  $j = 1$ , то  $q := q_1 - \theta$ , где  $\theta$  — некоторое положительное число. Если  $j = k + 1$ , то  $q := q_k + \vartheta$ , где  $\vartheta$  — некоторое положительное число. Если  $j \neq 1$  и  $j \neq k + 1$ , то  $q := \frac{1}{2}(q_{j-1} + q_j)$ .

*Шаг 5.* Если  $m = 0$  и  $0 \notin [f^l(q), f^u(q)]$ , то в список  $\mathcal{L}_1$  заносим в качестве первой записи вырожденный интервал  $[q_j, q_j]$ . Если  $m = 0$  и  $0 \in [f^l(q), f^u(q)]$ , то в список  $\mathcal{L}_1$  заносим в качестве первой записи интервал  $\mathbf{q}_1$ . Присваиваем  $j := j + 1$ ,  $m := m + 1$  и переходим на шаг 4.

*Шаг 6.* Если  $m \neq 0$  и  $0 \notin [f^l(q), f^u(q)]$ , то присваиваем  $m := m + 1$  и заносим в список  $\mathcal{L}_1$  в качестве  $m$ -ой записи вырожденный интервал  $[q_j, q_j]$ . Если  $m \neq 0$  и  $0 \in [f^l(q), f^u(q)]$ , то из списка  $\mathcal{L}_1$  извлекаем  $m$ -ую запись. Если извлеченный интервал  $\mathbf{r}$  является вырожденным, то в списке  $\mathcal{L}_1$  меняем  $m$ -ую запись на интервал  $\mathbf{q}_j$ , в противном случае — на интервал  $[\underline{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{q}}_j]$ . Присваиваем  $j := j + 1$  и переходим на шаг 4.

### 3.4. Методы внешнего оценивания множеств решений систем нелинейных уравнений

В данном параграфе мы рассмотрим методы внешнего оценивания множеств решений нелинейных систем уравнений, такие как многомерный интер-

вальный метод Ньютона [42, 58], его модификации [59, 61, 71], методы распространения ограничений [35, 67]. Эти методы, как будет показано в § 3.6, можно распространить на системы интервальных полиномиальных уравнений.

Интервальный метод Ньютона достаточно широко применяется на практике. Описание метода и его свойств можно найти в [2, 32, 36, 93].

Пусть на некотором исходном брус  $\mathbf{X} \in \mathbb{IR}^n$  ищется решение системы нелинейных уравнений вида

$$F(X) = 0, \quad (3.24)$$

где  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — непрерывно дифференцируемая функция.

Пусть  $\mathbf{L}(\tilde{X}, \mathbf{X})$  — интервальная матрица Липшица отображения  $F$  на брус  $\mathbf{X}$ , т. е. для любых  $X, \tilde{X} \in \mathbf{X}$  равенство

$$F(X) - F(\tilde{X}) = L(X - \tilde{X}) \quad (3.25)$$

имеет место с некоторой вещественной матрицей  $L \in \mathbf{L}(\tilde{X}, \mathbf{X})$ . Для нахождения элементов матрицы Липшица можно использовать центрированные формы интервального расширения функций, описанных в § 3.2.

Тогда из (3.25) следует включение

$$F(X) \in F(\tilde{X}) + \mathbf{L}(\tilde{X}, \mathbf{X})(X - \tilde{X}).$$

Пусть  $X^*$  — решение системы (3.24), т. е.  $F(X^*) = 0$ , тогда

$$0 \in F(\tilde{X}) + \mathbf{L}(\tilde{X}, \mathbf{X})(X - \tilde{X}).$$

Используя характеристику Бека (см. § 2.3), получим, что  $X^*$  принадлежит множеству решений интервальной системы линейных уравнений

$$\mathbf{L}(\tilde{X}, \mathbf{X})(X - \tilde{X}) = -F(\tilde{X}). \quad (3.26)$$

Напомним, что через  $Encl$  мы обозначаем некоторый метод внешнего оценивания множества решений ИСЛАУ, а через  $Encl(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \in \mathbb{IR}^n$  — интервальный вектор, получаемый с помощью этого метода, т. е.  $Encl(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \supseteq$

$\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ . Тогда

$$X^* - \tilde{X} \in \text{Encl}(\mathbf{L}(\tilde{X}, \mathbf{X}), -F(\tilde{X})),$$

отсюда

$$X^* \in \tilde{X} - \text{Encl}(\mathbf{L}(\tilde{X}, \mathbf{X}), F(\tilde{X})).$$

Отображение  $\mathcal{N} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  вида

$$\mathcal{N}(\tilde{X}, \mathbf{X}) = \tilde{X} - \text{Encl}(\mathbf{L}(\tilde{X}, \mathbf{X}), F(\tilde{X})) \quad (3.27)$$

называется *интервальным оператором Ньютона*.

Имеют место следующие свойства интервального оператора Ньютона:

- 1) каждое решение системы  $F(X) = 0$  на брус  $\mathbf{X}$  лежит также в  $\mathcal{N}(\tilde{X}, \mathbf{X})$ ;
- 2) если  $\mathbf{X} \cap \mathcal{N}(\tilde{X}, \mathbf{X}) = \emptyset$ , то в брус  $\mathbf{X}$  нет решений системы  $F(X) = 0$ ;
- 3) если  $\mathcal{N}(\tilde{X}, \mathbf{X}) \subseteq \mathbf{X}$ , то в брус  $\mathbf{X}$  находится хотя бы одно решение системы  $F(X) = 0$ ;
- 4) если  $\emptyset \neq \mathcal{N}(\tilde{X}, \mathbf{X}) \subseteq \text{int } \mathbf{X}$ , где  $\text{int } \mathbf{X}$  — внутренность бруса  $\mathbf{X}$ , то матрица  $\mathbf{L}(\tilde{X}, \mathbf{X})$  сильно неособенна и в брус  $\mathbf{X}$  содержится ровно одно решение системы  $F(X) = 0$ .

На основе этих свойств можно определить следующий итерационный алгоритм:

$$\begin{cases} \mathbf{X}^{(0)} := \mathbf{X}, \\ \mathbf{X}^{(k+1)} := \mathbf{X}^{(k)} \cap \mathcal{N}(X^{(k)}, \mathbf{X}^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (3.28)$$

где  $X^{(k)} \in \mathbf{X}^{(k)}$ . В качестве точки  $X^{(k)}$  удобно брать середину бруса  $\mathbf{X}^{(k)}$ , хотя, как предлагается в [36], можно с помощью точечного (неинтервального) метода Ньютона получить более точное приближение к нулю функции  $F$ , чем середина  $\text{mid } \mathbf{X}^{(k)}$  бруса  $\mathbf{X}^{(k)}$ .

Если исходный брус содержит решения системы, то в результате итерационного процесса (3.28) получаем последовательность брусков

$$\mathbf{X}^{(0)} \supseteq \mathbf{X}^{(1)} \supseteq \dots \supseteq \mathbf{X}^{(k)} \supseteq \dots,$$

являющихся внешними оценками множества решений системы (3.24) на  $\mathbf{X}$ . Чем меньше размеры бруса  $\mathbf{X}^{(k)}$ , тем точнее полученная оценка.

Если  $\mathcal{N}(X^{(k)}, \mathbf{X}^{(k)}) \supseteq \mathbf{X}^{(k)}$ , то дальнейшее уменьшение бруса  $\mathbf{X}^{(k)}$  оказывается невозможным. В этом случае используют различные схемы дробления этого бруса на более мелкие подбрусы [36, 66, 87], к каждому из которых в дальнейшем применяют интервальный метод Ньютона, а полученные результаты в итоге объединяют. Наиболее часто используемая схема дробления — это бисекция, т. е. дробление бруса пополам, на две равные части.

Если на некотором шаге алгоритма брус  $\mathbf{X}^{(k)} \supset \mathcal{N}(X^{(k)}, \mathbf{X}^{(k)})$ , то этот брус содержит единственное решение системы, которое может быть получено с некоторой заданной точностью.

Если  $\mathbf{X}^{(k)} \cap \mathcal{N}(X^{(k)}, \mathbf{X}^{(k)}) = \emptyset$ , то в бресе  $\mathbf{X}^{(k)}$  нет решений системы и он может быть исключен из рассмотрения.

Таким образом, многочисленные модификации интервального метода Ньютона различаются способом выбора точки  $X^{(k)}$  в бресе  $\mathbf{X}^{(k)}$ , формой интервального расширения, используемой для нахождения матрицы Липшица, а также схемой дробления брусков.

Кроме этого, можно варьировать и метод *Encl* внешнего оценивания множества решений ИСЛАУ (3.26). Например, в [87] предлагается использовать в качестве *Encl* интервальный метод Гаусса, в [36] — процедуру Хансена-Блика-Рона. Однако довольно часто матрица Липшица является особенной, а в этом случае применение указанных выше методов невозможно.

Данный недостаток преодолевается в таких модификациях интервального метода Ньютона, как метод Кравчика и Хансена-Сенгупты.

В методе Кравчика [71] вместо (3.27) используется *оператор Кравчика*

$$\mathcal{K}(\tilde{X}, \mathbf{X}) = \tilde{X} - \Lambda F(\tilde{X}) + (I - \Lambda \mathbf{L}(\tilde{X}, \mathbf{X})) (\mathbf{X} - \tilde{X}), \quad (3.29)$$

где  $\Lambda$  — некоторая вещественная  $n \times n$ -матрица.



Свойства оператора (3.29) аналогичны описанным выше свойствам оператора Ньютона, поэтому вычислительная схема алгоритма метода Кравчика такая же, как и метода Ньютона. Достоинством метода Кравчика является то, что в нем не требуется находить внешние оценки множества решений ИСЛАУ, его недостатком можно считать невысокую скорость сходимости.

Э. Хансен и С. Сенгупта в [58, 59] предложили в качестве *Encl* использовать метод Гаусса-Зейделя. Как отмечалось в § 2.4.2, метод Гаусса-Зейделя является локальной оценивающей процедурой для уточнения внешней оценки не всего множества решений ИСЛАУ, а только той его части, что принадлежит некоторому заданному брусу.

Обозначим через  $\Gamma\mathbb{Z}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{X})$  интервальный вектор, полученный в результате применения интервального метода Гаусса-Зейделя для внешнего оценивания множества решений ИСЛАУ  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  на брусе  $\mathbf{X}$ . Тогда оператор Хансена-Сенгупты имеет вид

$$\mathcal{H}(\tilde{X}, \mathbf{X}) = \tilde{X} + \Gamma\mathbb{Z}(\Lambda \mathbf{L}(\tilde{X}, \mathbf{X}), -\Lambda F(\tilde{X}), (\mathbf{X} - \tilde{X})), \quad (3.30)$$

где  $\Lambda$  — вещественная матрица предобуславливания ИСЛАУ. Оператор (3.30) имеет свойства, аналогичные тем, что рассмотрены выше для метода Ньютона. Итерационный алгоритм метода Хансена-Сенгупты строится подобно (3.28). Для последовательного нахождения внешних покомпонентных оценок множества решений интервальной линейной системы (3.26), предобусловленной матрицей  $\Lambda$ , используется итерационный алгоритм, описанный в § 2.4.2.

Отметим, что для решения систем нелинейных уравнений  $F(X) = 0$ , для которой матрица Липшица отображения  $F$  является неособенной, целесообразно использовать версии интервального метода Ньютона на основе интервального метода Гаусса или процедуры Хансена-Блика-Рона, результатом которых является оптимальная внешняя оценка множества решений ИСЛАУ.

Как показано в [59, 93], внешние оценки множества решений ИСЛАУ, полученные с помощью метода Гаусса-Зейделя, по крайней мере не хуже оценок,

вычисленных посредством метода Кравчика. Поэтому если матрица Липшица особенна, то лучше применять метод Хансена-Сенгупты, поскольку он более эффективен, чем метод Кравчика [36, 58].

3. Румпом в [107] предложен итерационный метод решения системы нелинейных уравнений, основанный на теореме Брауэра о неподвижной точке и так называемом “эпсилон-раздутии” ( $\varepsilon$ -раздутии), состоящем в том, что некоторый брус  $\mathbf{X}$ , полученный на текущем шаге процесса, заменяется на обьемлющий брус  $\mathbf{X} \circ \varepsilon$ , отличающийся от него на некоторый малый параметр  $\varepsilon$ , например,

$$\mathbf{X} \circ \varepsilon = \mathbf{X} + [-\varepsilon, \varepsilon] \text{ wid } \mathbf{X} + [-\eta, \eta], \quad (3.31)$$

где  $\varepsilon, \eta$  — некоторые малые положительные вещественные числа.

**Теорема 3.2** [107]. Пусть  $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — непрерывная функция,  $\mathbf{L}(\tilde{X}, \mathbf{X})$  — интервальная матрица наклонов функции  $F$  на бресе  $\mathbf{X} \in \mathbb{IR}^n$ . Предположим, что  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\tilde{X} \in \mathbb{R}^n$ ,  $0 \in \mathbf{X}$  и  $\tilde{X} + \mathbf{X} \subseteq D$ . Если

$$\mathcal{S}(\mathbf{X}, \tilde{X}) := -RF(\tilde{X}) + (I - R\mathbf{L}(\tilde{X}, \mathbf{X}))\mathbf{X} \subseteq \text{int } \mathbf{X}, \quad (3.32)$$

то матрицы  $R$  и  $\mathbf{L}(\tilde{X}, \mathbf{X})$  неособенные и существует единственное решение  $X^*$  системы  $F(X) = 0$ , принадлежащее  $\tilde{X} + \mathcal{S}(\mathbf{X}, \tilde{X})$ .

Для построения интервала  $\mathbf{X}$  предлагается сначала найти некоторое приближение  $\tilde{X}$  решения  $X^*$  исходной системы с помощью некоторого подходящего метода численного анализа. Затем использовать следующий итерационный процесс:

$$\begin{cases} \mathbf{X}^{(0)} := \tilde{X}, \\ \mathbf{X}^{(k+1)} := \mathbf{X}^{(k)} \cap \mathcal{S}(\mathbf{X}^{(k)} \circ \varepsilon, \tilde{X}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Если на некотором шаге алгоритма справедливо включение  $\mathcal{S}(\mathbf{X}^{(k)}, \tilde{X}) \subseteq \text{int } (\mathbf{X}^{(k)})$ , то, как показано в Теореме 3.2, интервал

$\tilde{X} + S(\mathbf{X}^{(k)}, \tilde{X})$  содержит единственное решение  $X^*$  системы  $F(X) = 0$ , т. е. является его внешней оценкой.

Заметим, что эффективность данной процедуры в значительной степени зависит от выбора начального приближения  $\tilde{X}$ . Кроме того, невозможно определить, какое количество итераций потребуется для получения результата.

Для решения системы нелинейных уравнений на некотором бруске можно применить также методы распространения (удовлетворения) ограничений. Большинство этих методов основаны на понятиях совместности по брусу [32, 36] и совместности по значениям [36, 67] и предназначены для того, чтобы исключить из исходного бруска те части, которые не могут содержать решений системы уравнений.

Поясним суть анализа совместности по значениям на примере уравнения одной переменной  $f(x) = 0$ , предположив, что мы ищем внешнюю оценку его множества решений на некотором заданном интервале  $\mathbf{x}$ . Преобразуем уравнение  $f(x) = 0$  к виду  $x = g(x)$ . Тогда любой корень уравнения  $f(x) = 0$  принадлежит интервалу  $\hat{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x})$ .

Если  $\mathbf{y} = \mathbf{x} \cap \hat{\mathbf{x}} \neq \emptyset$  и  $\mathbf{y} \subset \mathbf{x}$ , то интервал  $\mathbf{y}$  является более точной внешней оценкой множества решений уравнения  $f(x) = 0$  на  $\mathbf{x}$ . Далее аналогичным образом можно попытаться уменьшить интервал  $\mathbf{y}$ .

Если  $\mathbf{y} = \mathbf{x} \cap \hat{\mathbf{x}} = \emptyset$ , то исходный интервал  $\mathbf{x}$  не содержит корней уравнения  $f(x) = 0$  и может быть исключен из рассмотрения.

Поскольку способ представления уравнения  $f(x) = 0$  в виде  $x = g(x)$  может быть неединственным, то процедуру анализа совместности по значениям можно повторить и для других возможных функций  $g(x)$ , что может привести к уточнению искомой оценки.

В многомерном случае, т. е. для решения системы нелинейных уравнений  $F(X) = 0$  на бруске  $\mathbf{X}$ , анализ совместности по значениям проводится по отношению к одному уравнению  $f_i(X) = 0$  и одной компоненте  $x_j$  вектора неизвестных  $X = (x_j)$ , при этом остальные компоненты заменяются интерва-

лами их возможных значений. Найденные внешние оценки  $j$ -ой компоненты множества решений используются при анализе совместности по отношению к другим компонентам и уравнениям. Стратегии организации процесса анализа совместности по всем уравнениям системы и компонентам вектора неизвестных могут быть весьма разнообразными, например, в виде циклов, в которых будут последовательно выбираться не только уравнение  $f_i(X) = 0$  и  $j$ -ая компонента вектора  $X$ , но и способ представления этого уравнения в виде  $x_j = g_i(X)$ .

Другим методом распространения ограничений является анализ совместности по брусу [36, 115]. В одном из уравнений системы  $f_i(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) = 0$  все компоненты вектора неизвестных, кроме одной  $j$ -ой компоненты, заменяются интервалами их возможных значений. В результате получается интервальное уравнение одной переменной вида  $q_i(x_j) = 0$ , где  $q_i(x_j) = f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{j-1}, x_j, \mathbf{x}_{j+1}, \dots, \mathbf{x}_n)$ . Если  $0 \notin q(x_j)$  для  $x_j$  из некоторого подинтервала  $\mathbf{x}'_j$  исходного интервала  $\mathbf{x}_j$ , то для точек  $x_j \in \mathbf{x}'_j$  совместности нет, и подбрус  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}'_j, \mathbf{x}_{j+1}, \dots, \mathbf{x}_n)$  может быть исключён из исходного бруса  $\mathbf{X}$ , тем самым брус  $\mathbf{X}$  может быть сужен. Для сужения бруса  $\mathbf{X}$  можно использовать одномерный интервальный метод Ньютона [61] или непосредственно вычислить новые границы для  $x_j$ , как предлагается в [36]. Описанную процедуру можно далее применить по отношению к другим уравнениям системы и компонентам вектора неизвестных, организовав некоторый циклический процесс.

Отметим, что многомерный метод Ньютона работает эффективно на малых исходных брусах. Если задан достаточно большой исходный брус, то целесообразно сначала с помощью процедур анализа совместности по брусу и по значениям попробовать сузить его, после чего применить многомерный метод Ньютона.

### 3.5. Задачи внешнего и внутреннего оценивания множеств решений систем интервальных полиномиальных уравнений

Рассмотрим систему полиномиальных уравнений

$$F(X) = 0, \quad (3.33)$$

где  $F(X) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n))^T$  — вектор полиномов вида

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k_1=0}^{K_1} \sum_{k_2=0}^{K_2} \dots \sum_{k_n=0}^{K_n} a_{(i)k_1 k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}. \quad (3.34)$$

Обозначим через  $P = (p_j) \in \mathbb{R}^{n(K_1+1) \dots (K_n+1)}$  вектор коэффициентов полиномов  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Пусть известно, что  $p_j$  может принимать любые значения из заданного интервала  $\mathbf{p}_j$ , т. е.  $p_j \in \mathbf{p}_j$ . Рассматривая правые части (3.34) как функции  $\varphi_i(X, P)$ , зависящие от переменной  $X = (x_i)$  и параметра  $P = (p_j)$ , принимающего значения из заданного бруса  $\mathbf{P} = (\mathbf{p}_j)$ , запишем систему (3.33) в виде

$$\Phi(X, P) = 0, \quad (3.35)$$

или

$$\varphi_i(X, P) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.36)$$

Возьмём интервальные расширения левых частей уравнений (3.36) по  $p_j \in \mathbf{p}_j$ , получим систему интервальных полиномиальных уравнений

$$\Phi(X, \mathbf{P}) = 0 \quad (3.37)$$

или

$$\varphi_i(X, \mathbf{P}) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.38)$$

где  $\varphi_i(X, \mathbf{P})$  — интервальное расширение функции  $\varphi_i(X, P)$  на брус  $\mathbf{P}$ .

