

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

**Новокшонов Сергей Владимирович**

**АНАЛИЗ И СИНТЕЗ ИНТЕРВАЛЬНЫХ СИСТЕМ  
С ГАРАНТИРУЕМОЙ ДИНАМИКОЙ НА ОСНОВЕ  
РОБАСТНЫХ И АДАПТИВНЫХ АЛГОРИТМОВ**

05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка информации  
(по отраслям: информация и информационные системы,  
энергетика, экономика)

**Д и с с е р т а ц и я**  
на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель  
доктор технических наук  
Г. П. Цапко

Томск – 2003

## ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
ВВЕДЕНИЕ.....	5
<b>ГЛАВА 1. РЕБЕРНАЯ МАРШРУТИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО МНОГОГРАННИКА СИСТЕМЫ.....</b>	<b>18</b>
1.1. Постановка задачи.....	18
1.2. Свойства отображения ребер параметрического многогранника системы на комплексную плоскость корней.....	18
1.3. Основные фазовые соотношения реберной маршрутизации.....	28
1.4. Алгоритм реберной маршрутизации.....	32
1.5. Примеры реберной маршрутизации.....	36
1.6. Основные результаты.....	45
<b>ГЛАВА 2. АНАЛИЗ ГАРАНТИРУЕМОЙ РОБАСТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ.....</b>	<b>47</b>
2.1. Постановка задачи.....	47
2.2. Анализ региональной робастной устойчивости на основе построения многопараметрического интервального корневого годографа.....	48
2.3. Анализ региональной робастной устойчивости на основе реберного D-разбиения.....	53
2.4. Анализ региональной робастной устойчивости на основе уравнения Теодорчика-Эванса.....	58
2.5. Основные результаты.....	64
<b>ГЛАВА 3. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ИНТЕРВАЛЬНЫХ СИСТЕМ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩИХ ГАРАНТИРУЕМУЮ ДИНАМИКУ.....</b>	<b>65</b>
3.1. Постановка задачи.....	65

3.2. Доминантное расположение полюсов стационарной системы линейным регулятором пониженного порядка.....	66
3.3. Синтез робастного регулятора для локализации полюсов интервальных систем.....	80
3.4. Синтез адаптивно-робастного регулятора для стабилизации доминирующих полюсов интервальных систем.....	87
3.5. Основные результаты.....	89
<b>ГЛАВА 4. СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ПСЕВДОЛИНЕЙНЫХ КОМПЕНСАТОРОВ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ ИНТЕРВАЛЬНЫХ СИСТЕМ.....</b>	
4.1. Постановка задачи.....	90
4.2. Способ компенсации частотнонестабильных резонансов.....	92
4.3. Синтез адаптивного псевдолинейного компенсатора.....	98
4.4. Синтез робастного псевдолинейного компенсатора.....	104
4.5. Комбинирование адаптивной и робастной псевдолинейной коррекции упругих интервальных систем.....	105
4.6. Основные результаты.....	108
<b>ГЛАВА 5. ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ РАЗРАБОТАННЫХ АЛГОРИТМОВ.....</b>	
5.1. Постановка задачи.....	109
5.2. Программная реализация робастного алгоритма определения реберного маршрута.....	110
5.3. Аппаратная реализация самонастраивающейся системы.....	119
5.4. Основные результаты.....	132
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....</b>	<b>133</b>
<b>ЛИТЕРАТУРА.....</b>	<b>136</b>

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Анализ региональной робастной устойчивости на основе построения многопараметрического интервального корневого годографа.....	148
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Анализ региональной робастной устойчивости интервальной системы на основе робастного D-разбиения .....	150
ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Доминантное расположение полюсов стационарной системы с использованием D-разбиения по одному параметру.....	153
ПРИЛОЖЕНИЕ 4. Доминантное расположение полюсов стационарной системы с использованием D-разбиения по двум параметрам.....	155
ПРИЛОЖЕНИЕ 5. Синтез робастного регулятора для интервальной системы.....	158
ПРИЛОЖЕНИЕ 6. Синтез адаптивно-робастного регулятора для интервальной системы.....	163
ПРИЛОЖЕНИЕ 7. Процедура определения угла $\gamma$ .....	170
ПРИЛОЖЕНИЕ 8. Определение углов выхода ветвей корневого годографа при интервальной неопределенности.....	172
ПРИЛОЖЕНИЕ 9. Определение углов выхода ветвей корневого годографа при аффинной неопределенности.....	175
ПРИЛОЖЕНИЕ 10. Документы о внедрении.....	179

## ВВЕДЕНИЕ

В реальных системах автоматического управления (САУ) возможны случаи, когда некоторые их параметры не известны точно, либо меняются в процессе эксплуатации системы по заранее неизвестным законам, причем их значения в принципе не могут быть доступны измерению. Если при этом известны диапазоны возможных значений постоянных параметров или пределы изменения нестабильных параметров, то в таких случаях говорят о параметрической интервальной неопределенности [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]. Системы, имеющие интервально-неопределенные параметры, получили название интервальных систем (ИС).

Существует два основных подхода к исследованию ИС: детерминированный и стохастический. В отличие от стохастического подхода, в соответствии с которым в качестве постулата принимается гипотеза о вероятностной природе неопределенности, детерминированный подход использует гарантированные оценки. Выберем его для дальнейшего исследования вопросов анализа и синтеза ИС.

Пусть линейная ИС описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(q)x + B(q)u + D_1(q)z; \\ y &= C(q)x + D_2(q)z, \end{aligned} \tag{B.1}$$

где все матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D_1$  и  $D_2$  зависят от интервальных параметров, образующих вектор  $q$ . Так как  $q_i \in [q_{i_{\min}}, q_{i_{\max}}]$ ,  $i \in \overline{1, m}$ , то интервальные параметры образуют многогранник  $M_m$ , представляющий собой прямоугольный брус с рёбрами, параллельными координатным осям и числом вершин  $2^m$ .

При описании ИС уравнениями (B.1) введем условие линейной неопределенности, означающее, что коэффициенты  $a_i(q)$  характеристического

полинома (или элементы  $a_{ij}(q)$  матрицы  $A(q)$ ) есть линейные функции от  $q$ . Особенно выделим два случая [8]:

1. Интервальная неопределенность;
2. Аффинная неопределенность.

В первом случае интервальный характеристический полином (ИХП) задается так

$$P(s) = \{P(s) = a_0 + a_1s + \dots + a_n s^n : \underline{a}_i \leq a_i \leq \bar{a}_i, \underline{a}_n > 0, i = 0, \dots, n\}, \quad (\text{B.2})$$

где  $\underline{a}_i = a_{i_{\min}}$ ,  $\bar{a}_i = a_{i_{\max}}$ . В нем сами коэффициенты являются неопределенными параметрами, которые могут независимо принимать значения в своих интервалах неопределенности  $[\underline{a}_i, \bar{a}_i]$ . Условие  $\underline{a}_n > 0$  обычно накладывалось для того, чтобы обеспечить неизменность степени  $n$  полинома при всех  $\underline{a}_n \leq a_n \leq \bar{a}_n$ .

Во втором случае коэффициенты характеристического полинома не имеют непосредственного физического смысла и зависят от параметров  $q$  линейным образом. Аффинная неопределенность является простейшей моделью такой зависимой структуры неопределенности. Аффинное семейство полиномов задается следующим образом

$$P(s, Q) = \{P(s, q) = P_0(s) + q_1 P_1(s) + \dots + q_l P_l(s), q \in P\}, \quad (\text{B.3})$$

где полиномы  $P_i(s), i = \overline{0, l}$  фиксированы и известны ( $P(s, 0) = P_0(s)$  также называют номинальным полиномом системы). В этом случае коэффициенты  $a_i(q)$  полинома  $P(s, q)$  зависят аффинным образом от параметров  $q$ :

$$a_i(q) = a_i^0 + \sum_{j=1}^l q_j a_i^j, \quad (B.4)$$

где  $a_i^j$  - коэффициент  $P_j(s)$  при  $s^i$ . Иными словами, коэффициенты  $a_i(q)$  не могут меняться независимо друг от друга при изменении  $q$ .

При проектировании ИС основная задача состоит в обеспечении желаемого качества ее функционирования при любых возможных значениях интервальных параметров. Иными словами, должен закладываться высокий уровень робастности ИС. Это свойство включает в себя в первую очередь наличие робастной устойчивости и робастного качества управления в разрабатываемой ИС [9, 10, 11, 12, 13, 14].

Робастной устойчивости соответствует расположение областей локализации всех полюсов ИС в левой половине комплексной плоскости. Рассмотрим существующие методы анализа робастной устойчивости.

Фундаментальные результаты, позволяющие исследовать робастную устойчивость системы с интервальной неопределенностью, получены В. Л. Харитоновым [15, 16, 17].

Пусть задан полином

$$P(s) = \left\{ P(s) = a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n, \right. \\ \left. \underline{a}_i \leq a_i \leq \bar{a}_i, i = 0, \dots, n, \underline{a}_0 > 0, \underline{a}_n > 0 \right\}, \quad (B.5)$$

параметрами которого являются сами коэффициенты полинома, изменяющиеся в прямоугольном параллелепипеде. Рассмотрим четыре полинома, составленные из крайних значений коэффициентов, чередующихся парами (два нижних значения – два верхних):

$$\begin{aligned}
P_1(s) &= \underline{a}_0 + \underline{a}_1s + \bar{a}_2s^2 + \bar{a}_3s^3 + \dots, \\
P_2(s) &= \bar{a}_0 + \underline{a}_1s + \underline{a}_2s^2 + \bar{a}_3s^3 + \dots, \\
P_3(s) &= \bar{a}_0 + \bar{a}_1s + \underline{a}_2s^2 + \underline{a}_3s^3 + \dots, \\
P_4(s) &= \underline{a}_0 + \bar{a}_1s + \bar{a}_2s^2 + \underline{a}_3s^3 + \dots
\end{aligned}$$

Эти полиномы получили название полиномов Харитонова.

Теорема Харитонова звучит следующим образом: *Для робастной устойчивости интервального семейства (B.5) необходимо и достаточно, чтобы все полиномы Харитонова были устойчивы.*

Перейдем теперь к более сложной ситуации – аффинному семейству полиномов

$$P(s, Q) = \left\{ P_0(s) + q_1P_1(s) + \dots + q_lP_l(s), |q_i| \leq \gamma, i = 1, \dots, l \right\} \quad (B.6)$$

с параметрами, изменяющимися в кубе

$$Q \doteq \left\{ q \in R^l : |q|_\infty \leq \gamma \right\}. \quad (B.7)$$

Одномерное семейство вида

$$\left\{ P(s, q) : |q_i| = \gamma, i \neq k, |q_k| \leq \gamma \right\} \quad (B.8)$$

названо *реберным полиномом*. Вершинными полиномами названы полиномы вида  $P(s, q), q_i = \pm\gamma, i = \overline{1, l}$ .