Множество решений интервальной системы  $\Phi(X, \mathbf{P}) = 0$  определим как

$$\Xi(\Phi, \mathbf{P}) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid (\exists P \in \mathbf{P})(\Phi(X, P) = 0)\}. \quad (3.39)$$

Нас будут интересовать задачи:

- внешнего оценивания множества решений, т. е. нахождения по-возможности наименьшего бруса  $\mathbf{V} \supseteq \Xi(\Phi, \mathbf{P})$ ,
- внутреннего оценивания множества решений, т. е. нахождения по-возможности наибольшего бруса  $\mathbf{U} \subseteq \Xi(\Phi, \mathbf{P})$ .

Заметим, что множество  $\Xi(\Phi, \mathbf{P})$  может иметь сложную конфигурацию, быть неограниченным, несвязным.

**Пример 3.10.** Рассмотрим интервальную систему уравнений

$$\begin{cases} 4x^2 - 8x + y^2 + \mathbf{p}_1 = 0, \\ xy + \mathbf{p}_2 = 0. \end{cases} \quad (3.40)$$

где  $\mathbf{p}_1 = [1, 4]$ ,  $\mathbf{p}_2 = [-2, -1]$ .

Первое уравнение системы описывает семейство эллипсов с центром в точке  $(1, 1)$ , второе уравнение — семейство гипербол, а их пересечение образует множество решений системы (3.40). Как видно из рис. 3.3, множество решений системы (3.40) (заштрихованная область) является несвязным. На этом же рисунке изображены внешняя и внутренняя оценки множества решений системы (3.40).

### 3.6. Методы внешнего оценивания множеств решений систем интервальных полиномиальных уравнений

#### 3.6.1. Многомерный интервальный метод Ньютона

Для внешнего оценивания множества  $\Xi(\Phi, \mathbf{P})$  решений системы интервальных полиномиальных уравнений (3.37) можно использовать многомерный интервальный метод Ньютона. Пусть  $\mathbf{L}(\tilde{X}, \mathbf{X}, \mathbf{P})$  — интервальная матрица Липшица отображения  $\Phi$  на брус  $\mathbf{X} \times \mathbf{P}$ , т. е. для любых  $X, \tilde{X} \in \mathbf{X}$ ,  $P \in \mathbf{P}$

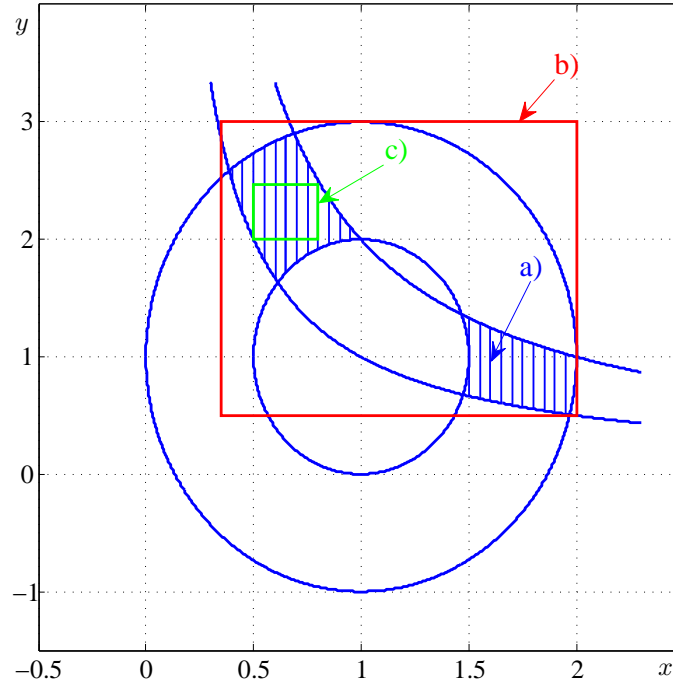


Рис. 3.3. Оценивание множества решений системы уравнений (3.40)  
(a — множество решений, b — внешняя оценка, c — внутренняя оценка).

равенство

$$\Phi(X, P) - \Phi(\tilde{X}, P) = L(X - \tilde{X})$$

имеет место с некоторой вещественной матрицей  $L \in \mathbf{L}(\tilde{X}, \mathbf{X}, P)$ .

Тогда имеет место следующее включение

$$\Phi(X, P) \in \Phi(\tilde{X}, P) + \mathbf{L}(\tilde{X}, \mathbf{X}, P)(X - \tilde{X}).$$

Обозначим через  $X^*$  решение системы (3.37), т. е.  $\Phi(X^*, P) = 0$  при некотором  $P \in \mathbf{P}$ . Тогда

$$0 \in \Phi(\tilde{X}, P) + \mathbf{L}(\tilde{X}, \mathbf{X}, P)(X^* - \tilde{X}). \quad (3.41)$$

Точка  $X^* \in \mathbf{X}$  удовлетворяет (3.41) тогда и только тогда, когда она принадлежит объединенному множеству решений интервальной системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{L}(\tilde{X}, \mathbf{X}, P)(X - \tilde{X}) = -\Phi(\tilde{X}, P).$$

Пусть  $Encl$  — некоторый метод внешнего оценивания множества решений ИСЛАУ, а  $Encl(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \in \mathbb{IR}^n$  — интервальный вектор, получаемый с помощью этого метода, т. е.  $Encl(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \supseteq \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , тогда

$$\mathbf{X} - \tilde{X} \in Encl(\mathbf{L}(\tilde{X}, \mathbf{X}, \mathbf{P}), -\Phi(\tilde{X}, \mathbf{P})),$$

отсюда

$$\mathbf{X} \in \tilde{X} + Encl(\mathbf{L}(\tilde{X}, \mathbf{X}, \mathbf{P}), -\Phi(\tilde{X}, \mathbf{P})).$$

Таким образом, оператор Ньютона

$$\mathcal{N}(\tilde{X}, \mathbf{X}, \mathbf{P}) = \tilde{X} + Encl(\mathbf{L}(\tilde{X}, \mathbf{X}, \mathbf{P}), -\Phi(\tilde{X}, \mathbf{P})) \quad (3.42)$$

определяет брус, содержащий множество  $\Xi(\Phi, \mathbf{P})$  решений системы (3.37). Поскольку любое решение системы (3.37), содержащееся в  $\mathbf{X}$ , принадлежит также и  $\mathcal{N}(\tilde{X}, \mathbf{X}, \mathbf{P})$ , то в качестве более точной внешней оценки  $\Xi(\Phi, \mathbf{P})$  можно взять  $\mathbf{X} \cap \mathcal{N}(\tilde{X}, \mathbf{X}, \mathbf{P})$ .

Имеют место следующие свойства интервального оператора Ньютона  $\mathcal{N}(\tilde{X}, \mathbf{X}, \mathbf{P})$ :

- 1) каждое решение системы  $\Phi(X, \mathbf{P}) = 0$  на бресе  $\mathbf{X}$  лежит также в  $\mathcal{N}(\tilde{X}, \mathbf{X}, \mathbf{P})$ ;
- 2) если  $\mathbf{X} \cap \mathcal{N}(\tilde{X}, \mathbf{X}, \mathbf{P}) = \emptyset$ , то в бресе  $\mathbf{X}$  нет решений системы  $\Phi(X, \mathbf{P}) = 0$ ;
- 3) если  $\mathcal{N}(\tilde{X}, \mathbf{X}, \mathbf{P}) \subseteq \mathbf{X}$ , то в бресе  $\mathbf{X}$  находится хотя бы одно решение системы  $\Phi(X, \mathbf{P}) = 0$ .

На основе (3.42) определим итерационный алгоритм

$$\begin{cases} \mathbf{X}^{(0)} := \mathbf{X}, \\ \mathbf{X}^{(k+1)} := \mathbf{X}^{(k)} \cap \mathcal{N}(X^{(k)}, \mathbf{X}^{(k)}, \mathbf{P}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (3.43)$$

где  $X^{(k)} \in \mathbf{X}^{(k)}$ .



Итерационный процесс продолжаем до тех пор, пока расстояние между  $\mathbf{X}^{(k)}$  и  $\mathbf{X}^{(k+1)}$  не меньше некоторой малой величины  $\delta > 0$ . Расстояние между многомерными интервалами  $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_i), \mathbf{b} = (\mathbf{b}_i) \in \mathbb{IR}^n$  определим как

$$\text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \left( \sum_{i=1}^n (\text{dist}(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i))^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

На  $k$ -ом шаге алгоритма (3.43) в качестве точки  $X^{(k)}$  будем брать середину  $\text{mid } \mathbf{X}^{(k)}$  бруса  $\mathbf{X}^{(k)}$ , а для решения интервальной системы линейных уравнений воспользуемся методом Хансена-Сенгупты с предобуславливанием системы посредством матрицы, обратной к средней матрице  $\mathbf{L}(X^{(k)}, \mathbf{X}^{(k)}, \mathbf{P})$  (метод описан в § 3.4).

Пусть решаемая на  $k$ -ом шаге ИСЛАУ после предобуславливания матрицей  $B = (\text{mid } \mathbf{L}(X^{(k)}, \mathbf{X}^{(k)}, \mathbf{P}))^{-1}$  имеет вид

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{b}, \quad (3.44)$$

где  $\mathbf{Y} = X - X^{(k)}$ ,  $\mathbf{A} = B \cdot \mathbf{L}(X^{(k)}, \mathbf{X}^{(k)}, \mathbf{P})$ ,  $\mathbf{b} = -B \cdot \mathbf{L}(X^{(k)}, \mathbf{X}^{(k)}, \mathbf{P})$ .

С помощью интервального метода Гаусса-Зейделя, описанного в § 2.4.2, найдём внешнюю оценку той части множества решений ИСЛАУ (3.44), которая ограничена бруском  $\mathbf{Y}^{(k)} = \mathbf{X}^{(k)} - X^{(k)}$ . Предположим, что  $\mathbf{Y}^{(m)} \in \mathbb{IR}^n$  — некоторая оценка, полученная на  $m$ -ом шаге метода Гаусса-Зейделя.

Если элементы главной диагонали матрицы  $\mathbf{A}$  не содержат нуля, т.е.  $0 \notin a_{ii}$  для  $i = 1, \dots, n$ , то уточнённую оценку  $\tilde{\mathbf{Y}} = (\tilde{\mathbf{y}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{y}}_n)^\top$  находим следующим образом

$$\tilde{\mathbf{y}}_i = \mathbf{y}_i^{(m)} \cap \left( \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \mathbf{a}_{ij} \tilde{\mathbf{y}}_j - \sum_{j=i+1}^n \mathbf{a}_{ij} \mathbf{y}_j^{(m)} \right) / \mathbf{a}_{ii}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Если расстояние между векторами  $\mathbf{Y}^{(m)}$  и  $\tilde{\mathbf{Y}}$  больше заданной малой величины  $\delta > 0$ , полагаем

$$\mathbf{Y}^{(m+1)} := \tilde{\mathbf{Y}}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

В этом итерационном процессе компоненты новой внешней оценки множества решений ИСЛАУ (3.44) вычисляются последовательно друг за другом посредством пересечения старой и новой оценок, причем уточненные новые компоненты сразу же привлекаются для расчета следующих компонент нового приближения.

Если среди элементов главной диагонали матрицы  $\mathbf{A}$  встречаются нуль-содержащие интервалы, то можно изменить порядок, в котором разрешаются уравнения (или порядок строк матрицы  $\mathbf{A}$ ) и соответствующих компонент вектора правых частей  $\mathbf{b}$ . Для  $i$ -ой ( $i = 1, \dots, n$ ) строки матрицы  $\mathbf{A}$  будем находить номер  $s \geq i$  столбца такой, что  $\langle \mathbf{a}_{si} \rangle = \max_{j=i, \dots, n} \langle \mathbf{a}_{ji} \rangle$ . Если  $s \neq i$ , то меняем местами строки матрицы  $\mathbf{A}$  с номерами  $s$  и  $i$ , а также компоненты вектора  $\mathbf{b}$  с этими же номерами.

Если все диагональные элементы матрицы  $\mathbf{A}$  содержат нуль, то множество решений ИСЛАУ не ограничено, и следовательно получить более точную, чем  $\mathbf{X}^{(k)}$ , внешнюю оценку множества  $\Xi(\Phi, \mathbf{P})$  не удастся. В этом случае используем процедуру дробления бруса на подбрусы, которая будет описана в § 3.6.3.

Если на  $k$ -ом шаге алгоритма (3.43) имеет место равенство  $\mathbf{X}^{(k)} \cap \mathcal{N}(X^{(k)}, \mathbf{X}^{(k)}, \mathbf{P}) = \emptyset$ , то брус  $\mathbf{X}^{(k)}$  не содержит решений системы (3.44), и, следовательно, может быть исключен из искомой внешней оценки.

В § 3.2 были рассмотрены различные центрированные формы интервального расширения функций. В операторе Ньютона (3.42) мы будем использовать вместо матрицы Липшица интервальный наклон функции  $\Phi(X, P)$  на бресе  $\mathbf{X} \times \mathbf{P}$  относительно точки  $\tilde{X}$ , который определим следующим образом.

Интервальным наклоном функции  $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^n$  на бресе  $\mathbf{X} \in \mathbb{IR}^n$  относительно точки  $\tilde{X}$  назовем интервальный вектор  $\Phi^\sphericalangle(\mathbf{X}, \mathbf{P}, \tilde{X}) \in \mathbb{IIR}^n$ , такой что для любого  $X \in \mathbf{X}$  и  $P \in \mathbf{P}$  существует  $s \in \Phi^\sphericalangle(\mathbf{X}, \mathbf{P}, \tilde{X})$ , являющийся наклоном функции  $\Phi$  между точками  $X$  и  $\tilde{X}$ .

Наклонное разложение полиномиальной функции  $\Phi(X, P)$  получим с помощью процедуры последовательного разложения, описанной в § 3.2. Компонентами вектора наклона  $\Phi^\zeta(X, P, \tilde{X})$  являются полиномы  $\varphi_i^\zeta(X, P, \tilde{X})$  ( $i = 1, \dots, n$ ) переменных  $x_1, \dots, x_n$  с коэффициентами  $p_1, \dots, p_l$ , принимающими значения из интервалов  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_l$  соответственно. Для нахождения интервального расширения полинома  $\varphi_i^\zeta(X, P, \tilde{X})$  на брус  $\mathbf{X} \times \mathbf{P}$  заменим  $p_1, \dots, p_l$  интервалами их возможных значений  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_l$ . Далее вычислим внешнюю оценку множества значений полученного интервального полинома на брус  $\mathbf{X}$ . При этом используем процедуру оценивания, предложенную в § 3.3.1.

### 3.6.2. Интервальные методы распространения ограничений

В § 3.6.1 был описан многомерный метод Ньютона для нахождения внешней оценки множества решений системы интервальных полиномиальных уравнений (3.37). Данный метод работает эффективно лишь на малых исходных брусах. Если же исходный брус  $\mathbf{X}$  имеет достаточно большие размеры, то метод, как правило, не приводит к значительному сужению этого бруса. Вычисленный на большом брус  $\mathbf{X}$  интервальный наклон  $\Phi^\zeta(\mathbf{X}, \mathbf{P}, \tilde{X})$  часто оказывается особенной матрицей. В этом случае применение метода Ньютона может не привести к желаемому результату.

Поэтому наряду с методом Ньютона имеет смысл использовать методы удовлетворения ограничений на основе анализа совместности по брусу или по значениям. Эти методы были рассмотрены в § 3.4 применительно к системам нелинейных уравнений.

В данном параграфе мы опишем процедуру анализа совместности по брусу для системы интервальных уравнений (3.37). Рассмотрим  $i$ -е ( $i = 1, \dots, n$ ) уравнение системы

$$\varphi_i(X, P) = 0. \quad (3.45)$$

Зафиксируем некоторую переменную  $x_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) и заменим в уравнении (3.45) все неизвестные, кроме  $x_j$ , интервалами их возможных значений. Тогда уравнение (3.45) примет вид интервального полиномиального уравнения

$$\mathbf{q}_i(x_j) = 0 \quad (3.46)$$

степени  $K_j$  относительно переменной  $x_j$ . Коэффициенты интервального полинома

$$\mathbf{q}_i(x_j) = \sum_{k_j=0}^{K_j} \mathbf{q}_{k_j} x_j^{k_j}$$

вычисляются на основе процедуры, описанной в § 3.3.1.

Далее, используя алгоритм, предложенный в § 3.3.2, вычислим интервальные корни  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_m$  уравнения (3.46) и найдём их пересечения с  $j$ -ой компонентой  $\mathbf{x}_j$  исходного бруса  $\mathbf{X}$ . Обозначим через  $W_j$  объединение полученных множеств, т. е.

$$W_j = \bigcup_{s=1}^m (\mathbf{r}_s \cap \mathbf{x}_j). \quad (3.47)$$

В качестве внешней оценки множества решений уравнения (3.46) на интервале  $\mathbf{x}_j$  можно взять интервальную оболочку множества  $W_j$ . Очевидно, брус  $\hat{\mathbf{X}} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{j-1}, \square W_j, \mathbf{x}_{j-1}, \dots, \mathbf{x}_n)$  содержит множество решений системы (3.37) и в случае  $\hat{\mathbf{X}} \subset \mathbf{X}$  является его более точной внешней оценкой.

Процедуру анализа совместности по брусу можно применить ко всем уравнениям и неизвестным системы. Циклический процесс их перебора можно организовать следующим образом. Осуществляем анализ совместности для каждого  $i$ -го ( $i = 1, \dots, n$ ) уравнения системы по переменной  $x_{t(i)}$ , где вектор  $t = t(i)$  определяет последовательность выбора неизвестных системы. Вектор  $t$  принимает последовательно значения:  $(1, 2, \dots, n - 1, n)^\top, (2, 3, \dots, n, 1)^\top, \dots, (n, 1, \dots, n - 2, n - 1)^\top$ .

Теперь опишем вычислительную схему алгоритма анализа совместности по брусу для внешнего оценивания множества решений системы интервальных уравнений (3.37) на заданном исходном брусе  $\mathbf{X}$ .

*Алгоритм 1.*

*Шаг 1.* Присваиваем  $i := 1$  и  $t := 0$ .

*Шаг 2.* Если  $t \geq n$ , то заканчиваем работу алгоритма.

*Шаг 3.* Если  $i > n$ , то присваиваем  $t := t + 1$ ,  $i := 1$  и переходим на шаг 2.

*Шаг 4.* Если  $i \leq n$ , то присваиваем  $j$  остаток от деления  $i + t$  на  $n$ . Если  $j = 0$ , то присваиваем  $j := j + n$ . Приводим  $i$ -ое уравнение системы к виду (3.46), вычисляем интервальные корни  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_m$  этого уравнения. Если число корней  $m \neq 0$ , то находим множество  $W_j$ , используя (3.47). Если  $m = 0$  или  $W_j = \emptyset$ , то заканчиваем работу алгоритма, при этом получаем, что система уравнений (3.37) не имеет решений на брус  $\mathbf{X}$ . Если  $W_j \neq \emptyset$ , то находим брус  $\hat{\mathbf{X}} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{j-1}, \square W_j, \mathbf{x}_{j-1}, \dots, \mathbf{x}_n)^\top$ , присваиваем  $\mathbf{X} := \hat{\mathbf{X}}$ ,  $i := i + 1$  и переходим на шаг 3.

Отметим, что в данном алгоритме мы использовали в качестве внешней оценки множества решений уравнения (3.46) на  $\mathbf{x}_j$  интервальную оболочку  $\square W_j$ , которая в некоторых случаях может быть достаточно грубой оценкой множества решений уравнения (3.46). Например, множество  $W_j$  может быть несвязным, представляя собой объединение нескольких непересекающихся интервалов  $\mathbf{W}_{js}$ ,  $s = 1, \dots, k$ . Интервальная оболочка такого множества, как правило, будет мало отличаться от  $j$ -ой компоненты исходного бруса  $\mathbf{X}$ .

Поэтому имеет смысл рассматривать в качестве результата анализа совместности для  $i$ -го уравнения системы по  $j$ -ой переменной не один брус  $\hat{\mathbf{X}}$ , а  $k$  брусков  $\hat{\mathbf{X}}_{js} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{W}_{js}, \mathbf{x}_{j-1}, \dots, \mathbf{x}_n)^\top$ ,  $s = 1, \dots, k$ . На каждом из этих брусков выполняем далее аналогичную процедуру анализа совместности относительно других уравнений и переменных системы. Циклический процесс перебора уравнений и неизвестных реализуем так же, как в описанном выше алгоритме. Полученные на каждом шаге алгоритма брусы храним в списке  $\mathcal{L}$ . Теперь опишем вычислительную схему данного алгоритма.

*Алгоритм 2.*

*Шаг 1.* Инициализируем список  $\mathcal{L}$  исходным брусом  $\mathbf{X}$ . Присваиваем  $M_2 := 1$ ,  $i := 1$ ,  $t := 0$ .

*Шаг 2.* Если  $t \geq n$ , то заканчиваем работу алгоритма.

*Шаг 3.* Если  $i > n$ , то присваиваем  $t := t + 1$ ,  $i := 1$  и переходим на шаг 2.

В противном случае присваиваем  $j$  остаток от деления  $i + t$  на  $n$ . Если  $j = 0$ , то присваиваем  $j := j + n$ . Присваиваем  $M_1 := M_2$ ,  $l := 0$ ,  $M_2 := 0$ .

*Шаг 4.* Если  $l \geq M_1$  и  $M_2 = 0$ , то заканчиваем работу алгоритма, при этом получаем, что система уравнений (3.37) не имеет решений на брус  $\mathbf{X}$ .

*Шаг 5.* Если  $l \geq M_1$  и  $M_2 \neq 0$ , то присваиваем  $i := i + 1$  и переходим на шаг 3.

*Шаг 6.* Если  $l < M_1$ , то извлекаем из списка  $\mathcal{L}$  первую запись. Обозначим извлеченный брус через  $\mathbf{Y}$ . Удаляем первую запись из списка  $\mathcal{L}$ . Приводим  $i$ -ое уравнение системы к виду (3.46), вычисляем интервальные корни  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_m$  этого уравнения. Если число корней  $m \neq 0$ , то находим их пересечения с  $j$ -ой компонентой  $\mathbf{y}_j$  бруса  $\mathbf{Y}$ . Получаем  $k$  интервалов  $\mathbf{W}_{js}$ ,  $s = 1, \dots, k$ . Если  $m = 0$  или  $k = 0$ , то присваиваем  $l := l + 1$  и переходим на шаг 4. Если  $k \neq 0$ , то заносим  $k$  брусов  $\hat{\mathbf{Y}}_{js} = (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{j-1}, \mathbf{W}_{js}, \mathbf{y}_{j+1}, \dots, \mathbf{y}_n)^\top$ ,  $s = 1, \dots, k$ , в список  $\mathcal{L}$ , присваиваем  $M_2 := M_2 + k$ ,  $l := l + 1$  и переходим на шаг 4.

Покажем работу предложенных выше алгоритмов на следующем примере.

**Пример 3.11.** Рассмотрим интервальную систему уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{p}_1 x_1^3 - x_1^2 x_2 + \mathbf{p}_2 x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 x_2 + \mathbf{p}_3 = 0. \end{cases} \quad (3.48)$$

где  $\mathbf{p}_1 = [-1, 2]$ ,  $\mathbf{p}_2 = [3, 4]$ ,  $\mathbf{p}_3 = [0, 2]$ . Будем искать внешнюю оценку множества решений этой системы на брус  $\mathbf{X} = ([-2, 2], [1, 2])^\top$ .

Применим *Алгоритм 1*. Заменяя переменную  $x_2$  в первом уравнении системы (3.48) на интервал  $[1, 2]$ , получим интервальное уравнение

$$[-1, 2]x_1^3 + [-2, -1]x_1^2 + [3, 4]x_1 + [1, 2] = 0. \quad (3.49)$$

Используя алгоритм, описанный в § 3.3.2, вычислим интервальные корни  $\mathbf{r}_1 = (-\infty, -2]$ ,  $\mathbf{r}_2 = [-0.6180, -0.2203]$ ,  $[1.1986, +\infty)$  уравнения (3.49). Интервальный полином и его корни изображены на рис. 3.4. Найдём пересечения интервальных корней с первой компонентой  $\mathbf{x}_1 = [-2, 2]$  исходного бруса  $\mathbf{X}$ . Объединение  $W_1$  полученных множеств имеет вид

$$W_1 = \{-2\} \cup [-0.6180, -0.2203] \cup [1.1986, 2]. \quad (3.50)$$

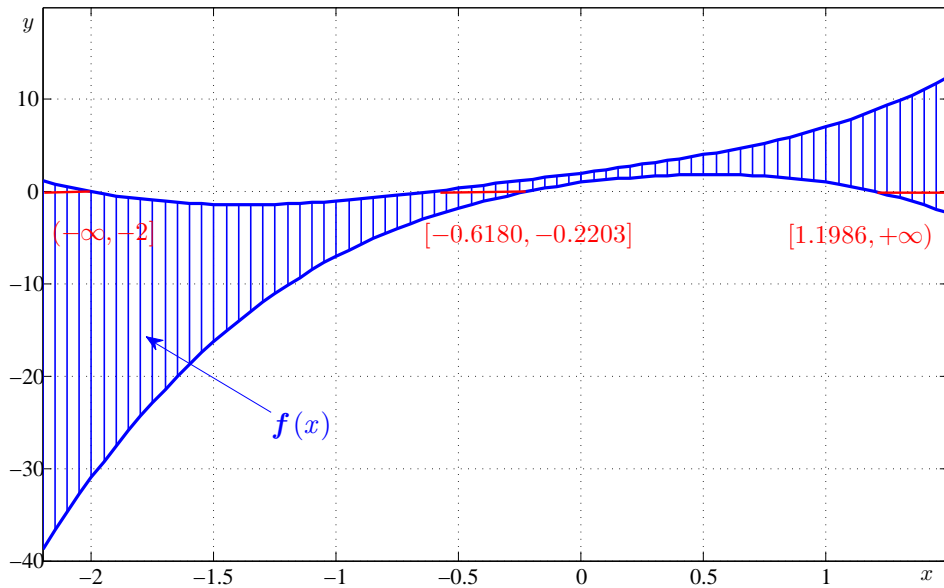


Рис. 3.4. Интервальный полином (3.49) и его корни.

Интервальная оболочка множества  $W_1$  равна  $[-2, 2]$ , следовательно,  $\square W_1 = \mathbf{x}_1$  и  $\hat{\mathbf{X}} = (\square W_1, \mathbf{x}_2)^\top = ([-2, 2], [1, 2])^\top = \mathbf{X}$ . Таким образом, применение процедуры анализа совместности для первого уравнения системы (3.48) относительно переменной  $x_1$  не приводит к сужению заданного бруса  $\mathbf{X}$ .

Можно показать, что результатом анализа совместности, выполненного для второго уравнения относительно переменной  $x_2$ , будет также исходный брус  $\mathbf{X}$ .

Однако, брус  $\mathbf{X}$  можно значительно уменьшить, если применить к системе (3.48) *Алгоритм 2*. Поскольку при пересечении интервальных корней с первой компонентой  $\mathbf{x}_1 = [-2, 2]$  исходного бруса  $\mathbf{X}$  были получены интервалы  $\mathbf{W}_{11} = [-2, 2]$ ,  $\mathbf{W}_{12} = [-0.6180, -0.2203]$ ,  $\mathbf{W}_{13} = [1.1986, 2]$ , то найдём брусы

$$\hat{\mathbf{X}}_{11} = (\mathbf{W}_{11}, \mathbf{x}_2)^\top = ([-2, -2], [1, 2])^\top,$$

$$\hat{\mathbf{X}}_{12} = (\mathbf{W}_{12}, \mathbf{x}_2)^\top = ([-0.6180, -0.2203], [1, 2])^\top,$$

$$\hat{\mathbf{X}}_{13} = (\mathbf{W}_{13}, \mathbf{x}_2)^\top = ([1.1986, 2], [1, 2])^\top.$$

Теперь попробуем сузить вторую компоненту каждого из брусов  $\hat{\mathbf{X}}_{12}$ ,  $\hat{\mathbf{X}}_{13}$  и  $\hat{\mathbf{X}}_{11}$ , применив на этих брусах процедуру анализа совместности для второго уравнения системы (3.48) и переменной  $x_2$ . Заменяя в этом уравнении переменную  $x_1$  на интервалы  $\mathbf{W}_{11} = [-2, 2]$ ,  $\mathbf{W}_{12} = [-0.6180, -0.2203]$ ,  $\mathbf{W}_{13} = [1.1986, 2]$ , получим интервальные уравнения

$$[-2, -2]x_2 + [0, 2] = 0, \quad (3.51)$$

$$[-0.6180, -0.2203]x_2 + [0, 2] = 0, \quad (3.52)$$

$$[1.1986, 2]x_2 + [0, 2] = 0. \quad (3.53)$$

Уравнение (3.53) имеет интервальный корень  $[0, 1]$ , его пересечение с  $\mathbf{x}_2$  равно  $\mathbf{W}_{21} = [1, 1]$ . Находим брус

$$\hat{\mathbf{X}}_{21} = ([-2, -2], \mathbf{W}_{21})^\top = ([-2, -2], [1, 1])^\top.$$

Уравнение (3.54) имеет интервальный корень  $[0, 9.0786]$ , его пересечение с  $\mathbf{x}_2$  равно  $\mathbf{W}_{22} = [1, 2]$ . Находим брус

$$\hat{\mathbf{X}}_{22} = ([-0.6180, -0.2203], \mathbf{W}_{22})^\top = ([-0.6180, -0.2203], [1, 2])^\top.$$



Уравнение (3.55) имеет интервальный корень  $[-1.6687, 0]$ , его пересечение с  $\mathbf{x}_2$  пусто.

В итоге получили два бруса  $\hat{\mathbf{X}}_{21}$  и  $\hat{\mathbf{X}}_{22}$ , объединение которых содержит множество решений системы интервальных уравнений (3.48).

Можно далее к брусам  $\hat{\mathbf{X}}_{21}$  и  $\hat{\mathbf{X}}_{22}$  применить анализ совместности по отношению к первому уравнению и переменной  $x_2$  и т. д.

Очевидно, *Алгоритм 2* является более трудоёмким, чем *Алгоритм 1*. Однако *Алгоритм 2* дает возможность достаточно большой исходный брус в случае необходимости подвергнуть дроблению на меньшие по размеру подбрусы и затем среди них найти подбрусы, объединение которых содержит множество решений системы интервальных уравнений. При этом те подбрусы, которые не содержат решений системы уравнений, исключаются из рассмотрения. Заметим, что в большинстве случаев не удается получить достаточно точной внешней оценки множества решений системы (3.37), не подвергая исходный брус  $\mathbf{X}$  дроблению. Поэтому имеет смысл использовать *Алгоритм 2*, способствующий дроблению исходного бруса.

### 3.6.3. Процедуры дробления и сжатия бруса

В § 3.6.1 и § 3.6.2 мы рассмотрели интервальный метод Ньютона и метод распространения ограничений, основанный на анализе совместности по брусу. Мы показали, что эти методы можно использовать для решения задачи внешнего оценивания множества решений системы интервальных уравнений (3.37) на брусе  $\mathbf{X}$ . Ранее мы уже отмечали, что применение только одного из данных методов может не привести к желаемому результату, т. е. достаточно точной внешней оценке. Поэтому мы будем использовать оба метода. Однако и в этом случае точность полученной оценки может оказаться весьма низкой.

Для повышения эффективности указанных методов будем дробить исходный брус на более мелкие подбрусы. Подбрусы, полученные при дроблении, будем хранить в рабочем списке  $\mathcal{L}$ , в который изначально записываем брус  $\mathbf{X}$ .

На каждом шаге алгоритма будем подвергать дроблению брус, который является первой записью в списке  $\mathcal{L}$ . Обозначим этот брус через  $\mathbf{Z} = (z_i)$ . Если максимальная ширина компонент бруса  $\mathbf{Z}$  не меньше заданной малой величины  $\varepsilon > 0$ , то дробим брус  $\mathbf{Z}$  на два подбруса  $\mathbf{Z}'$  и  $\mathbf{Z}''$ , разбивая одну из его компонент пополам.

Будем производить дробление бруса  $\mathbf{Z}$  по компоненте, для которой максимальна величина

$$\text{wid } z_j \cdot \sum_{i=1}^n |\varphi_{ij}^{\leftarrow}(\mathbf{Z}, \mathbf{P}, \tilde{\mathbf{Z}})|,$$

где  $\tilde{\mathbf{Z}} = \text{mid } \mathbf{Z}$ . Таким образом, если

$$\text{wid } z_s \cdot \sum_{i=1}^n |\varphi_{is}^{\leftarrow}(\mathbf{Z}, \mathbf{P}, \tilde{\mathbf{Z}})| = \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \text{wid } z_j \cdot \sum_{i=1}^n |\varphi_{ij}^{\leftarrow}(\mathbf{Z}, \mathbf{P}, \tilde{\mathbf{Z}})| \right\},$$

то

$$\mathbf{Z}' = z_1 \times \dots \times z_{s-1} \times [\underline{z}_s, \text{mid } z_s] \times z_{s+1} \times \dots \times z_n, \quad (3.54)$$

$$\mathbf{Z}'' = z_1 \times \dots \times z_{s-1} \times [\text{mid } z_s, \bar{z}_s] \times z_{s+1} \times \dots \times z_n. \quad (3.55)$$

К каждому из брусов  $\mathbf{Z}'$  и  $\mathbf{Z}''$  применим процедуру сжатия, которую опишем ниже. Полученные в результате этой процедуры брусы помещаем в список  $\mathcal{L}$ . Удаляем первую запись из списка  $\mathcal{L}$ , после чего повторяем описанный выше процесс дробления.

Брусы, компоненты которых имеют ширину, меньшую  $\varepsilon$ , не подвергаются дальнейшему дроблению. Интервальная оболочка всех таких брусов, полученных в результате работы алгоритма, является внешней оценкой  $\mathbf{V}$  множества решений системы интервальных уравнений (3.37).

Опишем теперь процедуру сжатия бруса, который обозначим через  $\mathbf{Y}$ . Перед тем, как пытаться уменьшить размеры бруса  $\mathbf{Y}$  с помощью достаточно трудоёмких методов Ньютона и распространения ограничений, имеет

смысл выполнить проверку, содержит ли этот брус решения системы уравнений (3.37), и в случае несуществования решений на нем исключить его из рассмотрения.

Очевидно, что  $i$ -ое ( $i = 1, \dots, n$ ) уравнение системы (3.37)

$$\varphi_i(X, \mathbf{P}) = 0$$

не имеет решений на брус  $\mathbf{Y}$ , если множество  $\text{ran}(\varphi_i, \mathbf{Y}, \mathbf{P})$  значений функции  $\varphi_i(X, P)$  на брус  $\mathbf{Y} \times \mathbf{P}$ , где

$$\text{ran}(\varphi_i, \mathbf{Y}, \mathbf{P}) = \left[ \min_{X \in \mathbf{Y}, P \in \mathbf{P}} \varphi_i(X, P), \max_{X \in \mathbf{Z}, P \in \mathbf{P}} \varphi_i(X, P) \right],$$

не содержит нуля, т. е.  $0 \notin \text{ran}(\varphi_i, \mathbf{Y}, \mathbf{P})$ .

Найти точные границы множества  $\text{ran}(\varphi_i, \mathbf{Y}, \mathbf{P})$  достаточно затруднительно, поэтому будем искать внешнюю оценку этого множества, в качестве которой возьмём интервальное расширение полинома  $\varphi_i(X, P)$  на брус  $\mathbf{Y}$ . Для вычисления интервального расширения  $\varphi_i(\mathbf{Y}, \mathbf{P})$  будем использовать процедуру, предложенную в § 3.3.1.

Таким образом, если хотя бы одна компонента интервального расширения  $\Phi(\mathbf{Y}, \mathbf{P})$  не содержит 0, то брус  $\mathbf{Y}$  может быть исключен из рассмотрения, в противном случае к брусу  $\mathbf{Y}$  применяем процедуру анализа совместности (см. Алгоритм 2 в § 3.6.2) и многомерный интервальный метод Ньютона (см. § 3.6.1).

Приведем вычислительную схему процедуры дробления и сжатия брусов.

*Шаг 1.* Заносим исходный брус  $\mathbf{X}$  в список  $\mathcal{L}$  в качестве его первой записи.

Изначально искомый брус  $\mathbf{V}$ , являющийся внешней оценкой множества решений системы (3.37), пуст.

*Шаг 2.* Если список  $\mathcal{L}$  пуст, то заканчиваем работу алгоритма. В противном случае извлекаем из  $\mathcal{L}$  первую запись. Присваиваем  $\mathbf{Z}$  извлеченный брус. Удаляем первую запись из  $\mathcal{L}$ . Если максимальная ширина компонент

бруса  $\mathbf{Z}$  меньше заданной малой величины  $\varepsilon > 0$ , то присваиваем  $\mathbf{V} := \square(\mathbf{V} \cup \mathbf{Z})$  и переходим на шаг 2.

*Шаг 3.* Дробим брус  $\mathbf{Z}$  на два подбруса  $\mathbf{Z}'$  и  $\mathbf{Z}''$ , используя соотношения (3.56)–(3.57). Присваиваем  $t := 1$ ,  $\mathbf{Y} := \mathbf{Z}'$ .

*Шаг 4.* Выполняем проверку существования решения системы интервальных уравнений (3.37) на брусе  $\mathbf{Y}$ . Если хотя бы одна компонента бруса  $\mathbf{Y}$  не содержит нуля и  $t = 1$ , то присваиваем  $t := 2$ ,  $\mathbf{Y} := \mathbf{Z}''$  и переходим на шаг 4. Если хотя бы одна компонента бруса  $\mathbf{Y}$  не содержит нуля и  $t = 2$ , то переходим на шаг 2. Если все компоненты бруса  $\mathbf{Y}$  содержат нуль, то применяем к этому брусу процедуру анализа совместности. Полученные в результате данной процедуры брусы заносим в конец списка  $\mathcal{L}_1$ .