Геометрически вершинные и реберные полиномы соответствуют вершинами ребрам куба (B.7), т.е. реберный полином «соединяет» два



«соседних» вершинных полинома (соответствующих соседним вершинам куба), и всего имеется  $l2^{l-1}$  реберных полиномов.

Справедлива следующая теорема [18]. Пусть

$$\deg P_i \leq \deg P_0 \doteq n, \quad i = 1, \dots, l, \quad (\text{B.9})$$

$$\gamma \sum_{i=1}^l |a_n^i| < |a_n^0|, \quad \gamma \sum_{i=1}^l |a_0^i| < |a_0^0|, \quad (\text{B.10})$$

где  $a_k^i$ ,  $i = 1, \dots, l$ , - коэффициенты при  $s^k$  полиномов  $P_i(s)$ . Пусть полином  $P_i(s)$  устойчив. Тогда для робастной устойчивости семейства (B.6) необходима и достаточна устойчивость всех реберных полиномов.

Даная теорема названа реберной. Она позволяет получить эффективную формулировку критерия робастной устойчивости, лишь, если число  $l$  неопределенных параметров мало. В этом случае следует проверить все реберные полиномы. Они представляют собой однопараметрические семейства вида  $\lambda M(s) + (1 - \lambda)N(s)$  (где  $M(s)$ ,  $N(s)$  – два соседних вершинных полинома), и в соответствии с критерием Найквиста (роль точки -1 здесь играет  $-(1 - \lambda)/\lambda$ ) их устойчивость при  $0 \leq \lambda \leq 1$  эквивалентна тому, что полиномы  $M(s)$ ,  $N(s)$  устойчивы, а годограф  $G(j\omega) = M(j\omega)/N(j\omega)$  не пересекает отрицательной вещественной полуоси. Однако если  $l$  велико, то число таких проверок значительно (даже для  $l=5$  нужно проверить  $l2^{l-1} = 80$  реберных полиномов), что потребует большого объема вычислений.

В связи с этим актуальна проблема исследования возможности сокращения числа проверяемых ребер. Побудительным мотивом к такой постановке задачи явились работы [18, 19], где в соответствии с реберной теоремой путем отображения всех ребер многогранника строятся области миграции корней интервального полинома. Из рассмотрения этих областей следует очевидный вывод о том, что для анализа устойчивости конкретного интервального

полинома достаточно проверить только те его существенные ребра, образы которых составляют границы областей локализации корней полинома. Однако для этого необходимо уметь заранее определять существенные ребра по имеющейся информации о структуре полинома и интервалах неопределенности его коэффициентов.

Очевидно, что наряду с проверкой робастной устойчивости, отвечающей только на вопрос: устойчива ИС или нет, для проектировщика желательно гарантировать также и робастное качество ИС, соответствующее расположению ее полюсов в некоторой заданной области комплексной плоскости.

В литературе данная проблема рассматривается как анализ робастной относительной устойчивости [5, 20, 21, 22, 23]. Понятие относительной устойчивости связано с разнообразными вариантами расположения корней ИХП соответственно возможным сочетаниям варьируемых параметров в рамках фиксированных интервалов.

До настоящего времени исследования в этой области велись преимущественно алгебраическим и частотным методами в двух направлениях: формулирование необходимых и достаточных условий [5, 24, 25, 26, 27, 28, 29] и вывод сравнительно неконсервативных достаточных условий робастной относительной устойчивости [5, 7, 30, 31]. При этом основная часть публикаций оперирует с результатами В. Л. Харитонова.

Так установлено, что необходимые и достаточные условия требуют анализа  $2^n$  полиномов с постоянными коэффициентами, принимающими свои граничные значения [5, 21]. Такая процедура, безусловно, оказывается весьма трудоемкой. Поэтому предлагается использовать достаточные условия, обеспечивающие выполнение интересующих проектировщика требований. В частности, эффективными являются условия попадания корней ИХП в сектор, заданным углом  $\pi \pm \varphi^*$ , основанные на достаточном критерии устойчивости Липатова – Соколова [7, 31]. Эти условия имеют вид:

$$\frac{a_i^2}{a_{i-1}a_{i+1}} \geq \delta^*, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (\text{B.11})$$

где  $\delta^*$  - действительная функция величин  $n$  и  $\varphi^*$  (ее значения представлены на соответствующих номограммах [7]).

Заметим, что исследования робастной относительной устойчивости ведутся преимущественно для случая интервальной неопределенности в системе. Среди работ, рассматривающих аффинную неопределенность, можно выделить работы [32, 33], связанные с построением гарантированных областей локализации полюсов ИС.

Наиболее перспективным для исследования ИС согласно [34, 35, 36, 37, 38, 39] является корневой подход [40]. Он основан на отображении многогранника интервальных параметров на корневую плоскость и позволяет наиболее точно оценить робастную устойчивость и робастное качество ИС. Реализовать корневой подход можно на основе робастного расширения известного метода корневого годографа, который предусматривает получение информации о границах областей локализации корней системы, соответствующих известной области изменения интервальных параметров.

Для построения таких границ при условии линейного вхождения интервальных параметров в коэффициенты характеристического полинома системы разработаны подходы [18], основанные на отображении на плоскость корней ребер многогранника характеристических полиномов. Его вершинами являются полиномы, соответствующие крайним значениям интервальных параметров. Однако рекомендуемая в [18] проверка относительной устойчивости на всех ребрах является сверхдостаточной, о чем свидетельствуют приведенные там же примеры. Поэтому возникает естественное желание знать существенны ребра, которые являются образами

границ корневых областей. Для их определения предлагается использовать интервальный аналог метода корневого годографа.

Синтезу ИС также посвящено большое количество публикаций [41, 42, 43, 44]. Под задачей синтеза ИС будем понимать определение настроек линейного регулятора заданной структуры, гарантирующего желаемое качество. Многие из предлагаемых методик синтеза робастных ИС основаны на результатах Харитонова. Так, например, полиномы Харитонова используются при синтезе двух параметров линейного регулятора на основе робастного D-разбиения [45, 46]. Данный метод позволяет выбрать настройки регулятора из параметрической области устойчивости, обеспечивающее попадание корней ИХП в заданную односвязную область комплексной плоскости.

Известно, что динамика любой линейной системы главным образом зависит от расположения ее доминирующих полюсов. Поэтому для обеспечения гарантированных динамических свойств ИС следует при синтезе робастного регулятора использовать принцип доминирования. В соответствии с ним для получения требуемого качества необходимо расположить желаемым образом доминирующие полюса и отдалить от них остальные свободные полюса. Решение задачи размещения доминирующих полюсов в заданных точках комплексной плоскости рассматривается в ряде работ для стационарных систем. В [47, 48, 49, 50, 51], например, эта задача решается с помощью полиномиальных уравнений синтеза. В [47, 49, 50] используется интерполяционный метод назначения доминирующих полюсов. При этом недоминирующие полюса системы могут располагаться на комплексной плоскости произвольно. Поэтому на заключительном этапе предусматривается дополнительная проверка выполнения условий доминантности.

Для интервальной системы также представляет интерес задача размещения ее полюсов. При этом желательно, чтобы доминирующие полюса принимали предписанные значения или локализовались необходимым образом, а остальные располагались в заданной области комплексной плоскости.

Среди реальных систем автоматического управления с интервальными параметрами можно выделить класс систем, обладающих ярко выраженными резонансными свойствами. При этом особый интерес представляют системы, интервальными параметрами которых являются параметры упругих связей.

Заметим, что простые интервальные упругие системы низкого порядка имеют, как правило, интервальную неопределенность, а более сложные – аффинную неопределенность. Характерной особенностью интервальных упругих систем является частотная нестабильность упругих тонов колебаний. Степень их отрицательного влияния на динамику системы определяется в каждом конкретном случае с помощью построения частотных характеристик. Как правило, учету подлежат те тона колебаний, которые деформируют логарифмическую амплитудночастотную характеристику выше оси частот или пересекают эту ось, являясь источниками неустойчивости системы. При этом, интервалы изменения резонансной частоты могут лежать в низкочастотных, среднечастотных и высокочастотных областях в зависимости от параметров упругих связей.

Применение в интервальных упругих системах линейных робастных регуляторов может обеспечить робастную устойчивость, но при этом не всегда позволяет получить желаемую динамику системы. Так, например, если диапазон изменения частоты резонанса находится в области высоких частот, то с помощью линейных фильтров, в принципе, возможно подавлять упругие колебания в САУ, не снижая ее быстродействия. Если же диапазон изменения резонансной частоты лежит в среднечастотных или низкочастотных областях, то демпфирование системы с помощью линейного робастного регулятора приведет к ее существенному загроблению и потере желаемого быстродействия.

Выходом из этой ситуации может служить использование нелинейных законов компенсации влияния нестабильных резонансов [52, 53]. Разработанные в соответствии с этими законами различные схемы

псевдолинейных корректирующих устройств приведены в [52, 54, 55, 56,]. Для указанной цели, особенно в случае изменения параметров упругих связей, необходимы такие корректирующие устройства, которые формировали бы логарифмические амплитудно-частотные характеристики (ЛАЧХ), инверсными по отношению к частотно-нестабильным амплитудным пикам, и при этом создавали необходимый запас устойчивости по фазе. Они должны быть способны независимо корректировать АЧХ и ФЧХ системы в известном заранее диапазоне частот, сохраняя при этом ее динамику.

Данным требованиям в определенной мере отвечает, например, многоканальное нелинейное корректирующее устройство из [52]. Однако главной причиной, ограничивающей его использование при изменении резонансной частоты в широком диапазоне, является частотная дискретность коррекции и, как следствие, трудность обеспечения высокой точности компенсации резонансов без значительного увеличения числа каналов и усложнения устройства.

Согласно [57, 58], перспективным направлением в этом случае является адаптивная коррекция интервальной упругой системы с самонастройкой на резонансную частоту, которая позволяет осуществлять точную частотно-непрерывную компенсацию амплитудного всплеска.

Таким образом, в результате проведенного обзора существующих подходов к анализу и синтезу ИС можно сделать следующие выводы и предложения.