*Шаг 5.* Если список  $\mathcal{L}_1$  пуст и  $t = 1$ , то присваиваем  $t := 2$ ,  $\mathbf{Y} := \mathbf{Z}''$  и переходим на шаг 4. Если список  $\mathcal{L}_1$  пуст и  $t = 2$ , то переходим на шаг 2. Если  $\mathcal{L}_1 \neq \emptyset$ , то извлекаем из  $\mathcal{L}_1$  брус, являющийся первой записью, и применяем к нему интервальный метод Ньютона. Полученный в результате брус, если он не пуст, помещаем в конец списка  $\mathcal{L}$ . Удаляем из  $\mathcal{L}_1$  первую запись и переходим на шаг 5.

### 3.7. Методы внутреннего оценивания множеств решений интервальных систем полиномиальных уравнений

В данном параграфе мы рассмотрим задачу внутреннего оценивания множества  $\Xi(\Phi, \mathbf{P})$  решений системы интервальных полиномиальных уравнений

$$\Phi(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = 0 \quad (3.56)$$

на брусе  $\mathbf{X}$ . Внутренней оценкой этого множества является по-возможности наибольший брус  $\mathbf{U}$ , содержащийся в  $\Xi(\Phi, \mathbf{P}) \cap \mathbf{X}$ . В § 3.4 мы показали, что множество решений  $\Xi(\Phi, \mathbf{P})$  может иметь сложную конфигурацию. Поэтому для более полного его представления имеет смысл искать не одну, а некоторое

множество внутренних оценок. Заметим, что объединение внутренних оценок содержится в  $\Xi(\Phi, \mathbf{P}) \cap \mathbf{X}$  и также служит его оценкой.

Опишем алгоритм нахождения внутренней оценки  $\mathbf{U}$ . Пусть  $X^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$  — некоторая точка, принадлежащая исходному брусу  $\mathbf{X}$ , например,  $X^* = \text{mid } \mathbf{X}$ . Рассмотрим прямые, проходящие через точку  $X^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in \mathbf{X}$  параллельно осям координат. Прямая, параллельная оси  $Ox_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) задаётся системой уравнений

$$x_j = x_j^*, \quad j = 1, \dots, n, \quad j \neq k. \quad (3.57)$$

Найдём пересечение прямой (3.57) с множеством  $\Xi(\Phi, \mathbf{P}) \cap \mathbf{X}$ , т. е. множество точек этой прямой, которые являются решениями системы интервальных уравнений (3.56) на брусе  $\mathbf{X}$ . Множество данных точек, если оно не пусто, может представлять собой интервал (вырожденный или невырожденный) или объединение интервалов.

Множество точек пересечения прямой (3.57) с множеством  $\Xi(\Phi, \mathbf{P}) \cap \mathbf{X}$  находим следующим образом. Подставив (3.57) в (3.56), получим систему интервальных полиномиальных уравнений относительно одной переменной  $x_k$

$$\varphi_i(x_1^*, \dots, x_{k-1}^*, x_k, x_{k+1}^*, \dots, x_n^*, \mathbf{P}) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.58)$$

Для каждого уравнения системы (3.58) вычисляем интервальные корни, используя алгоритм, описанный в § 3.3.2. Пусть  $\mathbf{r}_{ki}^{(1)}, \dots, \mathbf{r}_{ki}^{(m)}$  — интервальные корни  $i$ -го уравнения системы (3.58). Найдём пересечения данных корней с  $k$ -ой компонентой бруса  $\mathbf{X}$ . Получим  $s$  ( $s \leq m$ ) интервалов  $\tilde{\mathbf{r}}_{ki}^{(1)}, \dots, \tilde{\mathbf{r}}_{ki}^{(s)}$ , объединение которых обозначим через  $R_{ki}$ . Множество  $R_k$  решений системы (3.58) находим в виде

$$R_k = \bigcap_{i=1}^n R_{ki}. \quad (3.59)$$

Если  $R_k = \emptyset$  для всех  $k = 1, \dots, n$ , то прямые, проходящие через точку  $X^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in \mathbf{X}$  параллельно осям координат, не пересекают множество

$\Xi(\Phi, \mathbf{P}) \cap \mathbf{X}$ . В этом случае необходимо выбрать другую начальную точку  $X^*$ , например, решение точечной системы

$$\Phi(X, \text{mid } \mathbf{P}) = 0$$

на брус  $\mathbf{X}$ . Данное решение находим, используя метод Ньютона.

Предположим теперь, что прямая, проходящая через точку  $X^*$  параллельно оси координат  $Ox_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) пересекает множество  $\Xi(\Phi, \mathbf{P}) \cap \mathbf{X}$ , т.е.  $R_k \neq \emptyset$ , и представляет собой интервал или объединение интервалов. Выберем среди них интервал с наибольшей шириной и обозначим его через  $\mathbf{r}_k$ .

Рассмотрим отрезок прямой (3.57), определяемый соотношениями

$$\underline{\mathbf{r}}_k \leq x_k \leq \bar{\mathbf{r}}_k, \quad x_j = x_j^*, \quad j \neq k.$$

Этот отрезок принадлежит множеству  $\Xi(\Phi, \mathbf{P})$  решений системы интервальных полиномиальных уравнений (3.56) на брус  $\mathbf{X}$ .

Теперь вычислим брус  $\mathbf{U}$ , который является внутренней оценкой множества  $\Xi(\Phi, \mathbf{P}) \cap \mathbf{X}$ . Обозначим через  $\mathbf{d}$  интервал  $[\underline{\mathbf{r}}_k + \varepsilon, \bar{\mathbf{r}}_k - \varepsilon]$ , где  $0 < \varepsilon < 0.5 \cdot \text{wid } \mathbf{d}$ . В качестве  $k$ -ой компоненты бруса  $\mathbf{U}$  возьмём интервал  $\mathbf{d}$ , т.е.  $\mathbf{u}_k = \mathbf{d}$ . Остальные компоненты  $\mathbf{u}_j$  ( $j = \overline{1, n}, j \neq k$ ) этого бруса находим следующим образом. Вычислим отрезки прямых, проходящих через точки

$$A(x_1^*, \dots, x_{k-1}^*, \underline{\mathbf{d}}, x_{k+1}^*, \dots, x_n^*) \text{ и } B(x_1^*, \dots, x_{k-1}^*, \bar{\mathbf{d}}, x_{k+1}^*, \dots, x_n^*)$$

параллельно  $j$ -ой ( $j = \overline{1, n}, j \neq k$ ) оси координат и принадлежащие множеству  $\Xi(\Phi, \mathbf{P}) \cap \mathbf{X}$ .

Для этого подставим координаты  $a_l$ , где  $l \neq j$ , точки  $A$  в уравнения системы (3.56), получим систему интервальных уравнений относительно переменной  $x_j$

$$\varphi_i(a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_n, \mathbf{P}) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.60)$$

Для каждого уравнения системы (3.60) вычислим интервальный корень, содержащий точку  $a_j$ , и найдём его пересечение с  $j$ -ой компонентой бруса  $\mathbf{X}$ . Пересечение полученных интервалов обозначим через  $\mathbf{d}_j^{(1)}$ . Аналогично для точки  $B$  получим интервалы  $\mathbf{d}_j^{(2)}$ .

Искомые компоненты  $\mathbf{u}_j$  ( $j = \overline{1, n}, j \neq k$ ) бруса  $\mathbf{U}$  находим следующим образом

$$\mathbf{u}_j = [\max\{\underline{\mathbf{d}}_j^{(1)}, \underline{\mathbf{d}}_j^{(2)}\}, \min\{\overline{\mathbf{d}}_j^{(1)}, \overline{\mathbf{d}}_j^{(2)}\}].$$

Полученный брус  $\mathbf{U} \subseteq \Xi(\Phi, \mathbf{P}) \cap \mathbf{X}$ , т. е. является внутренней оценкой множества  $\Xi(\Phi, \mathbf{P})$  на бруске  $\mathbf{X}$ .

Рис. 3.5 иллюстрирует работу алгоритма нахождения внутренней оценки в двумерном случае. На этом рисунке изображены множество решений (заштрихованная область), начальная точка  $X^*$ , интервалы  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{d}_2^{(1)}$ ,  $\mathbf{d}_2^{(2)}$  и внутренняя оценка  $\mathbf{U}$ .

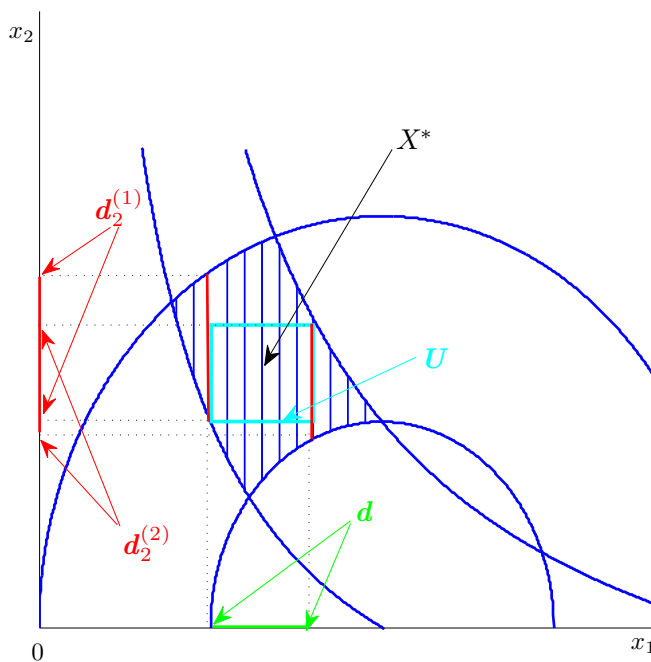


Рис. 3.5. Иллюстрация работы алгоритма нахождения внутренней оценки.

Как было отмечено выше, для более полного представления множества решений имеет смысл искать не одну, а некоторое множество его внутрен-

них оценок. Мы предлагаем строить регулярное покрытие множества решений непересекающимися брусами, являющимися его внутренними оценками.

Для этого интервал  $\mathbf{d}$ , разбиваем на  $T$  непересекающихся подынтервалов  $\mathbf{d}^{(t)}$ ,  $t = \overline{1, T}$ , одинаковой ширины, таких что

$$\mathbf{d} = \bigcup_{t=1}^T \mathbf{d}^{(t)}.$$

Для каждого интервала  $\mathbf{d}^{(t)}$  вычисляем брус  $\mathbf{U}^{(t)}$ , который является внутренней оценкой множества  $\Xi(\Phi, \mathbf{P}) \cap \mathbf{X}$ , используя описанный выше алгоритм. Получаем  $T$  внутренних оценок  $\mathbf{U}^{(1)}, \dots, \mathbf{U}^{(T)}$  множества решений системы (3.56) на бресе  $\mathbf{X}$ .

Данную процедуру далее можно повторить, выбрав начальную точку и исходный брус, на котором находятся внутренние оценки. В качестве начальной точки можно взять середину грани бруса  $\mathbf{U}^{(1)}$ , принадлежащей плоскости  $x_k = \inf \mathbf{u}_k^{(1)}$ , т. е. точку с координатами

$$\left( \text{mid } \mathbf{u}_1^{(1)}, \dots, \text{mid } \mathbf{u}_{k-1}^{(1)}, \inf \mathbf{u}_k^{(1)}, \text{mid } \mathbf{u}_{k+1}^{(1)}, \dots, \text{mid } \mathbf{u}_n^{(1)} \right),$$

и найти внутренние оценки множества решений системы (3.56) на бресе

$$\left( \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, [\underline{\mathbf{x}}_k, \underline{\mathbf{u}}_k^{(1)}], \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_n \right)^\top.$$

Аналогично в качестве начальной точки можно выбрать середину грани бруса  $\mathbf{U}^{(T)}$ , принадлежащей плоскости  $x_k = \sup \mathbf{u}_k^{(T)}$ , т. е. точку с координатами

$$\left( \text{mid } \mathbf{u}_1^{(T)}, \dots, \text{mid } \mathbf{u}_{k-1}^{(T)}, \sup \mathbf{u}_k^{(T)}, \text{mid } \mathbf{u}_{k+1}^{(T)}, \dots, \text{mid } \mathbf{u}_n^{(T)} \right),$$

и найти внутренние оценки множества решений системы (3.56) на бресе

$$\left( \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, [\overline{\mathbf{u}}_k^{(T)}, \overline{\mathbf{x}}_k], \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_n \right)^\top.$$

Данный процесс продолжаем до тех пор, пока пересечение прямой, проходящей через начальную точку параллельно оси координат  $Ox_k$ , с множе-



ством  $\Xi(\Phi, P) \cap X$  не станет пустым или не будет представлять собой объединение интервалов, максимальная ширина которых меньше некоторой малой величины  $\varepsilon > 0$ .

### 3.8. Результаты использования предложенных методов для решения тестовых и прикладных задач

В данном параграфе мы приводим результаты применения предложенных выше алгоритмов внешнего и внутреннего оценивания множеств решений систем интервальных полиномиальных уравнений при вычислении многомерных перемещений торца лопатки силовой установки. Постановка данной задачи изложена в § 1.2.

**Пример 3.12.** Предположим, что смещение торцов лопаток силовой установки происходит в двух направлениях — радиальном и осевом. Пусть вектор  $X = (x_1, x_2)^\top$  характеризует осевое ( $x_1$ ) и радиальное ( $x_2$ ) смещения центра торца лопатки. Через  $C = (c_1, c_2)^\top$  обозначим вектор цифровых кодов АЦП в каналах преобразования координатных составляющих перемещения торца лопатки. Значения цифровых кодов с учётом погрешностей измерения задаются интервалами  $c_i = [\underline{c}_i, \bar{c}_i]$ ,  $i = 1, 2$ .

Для вычисления координатных составляющих перемещений торца лопатки были использованы семейства градуировочных характеристик, полученные по экспериментальным данным с помощью процедуры интервальной полиномиальной регрессии, изложенной в § 1.2.

Градуировочные характеристики имели вид интервальных полиномов

$$f_i(x_1, x_2) = [-\varepsilon_i, \varepsilon_i] + \sum_{k_1=0}^2 \sum_{k_2=0}^2 a_{(i)k_1k_2} x_1^{k_1} x_2^{k_2}, \quad i = 1, 2, \quad (3.61)$$

с коэффициентами

$$\mathbf{a}_{(1)00} = [-\varepsilon_1, \varepsilon_1] + a_{(1)00} = [2557.3632653057, 2567.3632653057],$$

$$a_{(1)01} = -221.0272108834,$$

$$a_{(1)02} = 70.5782312920,$$

$$a_{(1)10} = -297.6301020407,$$

$$a_{(1)11} = 301.4891581631,$$

$$a_{(1)12} = -93.0325255101,$$

$$a_{(1)20} = 58.3290816338,$$

$$a_{(1)21} = -88.8764880984,$$

$$a_{(1)22} = 36.0065901378,$$

$$\mathbf{a}_{(2)00} = [-\varepsilon_1, \varepsilon_1] + a_{(2)00} = [3037.7782312919, 3053.7782312919],$$

$$a_{(2)01} = -218.5782312911,$$

$$a_{(2)02} = 80.1020408155,$$

$$a_{(2)10} = 317.1479591836,$$

$$a_{(2)11} = -342.3596938776,$$

$$a_{(2)12} = 112.5637755102,$$

$$a_{(2)20} = 30.1870748319,$$

$$a_{(2)21} = 10.7886904708,$$

$$a_{(2)22} = -19.9298469358.$$

Вычисление на основе градуировочных характеристик (3.61) осевых и радиальных перемещений торца лопатки, соответствующих вектору цифровых кодов  $\mathbf{C} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)^\top$ , сводится к решению системы интервальных полиномиальных уравнений

$$\mathbf{f}_i(x_1, x_2) = \mathbf{c}_i, \quad i = 1, 2. \quad (3.62)$$

Таблица 1. Оценка осевых и радиальных перемещений торца лопатки (Пример 12).

Вектор $\mathbf{C} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)^\top$ цифровых кодов		Оценка $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)^\top$ перемещений торца лопатки	
$\mathbf{c}_1$	$\mathbf{c}_2$	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$
$\varepsilon = 0.1$			
[2565, 2575]	[2890, 2906]	[-0.6000, -0.3311]	[0.4000, 0.5250]
[2472, 2482]	[2868, 2884]	[-0.6000, -0.1500]	[0.5250, 1.0250]
[2408, 2418]	[2865, 2881]	[-0.6000, 0.1500]	[0.7750, 1.4000]
$\varepsilon = 0.01$			
[2565, 2575]	[2890, 2906]	[-0.4992, -0.3687]	[0.4000, 0.4938]
[2472, 2482]	[2868, 2884]	[-0.6000, -0.2812]	[0.6344, 1.0094]
[2408, 2418]	[2865, 2881]	[-0.5812, 0.0187]	[0.8844, 1.4000]
$\varepsilon = 0.001$			
[2565, 2575]	[2890, 2906]	[-0.4844, -0.3693]	[0.4000, 0.4801]
[2472, 2482]	[2868, 2884]	[-0.6000, -0.2859]	[0.6480, 1.0035]
[2408, 2418]	[2865, 2881]	[-0.5637, -0.0012]	[0.9880, 1.4000]
$\varepsilon = 0.0001$			
[2565, 2575]	[2890, 2906]	[-0.4840, -0.3693]	[0.4000, 0.4797]
[2472, 2482]	[2868, 2884]	[-0.6000, -0.2861]	[0.6978, 1.0024]
[2408, 2418]	[2865, 2881]	[-0.5626, -0.1124]	[1.0658, 1.4000]

Систему интервальных уравнений (3.62) привели к виду

$$\varphi_i(X, \mathbf{p}_i) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (3.63)$$

где

$$\varphi_i(X, p_i) = \sum_{k_1=0}^2 \sum_{k_2=0}^2 a_{(i)k_1k_2} x_1^{k_1} x_2^{k_2} + p_i,$$

$$p_i \in \mathbf{p}_i = [-\varepsilon_i, \varepsilon_i] - \mathbf{c}_i.$$

Для нахождения внешней оценки  $\mathbf{V}$  множества  $\Xi(\Phi, \mathbf{P})$  решений системы (3.63) на брус  $\mathbf{X}$  применили процедуры дробления и сжатия, описанные в § 3.6.3. Исходный брус был задан на основе физических соображений в виде  $\mathbf{X} = ([-0.6, 0.6], [0.4, 1.4])^\top$ .

В Таблице 1 представлены внешние оценки множества решений системы (3.63), полученные в результате работы процедур дробления и сжатия при разных значениях цифровых кодов и пороговой константы  $\varepsilon$ . Значения цифровых кодов и пороговой константы  $\varepsilon$  указаны в Таблице 1.

На рисунках 3.6–3.8 изображены исходный брус  $\mathbf{X}$  (пунктирной линией), линии, ограничивающие множество решений системы интервальных полиномиальных уравнений (3.63), а также внешняя оценка  $\mathbf{V}$  (сплошной линией) этого множества на брус  $\mathbf{X}$ , полученная в результате работы процедуры дробления и сжатия (значение пороговой константы  $\varepsilon = 0.0001$ ).