#### *Анализ гарантируемого робастного качества ИС*

Для анализа робастного качества системы с интервальной или аффинной неопределенностью целесообразно применять корневой подход с использованием метода корневого годографа и реберной теоремы. В основу этого подхода предлагается положить определение свойств отображения ребер и вершин параметрического многогранника ИС на комплексную плоскость корней. Целью при этом является нахождение существенных ребер,

отображающихся на границы областей локализации полюсов ИС. Задача анализа робастного качества в данном случае будет сводиться к оценке качества ИС на этих существенных ребрах. Для ее решения можно использовать как графические методы (построение интервального корневого годографа, реберное D-разбиение), так и аналитические с применением уравнения корневого годографа (уравнения Теодорчика-Эванса).

#### *Синтез ИС с гарантируемой динамикой*

В зависимости от упругих свойств интервальной системы задача ее синтеза с целью обеспечения гарантированной динамики может быть разделена на две задачи:

- если ИС является жесткой или упругой с интервалом неопределенности частоты резонанса в области высоких частот, то следует синтезировать линейный робастный регулятор на основе принципа доминирования корней характеристического полинома,

- если ИС является упругой системой с интервалом неопределенности частоты резонанса в области средних или низких частот, то следует синтезировать адаптивный компенсатор нестабильных резонансов, сохраняющий полосу пропускания системы, и следовательно, ее требуемые динамические свойства.

Таким образом, **целью работы** является разработка методик анализа и синтеза интервальных систем с применением робастного и адаптивного подходов на основе решения следующих задач:

1. реберная маршрутизация параметрического многогранника системы для определения границ областей локализации корней характеристического уравнения;

2. анализ робастного качества линейной интервальной системы на основе отображения реберного маршрута на корневую плоскость;

3. параметрический синтез линейных регуляторов, обеспечивающих гарантированную динамику в интервальных системах на основе доминантного расположения полюсов;

4. структурно-параметрический синтез псевдолинейных компенсаторов упругих частотно-нестабильных колебаний.

**Научная новизна** работы заключается в следующем:

- разработка алгоритмов реберной маршрутизации параметрического многогранника системы на основе свойств корневого годографа (КГ), позволяющей определить образы границ областей локализации корней интервального характеристического уравнения;

- разработка методики анализа региональной робастной устойчивости интервальных систем на основе реберной маршрутизации с применением методов корневого годографа, D-разбиения, уравнения Теодорчика-Эванса;

- разработка методики синтеза адаптивного и робастного линейных регуляторов для региональной локализации и стабилизации доминирующих полюсов интервальной системы;

- разработка способа компенсации частотно-нестабильных резонансов в интервальных системах;

- разработка структуры адаптивного и робастного псевдолинейных компенсаторов, демпфирующих упругие частотно-нестабильные колебания в интервальных системах.

**Практическая ценность** работы определяется:

- доведенными до уровня инженерного проектирования с использованием ЭВМ в интерактивном режиме методиками анализа и синтеза робастных и адаптивных линейных регуляторов, обеспечивающих гарантированную динамику в интервальных системах;

- практической разработкой робастного и адаптивного псевдолинейных компенсаторов, техническая новизна и оригинальность которых подтверждена патентом на изобретение;



- возможностью использования результатов работы при решении соответствующих задач управления промышленными упругими электромеханическими системами (бумагоделательными машинами, подъемно-спускными механизмами шахт и шлюзов, приводами манипуляторов и металлообрабатывающих станков, антенными установками), в объектах управления которых имеются нестабильные параметры.

**Апробация работы.** Основные положения и результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на Русско-Корейской международной конференции KORUS'99 III. (Россия, г. Новосибирск, 1999г.), на международной конференции «Информационные системы и технологии» (г. Новосибирск, 2000г.), на VI международной научно-практической конференции «Современные техника и технологии» (г. Томск, 2000), на VII международной научно-практической конференции «Современные техника и технологии» (г. Томск, 2001г.), на X международной научно-технической конференции «Состояние и перспективы развития электротехнологии» (г. Иваново, ИГЭУ, 2001г.), на VII Международной научно-технической конференции «Радиоэлектроника, электротехника и энергетика» (г. Москва, МЭИ, 2001г.).

**Публикации.** По теме диссертационной работы опубликовано 10 работ, получен 1 патент на изобретение.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы, включающего 111 наименований, и приложений; содержит 131 печатную страницу основного текста, 43 рисунка и 1 таблицу.

Автор выражает глубокую признательность **научному консультанту** к.т.н., доценту **Гайворонскому С. А.** за помощь при проведении научных исследований по теме диссертационной работы.

## **ГЛАВА I. РЕБЕРНАЯ МАРШРУТИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО МНОГОГРАННИКА СИСТЕМЫ**

### **1.1. Постановка задачи**

Побудительным мотивом реберной маршрутизации явилось решение с помощью реберной теоремы числового примера построения областей локализации корней интервального полинома для анализа робастной устойчивости САУ. Следует отметить, что корневой подход, предлагаемый, например, в [34, 39], позволяет оценивать как робастную, так и относительную робастную устойчивость, определяемую расположением корневых областей в левой полуплоскости.

В результате рассмотрения полученных в примере корневых областей замечено, что для построения их границ достаточно было бы отобразить на комплексную плоскость корней только некоторые ребра параметрического многогранника (ПМ). Очевидно, что априорное знание этих существенных ребер, образы которых составляют границы областей локализации корней, позволяет значительно упростить анализ устойчивости интервального полинома. Поэтому представляет интерес получение алгоритма определения для ПМ набора существенных ребер (реберного маршрута) по имеющейся информации о структуре полинома и интервалах неопределенности параметров.

### **1.2. Свойства отображения ребер параметрического многогранника системы на комплексную плоскость корней**

Рассмотрим вначале случай аффинной неопределенности в интервальном характеристическом полиноме (ИХП). Пусть характеристический полином системы имеет вид:

$$\sum_{i=1}^m T_i \cdot A_i(s) + B(s) = 0, \quad (1.1)$$

где  $T_i$  – интервальные параметры,  $\underline{T}_i \leq T_i \leq \overline{T}_i$ ,  $\underline{T}_i = T_{i\min}$ ,  $\overline{T}_i = T_{i\max}$ ;  $A_i(s)$  и  $B(s)$  – полиномы по степеням  $s$ . Так как  $m$  параметров заданы своими граничными значениями, то ПМ, внутри которого  $T_i$  могут изменяться произвольным образом, представляет собой прямоугольный гиперпараллелепипед:

$$P_T = \{T_i | \underline{T}_i \leq T_i \leq \overline{T}_i, i = \overline{1, m}\},$$

содержащий  $2^m$  вершин. На рис.1.1 приведен пример параметрического многогранника системы с тремя интервальными параметрами.

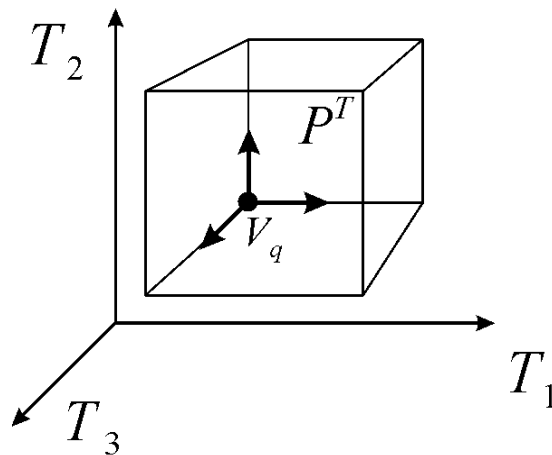


Рис.1.1. Параметрический многогранник  $P_T$

Координаты любой точки  $P_T$  относительно вершины  $V_q$ ,  $q = \overline{1, 2^m}$  определяются выражениями:

$$T_i = T_i^q + \Delta T_i, i = \overline{1, m}, \quad (1.2)$$

$$(\underline{T}_i - T_i^q) \leq \Delta T_i \leq (\overline{T}_i - T_i^q), \quad (1.3)$$

где  $\Delta T_i$ - приращение  $i$ -го интервального параметра,  $T_i^q$  - его значение в вершине  $V_q$ .

Для отображения  $\varphi: P_T \rightarrow S$ , где  $S$  – множество корней (1.1), необходимо иметь соотношение, связывающее координаты точек  $P_T$  с  $n$  корнями характеристического уравнения. Такое выражение может быть получено в результате подстановки в (1.1) выражения (1.2):

$$D^q(s) + \Delta T_1 \cdot A_1(s) + \Delta T_2 \cdot A_2(s) + \dots + \Delta T_m \cdot A_m(s) = 0, \quad (1.4)$$

где  $D^q(s) = \sum_{i=1}^m T_i^q \cdot A_i(s) + B(s)$  – вершинный характеристический полином.

Введем в рассмотрение ребра  $P_T$ , которые обозначим  $R_i^q$ , где  $i$  – индекс  $\Delta T_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $q$  – индекс  $V_q$ , из которой по ребру меняется  $T_i$ . На основании (1.4) запишем уравнение отображения ребра  $R_i^q$  на комплексную плоскость корней:

$$D^q(s) + \Delta T_i \cdot A_i(s) = 0. \quad (1.5)$$

Пусть (1.5) является характеристическим полиномом системы с единичной обратной связью. Тогда передаточная функция системы в разомкнутом состоянии может иметь вид:

$$W_i^q(\Delta T_i, s) = \frac{\Delta T_i \cdot A_i(s)}{D^q(s)}. \quad (1.6)$$

Анализируя (1.5) и (1.6) с позиции теории корневого годографа, заметим, что при изменении  $\Delta T_i$  в интервале (1.3) корни (1.5), стремясь от полюсов функции (1.6) к ее нулям, образуют однопараметрический интервальный корневой годограф. Его ветви назовем реберными ветвями (обозначим  $RS_i^q$ ), а их начала и концы – корневыми узлами ( $U_q$ ). Тогда для отображения  $\varphi: P_T \rightarrow S$  будут справедливы выражения:  $\varphi(R_i^q) = RS_i^q$ ,  $\varphi(V_q) = U_q$ .