**Пример 3.13.** Рассмотрим теперь трехмерные перемещения торцов лопатки силовой установки. Пусть вектор  $X = (x_1, x_2, x_3)^\top$  характеризует осевое ( $x_1$ ), радиальное ( $x_2$ ) и угловое ( $x_3$ ) смещения центра торца лопатки. Через  $C = (c_1, c_2, c_3)^\top$  обозначим вектор цифровых кодов АЦП в каналах преобразования координатных составляющих перемещения торца лопатки. Значения цифровых кодов с учётом погрешностей измерения задаются интервалами  $\mathbf{c}_i = [\underline{c}_i, \bar{c}_i]$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

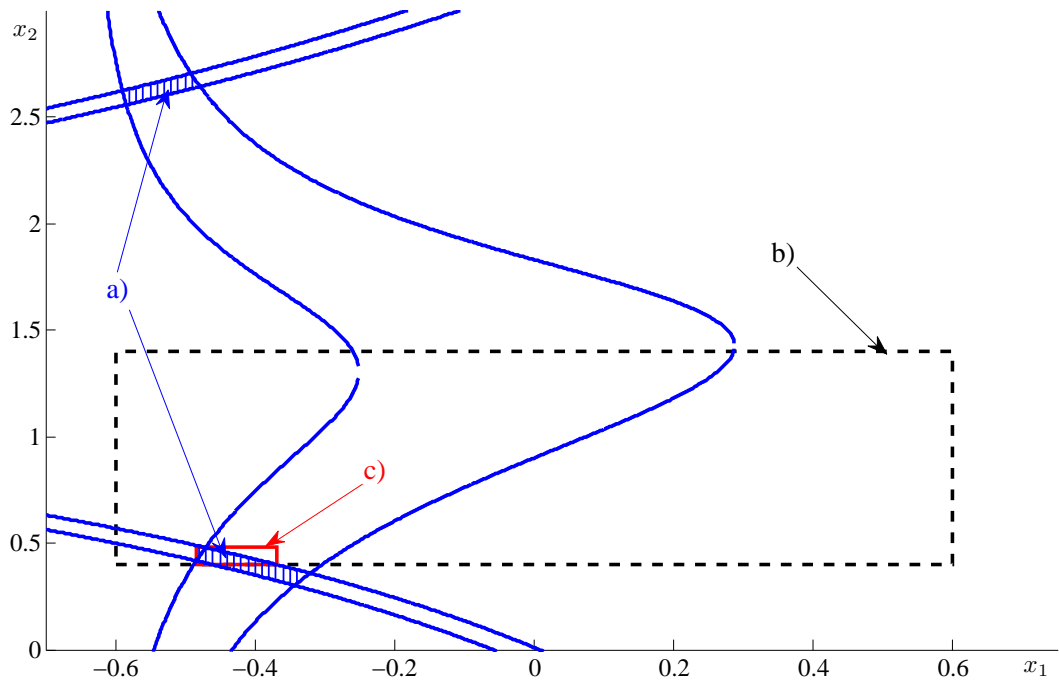


Рис. 3.6. Перемещения торца лопатки, соответствующие  $\mathbf{c}_1 = [2565, 2575]$ ,  $\mathbf{c}_2 = [2890, 2906]$   
 (а — множество решений системы (3.63), б — исходный брус,  
 с — внешняя оценка).

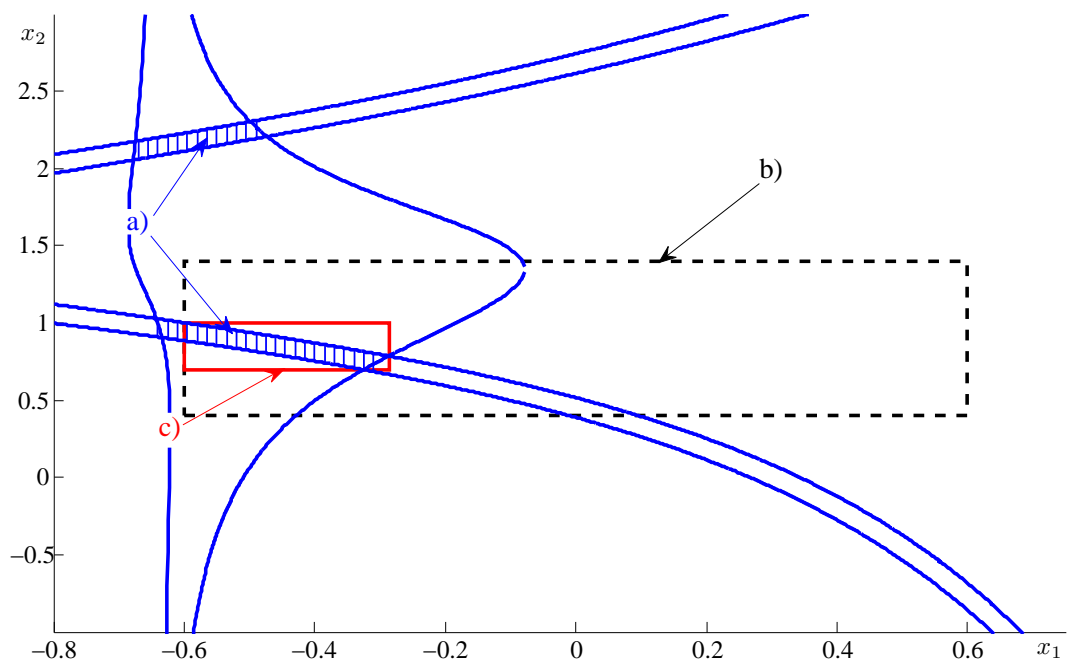


Рис. 3.7. Перемещения торца лопатки, соответствующие  $\mathbf{c}_1 = [2472, 2482]$ ,  $\mathbf{c}_2 = [2868, 2884]$   
 (а — множество решений системы (3.63), б — исходный брус, с — внешняя оценка).

Градуировочные характеристики, полученные по экспериментальным данным с помощью процедуры интервальной полиномиальной регрессии, име-

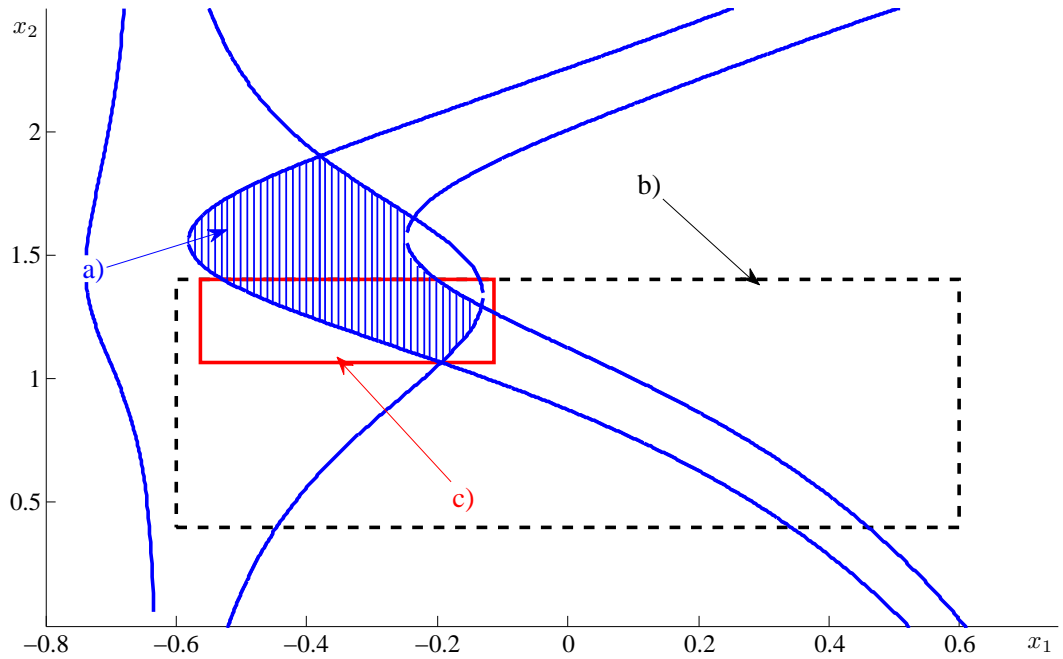


Рис. 3.8. Перемещения торца лопатки, соответствующие  $\mathbf{c}_1 = [2408, 2418]$ ,  $\mathbf{c}_2 = [2865, 2881]$  (а — множество решений системы (3.63), б — исходный брус, с — внешняя оценка).

ют вид интервальных полиномов

$$\mathbf{f}_i(x_1, x_2, x_3) = [-\varepsilon_i, \varepsilon_i] + \sum_{k_1=0}^2 \sum_{k_2=0}^2 \sum_{k_3=0}^2 a_{(i)k_1k_2k_3} x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.64)$$

коэффициенты которых приведены в Таблицах 2–4.

Вычисление на основе градуировочных характеристик (3.64) осевых, радиальных и угловых перемещений торца лопатки, соответствующих различным значениям цифровых кодов  $\mathbf{c}_1$ ,  $\mathbf{c}_2$  и  $\mathbf{c}_3$ , сводится к решению системы интервальных полиномиальных уравнений

$$\mathbf{f}_i(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{c}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.65)$$

Систему интервальных уравнений (3.65) привели к виду

$$\varphi_i(X, \mathbf{p}_i) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.66)$$

Таблица 2. Коэффициенты интервального полинома  $\mathbf{f}_1(x_1, x_2, x_3)$ .

$\mathbf{a}_{(1)000} = [1360.1019335646, 1360.1547335646]$	
$a_{(1)001} = -9,4228166972$	$a_{(1)112} = -1.2616935371$
$a_{(1)002} = -2.0312997746$	$a_{(1)120} = 0.2545095626$
$a_{(1)010} = 3.7857236339$	$a_{(1)121} = 0.6982233469$
$a_{(1)011} = 5.0296910152$	$a_{(1)122} = 0.6126130868$
$a_{(1)012} = 3.0214895488$	$a_{(1)200} = -0.8146145814$
$a_{(1)020} = 0.2785228688$	$a_{(1)201} = -0.4347439562$
$a_{(1)021} = -0.7941234861$	$a_{(1)202} = 0.0097273987$
$a_{(1)022} = -1.1780955153$	$a_{(1)210} = 0.4679620259$
$a_{(1)100} = 6.8903092535$	$a_{(1)211} = 0.4406582473$
$a_{(1)101} = 3.7776301873$	$a_{(1)212} = 0.1368392468$
$a_{(1)102} = 0.3763795266$	$a_{(1)220} = -0.0727115089$
$a_{(1)110} = -2.8855788436$	$a_{(1)221} = -0.1243096629$
$a_{(1)111} = -2.9726028922$	$a_{(1)222} = -0.0813839287$

Таблица 3. Коэффициенты интервального полинома  $\mathbf{f}_2(x_1, x_2, x_3)$ .

$\mathbf{a}_{(2)000} = [1292.2527772837, 1293.1027772837]$	
$a_{(2)001} = -15.5534815828$	$a_{(2)112} = 16.2988530631$
$a_{(2)002} = 19.3614589949$	$a_{(2)120} = 10.7845660043$
$a_{(2)010} = 71.2377253871$	$a_{(2)121} = 0.2273891785$
$a_{(2)011} = 21.4959932684$	$a_{(2)122} = -7.0968678734$
$a_{(2)012} = -25.2084447484$	$a_{(2)200} = -0.3492995674$
$a_{(2)020} = -22.7652326858$	$a_{(2)201} = 2.9313017270$
$a_{(2)021} = -9.5082965561$	$a_{(2)202} = 1.2514523889$
$a_{(2)022} = 10.2180393074$	$a_{(2)210} = 2.3744189009$
$a_{(2)100} = 18.0292224931$	$a_{(2)211} = -2.4393825300$
$a_{(2)101} = -9.8853187568$	$a_{(2)212} = -2.2806785224$
$a_{(2)102} = -10.7658709441$	$a_{(2)220} = -1.2364538981$
$a_{(2)110} = -26.7227199205$	$a_{(2)221} = 0.6258470596$
$a_{(2)111} = 4.3953011746$	$a_{(2)222} = 1.0742482613$

Таблица 4. Коэффициенты интервального полинома  $\mathbf{f}_3(x_1, x_2, x_3)$ .

$\mathbf{a}_{(3)000} = [1369.8945360505, 1370.3295360505]$	
$a_{(3)001} = 9.8420582171$	$a_{(3)112} = -3.3498442267$
$a_{(3)002} = -5.4378100131$	$a_{(3)120} = -8.4829860333$
$a_{(3)010} = -8.4336073870$	$a_{(3)121} = 4.5726305715$
$a_{(3)011} = -4.6550951900$	$a_{(3)122} = 0.9602673996$
$a_{(3)012} = 6.4726210053$	$a_{(3)200} = 3.8768624847$
$a_{(3)020} = 5.1993797265$	$a_{(3)201} = -2.5120014997$
$a_{(3)021} = 0.1848485428$	$a_{(3)202} = -0.1976297858$
$a_{(3)022} = -2.3436933290$	$a_{(3)210} = -3.9084679739$
$a_{(3)100} = -23.6715695346$	$a_{(3)211} = 3.5708818623$
$a_{(3)101} = 4.3921166425$	$a_{(3)212} = -0.0368395731$
$a_{(3)102} = 3.6977801824$	$a_{(3)220} = 1.3730556352$
$a_{(3)110} = 24.0279998503$	$a_{(3)221} = -1.5175653255$
$a_{(3)111} = -9.3533445700$	$a_{(3)222} = 0.0928829613$

где

$$\varphi_i(X, p_i) = \sum_{k_1=0}^2 \sum_{k_2=0}^2 \sum_{k_3=0}^2 a_{(i)k_1k_2k_3} x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} + p_i,$$

$$p_i \in \mathbf{p}_i = [-\varepsilon_i, \varepsilon_i] - \mathbf{c}_i.$$

Для нахождения внешней оценки  $\mathbf{V}$  множества решений  $\Xi(\Phi, \mathbf{P})$  системы (3.66) на брус  $\mathbf{X}$  применили процедуры дробления и сжатия, описанные в § 3.6.3. Исходный брус был задан в виде  $\mathbf{X} = ([-1, 5], [-1, 5], [-1, 5])^\top$ , значение пороговой константы  $\varepsilon = 0.001$ .

Мы провели ряд вычислительных экспериментов, при которых были найдены оценки  $\mathbf{V}$  множеств перемещений торца лопатки, соответствующих разным значениям цифровых кодов  $\mathbf{C}$ . Результаты представлены в Таблице 5.

Для анализа качества внешней оценки, на брус  $\mathbf{X}$  была задана расчетная сетка, множество узлов которой

$$S = \{X = (x_{m_j}) \in \mathbf{X} | x_{m_j} = \underline{x}_j + \delta_j \cdot (m_j - 1), m_j = \overline{1, M_j}, j = \overline{1, 3}\}, \quad (3.67)$$



Таблица 5. Оценка осевых, радиальных и угловых перемещений торца лопатки (Пример 13).

Вектор $\mathbf{C} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)^\top$ цифровых кодов	Внешняя оценка $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)^\top$ перемещений лопатки	Слабая внутренняя оценка $\mathbf{W} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)^\top$ перемещений лопатки
$\mathbf{c}_1 = [1370.0872, 1370.1372]$ $\mathbf{c}_2 = [1337.1678, 1337.2178]$ $\mathbf{c}_3 = [1351.2455, 1351.2955]$	$\mathbf{v}_1 = [2.0657, 2.7501]$ $\mathbf{v}_2 = [0.5750, 0.6230]$ $\mathbf{v}_3 = [0.2839, 0.9385]$	$\mathbf{w}_1 = [2.15, 2.63]$ $\mathbf{w}_2 = [0.58, 0.61]$ $\mathbf{w}_3 = [0.36, 0.82]$
$\mathbf{c}_1 = [1369.8481, 1369.9481]$ $\mathbf{c}_2 = [1323.8601, 1323.9601]$ $\mathbf{c}_3 = [1339.9645, 1340.0645]$	$\mathbf{v}_1 = [1.5468, 2.1407]$ $\mathbf{v}_2 = [-0.0338, 0.0244]$ $\mathbf{v}_3 = [-0.2316, 0.3149]$	$\mathbf{w}_1 = [1.60, 2.05]$ $\mathbf{w}_2 = [-0.02, 0.02]$ $\mathbf{w}_3 = [-0.18, 0.23]$
$\mathbf{c}_1 = [1371.9317, 1372.0317]$ $\mathbf{c}_2 = [1333.8205, 1333.9205]$ $\mathbf{c}_3 = [1335.5280, 1335.6280]$	$\mathbf{v}_1 = [2.2187, 2.6876]$ $\mathbf{v}_2 = [-0.0185, 0.0142]$ $\mathbf{v}_3 = [-0.1638, 0.2606]$	$\mathbf{w}_1 = [2.28, 2.61]$ $\mathbf{w}_2 = [-0.01, 0.01]$ $\mathbf{w}_3 = [-0.11, 0.19]$
$\mathbf{c}_1 = [1367.8421, 1367.8921]$ $\mathbf{c}_2 = [1332.6058, 1332.6558]$ $\mathbf{c}_3 = [1354.4793, 1354.5293]$	$\mathbf{v}_1 = [-0.1185, 2.1823]$ $\mathbf{v}_2 = [-0.0749, 0.6353]$ $\mathbf{v}_3 = [-1.1460, 0.9783]$	$\mathbf{w}_1 = [-0.10, 2.05]$ $\mathbf{w}_2 = [-0.01, 0.62]$ $\mathbf{w}_3 = [-1.12, 0.85]$
$\mathbf{c}_1 = [1371.8274, 1371.9274]$ $\mathbf{c}_2 = [1342.9538, 1343.0538]$ $\mathbf{c}_3 = [1349.0022, 1349.1022]$	$\mathbf{v}_1 = [2.5593, 4.4219]$ $\mathbf{v}_2 = [0.5764, 0.7114]$ $\mathbf{v}_3 = [0.1919, 2.2918]$	$\mathbf{w}_1 = [2.62, 4.39]$ $\mathbf{w}_2 = [0.58, 0.70]$ $\mathbf{w}_3 = [0.24, 2.25]$
$\mathbf{c}_1 = [1367.0248, 1367.0748]$ $\mathbf{c}_2 = [1342.7793, 1342.8293]$ $\mathbf{c}_3 = [1362.5490, 1362.5990]$	$\mathbf{v}_1 = [1.3843, 1.9865]$ $\mathbf{v}_2 = [1.1396, 1.2422]$ $\mathbf{v}_3 = [0.7499, 1.3959]$	$\mathbf{w}_1 = [1.45, 1.95]$ $\mathbf{w}_2 = [1.16, 1.22]$ $\mathbf{w}_3 = [0.83, 1.36]$
$\mathbf{c}_1 = [1368.9774, 1369.0774]$ $\mathbf{c}_2 = [1344.0458, 1344.1458]$ $\mathbf{c}_3 = [1360.3524, 1360.4524]$	$\mathbf{v}_1 = [2.0531, 2.6692]$ $\mathbf{v}_2 = [1.1559, 1.2378]$ $\mathbf{v}_3 = [0.8593, 1.4618]$	$\mathbf{w}_1 = [2.11, 2.60]$ $\mathbf{w}_2 = [1.17, 1.23]$ $\mathbf{w}_3 = [0.92, 1.40]$
$\mathbf{c}_1 = [1370.7094, 1370.7594]$ $\mathbf{c}_2 = [1346.7194, 1346.7694]$ $\mathbf{c}_3 = [1358.5841, 1358.6341]$	$\mathbf{v}_1 = [2.6062, 3.3572]$ $\mathbf{v}_2 = [1.1699, 1.2415]$ $\mathbf{v}_3 = [0.8148, 1.5797]$	$\mathbf{w}_1 = [2.71, 3.25]$ $\mathbf{w}_2 = [1.18, 1.23]$ $\mathbf{w}_3 = [0.92, 1.46]$
$\mathbf{c}_1 = [1371.9567, 1372.0067]$ $\mathbf{c}_2 = [1333.8455, 1333.8955]$ $\mathbf{c}_3 = [1335.5530, 1335.6030]$	$\mathbf{v}_1 = [2.2656, 2.6123]$ $\mathbf{v}_2 = [-0.0166, 0.0127]$ $\mathbf{v}_3 = [-0.1224, 0.1915]$	$\mathbf{w}_1 = [2.29, 2.55]$ $\mathbf{w}_2 = [-0.01, 0.01]$ $\mathbf{w}_3 = [-0.10, 0.14]$
$\mathbf{c}_1 = [1367.8171, 1367.9171]$ $\mathbf{c}_2 = [1332.5880, 1332.6880]$ $\mathbf{c}_3 = [1354.4930, 1354.5930]$	$\mathbf{v}_1 = [-0.1253, 2.2153]$ $\mathbf{v}_2 = [-0.0706, 0.6425]$ $\mathbf{v}_3 = [-1.1499, 1.0018]$	$\mathbf{w}_1 = [-0.11, 2.12]$ $\mathbf{w}_2 = [-0.03, 0.63]$ $\mathbf{w}_3 = [-1.13, 0.92]$

где  $M_j = \left[ \frac{(\bar{x}_j - \underline{x}_j)}{\delta_j} \right]$ ,  $\delta_j > 0$ . Далее была найдена интервальная оболочка  $\mathbf{W}$  множества

$$S^* = \{X \in S | (\exists P \in \mathbf{P})(\Phi(X, P) = 0)\} \quad (3.68)$$

тех узлов сетки  $S$ , которые являются решениями системы (3.66). Очевидно,  $\mathbf{W}$  является слабой внутренней оценкой множества  $\Xi(\Phi, \mathbf{P})$  решений этой системы и  $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{V}$ . В Таблице 5 для каждой внешней оценки  $\mathbf{V}$  приведена соответствующая слабая внутренняя оценка  $\mathbf{W}$ .