По определению многогранника  $P_T$  любая его грань является прямоугольником на плоскости изменения двух интервальных параметров  $T_i$  и

$T_j$  из одной вершины  $V_q$ . В соответствии с этим обозначим грань  $G_{ij}^q$ , а ее образ  $GS_{ij}^q$ . На основании (1.1) запишем уравнение отображения плоскости  $G_{ij}^q$  при снятии ограничений (1.2), (1.3):

$$T_i \cdot A_i(s) + T_j \cdot A_j(s) + \sum_k T_k^q \cdot A_k(s) + B(s) = 0. \quad (1.7)$$

Пусть один из корней уравнения (1.7) имеет вид  $s_r = \alpha + j\beta$ ,  $r \in \overline{1, n}$ . Подставляя в (1.7) координаты  $s_r$  и выделяя вещественную и мнимую части, получаем систему двух линейных уравнений с двумя переменными  $T_i$  и  $T_j$

$$\begin{cases} T_i \cdot \operatorname{Re} A_i(\alpha, \beta) + T_j \cdot \operatorname{Re} A_j(\alpha, \beta) + \operatorname{Re} \left[ \sum_k T_k^q \cdot A_k(s) + B(s) \right] = 0; \\ T_i \cdot \operatorname{Im} A_i(\alpha, \beta) + T_j \cdot \operatorname{Im} A_j(\alpha, \beta) + \operatorname{Im} \left[ \sum_k T_k^q \cdot A_k(s) + B(s) \right] = 0. \end{cases} \quad (1.8)$$

Для уравнений системы (1.8) характерны следующие два случая:

1. Уравнения независимы и система имеет единственное решение  $T_i = T_i^*$ ,  $T_j = T_j^*$ . Следовательно,  $\varphi^{-1}(s_r) = P^*$ ,  $P^* = (T_i^*, T_j^*)$ , причем точка  $P^*$  принадлежит плоскости  $G_{ij}^q$ .

2. Уравнения отличаются постоянным множителем. Из этого следует, что в плоскости  $G_{ij}^q$  существует прямая  $t$ , описываемая любым из уравнений системы (1.8), причем  $\varphi^{-1}(s_r) = t$ .

Учитывая эти особенности отображения корня  $s_r$  на плоскость интервальных параметров, рассмотрим границы области  $S_r$  его локализации при условии

$$\varphi^{-1}(s_r) = G_{ij}^q. \quad (1.9)$$

Пусть  $\varphi^{-1}(s_r) = P^*$ , причем  $P^* \in R_i^q$ . Так как координаты  $P^*$  являются единственным решением (1.8), то  $RS_i^q$  - единственная ветвь, проходящая через  $s_r$ . Следовательно, при условии (1.9) границами  $S_r$  являются непересекающиеся образы ребер  $G_{ij}^q$ .

Пусть  $\varphi^{-1}(s_r) = t$  и  $t \cap G_{ij}^q = \overline{P_1 P_2}$  (точки  $P_1$  и  $P_2$  принадлежат ребрам  $G_{ij}^q$ ). Следовательно,  $\varphi^{-1}(P_1 P_2) = s_r$  и через  $s_r$  (назовем его особым корневым узлом и обозначим  $U^*$ ) проходит множество ветвей корневых годографов по интервальным параметрам, образующим пересекаемые прямой  $t$  ребра. Угол входа каждой такой ветви в  $U^*$  равен углу выхода и поэтому все пересекающиеся в  $U^*$  ветви лежат между двумя пересекающимися там же реберными ветвями. Следовательно, в этом случае при условии (1.9) в состав границы  $S_r$  входят пересекающиеся образы двух ребер  $G_{ij}^q$ .

Назовем ребра, отображающиеся на границы корневых областей, граничными ребрами (обозначим  $GR_i^q$ ), их образы - граничными реберными ветвями ( $GRS_i^q$ ), а связываемые ими корневые узлы - граничными корневыми узлами ( $GU_q$ ).

На рис.1.2 приведены примеры отображения параметрического многогранника системы с тремя интервальными параметрами на комплексную плоскость корней. На рис.1.2а показана область  $S_r$ , границами которой являются непересекающиеся образы ребер  $P_T$ , а на рис.1.2б она ограничена пересекающимися образами ребер  $P_T$ .

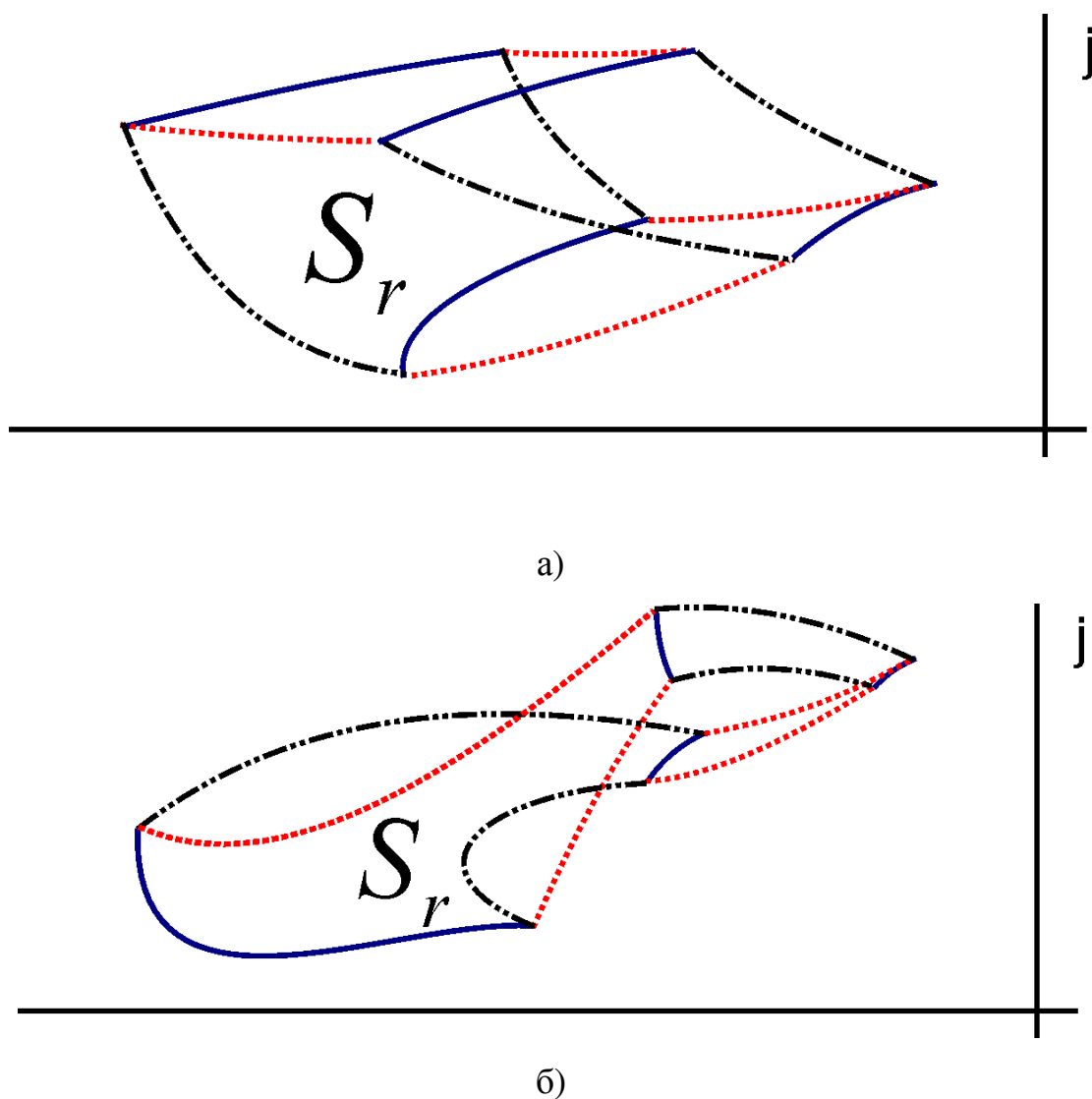


Рис.1.2. Отображение параметрического многогранника системы на комплексную плоскость корней.

Покажем, что у  $P_T$  существует единственный набор  $GR_i^q$  для всех областей локализации комплексных корней. Пусть  $\varphi(V_q) = s_1$ ,  $s_1 = \alpha_1 + j\beta_1$ , и  $\varphi(V_q) = s_2$ ,  $s_2 = \alpha_2 + j\beta$  причем,  $s_1$  является граничным для  $S_1$  при  $\varphi^{-1}(S_1) = P_T$ , а  $s_2$  - внутренним для  $S_2$  при  $\varphi^{-1}(S_2) = P_T$ . Допустим, что один из интервальных параметров  $T_i$  при изменении из  $V_q$  выходит за свою границу, определяемую условиями (1.2) и (1.3). В результате может оказаться, что  $s_1 \notin S_1$ , а

$s_2 \in S_2$ . В этом случае  $\varphi^{-1}(S_1) \notin P_T$ , а  $\varphi^{-1}(S_2) \in P_T$ , что противоречит существованию у  $s_1$ , и  $s_2$  одного прообраза. Поэтому если хоть одно отображение  $V_q$  является  $GU_q$ , то такими же являются и все другие ее отображения. Из этого можно сделать вывод, что при отображении  $\varphi: P_T \rightarrow S$  у  $P_T$  существует единственный набор  $GR_i^q$ , составляющий граничный реберный маршрут.

На основе проведенного анализа можно заключить, что реберные ветви могут входить в состав границы как полностью, так и частично, причем последнее является результатом их пересечения в  $U^*$ . Данный случай необходимо учитывать при граничной маршрутизации  $P_T$ , в связи с чем следует заранее знать о возможности наличия  $U^*$  в области  $S_r$ .

Очевидно, что необходимым условием  $U^* \in S_r$  является присутствие прямых  $t$  в плоскостях  $P_T$ . Заметим, что если в двухмерном пространстве какой-либо грани существует прямая  $t$ , то и в плоскости любого сечения  $P_T$ , параллельного рассматриваемой грани, также будет соответствующая прямая  $t$ . Поэтому необходимым условием  $U^* \in S_r$  является наличие прямой  $t$  хотя бы в одной из плоскостей  $P_T$ , имеющих одну общую вершину.

Как было указано ранее, условием существования прямой  $t$  в пространстве параметров  $T_i$  и  $T_j$  и ее отображения в  $U^*(\alpha, j\beta)$  является линейная зависимость уравнений (1.8). Эта зависимость имеет место, если существуют такие  $\alpha$  и  $\beta$ , что выполняются равенства:

$$\frac{\operatorname{Re} A_i(\alpha, \beta)}{\operatorname{Im} A_i(\alpha, \beta)} = \frac{\operatorname{Re} A_j(\alpha, \beta)}{\operatorname{Im} A_j(\alpha, \beta)} = \frac{\operatorname{Re} \left[ \sum_k T_k^q \cdot A_k(\alpha, \beta) + B(\alpha, \beta) \right]}{\operatorname{Im} \left[ \sum_k T_k^q \cdot A_k(\alpha, \beta) + B(\alpha, \beta) \right]}. \quad (1.10)$$

Для этой проверки необходимо решить полученную из (1.10) систему двух нелинейных уравнений:



$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re} A_i(\alpha, \beta) \cdot \operatorname{Im} A_j(\alpha, \beta) - \operatorname{Re} A_j(\alpha, \beta) \cdot \operatorname{Im} A_i(\alpha, \beta) = 0 \\ \operatorname{Re} A_j(\alpha, \beta) \cdot \operatorname{Im} \left[ \sum_k T_k^q \cdot A_k(\alpha, \beta) + B(\alpha, \beta) \right] - \\ \operatorname{Im} A_j(\alpha, \beta) \cdot \operatorname{Re} \left[ \sum_k T_k^q \cdot A_k(\alpha, \beta) + B(\alpha, \beta) \right] = 0 \end{array} \right. \quad (1.11)$$

Левые части каждого из уравнений системы (1.11) являются полиномами нечетной степени  $\beta$  без свободного члена. Поэтому если (1.11) не имеет решения с  $\beta \neq 0$ , то в отображениях рассматриваемой грани и параллельных ей сечений  $P_T$  нет  $U^*$ . Отсутствие решений (1.11) для всех сочетаний интервальных параметров означает, что границы  $S_r$  состоят из непересекающихся реберных ветвей.

Рассмотрим далее случай интервальной неопределенности в ИХП. Пусть полином имеет вид:

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0, \quad (1.12)$$

где  $a_i \in [a_{i \min}, a_{i \max}]$  и образуют  $P_m$ , представляющий собой прямоугольный гиперпараллелепипед с  $2^m$  вершинами ( $m \leq n+1$ ).

Для отображения  $\varphi: P_m \rightarrow S$ , где  $S$  – множество корней (1.12), необходимо иметь соотношение, связывающее координаты точек  $P_m$  с  $n$  корнями полинома (1.12). Таким соотношением может быть уравнение:

$$D^q(s) + \sum_i \Delta a_i s^i = 0, \quad i \in \overline{0, n}, \quad (1.13)$$

где  $D^q(s) = \sum_i a_i^q s^i + \sum_p a_p s^p$ ,  $p \in \overline{0, n}$ ,  $p \neq i$  – вершинный полином,  $a_p$  – постоянные коэффициенты полинома (1.13).

На основании (1.12) запишем уравнение отображения плоскости грани  $G_{ij}^q$  при снятии интервальных ограничений

$$a_i s^i + a_j s^j + \sum_k a_k^q s^k + \sum_p a_p s^p = 0. \quad (1.14)$$

Пусть один из корней уравнения (1.14) имеет вид  $s_r = \alpha + j\beta, r \in \overline{1, n}$ . Подставляя в (1.14) координаты  $s_r$  и выделяя вещественную и мнимую части, получаем систему двух линейных уравнений с двумя переменными  $a_i$  и  $a_j$

$$\begin{cases} a_i \operatorname{Re}(\alpha + j\beta)^i + a_j \operatorname{Re}(\alpha + j\beta)^j + \operatorname{Re} \left[ \sum_k a_k^q (\alpha + j\beta)^k + \sum_p a_p (\alpha + j\beta)^p \right] = 0; \\ a_i \operatorname{Im}(\alpha + j\beta)^i + a_j \operatorname{Im}(\alpha + j\beta)^j + \operatorname{Im} \left[ \sum_k a_k^q (\alpha + j\beta)^k + \sum_p a_p (\alpha + j\beta)^p \right] = 0. \end{cases} \quad (1.15)$$

Как было указано ранее, условием существования прямой  $t$  в пространстве коэффициентов  $a_i$  и  $a_j$  и ее отображения в  $U^*(\alpha; j\beta)$  является линейная зависимость уравнений системы (1.15). Эта зависимость имеет место, если существуют значения  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых выполняются равенства

$$\frac{\operatorname{Re}((\alpha + j\beta)^i)}{\operatorname{Im}((\alpha + j\beta)^i)} = \frac{\operatorname{Re}((\alpha + j\beta)^j)}{\operatorname{Im}((\alpha + j\beta)^j)} = \frac{\operatorname{Re} \left[ \sum_k a_k^q ((\alpha + j\beta)^k) + \sum_p a_p ((\alpha + j\beta)^p) \right]}{\operatorname{Im} \left[ \sum_k a_k^q ((\alpha + j\beta)^k) + \sum_p a_p ((\alpha + j\beta)^p) \right]}. \quad (1.16)$$

Очевидно, что такие  $\alpha$  и  $\beta$  должны являться решениями полученных из (1.16) систем нелинейных уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{Re}((\alpha + j\beta)^i) \operatorname{Im}((\alpha + j\beta)^j) - \operatorname{Re}((\alpha + j\beta)^j) \operatorname{Im}((\alpha + j\beta)^i) = 0; \\ \operatorname{Re}((\alpha + j\beta)^j) \operatorname{Im} \left[ \sum_k a_k^q ((\alpha + j\beta)^k) + \sum_p a_p ((\alpha + j\beta)^p) \right] - \\ \operatorname{Im}((\alpha + j\beta)^j) \operatorname{Re} \left[ \sum_k a_k^q ((\alpha + j\beta)^k) + \sum_p a_p ((\alpha + j\beta)^p) \right] = 0. \end{cases} \quad (1.17)$$

Заметим, что для устойчивого полинома  $S_r$  располагаются в левой полуплоскости и поэтому возможные узлы  $U^*$  имеют координаты  $\alpha < 0$  и  $\beta \neq 0$ . В результате анализа уравнений системы (1.17) установлено, что  $U^*$  существуют только в отображениях плоскостей тех граней, которые образованы коэффициентами полинома (1.12) с индексами, удовлетворяющими условию

$$|i - j| \geq 3. \quad (1.18)$$

Для доказательства этого утверждения сделаем в (1.17) обратную подстановку  $\alpha + j\beta = s$ . На основе формулы Муавра в ее тригонометрическом представлении

$$s^b = |s|^b (\cos(b\varphi) + j \sin(b\varphi))$$

преобразуем систему (1.17) к виду

$$\begin{cases} |s|^{i+j} (\cos(i\varphi) \sin(j\varphi) - \cos(j\varphi) \sin(i\varphi)) = 0; \\ \sum_z a_z |s|^{j+z} (\cos(j\varphi) \sin(z\varphi) - \cos(z\varphi) \sin(j\varphi)) = 0, \end{cases} \quad (1.19)$$

где  $z = k \cup p$ . В системе (1.19) координатами  $U^*$  теперь являются угол  $\varphi$  и модуль  $s$ . Учитывая, что  $\alpha \neq 0$ ,  $\beta \neq 0$ , а также используя теорему разности аргументов тригонометрических функций, уравнения системы (1.19) можно упростить

$$\begin{cases} \sin((j-i)\varphi) = 0; \\ \sum_z a_z |s|^{j+z} \sin((z-j)\varphi) = 0. \end{cases} \quad (1.20)$$

Очевидно, что при наложенных условиях  $\alpha < 0$  и  $\beta \neq 0$  решения (1.20) должны удовлетворять неравенствам  $\varphi \neq 0^\circ, \varphi \neq 90^\circ$ . В этом случае первое

уравнение системы (1.20) будет иметь решения только при  $|i - j| \geq 3$ . Эти решения для верхней полуплоскости корней определяются выражением

$$\varphi = \pi - \frac{\pi}{|i - j|}, \quad |i - j| = 3, 4, 5, \dots$$

Подстановка значения  $\varphi$  во второе уравнение системы (1.20) позволяет найти модуль  $s$ , и, тем самым, определить координаты  $U^*$  на комплексной плоскости.

Таким образом, для случая интервальной неопределенности в ИХП необходимым условием  $U^* \in S_r$  в левой полуплоскости является наличие в уравнении (1.12) пар интервальных коэффициентов с индексами, удовлетворяющими (1.18).

### 1.3. Основные фазовые соотношения реберной маршрутизации

Для разработки алгоритма нахождения реберного маршрута (РМ) вначале определим условия принадлежности  $U_q$  границе  $S_r$  (рис.1.3). Для этого введем в рассмотрение угол выхода  $R_i^q$  из комплексного  $U_q$ , являющегося полюсом функции (1.6). Обозначим этот угол  $\Theta_i^q$ . Так как на функцию (1.6) распространяются все известные свойства корневых годографов, то  $\Theta_i^q$  можно найти из уравнения фаз [59, 60], записанного для  $U_q$ . Если  $D^q(s)$  имеет степень  $n$ , а  $A_i(s)$  степень  $z$ , тогда  $\Theta_i^q$  при увеличении  $T_i$  находится по формуле

$$\Theta_i^q = 180^\circ - \sum_{k=1}^n \Theta_k + \sum_{l=1}^z \Theta_l, \quad (1.21)$$

а при уменьшении  $T_i$

$$\Theta_i^q = -\sum_{k=1}^n \Theta_k + \sum_{l=1}^z \Theta_l, \quad (1.22)$$

где  $\Theta_k$  и  $\Theta_l$  - углы между вещественной осью и векторами, направленными из  $U_q$  соответственно к  $k$ -ому полюсу и к  $l$ -ому нулю функции (1.6).

Проанализируем возможные направления движения  $s_r$  из  $U_q$ , рассматривая области отображения граней  $P_T$  с общей вершиной  $V_q$  (см. рис.3). В каждой из них направление движения  $s_r$  определяется вектором  $\vec{E}_{ij} = \vec{E}_i + \vec{E}_j$ , где  $\vec{E}_i$  и  $\vec{E}_j$  - реберные векторы, задаваемые  $\Theta_i^q$  и  $\Theta_j^q$  [4]. Согласно правилам векторной алгебры,  $\vec{E}_{ij}$  выходит из  $U_q$  и лежит внутри образованного  $\vec{E}_i$  и  $\vec{E}_j$  угла  $\Psi_{ij}$ , причем  $0^\circ \leq \Psi_{ij} \leq 180^\circ$ .