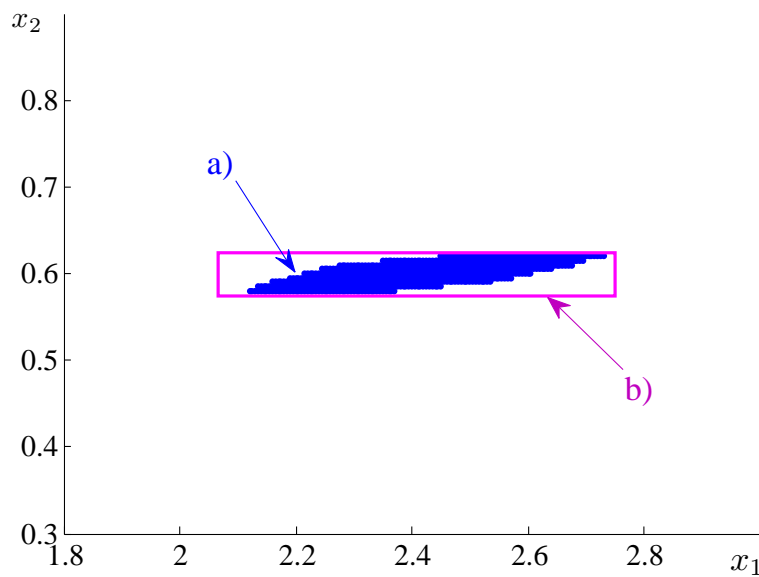


Рис. 3.9. Оценка осевых и радиальных перемещений торца лопатки (а — проекция на плоскость  $x_1Ox_2$  множества  $S^*$ , б — проекция на плоскость  $x_1Ox_2$  внешней оценки  $\mathbf{V}$ ).

На рисунках 3.9–3.11 изображены проекции на координатные плоскости множества  $S^*$ , а также проекции внешней оценки  $\mathbf{V}$  множества перемещений торца лопатки, соответствующих цифровым кодам  $\mathbf{c}_1 = [1370.0872, 1370.1372]$ ,  $\mathbf{c}_2 = [1337.1678, 1337.2178]$ ,  $\mathbf{c}_3 = [1351.2455, 1351.2955]$ .

**Пример 3.14.** Представим результаты внутреннего оценивания множества осевых и радиальных перемещений торца лопатки, соответствующих определённым значениям цифровых кодов.

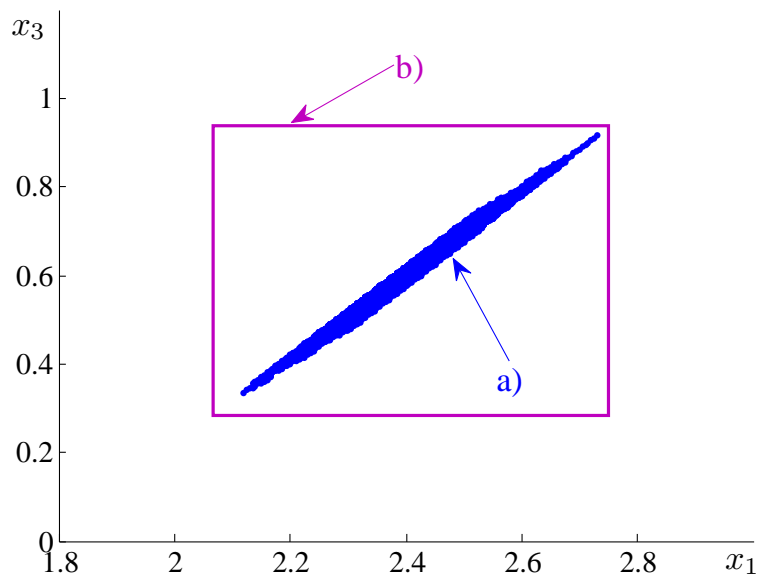


Рис. 3.10. Оценка осевых и угловых перемещений торца лопатки (а — проекция на плоскость  $x_1Ox_3$  множества  $S^*$ , б — проекция на плоскость  $x_1Ox_3$  внешней оценки  $V$ ).

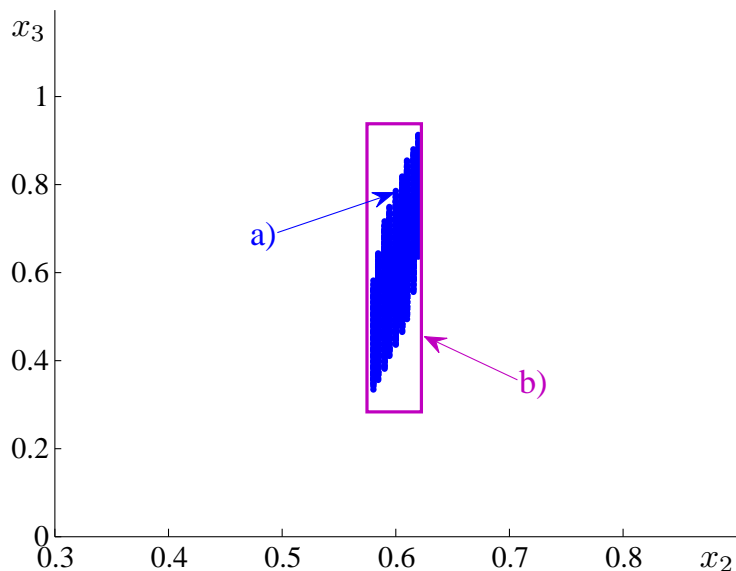


Рис. 3.11. Оценка радиальных и угловых перемещений торца лопатки (а — проекция на плоскость  $x_2Ox_3$  множества  $S^*$ , б — проекция на плоскость  $x_2Ox_3$  внешней оценки  $V$ ).

Будем использовать градуировочные характеристики (3.61) и значения цифровых кодов  $\mathbf{c}_1 = [2565, 2575]$ ,  $\mathbf{c}_2 = [2890, 2906]$ , приведённые в Примере 12.

Для более полного представления множества решений системы интервальных полиномиальных уравнений имеет смысл находить не одну, а некоторое множество внутренних оценок. В § 3.7 был предложен алгоритм построения регулярного покрытия множества решений системы интервальных полиномиальных уравнений на основе внутренних оценок этого множества.

Данный алгоритм был применен для нахождения внутренних оценок множества решений системы интервальных полиномиальных уравнений (3.63) на брусе  $\mathbf{X} = ([-0.6, 0.6], [0.1, 1.4])^\top$ .

На рис. 3.12 изображено регулярное покрытие множества решений системы (3.63) на основе внутренних оценок, полученных в результате выполнения трех итераций алгоритма.

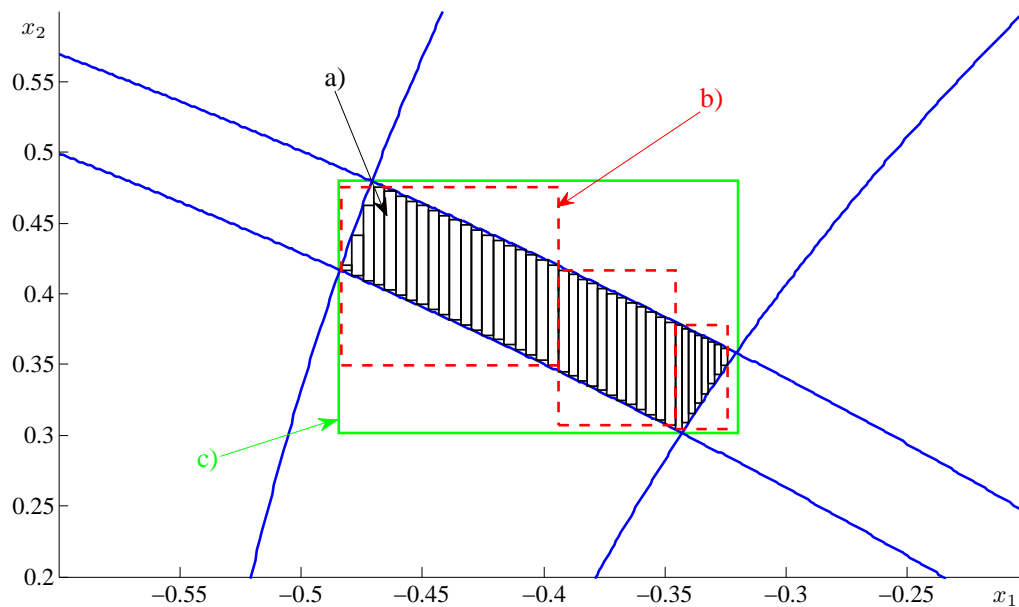


Рис. 3.12. Результаты внутреннего оценивания множества радиальных и угловых перемещений торца лопатки (a — внутренняя оценка, b — интервальная оболочка внутренних оценок, c — интервальная оболочка множества решений на брусе  $\mathbf{X}$ ).

На первом шаге в качестве начальной была взята точка  $X^*(-0.45, 0.42)$  и найдено 20 внутренних оценок, интервальная оболочка их объединения

$([-0.4834, -0.3938], [0.3490, 0.4758])^\top$ . На втором шаге определена начальная точка  $X^* = (-0.3938, 0.3800)$ , вычислено 12 внутренних оценок, интервальная оболочка их объединения  $([-0.3938, -0.3456], [0.3075, 0.4169])^\top$ . На третьем шаге при начальной точке  $X^* = (-0.3456, 0.3500)$  получено 8 внутренних оценок, интервальная оболочка их объединения  $([-0.3456, -0.3241], [0.3039, 0.3779])^\top$ . На рис. 3.12 красной пунктирной линией показаны интервальные оболочки объединения внутренних оценок, вычисленных на отдельных шагах алгоритма, зелёной сплошной линией — интервальная оболочка множества решений системы интервальных полиномиальных уравнений (3.63) на брус  $\mathbf{X} = ([-0.6, 0.6], [0.1, 1.4])^\top$ .

**Пример 3.15.** Мы провели ряд вычислительных экспериментов внутреннего оценивания множеств трехмерных перемещений торца лопатки, соответствующих цифровым кодам, полученным в результате измерений. Были использованы градуировочные характеристики (3.64) и значения цифровых кодов, приведённые в Примере 13.

Для каждого вектора цифровых кодов было найдено регулярное покрытие множества осевых, радиальных и угловых перемещений торца лопатки непересекающимися брусами. Данные брус являются внутренними оценками множества решений  $\Xi(\Phi, \mathbf{P})$  системы интервальных полиномиальных уравнений (3.66). Внутренние оценки были вычислены с помощью алгоритма, предложенного в § 3.7. В качестве исходного был взят брус  $\mathbf{X} = ([-1, 5], [-1, 5], [-1, 5])^\top$ .

В Таблице 6 мы приводим внутреннюю оценку, вычисленную на первом шаге алгоритма, а также интервальную оболочку объединения всех внутренних оценок, полученных в результате работы алгоритма при пороговой константе  $\varepsilon = 0.0001$ .

При сравнении интервальной оболочки  $\tilde{U} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)^\top$  внутренних оценок множества перемещений с соответствующей внешней оценкой  $\mathbf{V} =$

Таблица 6. Внутреннее оценивание множества осевых, радиальных и угловых перемещений торца лопатки (Пример 15).

Вектор $\mathbf{C} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)^\top$ цифровых кодов	Внутренняя оценка $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)^\top$ перемещений лопатки	Интервальная оболочка $\tilde{\mathbf{U}} = (\tilde{\mathbf{u}}_1, \tilde{\mathbf{u}}_2, \tilde{\mathbf{u}}_3)^\top$ внутренних оценок
$\mathbf{c}_1 = [1370.0872, 1370.1372]$ $\mathbf{c}_2 = [1337.1678, 1337.2178]$ $\mathbf{c}_3 = [1351.2455, 1351.2955]$	$\mathbf{u}_1 = [2.2870, 2.3057]$ $\mathbf{u}_2 = [0.5891, 0.6009]$ $\mathbf{u}_3 = [0.4983, 0.5024]$	$\tilde{\mathbf{u}}_1 = [2.1309, 2.6876]$ $\tilde{\mathbf{u}}_2 = [0.5793, 0.6185]$ $\tilde{\mathbf{u}}_3 = [0.3427, 0.8769]$
$\mathbf{c}_1 = [1369.8481, 1369.9481]$ $\mathbf{c}_2 = [1323.8601, 1323.9601]$ $\mathbf{c}_3 = [1339.9645, 1340.0645]$	$\mathbf{u}_1 = [1.7862, 1.8172]$ $\mathbf{u}_2 = [-0.0068, 0.0033]$ $\mathbf{u}_3 = [-0.0039, 0.0038]$	$\tilde{\mathbf{u}}_1 = [1.5900, 2.0842]$ $\tilde{\mathbf{u}}_2 = [-0.0251, 0.0209]$ $\tilde{\mathbf{u}}_3 = [-0.1885, 0.2606]$
$\mathbf{c}_1 = [1371.9317, 1372.0317]$ $\mathbf{c}_2 = [1333.8205, 1333.9205]$ $\mathbf{c}_3 = [1335.5280, 1335.6280]$	$\mathbf{u}_1 = [2.3822, 2.4203]$ $\mathbf{u}_2 = [-0.0082, 0.0039]$ $\mathbf{u}_3 = [-0.0035, 0.0050]$	$\tilde{\mathbf{u}}_1 = [2.2485, 2.6465]$ $\tilde{\mathbf{u}}_2 = [-0.0142, 0.0108]$ $\tilde{\mathbf{u}}_3 = [-0.1339, 0.2220]$
$\mathbf{c}_1 = [1367.8421, 1367.8921]$ $\mathbf{c}_2 = [1332.6058, 1332.6558]$ $\mathbf{c}_3 = [1354.4793, 1354.5293]$	$\mathbf{u}_1 = [1.7901, 1.8100]$ $\mathbf{u}_2 = [0.5939, 0.6061]$ $\mathbf{u}_3 = [0.5975, 0.6025]$	$\tilde{\mathbf{u}}_1 = [0.1712, 2.1151]$ $\tilde{\mathbf{u}}_2 = [0.2704, 0.6277]$ $\tilde{\mathbf{u}}_3 = [-0.8825, 0.9114]$
$\mathbf{c}_1 = [1371.8274, 1371.9274]$ $\mathbf{c}_2 = [1342.9538, 1343.0538]$ $\mathbf{c}_3 = [1349.0022, 1349.1022]$	$\mathbf{u}_1 = [2.9766, 3.0248]$ $\mathbf{u}_2 = [0.5890, 0.6112]$ $\mathbf{u}_3 = [0.5940, 0.6060]$	$\tilde{\mathbf{u}}_1 = [2.5783, 4.3979]$ $\tilde{\mathbf{u}}_2 = [0.5784, 0.7052]$ $\tilde{\mathbf{u}}_3 = [0.2076, 2.2651]$
$\mathbf{c}_1 = [1367.0248, 1367.0748]$ $\mathbf{c}_2 = [1342.7793, 1342.8293]$ $\mathbf{c}_3 = [1362.5490, 1362.5990]$	$\mathbf{u}_1 = [1.7862, 1.8096]$ $\mathbf{u}_2 = [1.1969, 1.2031]$ $\mathbf{u}_3 = [1.1970, 1.2030]$	$\tilde{\mathbf{u}}_1 = [1.4164, 1.9719]$ $\tilde{\mathbf{u}}_2 = [0.1538, 1.2283]$ $\tilde{\mathbf{u}}_3 = [0.7918, 1.3841]$
$\mathbf{c}_1 = [1368.9774, 1369.0774]$ $\mathbf{c}_2 = [1344.0458, 1344.1458]$ $\mathbf{c}_3 = [1360.3524, 1360.4524]$	$\mathbf{u}_1 = [2.3773, 2.4172]$ $\mathbf{u}_2 = [1.1931, 1.2070]$ $\mathbf{u}_3 = [1.1949, 1.2051]$	$\tilde{\mathbf{u}}_1 = [2.0692, 2.6297]$ $\tilde{\mathbf{u}}_2 = [1.1691, 1.2340]$ $\tilde{\mathbf{u}}_3 = [0.8746, 1.4303]$
$\mathbf{c}_1 = [1370.7094, 1370.7594]$ $\mathbf{c}_2 = [1346.7194, 1346.7694]$ $\mathbf{c}_3 = [1358.5841, 1358.6341]$	$\mathbf{u}_1 = [2.9812, 3.0127]$ $\mathbf{u}_2 = [1.1922, 1.2079]$ $\mathbf{u}_3 = [1.1959, 1.2041]$	$\tilde{\mathbf{u}}_1 = [2.6685, 3.2995]$ $\tilde{\mathbf{u}}_2 = [1.1764, 1.2338]$ $\tilde{\mathbf{u}}_3 = [0.8738, 1.5171]$
$\mathbf{c}_1 = [1371.9567, 1372.0067]$ $\mathbf{c}_2 = [1333.8455, 1333.8955]$ $\mathbf{c}_3 = [1335.5530, 1335.6030]$	$\mathbf{u}_1 = [2.3892, 2.4169]$ $\mathbf{u}_2 = [-0.0079, 0.0051]$ $\mathbf{u}_3 = [-0.0037, 0.0036]$	$\tilde{\mathbf{u}}_1 = [2.2787, 2.5905]$ $\tilde{\mathbf{u}}_2 = [-0.0126, 0.0092]$ $\tilde{\mathbf{u}}_3 = [-0.1110, 0.1742]$
$\mathbf{c}_1 = [1367.8171, 1367.9171]$ $\mathbf{c}_2 = [1332.5880, 1332.6880]$ $\mathbf{c}_3 = [1354.4930, 1354.5930]$	$\mathbf{u}_1 = [1.7853, 1.8149]$ $\mathbf{u}_2 = [0.5910, 0.6091]$ $\mathbf{u}_3 = [0.5963, 0.6037]$	$\tilde{\mathbf{u}}_1 = [0.0291, 2.1730]$ $\tilde{\mathbf{u}}_2 = [0.1656, 0.6346]$ $\tilde{\mathbf{u}}_3 = [-1.0000, 0.9662]$

Таблица 7. Сравнение результатов внешнего и внутреннего оценивания множества осевых, радиальных и угловых перемещений торца лопатки (Пример 15).