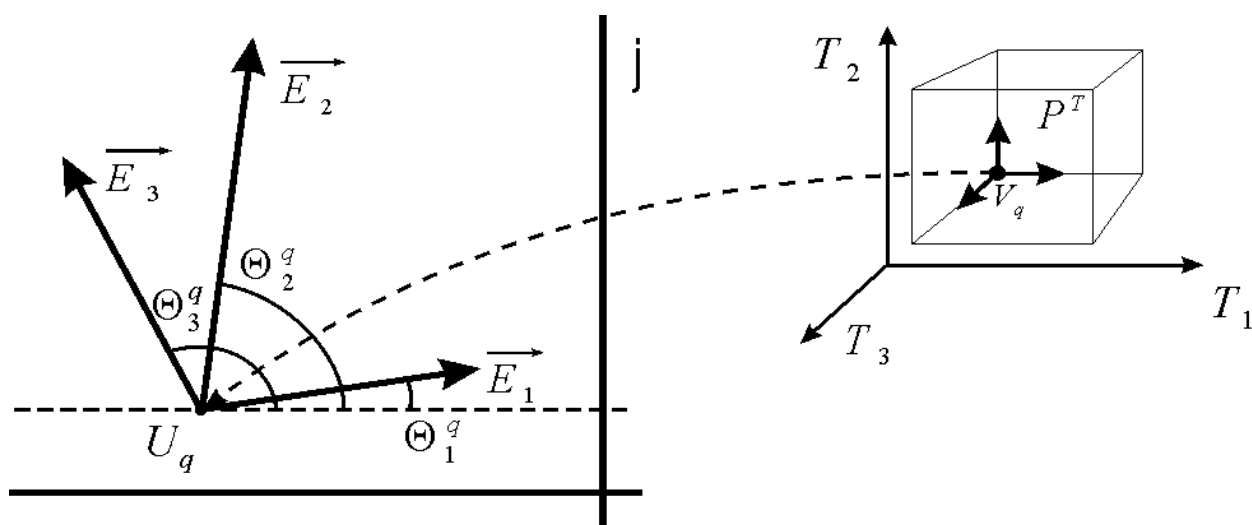


Рис.1.3. Отображение граней параметрического многогранника

Так как из  $GU_q$  выходят две граничные реберные ветви, то соответствующие им векторы образуют граничный угол  $G\Psi_{ij}$ , также лежащий в диапазоне  $[0^\circ, 180^\circ]$ . В этом случае все остальные углы  $\Psi_{ij}$ , и, следовательно, определяющие их реберные векторы должны принадлежать  $G\Psi_{ij}$ . Выразим

данное условие через углы выхода реберных ветвей, отсчитываемые от положительной вещественной полуоси. Оно соответствует выполнению  $C_m^2$  неравенств

$$|\Theta_m^{Vq} - \Theta_1^{Vq}| < 180^\circ. \quad (1.23)$$

Таким образом, на основании проверки (1.23) можно установить принадлежность вершины  $P_T$  границе области  $S_r$  локализации комплексного корня ИХП.

На рис.1.4 показаны возможные варианты расположения векторов выхода  $RS_i^q$  из граничного корневого узла  $GU_q$  (рис.1.4а) и из узла, расположенного внутри  $S_r$  (рис.1.4б).

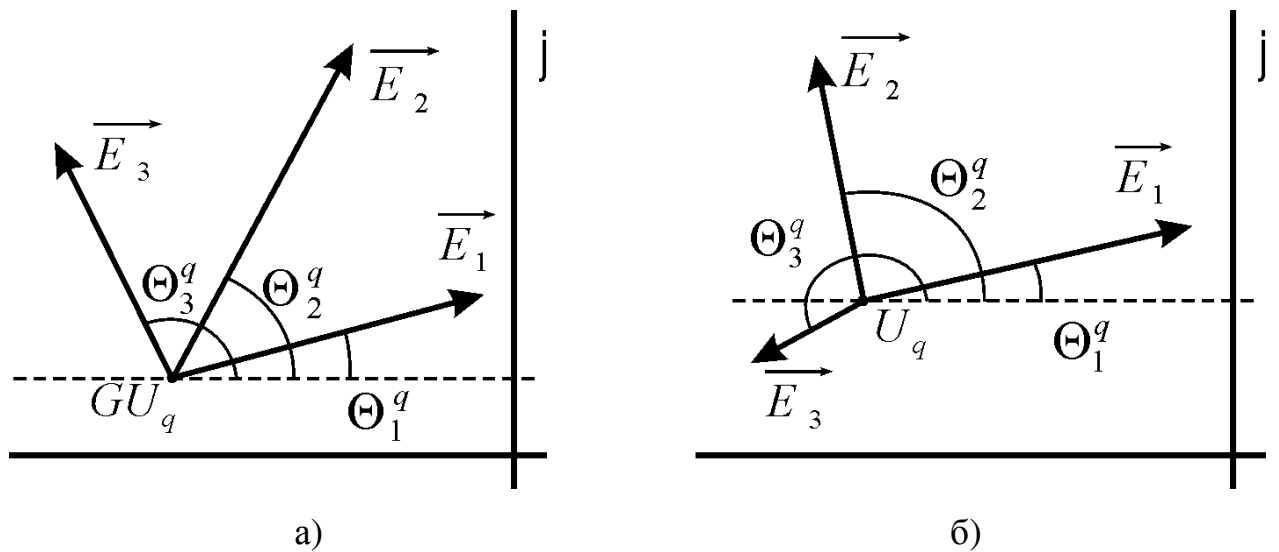


Рис.1.4. Расположение векторов выхода  $RS_i^q$  из корневого узла

Проанализируем возможные соотношения углов выхода двух реберных ветвей ( $RS_i$  и  $RS_j$ ) из соседних граничных корневых узлов  $S_r$ , связанных одной граничной реберной ветвью  $GRS_k$ . Очевидно, что прообразы  $RS_i$  и  $RS_j$  являются ребрами одной грани  $P_T$ .

Пусть  $U^* \notin S_r$ . При изменении  $T_k$  по ребру  $GR_k$  корень  $s_r$  движется по  $GRS_k$ . При этом могут изменяться углы выхода из  $s_r$  ветвей  $RS_i^s$  и  $RS_j^s$ . Однако, так как  $U^* \notin S_r$ , то  $RS_i^s$  и  $RS_j^s$  не пересекаются. Поэтому при переходе  $s_r$  от одного  $GU_q$  к другому будет сохраняться последовательность величин  $\Theta_i^s$  и  $\Theta_j^s$  (рис.1.5а). Обобщая этот случай на большее число рассматриваемых реберных ветвей, можно заключить, что в соседних граничных корневых узлах значения их углов выхода будут располагаться в одинаковой последовательности.

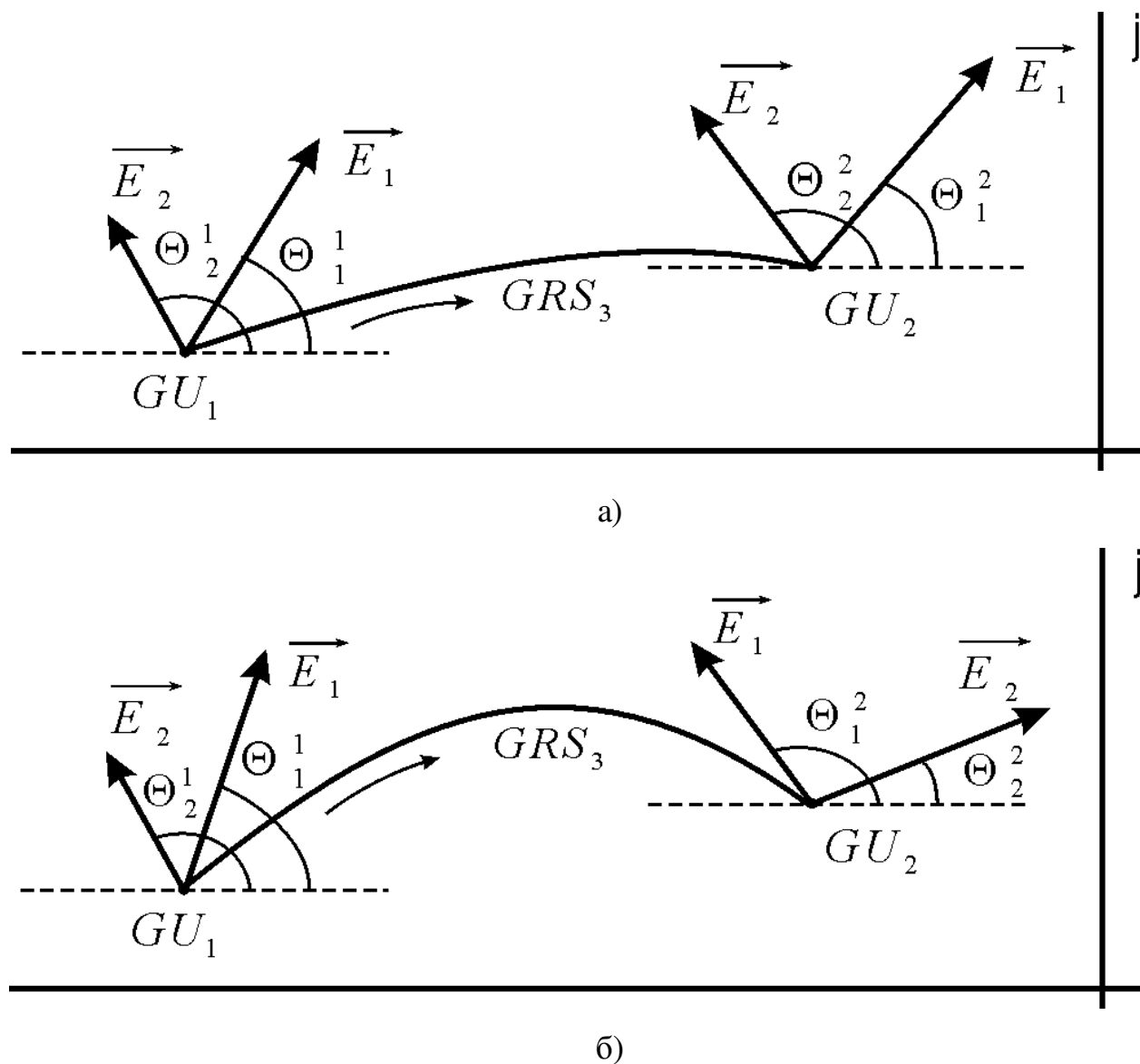


Рис.1.5. Расположение векторов выхода  $RS_i^q$  из корневого узла при варьировании одного параметра

Пусть  $U^* \in S_r$ , тогда  $RS_i^s$  и  $RS_j^s$  могут пересекаться в  $U^*$ . Если при изменении  $T_k$  возникнет ситуация  $s_r = U^*$  и далее  $U^*$  выйдет из  $S_r$ , то на оставшемся участке  $GRS_k$  изменится соотношение  $\Theta_i^s$  и  $\Theta_j^s$ . В этом случае в соседних граничных корневых узлах не будет сохраняться последовательность углов выхода реберных ветвей (рис.1.5б).

#### 1.4. Алгоритм реберной маршрутизации

На основе установленных фазовых соотношений для граничных реберных ветвей и анализа возможности их пересечения в особых корневых узлах разработаем алгоритмы граничной реберной маршрутизации  $P_T$  для случая аффинной и интервальной неопределенности.