Внешняя оценка $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)^\top$ перемещений лопатки	Интервальная оболочка $\tilde{\mathbf{U}} = (\tilde{\mathbf{u}}_1, \tilde{\mathbf{u}}_2, \tilde{\mathbf{u}}_3)^\top$ внутренних оценок	Расстояние $\text{dist}(\tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{V})$ между брусами $\tilde{\mathbf{U}}$ и $\mathbf{V}$
$\mathbf{v}_1 = [ 2.0657, 2.7501]$ $\mathbf{v}_2 = [ 0.5750, 0.6230]$ $\mathbf{v}_3 = [ 0.2839, 0.9385]$	$\tilde{\mathbf{u}}_1 = [ 2.1309, 2.6876]$ $\tilde{\mathbf{u}}_2 = [ 0.5793, 0.6185]$ $\tilde{\mathbf{u}}_3 = [ 0.3427, 0.8769]$	0.0898
$\mathbf{v}_1 = [ 1.5468, 2.1407]$ $\mathbf{v}_2 = [-0.0338, 0.0244]$ $\mathbf{v}_3 = [-0.2316, 0.3149]$	$\tilde{\mathbf{u}}_1 = [ 1.5900, 2.0842]$ $\tilde{\mathbf{u}}_2 = [-0.0251, 0.0209]$ $\tilde{\mathbf{u}}_3 = [-0.1885, 0.2606]$	0.0788
$\mathbf{v}_1 = [ 2.2187, 2.6876]$ $\mathbf{v}_2 = [-0.0185, 0.0142]$ $\mathbf{v}_3 = [-0.1638, 0.2606]$	$\tilde{\mathbf{u}}_1 = [ 2.2485, 2.6465]$ $\tilde{\mathbf{u}}_2 = [-0.0142, 0.0108]$ $\tilde{\mathbf{u}}_3 = [-0.1339, 0.2220]$	0.0565
$\mathbf{v}_1 = [-0.1185, 2.1823]$ $\mathbf{v}_2 = [-0.0749, 0.6353]$ $\mathbf{v}_3 = [-1.1460, 0.9783]$	$\tilde{\mathbf{u}}_1 = [ 0.1712, 2.1151]$ $\tilde{\mathbf{u}}_2 = [ 0.2704, 0.6277]$ $\tilde{\mathbf{u}}_3 = [-0.8825, 0.9114]$	0.5221
$\mathbf{v}_1 = [ 2.5593, 4.4219]$ $\mathbf{v}_2 = [ 0.5764, 0.7114]$ $\mathbf{v}_3 = [ 0.1919, 2.2918]$	$\tilde{\mathbf{u}}_1 = [ 2.5783, 4.3979]$ $\tilde{\mathbf{u}}_2 = [ 0.5784, 0.7052]$ $\tilde{\mathbf{u}}_3 = [ 0.2076, 2.2651]$	0.0364
$\mathbf{v}_1 = [ 1.3843, 1.9865]$ $\mathbf{v}_2 = [ 1.1396, 1.2422]$ $\mathbf{v}_3 = [ 0.7499, 1.3959]$	$\tilde{\mathbf{u}}_1 = [ 1.4164, 1.9719]$ $\tilde{\mathbf{u}}_2 = [ 0.1538, 1.2283]$ $\tilde{\mathbf{u}}_3 = [ 0.7918, 1.3841]$	0.9872
$\mathbf{v}_1 = [ 2.0531, 2.6692]$ $\mathbf{v}_2 = [ 1.1559, 1.2378]$ $\mathbf{v}_3 = [ 0.8593, 1.4618]$	$\tilde{\mathbf{u}}_1 = [ 2.0692, 2.6297]$ $\tilde{\mathbf{u}}_2 = [ 1.1691, 1.2340]$ $\tilde{\mathbf{u}}_3 = [ 0.8746, 1.4303]$	0.0522
$\mathbf{v}_1 = [ 2.6062, 3.3572]$ $\mathbf{v}_2 = [ 1.1699, 1.2415]$ $\mathbf{v}_3 = [ 0.8148, 1.5797]$	$\tilde{\mathbf{u}}_1 = [ 2.6685, 3.2995]$ $\tilde{\mathbf{u}}_2 = [ 1.1764, 1.2338]$ $\tilde{\mathbf{u}}_3 = [ 0.8738, 1.5171]$	0.0887
$\mathbf{v}_1 = [ 2.2656, 2.6123]$ $\mathbf{v}_2 = [-0.0166, 0.0127]$ $\mathbf{v}_3 = [-0.1224, 0.1915]$	$\tilde{\mathbf{u}}_1 = [ 2.2787, 2.5905]$ $\tilde{\mathbf{u}}_2 = [-0.0126, 0.0092]$ $\tilde{\mathbf{u}}_3 = [-0.1110, 0.1742]$	0.0281
$\mathbf{v}_1 = [-0.1253, 2.2153]$ $\mathbf{v}_2 = [-0.0706, 0.6425]$ $\mathbf{v}_3 = [-1.1499, 1.0018]$	$\tilde{\mathbf{u}}_1 = [ 0.0291, 2.1730]$ $\tilde{\mathbf{u}}_2 = [ 0.1656, 0.6346]$ $\tilde{\mathbf{u}}_3 = [-1.0000, 0.9662]$	0.3195

$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)^\top$ , вычисленной в Примере 13 и представленной в Таблице 5, видно, что они достаточно близки, что говорит о достаточно хорошем качестве полученных оценок. В Таблице 7 мы приводим брусы  $\tilde{\mathbf{U}}$  и  $\mathbf{V}$ , а также расстояния между ними, найденные по формуле

$$\text{dist}(\tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{V}) = \left( \sum_{i=1}^3 (\text{dist}(\tilde{\mathbf{u}}_i, \mathbf{v}_i))^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

где

$$\text{dist}(\tilde{\mathbf{u}}_i, \mathbf{v}_i) = \max\{|\tilde{\mathbf{u}}_i - \mathbf{v}_i|, |\bar{\tilde{\mathbf{u}}}_i - \bar{\mathbf{v}}_i|\}.$$

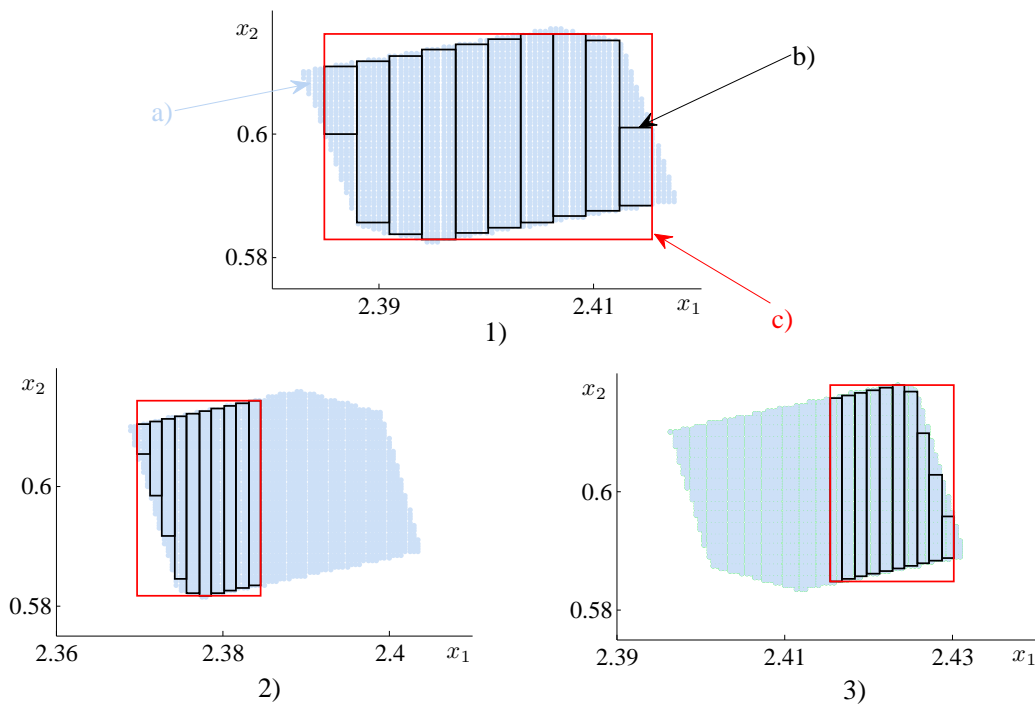


Рис. 3.13. Результаты внутреннего оценивания множества перемещений торца лопатки, полученные в результате трех итераций алгоритма (проекции: а) — множества  $S^*$ , б) — внутренней оценки, в) — интервальной оболочки внутренних оценок, на координатную плоскость  $x_1Ox_2$ )

В Примере 13 мы ввели в рассмотрение множество  $S^*$  узлов расчетной сетки  $S$ , которые являются решениями системы (3.66) (см. соотношения (3.67)–(3.68)). На рисунках 3.13–3.14 представлены проекции множества



$S^*$  на координатные плоскости  $x_1Ox_2$  и  $x_1Ox_3$ . На этих рисунках изображены также проекции полученных на первых трех шагах алгоритма внутренних оценок множества перемещений торца лопатки, соответствующих цифровым кодам  $\mathbf{c}_1 = [1370.0872, 1370.1372]$ ,  $\mathbf{c}_2 = [1337.1678, 1337.2178]$ ,  $\mathbf{c}_3 = [1351.2455, 1351.2955]$ .

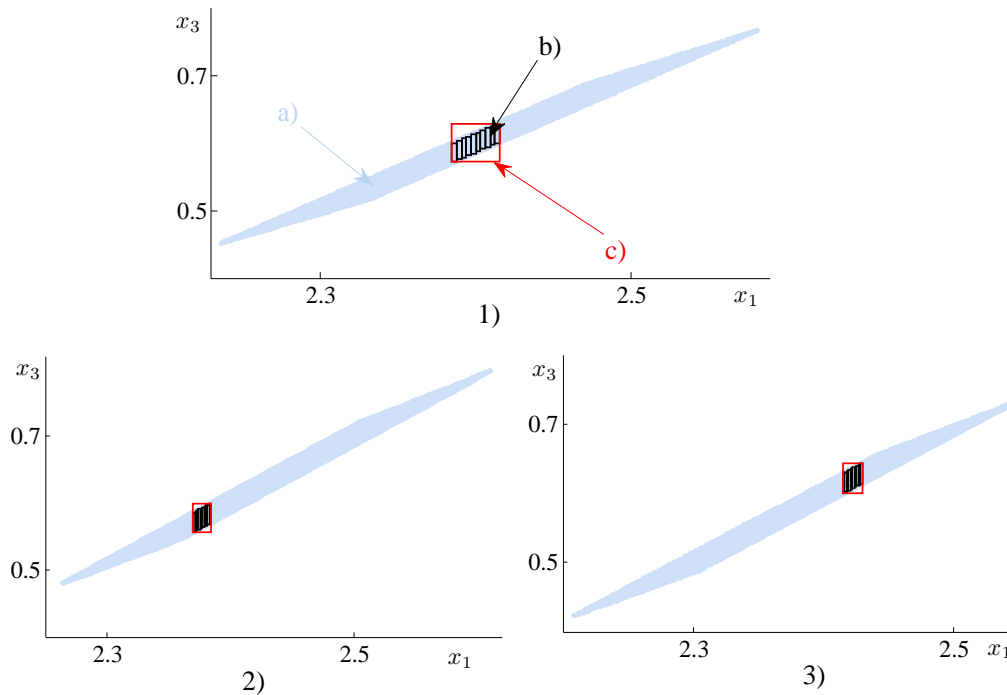


Рис. 3.14. Результаты внутреннего оценивания множества перемещений торца лопатки, полученные в результате трех итераций алгоритма (проекции: а) — множества  $S^*$ , б) — внутренней оценки, в) — интервальной оболочки внутренних оценок, на координатную плоскость  $x_1Ox_3$ )

## Выводы к главе 3

Глава 3 посвящена внешнему и внутреннему оцениванию множеств решений систем интервальных полиномиальных уравнений. В начале главы изложены необходимые сведения об интервальных полиномах, предложены методы оценивания их множеств значений и интервальных корней. Приведён обзор интервальных методов решения систем нелинейных уравнений. Показано, что такие методы, как многомерный интервальный метод Ньютона, интервальные методы удовлетворения ограничений, можно распространить на системы интервальных полиномиальных уравнений.

Получены следующие результаты:

1. Разработан и реализован алгоритм получения внешней оценки множеств решений систем интервальных полиномиальных уравнений, основанный на интервальных методах распространения ограничений, многомерном интервальном методе Ньютона, методах дробления решений.
2. Для вычисления интервальных наклонов и проверки существования решения интервальной системы полиномиальных уравнений на заданном бруске разработаны алгоритмы оценивания множеств значений интервальных полиномов и их интервальных корней.
3. Разработан алгоритм внутреннего оценивания множеств решений интервальных систем полиномиальных уравнений.
4. В целях наилучшего исчерпывания множества решений предложена процедура построения регулярного покрытия этого множества брусками.
5. Реализованы соответствующие алгоритмы и опробированы на тестовых примерах.
6. Приведены результаты применения разработанных алгоритмов для решения задачи анализа многомерных перемещений торца лопатки силовой установки.

## Заключение

В диссертационной работе предложено использовать интервальные методы оценивания множеств решений систем алгебраических уравнений с интервально заданными параметрами для анализа, синтеза и диагностики механических конструкций. Основные результаты исследований, составившие содержание диссертационной работы, могут быть сформулированы следующим образом.

1. Разработаны и реализованы методы внутреннего оценивания множеств решений интервальных линейных систем со связями, элементы матриц и компоненты векторов правых частей которых зависят от параметров. Методы основаны на адаптивном дроблении интервальных параметров и вычислении внутренних оценок с использованием формального и «центрального» подходов.
2. Предложена модификация «центрального» подхода для внутреннего оценивания множества решений интервальной линейной системы со связями, коэффициенты матрицы которой зависят от параметров, а вектор правых частей не является интервальным.
3. В целях наилучшего исчерпывания множества решений ИСЛАУ со связями (получения наиболее «представительной» оценки) разработана процедура построения его регулярного покрытия брусами.
4. Предложена процедура внешнего оценивания множеств решений систем полиномиальных уравнений, коэффициенты которых зависят от параметров. Процедура основана на интервальных методах распространения ограничений, многомерном интервальном методе Ньютона, методах дробления решений.
5. Разработаны алгоритмы оценивания множеств значений интервальных полиномов и их интервальных корней на заданном бресе, которые используются при вычислении интервальных наклонов и проверке существования решений системы интервальных уравнений на бресе.

6. Разработаны методы внутреннего оценивания множества решений системы интервальных полиномиальных уравнений, а также предложены способы построения регулярного покрытия этого множества брусами.
7. Приведены результаты применения разработанных методов и алгоритмов для решения тестовых примеров и конкретных практических задач анализа и диагностики механических конструкций.

## Литература

1. Айвазян, С. А. Прикладная статистика. Исследование зависимостей / С.А. Айвазян, И.С. Енюков, Л.Д. Мешалкин. — М.: Финансы и статистика, 1985. — 488 с.
2. Алефельд, Г. Введение в интервальные вычисления: пер. с англ. / Г. Алефельд, Ю. Херцбергер. — М.: Мир, 1987. — 360 с.
3. Артоболевский, И. И. Механизмы в современной технике. В 7 т. Т. 1. Элементы механизмов. Простейшие рычажные и шарнирно-рычажные механизмы / И. И. Артоболевский. — М.: Наука, 1979. — 496 с.
4. Васильев, Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач / Ф. П. Васильев. — М.: Наука, 1988. — 552 с.
5. Добронев, Б. С. Интервальная математика / Б. С. Добронев. — Красноярск: Издательство КГУ, 2004. — 216 с.
6. Доронин, В. И. Применение алгебраического метода в кинематическом анализе плоских механизмов / В. И. Доронин // Изв. вузов. Машиностроение. — 1968. — № 3. — С. 5-9.
7. Дрейпер, Н. Прикладной регрессионный анализ: пер. с англ. / Н. Дрейпер, Г. Смит. — М.: Финансы и статистика, 1987. — 351 с.
8. Жилин, С. И. Нестатистические модели и методы построения и анализа зависимостей. Дисс. . . . канд. физ.-мат. наук: 05.13.01: защищена 26.03.04 / Жилин Сергей Иванович. — Барнаул, 2004. — 119 с.
9. Задачи линейной оптимизации с неточными данными: пер. с англ. / М. Фидлер [и др.]. — М. - Ижевск: РХД, 2008. — 288 с.
10. Зиновьев, В. А. Пространственные механизмы с низшими парами / В. А. Зиновьев. — Л.: Изд-во технико-теоретической литературы, 1952. — 431 с.
11. Зорич, В. А. Математический анализ. В 2 т. / В. А. Зорич. — М: МЦНМО, 2002.

12. Кластерные методы и средства измерения деформаций статора и координат смещений торцов лопаток и лопастей в газотурбинных двигателях / под ред. О. П. Скобелева. — М.: Машиностроение, 2011. — 298 с.
13. Крохмаль, Н. Н. Особенности строения групп Ассура / Н. Н. Крохмаль // Изв. вузов. Машиностроение. — 1998. — № 7-9. — С. 45–48.
14. Крохмаль, Н. Н. Анализ и синтез рычажных механизмов на основе изучения их структурных свойств / Н. Н. Крохмаль. — Курган: Изд-во Курганского гос. ун-та, 2004.
15. Крохмаль, Н. Н. Метод оптимального кинематического синтеза плоских рычажных механизмов на примере восьмизвенного механизма / Н. Н. Крохмаль, О. Н. Крохмаль // Вестник ЮУрГУ. Серия: Машиностроение. — 2011. — вып. 17, №11(228).
16. Левитский, Н. И. Теория механизмов и машин. 2-е изд., перераб. и доп. / Н. И. Левитский. — М.: Наука, 1990. — 592 с.
17. Людвин, Д. Ю. О внутреннем оценивании множеств решений интервальных линейных систем со связями / Д. Ю. Людвин // XII Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям, Новосибирск, 3-5 октября 2011 г., Тезисы докладов. — Новосибирск, 2011. — С. 19.
18. Людвин, Д. Ю. Внутреннее оценивание множества решений интервальных систем линейных уравнений со связями / Д. Ю. Людвин // Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика: Труды Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Яненко (Новосибирск, Россия, 30 мая — 4 июня 2011 г.). — № гос. регистр. 0321101160, ФГУП НТЦ «Информрегистр». — Новосибирск, 2011. — <http://conf.nsc.ru/files/conferences/niknik-90/fulltext/39830/45772/Людвин.pdf>.

19. Людвин, Д. Ю. Сравнительный анализ реализаций модификации Рона в методах дробления параметров / Д. Ю. Людвин, С. П. Шарый // Вычислительные технологии. — 2012. — Т. 17, №1. — С. 69–89.
20. Людвин, Д. Ю. Использование методов интервального анализа для оценки многомерных перемещений элементов конструкции лопаточной силовой установки / Д. Ю. Людвин // XIII Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям, Новосибирск, 15–17 октября 2012 г., Тезисы докладов. — Новосибирск, 2012. — С. 26. — <http://conf.nsc.ru/files/conferences/ym2012/fulltext/137987/139451/Lyudvin.pdf>.
21. Людвин, Д. Ю. Внутреннее оценивание множеств решений интервальных систем линейных уравнений со связями / Д. Ю. Людвин // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. — 2013. — Т. 11, Вып. 1. — С. 78–92.
22. Людвин, Д. Ю. Оценивание множеств решений систем интервальных полиномиальных уравнений / Д. Ю. Людвин // XIII Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям, Томск, 15–17 октября 2013 г., Тезисы докладов. — Томск, 2013. — С. 25. — <http://conf.nsc.ru/files/conferences/ym2013/fulltext/175082/176771/Lyudvin.pdf>.
23. Методы и средства измерения многомерных перемещений элементов конструкций силовых установок / Под ред. Секисова Ю.Н., Скобелева О.П. — Самара: Изд-во СамНЦ РАН, 2001. — 188 с.
24. Мостеллер, Ф. Анализ данных и регрессия / Ф. Мостеллер, Дж. Тьюки.— М.: Финансы и статистика, 1982. — 317 с.
25. Орлов, А. И. Современная прикладная статистика / А. И. Орлов // Заводская лаборатория. — 1998. — Т. 64. — №3. — С. 52–60.

26. Оскорбин, Н. М. Построение и анализ эмпирических зависимостей методом центра неопределенности / Н. М. Оскорбин, А. В. Максимов, С. И. Жилин // Известия Алтайского государственного университета. — 1998. — № 1. — С. 35–38.
27. Пейсах, Э. Е. Синтез шарнирного шестизвенника с приближенным выстоем / Э. Е. Пейсах // Механика машин. — М.: Наука, 1971, Вып. 29–30. С. 100–107.
28. Пейсах, Э. Е. Синтез рычажных механизмов на основе методов нелинейного программирования / Э. Е. Пейсах // Механика машин. — М.: Наука, 1974, Вып. 44. С. 69–77.
29. Пейсах, Э. Е. Система проектирования плоских рычажных механизмов / Э. Е. Пейсах, В. А. Нестеров. — М.: Машиностроение, 1988. — 232 с.
30. Подружко, А. А. Интервальное представление полиномиальных регрессий / А. А. Подружко, А. С. Подружко. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 48 с.
31. Померанцев, А. Л. Построение многомерной градуировки методом простого интервального оценивания / А. Л. Померанцев, О. Е. Родионова // Жур. аналит. химии. — 2006. — №61. — С. 1032–1047.
32. Прикладной интервальный анализ: пер. с англ. / Л. Жолен [и др.]. — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2007. — 468 с.
33. Саркисян, Ю. Л. Аппроксимационный синтез механизмов / Ю. Л. Саркисян. — М.: Наука, 1982. — 304 с.
34. Семенов, Л. А. Методы построения градуировочных характеристик средств измерения / Л. А. Семенов, Т. Н. Сирая. — М.: Изд-во стандартов, 1986. — 138 с.
35. Семёнов, А. Л. Интервальные методы распространения ограничений и их приложения / А. Л. Семёнов [и др.] // Системная информатика: сб. науч. тр. — Новосибирск: Издательство СО РАН, 2004. — С. 245–358.



36. Хансен, Э. Глобальная оптимизация с помощью методов интервального анализа: пер. с англ. / Э. Хансен, Дж. У. Уолстер. — М.— Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2012. — 516 с.
37. Шарый, С. П. Конечномерный интервальный анализ / С. П. Шарый. — <http://www-sbras.nsc.ru/interval/Library/InteBooks/SharyBook.pdf>.
38. Шарый, С. П. Алгебраический подход во «внешней задаче» для интервальных линейных систем / С. П. Шарый // *Фундаментальная и прикладная математика*. — 2002. — Т. 8, вып. 2. — С. 567–610.
39. Шарый, С. П. Ещё раз о внутреннем оценивании множеств решений интервальных линейных систем / С. П. Шарый // *Вычислительные Технологии*. — 2003. — Том 8, спец. выпуск. — С. 146–160.
40. Шарый, С. П. Решение интервальных линейных систем со связями / С. П. Шарый // *Сибирский журнал вычислительной математики*. — 2004. — Т. 7, №4. — С. 363–376.
41. Шокин, Ю. И. Интервальный анализ / Ю. И. Шокин. — Новосибирск: Сибирское отделение изд-ва «Наука», 1981. — 112 с.
42. Alefeld, G. Inclusion methods for systems of nonlinear equations — the interval Newton method and modifications / G. Alefeld // *Topics in Validated Computations*/ J. Herzberger, ed. — Elsevier, Amsterdam, 1994. — P. 7–26.
43. Alefeld, G. The Cholesky method for interval data / G. Alefeld, G. Mayer // *Linear Algebra and its Applications*. — 1993. — Vol. 194 — P. 161–182.
44. Alefeld, G. The shape of the symmetric solution set / G. Alefeld, V. Kreinovich, G. Mayer // *Applications of Interval Computations* / R. B. Kearfott, V. Kreinovich, eds. — Boston, Kluwer, 1996. — P. 61–79.
45. Alefeld, G. The shape of the solution set for systems of interval linear equations with dependent coefficients / G. Alefeld, V. Kreinovich, G. Mayer // *Mathematische Nachrichten*. — 1998. — Vol. 192. — P. 23–36.

46. Alefeld, G. On symmetric solution sets / G. Alefeld, V. Kreinovich, G. Mayer // Computing Supplementum 16 / J. Herzberger, ed. — Wien, New-York: Springer, 2003. — P. 1–23.
47. Alefeld, G. On the solution set of particular classes of linear systems / G. Alefeld, V. Kreinovich, G. Mayer // J. of Computational and Applied Mathematics. — 2003. — Vol. 152. — P. 1–15.
48. Apostolatos, N. Grundzüge einer Intervallrechnung für Matrizen und einige Anwendungen / N. Apostolatos, U. Kulisch // Electron. Rechenanl. — 1968. — Bd. 10. — S. 73–83.
49. Beeck, H. Über die Struktur und Abschätzungen der Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen mit Intervallkoeffizienten / H. Beeck // Computing. — 1972. — Vol. 10. — S. 231–244.
50. Belenkiy, L. B. The approximation of experimental calibration characteristics for measuring channels by means the metod of interval representation of polynomial regressions / L. B. Belenkiy, V. V. Tulupova // Modern problems of applied mathematics and information technologies — AL-KHOREZMIY, 2009. — P. 122–123.
51. Bounding approaches to system identification / M. Milanese, J. Norton, E. Walter, eds. — London: Plenum Press, 1996. — 567 p.
52. Caprani, O. Introduction to interval analysis / O. Caprani, K. Madsen, H. B. Nielsen. — Technical University of Denmark (DTU), 2002. — 82 p.
53. Coxson, G. E. Computing exact bounds on elements of an inverse interval matrix is NP-hard / G. E. Coxson // Reliable Computing. — 1999. — Vol. 5. — P. 137–142.
54. Dessombz, O. Analysis of mechanical systems using interval computations applied to finite element methods / O. Dessombz, F. Thouverez, J.-P. Laîné, L. Jézéquel // Journal of Sound and Vibration. — 2001. — Vol. 239, No 5. — P. 949–968.

55. Hansen E. R. Topics in interval analysis. / E. R. Hansen. — Oxford University Press, London, 1969. — 130 p.
56. Hansen, E.R. Bounding the solution of interval linear equations / E. R. Hansen // SIAM J. Numer. Anal. — 1992. — Vol. 29. — P. 1493–1503.
57. Hansen, E.R. The hull of preconditioned interval linear equations / E. R. Hansen // Reliable Computing. — 2000. — Vol. 6. — P. 95–103.
58. Hansen, E. R. An interval Newton method / E. R. Hansen, R. I. Greenberg // Applied Mathematics and Computation. — 1983. — Vol. 12. — P. 87–98.
59. Hansen, E. R. Bounding solutions of systems of equations using interval analysis / E. R. Hansen, S. Sengupta // BIT. — 1981. — Vol. 21. — P. 203–211.
60. Hargreaves, G.I. Interval analysis in MATLAB / G.I. Hargreaves // Manchester Center for Computational Mathematics, 2002. — <http://www.nsc.ru/interval/Programing/INTLABtutor.pdf>.
61. Herbort, S. Improving the efficiency of a nonlinear-system-solver using a componentwise Newton method / S. Herbort, D. Ratz // Technical Report Bericht 2/1997, Institut für Angewandte Mathematik, Universität Karlsruhe (TH), 1997.
62. Jansson, C. Interval linear systems with symmetric, skew-symmetric matrices and dependencies in the right hand side / C. Jansson // Computing. — 1991. — Vol. 46. — P. 265–274.
63. Kaucher, E. Über metrische und algebraische Eigenschaften einiger beim numerischen Rechnen auftretender Räume. Dr. Naturwissen. Dissertation / E. Kaucher. — Karlsruhe: Universität Karlsruhe, 1973.
64. Kaucher, E. Algebraische Erweiterungen der Intervallrechnung unter Erhaltung Ordnungs und Verbandsstrukturen / E. Kaucher // Grundlagen der Computer-Arithmetic / R. Albrecht, U. Kulisch, eds. — Wien: Springer, 1977. — P. 65–79.

65. Kaucher, E. Interval analysis in the extended interval space  $\mathbb{IR}$  // Fundamentals of numerical computation (Computer-oriented numerical analysis) / G. Alefeld, R. D. Grigorieff, eds. — Wien: Springer, 1980. — P. 33–49.
66. Kearfott, R. B. Rigorous global search: continuous problems / R. B. Kearfott. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996. — 262 p.
67. Kearfott, R. B. Validated constraint solving-practicalities, pitfalls, and new developments / R. B. Kearfott // Reliable Computing. — 2005. — Vol. 11, No. 5. — P. 383–391.
68. Kolev, L. Outer solution of linear systems whose elements are affine functions of interval parameters / L. Kolev // Reliable Computing. — 2002. — Vol. 8, No. 6. — P. 493–501.
69. Kolev, L. A method for outer interval solution of linear parametric systems / L. Kolev // Reliable Computing. — 2004. — Vol. 10, No. 3. — P. 227–239.
70. Kolev, L. Solving linear systems whose elements are nonlinear functions of intervals / L. Kolev // Numerical Algorithms. — 2004. — Vol. 37, No. 1–4. — P. 199–212.
71. Krawczyk, R. Newton-Algorithmen zur Bestimmung von Nullstellen mit Fehlerschranken / R. Krawczyk // Computing. — 1969. — Vol. 4. — P. 187–201.
72. Krawczyk, K. An improved interval Newton operator / K. Krawczyk, A. Neumaier // J. of Mathematical Analysis and Applications. — 1986. — Vol. 118. — P. 194–201.
73. Kreinovich, V. Optimal solution of interval linear systems is intractable (NP-hard) / V. Kreinovich, A. V. Lakeyev, S. I. Noskov // Interval Computations. — 1993.— No 1. — P. 6–14.
74. Kreinovich, V. Computational complexity and feasibility of data processing and interval computations / V. Kreinovich, A. V. Lakeyev, J. Rohn, P. Kahl. — Dordrecht: Kluwer, 1997. — 459 p.

75. Krokhmal, N. Structural synthesis of kinematic chains of lever mechanisms / N. Krokhmal // Proceedings of 13th National Conference on Mechanisms and Machines (NaCoMM07), IISC, Bangalore, India, December 12-13, 2007. — P.149–155.
76. Krokhmal, N. Structural analysis and synthesis of Assur groups based on their topological properties / N. Krokhmal, O. Krokhmal // Proceedings of 13th World Congress of IFToMM, Mexico, June 19–23, 2011. A11–376 ISBN 978-607-441-131-7. — <http://somim.org.mx/conference/proceedings/index.html>.
77. Krokhmal, N. General method of optimization kinematic synthesis of planar lever mechanism / N. Krokhmal, O. Krokhmal // Machines and Mechanisms / Bandyopadhyay S., Kumar G. S., and Ramu P. editors. — Narosa Publishing House, 2012.
78. Krokhmal, N. Method of defining of intervals of joints initial coordinates for kinematic synthesis of planar lever mechanisms / N. Krokhmal, O. Krokhmal // Proceedings of 16th National Conference on Mechanisms and Machines (NaCoMM13), IIT, Roorkee, India, December 18–20, 2013.
79. Kulpa, Z. Analysis of linear mechanical structures with uncertainties by means of interval methods / Z. Kulpa, A. Pownuk, I. Skalna // Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences. — 1998. — Vol. 5. — P. 443–477.
80. Lakeyev, A.V. Linear algebraic equations in Kaucher arithmetic / A.V. Lakeyev // Reliable Computing, 1995, Supplement (Extended Abstracts of APIC'95: International Workshop on Applications of Interval Computations, El Paso, TX, Febr. 23–25, 1995). — P. 130–133.
81. Lakeyev, A.V. On existence and uniqueness of solutions of linear algebraic equations in Kaucher's interval arithmetic / A.V. Lakeyev // Developments in Reliable Computing / T. Csendes, ed. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998. — P. 53–65.

82. Lakeyev, A. V. NP-hard classes of linear algebraic systems with uncertainties / A. V. Lakeyev, V. Kreinovich // *Reliable Computing*. — 1997. — Vol. 3, No. 1. — P. 51–81.
83. Lyudvin, D. Yu. Comparisons of implementations of Rohn modification in PPS-methods for interval linear systems / D. Yu. Lyudvin, S. P. Shary // 15th GAMM-IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetics and Verified Numerics, Novosibirsk, Russia, September 23-29 2012, Book of Abstracts. — Novosibirsk, 2012. — P. 103.
84. Lyudvin, D. Yu. Testing implementations of PPS-methods for interval linear systems / D. Yu. Lyudvin, S. P. Shary // *Reliable Computing*. — 2014. — Vol. 19. — P. 176–196.
85. Mayer, G. Epsilon-inflation in verification algorithms / G. Mayer // *J. of Computational and Applied Mathematics*. — 1995. — Vol. 60. — P. 147–169.
86. Moore, R. E. Introduction to interval analysis / R. E. Moore, R. B. Kearfott, M. J. Cloud. — Philadelphia: SIAM, 2009. — 223 p.
87. Moore, R. E. Methods and applications of interval analysis / R. E. Moore. — SIAM, Philadelphia, 1979. — 190 p.
88. Muhanna, R. Uncertainty in Mechanics Problems — Interval-Based Approach / R. Muhanna, R. Mullen // *J. Eng. Mech.* — 2001. — Vol. 127. — P. 557–566.
89. Muhanna, R. Penalty-based solution for the interval finite-element methods / R. Muhanna, R. Mullen // *J. Eng. Mech.* — 2005. — Vol. 131. — P. 1102–111.
90. Neumaier, A. New techniques for the analysis of linear interval equations / A. Neumaier // *Linear Algebra and its Applications*. — 1984. — Vol. 58. — P. 273–325.
91. Neumaier, A. Linear interval equations / A. Neumaier // *Interval Mathematics 1985: Proc. of the International Symposium; Freiburg, FRG, September 1985* / K. Nickel ed. — New York: Springer-Verlag, 1986. — P. 109–120.

92. Neumaier, A. The enclosure of solutions of parameter-dependent systems of equations / A. Neumaier // Reliability in Computing / R.E.Moore, ed. — Academic Press, 1988. — P. 269–286.
93. Neumaier, A. Interval methods for systems of equations / A. Neumaier. — Cambridge: Cambridge University Press, 1990. — 255 p.
94. Neumaier, A. A simple derivation of Hansen–Blik–Rohn–Ning–Kearfott enclosure for linear interval equations / A. Neumaier // Reliable Computing. — 1999. — Vol. 5. — P. 131–136.
95. Nickel, K. Die Überschätzung des Wertebereiches einer Funktion in der Intervallrechnung mit Anwendungen auf lineare Gleichungssysteme / K. Nickel // Computing. — 1977. — Vol. 18. — P. 15–36.
96. Oettli, W. On the solution set of linear system with inaccurate coefficients / W. Oettli // SIAM J. Numer. Anal. — 1965. — Vol. 2. — P. 115–118
97. Popova, E. Mechanical Models with Interval Parameters / E. Popova, M. Datcheva, R. Iankov, T. Schanz // IKM2003: Digital Proceedings of 16th International Conference on the Applications of Computer Science and Mathematics in Architecture and Civil Engineering / K. Guerlebeck, L. Hempel, C. Koenke, eds. — Bauhaus University Weimar, 2003. — P. 1611–4086.
98. Popova, E. D. Generalizing the parametric fixed-point iteration / E. D. Popova // Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics (PAMM). — 2004. — P. 680–681.
99. Popova, E. D. Solving linear systems whose input data are rational functions of interval parameters / E. D. Popova // Preprint No. 3/2005. — Institute of Mathematics and Informatics, BAS, Sofia. — 2005. — 27 p.
100. Popova E. Inner and outer bounds for the solution set of parametric linear systems / E. Popova, W. Krämer // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2007. — Vol. 199. — P. 310–316.

101. Ratschek, H. Computer methods for the range of functions / H. Ratschek, J. Rokne. — Chichester, New York: Ellis Horwood, Halsted Press, 1984. — 168 p.
102. Rohn, J. Systems of linear interval equations / J. Rohn // Linear Algebra and its Applications. — 1989. — Vol. 126. — P. 39–78.
103. Rohn, J. A handbook of results on interval linear problems / J. Rohn. — Institute of Computer Science, Academy of Sciences of the Czech Republic, Prague, 2005–2012. — Technical report No. V-1163. — <http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks/handbook.pdf>.
104. Rohn, J. Computing exact componentwise bounds on solutions of linear systems with interval data is NP-hard / J. Rohn, V. Kreinovich // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 1995. — Vol. 16. — P. 415–420.
105. Rokne, J. G. Low complexity k-dimensional centered forms / J. G. Rokne // Computing. — 1986. — Vol. 37. — P. 247–253.
106. Rump, S. M. Solving algebraic problems with high accuracy / S. M. Rump // A New Approach to Scientific Computation / U. W. Kulisch, W. L. Miranker, eds. — Academic Press, New York, 1983. — P. 51–120.
107. Rump, S. M. Verification methods for dense and sparse systems of equations / S. M. Rump // Topics in Validated Numerics / J. Herzberger, ed. — Amsterdam: Elsevier, 1994. — P. 63–135.
108. Rump, S. M. A note on epsilon-inflation / S. M. Rump // Reliable Computing. — 1998. — Vol. 4. — P. 371–375.
109. Rump, S. M. INTLAB — INTervalLABoratory / S. M. Rump // Developments in Reliable Computing / T. Csendes, ed. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. — P. 77–104.
110. Skalna, I. A method for outer interval solution of systems of linear equations depending linearly on interval parameters / I. Skalna // Reliable Computing. — Vol. 12, No 2. — P. 107–120.



111. Shary, S. P. A new class of algorithms for optimal solution of interval linear systems / S. P. Shary // Interval Computations. — 1992.— No 2(4). — P. 18–29.
112. Shary, S. P. On optimal solution of interval linear equations / S. P. Shary // SIAM J. Numer. Analysis. — 1995. — Vol. 32, No 2. — P. 610–630.
113. Shary, S. P. Algebraic approach in the “outer problem” for interval linear equations / S. P. Shary // Reliable Computing. — 1997. — Vol. 3, No. 2. — P. 103–135.
114. Stahl, V. Interval methods for bounding the range of polynomials and solving systems of nonlinear equations, Ph. D. dissertation, University of Linz / V. Stahl. — Linz, 2006. — 273 p.
115. Van Henteryck, P. Solving polynomial systems using a branch and prune approach / P. Van Henteryck, D. McAllester, D. Kapur // SIAM J. Num. Anal. — 1997. — Vol. 34, No. 2. — P. 797–827.