Пусть системы (1.11) при аффинной неопределенности не имеют решений ни для одной из граней  $P_T$  с выбранной общей вершиной ( $U^* \notin S_r$ ). Тогда если известен  $GU_q$  и выходящая из него  $GRS_i^q$ , то очередной граничной реберной ветвью будет та, модуль разности между углом выхода которой и углом выхода известной  $GRS_i^q$  будет наименьшим (наибольшим). Поэтому, зная величины углов  $\Theta_i^q$ ,  $i = \overline{1, m}$  для любого граничного корневого узла и расположив их в порядке возрастания (убывания), можно определить последовательность ветвей  $RS_i^q$ ,  $q = \overline{1, 2m}$ ,  $i = \overline{1, m}$  ограничивающих область локализации комплексного корня.

Этой последовательности соответствует упорядоченный набор ребер  $P_T$  - замкнутый граничный реберный маршрут. Логично заключить, что он состоит из



$2m$  ребер, связывающих  $m$  пар вершин  $P_T$ , причем координаты каждой пары имеют противоположные граничные значения интервальных параметров.

Если хотя бы для одной пары интервальных параметров система (1.11) имеет решение, то в области  $S_r$  возможно наличие  $U^*$ . В этом случае необходимо также найти узел  $GU_q$ , затем для него определить последовательность  $\Theta_i^q$  и соответствующую ей последовательность ребер  $P_T$ . Если при движении по полученному таким образом реберному маршруту очередное ребро и следующее за ним окажутся образованными интервальными параметрами  $T_i$  и  $T_j$  для которых система (1.11) имеет решение, то в граничный реберный маршрут в этом случае следует включить все ребра грани  $G_{ij}$ .

Таким образом, алгоритм определения границ областей локализации корней полинома с интервальными параметрами предусматривает выполнение следующих этапов:

1. Приведение характеристического полинома системы к виду (1.1).
2. Определение координат вершин  $P_T$ , соответствующих граничным значениям интервальных параметров.
3. Решение систем уравнений (1.11) в одной из вершин  $P_T$  для установления интервальных параметров, граничные реберные ветви которых могут пересекаться.
4. Нахождение на основании (1.21) граничного комплексного узла области локализации корней.
5. Граничная реберная маршрутизация  $P_T$  по углам выхода реберных ветвей из граничного корневого узла с учетом результатов п.3.

Рассмотрим далее определение реберного маршрута в левой полуплоскости комплексной плоскости для случая интервальной неопределенности.

Если индексы любой пары из  $m$  интервальных коэффициентов полинома (1.12) не удовлетворяют условию (3.3), то при  $\varphi: P_m \rightarrow S$  в левой полуплоскости не может быть  $U^*$ . В этом случае для построения граничного реберного маршрута достаточно найти один из узлов  $GU_q$  и для него определить последовательность величин углов  $\Theta_i^q$ . Крайние углы в этой последовательности укажут на интервальные коэффициенты, определяющие две граничные реберные ветви. Согласно установленному свойству сохранения угловой очередности выхода  $RS_i^q$  из  $GU_q$ , если известна  $GRS_i^q$ , то последующей граничной реберной ветвью будет та, модуль разности между углом выхода которой и углом выхода  $GRS_i^q$  будет наименьшим (наибольшим). Установленной таким образом последовательности реберных ветвей, ограничивающих область локализации комплексного корня, однозначно соответствует последовательность  $GR_i^q$ , образующая искомый замкнутый граничный реберный маршрут. В данном случае он содержит  $2m$  ребер  $P_m$ .

Если для индексов хотя бы одной пары интервальных коэффициентов полинома (1.12) выполняется условие (1.18), то в  $S_r$  возможно наличие  $U^*$ . В этом случае также необходимо найти  $GU_q$ , затем для него определить последовательность  $\Theta_i^q$  и соответствующую ей последовательность ребер  $P_m$ . Если при движении по полученному таким образом реберному маршруту очередное ребро и следующее за ним окажутся образованными интервальными коэффициентами  $a_i$  и  $a_j$  с индексами, удовлетворяющими условию (1.18), то возможно, что  $U^* \in \varphi(G_{ij})$ . Поэтому в граничный реберный маршрут в таком случае следует включить все ребра грани  $G_{ij}$ . При этом общее число ребер маршрута будет равно  $4l + 2m$ , где  $l$  – количество выполняющихся неравенств (1.18).

На основании проведенного анализа составлен алгоритм определения граничного реберного маршрута  $P_m$  :

1. Определение координат вершин  $P_m$ , соответствующих граничным значениям  $m$  коэффициентов  $a_i$ ,  $i \in \overline{0, n}$ .
2. Нахождение для произвольной вершины  $V_q$  комплексного корня полинома (1.12), соответствующего узлу  $U_q$ ,  $q \in \overline{1, 2^m}$ .
3. Вычисление для  $U_q$  на основании выражений (1.21) и (1.22)  $m$  углов  $\Theta_i^q$ ,  $i \in \overline{0, n}$ .
4. Проверка условий (1.23) на принадлежность  $U_q$  границе  $S_r$ . Если хотя бы одно из условий (1.23) не выполняется, то следует выбрать другую вершину  $P_m$  и повторить п. 2 - 4.
5. Составление последовательности углов выхода реберных ветвей из  $GU_q$  и соответствующего ей упорядоченного набора интервальных коэффициентов.
6. Формирование реберного маршрута  $P_m$  в соответствии с полученной в п. 5 последовательностью изменения интервальных коэффициентов и с учетом выполнения условий (1.18)

Следует заметить, что при изменении параметров возможен переход каких-либо двух комплексносопряженных корней в кратные с дальнейшим движением в разные стороны по вещественной отрицательной полуоси. В результате некоторые граничные реберные ветви будут целиком или частично лежать на вещественной оси.

Данный случай не противоречит изложенным соображениям и отличается только тем, что при проверке выбранного корневого узла на принадлежность границе области локализации по п. 4 он может оказаться кратным корнем на вещественной оси и на его основе невозможно будет провести анализ углов

выхода реберных ветвей (все углы выхода будут равны 0 или 180 градусов). В этом случае следует выбрать другую вершину  $P_T$ , соответствующую комплексному корневому узлу, и повторить процедуру определения граничных реберных ветвей.

## 1.5. Примеры реберной маршрутизации

### *Пример 1*

Проиллюстрируем методику нахождения реберного маршрута на примере системы с тремя интервальными параметрами. Пусть характеристический полином имеет вид:

$$T_3 \cdot s^3 + T_2 \cdot s^2 + T_1 \cdot s + T_0 = 0,$$

где  $T_0 \in [10;28]$ ,

$T_1 \in [11;21]$ ,

$T_2 \in [3;5]$

$T_3 = 1$

В данном случае ПМ системы содержит 8 вершин:  $V_1(10,11,3)$ ,  $V_2(28,11,3)$ ,  $V_3(28,21,3)$ ,  $V_4(10,21,3)$ ,  $V_5(10,21,5)$ ,  $V_6(10,11,5)$ ,  $V_7(28,11,5)$ ,  $V_8(28,21,5)$ , где первая координата -  $T_0$ , вторая -  $T_1$ , третья -  $T_2$ .

Проверим систему на наличие в отображениях ПМ особых корневых узлов  $U^*$ . Для этого необходимо решить систему уравнений (1.11) для трех граней ПМС в одной из вершин  $V_1(10,11,3)$ .

В результате установлено, что в плоскости грани изменения параметров  $T_0$  и  $T_2$  проходит особая прямая, которая может отобразиться в особый корневой узел  $U^*(\alpha, j\beta)$  на границе  $S_r$ . Таким образом, ветви граничных корневых годографов этих параметров могут пересекаться и, при построении границы области локализации корней, необходимо отобразить все ребра грани  $G_{02}^1$  параметров  $T_0$  и  $T_2$ .

На следующем этапе необходимо определить граничный комплексный узел области локализации корней.

В выбранной вершине  $V_1(10,11,3)$  углы выхода ветвей реберного конечного годографа  $RS_i$  из соответствующего корневого узла  $U_1$  равны следующим величинам:

$$\Theta_0^1 = 338^\circ,$$

$$\Theta_1^1 = 221^\circ,$$

$$\Theta_2^1 = 154^\circ.$$

Проверим выполнение условия (1.23):

$$|\Theta_1^1 - \Theta_0^1| = 117^\circ < 180^\circ,$$

$$|\Theta_2^1 - \Theta_1^1| = 67^\circ < 180^\circ,$$

$$|\Theta_2^1 - \Theta_0^1| = 184^\circ > 180^\circ.$$

Условие (1.23) не выполняется, следовательно узел  $U_1$  не является граничным. Поэтому следует проверить другую вершину ПМ  $V_2(28,11,3)$ , отличающуюся значением  $T_0$ .

Для вершины  $V_2(28,11,3)$  получено

$$\Theta_0^2 = 203^\circ,$$

$$\Theta_1^2 = 127^\circ,$$

$$\Theta_2^2 = 226^\circ.$$

При этом выполняются все условия (1.23):

$$|\Theta_1^2 - \Theta_0^2| = 76^\circ < 180^\circ,$$

$$|\Theta_2^2 - \Theta_1^2| = 99^\circ < 180^\circ,$$

$$|\Theta_2^2 - \Theta_0^2| = 23^\circ < 180^\circ.$$

Следовательно, узел  $U_2$  является граничным и обход реберного граничного маршрута будем начинать с вершины  $V_2(28,11,3)$ .

Зная последовательность изменения углов выхода реберных корневых ветвей из узла  $U_2$ :

$$\Theta_1^2 < \Theta_0^2 < \Theta_2^2,$$

можно определить последовательность изменения интервальных параметров системы при обходе ПМ:

$$T_1 \rightarrow (T_0, T_2) \rightarrow (T_2, T_0) \rightarrow T_1 \rightarrow (T_0, T_2) \rightarrow (T_2, T_0) \rightarrow T_1.$$

Такая очередность соответствует граничному реберному маршруту ПМС по следующим его вершинам:

$$V_2 \rightarrow V_3 \rightarrow (V_4, V_8) \rightarrow V_5 \rightarrow V_6 \rightarrow (V_1, V_7) \rightarrow V_2.$$

Отображение реберного маршрута на верхнюю полу плоскость корней представлено на рис.1.6.

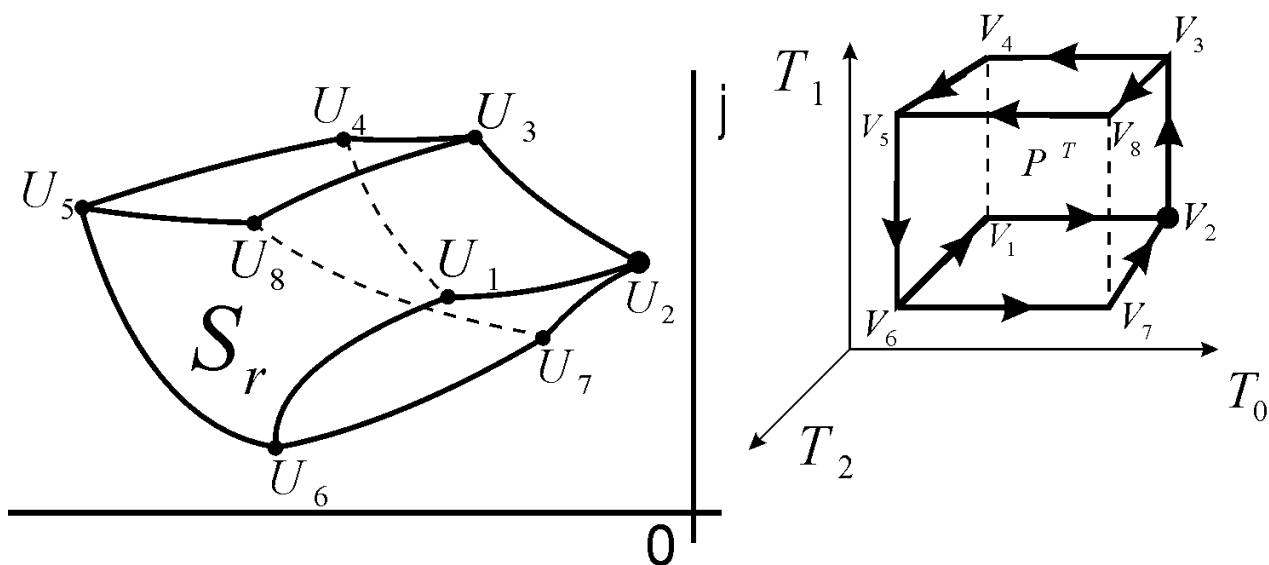


Рис.1.6. Отображение реберного маршрута при  $T_0 \in [10;28]$ ,  $T_2 \in [3;5]$

Как видно из рис.1.6, граничные реберные ветви не пересекаются. Однако при увеличении интервалов изменения ( $T_0 \in [1;28]$ ,  $T_2 \in [1;5]$ ) область локализации корней системы изменит свои границы. На рис.1.7 представлено отображение того же самого маршрута при увеличенных интервалах параметров  $T_0$  и  $T_2$ . Рис.1.7 подтверждает необходимость проверки реберного маршрута на наличие особых корневых узлов.

При дальнейшем увеличении диапазона изменения параметров ( $T_0 \in [0.1;28]$ ,  $T_2 \in [0.5;5]$ ) особый корневой узел появляется при пересечении других граничных реберных ветвей, соответствующих ребрам  $P_T$ , по которым изменяются параметры  $T_0$  и  $T_2$  (рис.1.8). Иллюстрация свидетельствует о том,

что при построении границы области локализации корней, необходимо отобразить не только все ребра грани  $G_{02}^1$  параметров  $T_0$  и  $T_2$ , но и все ребра грани  $G_{02}^4$  тех же параметров

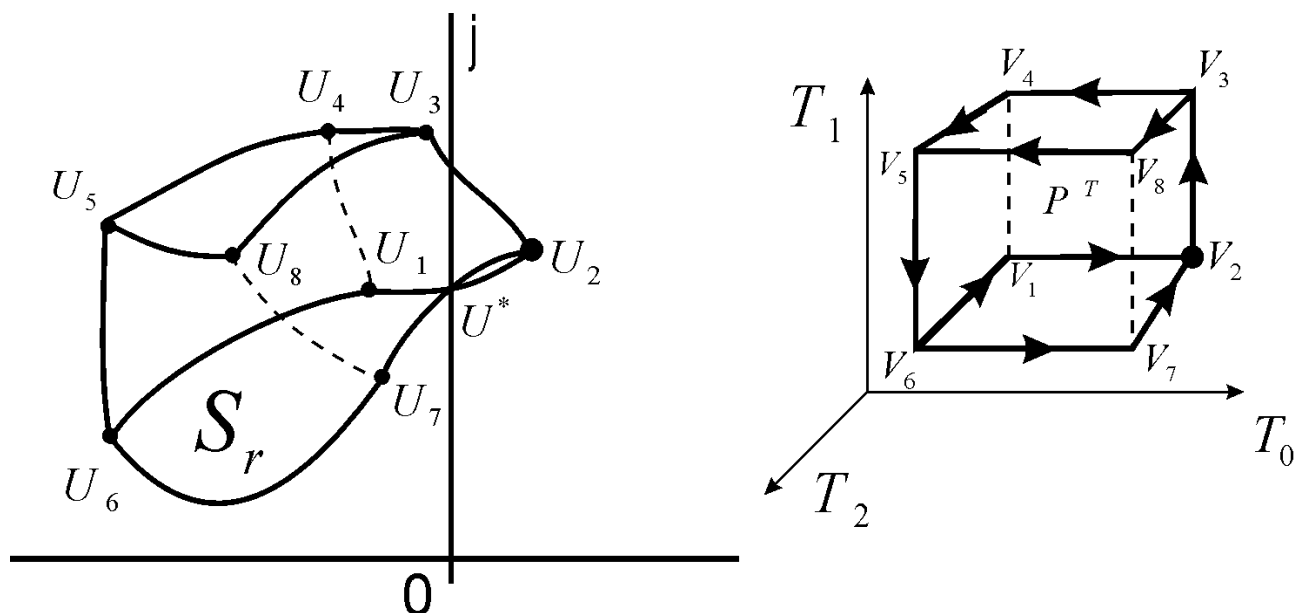


Рис.1.7. Отображение реберного маршрута при  $T_0 \in [1;28]$ ,  $T_2 \in [1;5]$

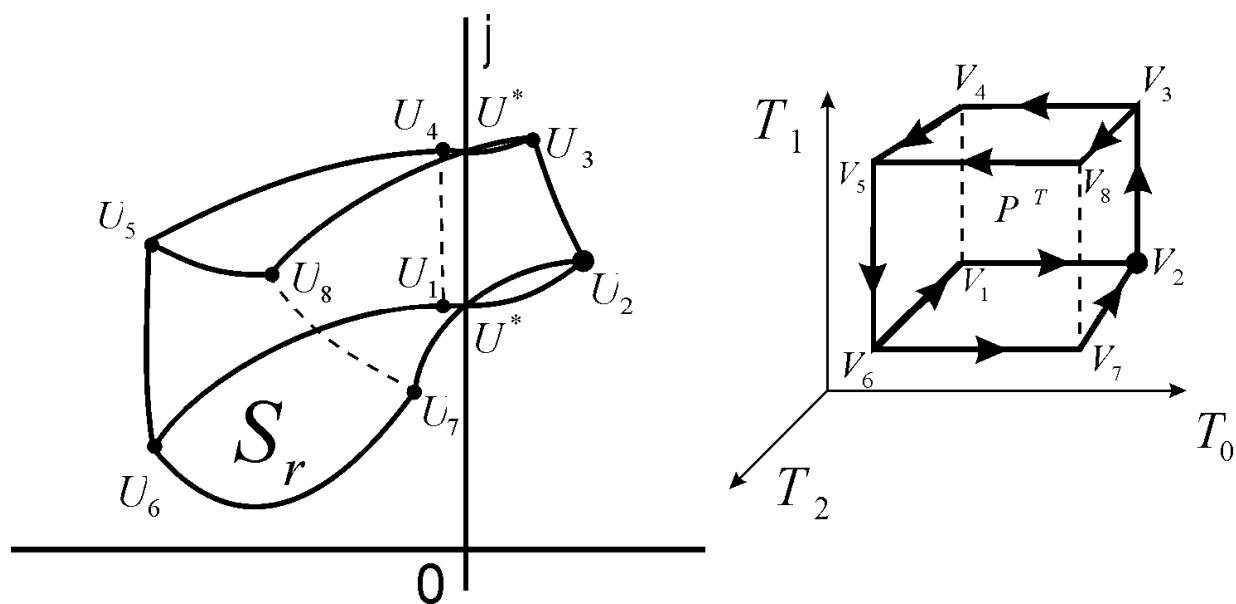


Рис.1.8. Отображение реберного маршрута при  $T_0 \in [0.1;28]$ ,  $T_2 \in [0.5;5]$



**Пример 2**

Пусть система имеет три интервальных параметра. Характеристический полином системы имеет вид:

$$T_4 \cdot s^4 + T_3 \cdot s^3 + T_2 \cdot s^2 + T_1 \cdot s + T_0 = 0$$

где  $T_0 \in [1;2.5]$ ,

$T_1 \in [1;1.5]$ ,

$T_2 \in [0.3;0.8]$ ,

$T_3 = 0.01$ ,

$T_4 = 0.25$ .

ПМ системы образован тремя интервальными параметрами и содержит 8 вершин:  $V_1(1,1,0.3)$ ,  $V_2(2.5,1,0.3)$ ,  $V_3(2.5,1.5,0.3)$ ,  $V_4(1,1.5,0.3)$ ,  $V_5(1,1.5,0.8)$ ,  $V_6(1,1,0.8)$ ,  $V_7(2.5,1,0.8)$ ,  $V_8(2.5,1.5,0.8)$ , где первая координата -  $T_0$ , вторая -  $T_1$ , третья -  $T_2$ .

Необходимо проверить систему на наличие особых корневых узлов  $U^*$ . Для этого необходимо решить систему уравнений (1.11) для трех граней ПМС в одной из вершин  $V_1(1,1,0.3)$ .

Решение показало, что в плоскости грани изменения параметров  $T_0$  и  $T_2$  проходит особая прямая, которая может отобразиться в особый корневой узел  $U^*(\alpha, j\beta)$  на границе  $S_r$ . Таким образом, ветви граничных корневых годографов этих параметров могут пересекаться и, при построении границы области локализации корней, необходимо отобразить все ребра грани  $G_{02}^1$  параметров  $T_0$  и  $T_2$ . Причем решение показало, что пересекаться ветви будут только на мнимой оси комплексной плоскости. Так как решение системы (1.11)

возможно только при значении  $\alpha = 0$ . Таким образом корневой узел  $U^*$  будет иметь координаты  $(0, j\beta)$

На следующем этапе необходимо определить граничный комплексный узел области локализации корней.

Поскольку характеристический полином системы имеет четвертый порядок, то интервальный корневой годограф может быть представлен на комплексной плоскости корней в виде четырех областей  $S_r$  локализации корней  $s_r$ . Для определения граничного комплексного узла будем анализировать углы выхода ветви корневого годографа корня  $s_1$ .

Так как условие (1.18) выполняется, то узел  $U_1$  является граничным и обход реберного граничного маршрута следует начинать с вершины  $V_1(1,1,0.3)$ . Данный вывод проиллюстрирован на рис.1.9.

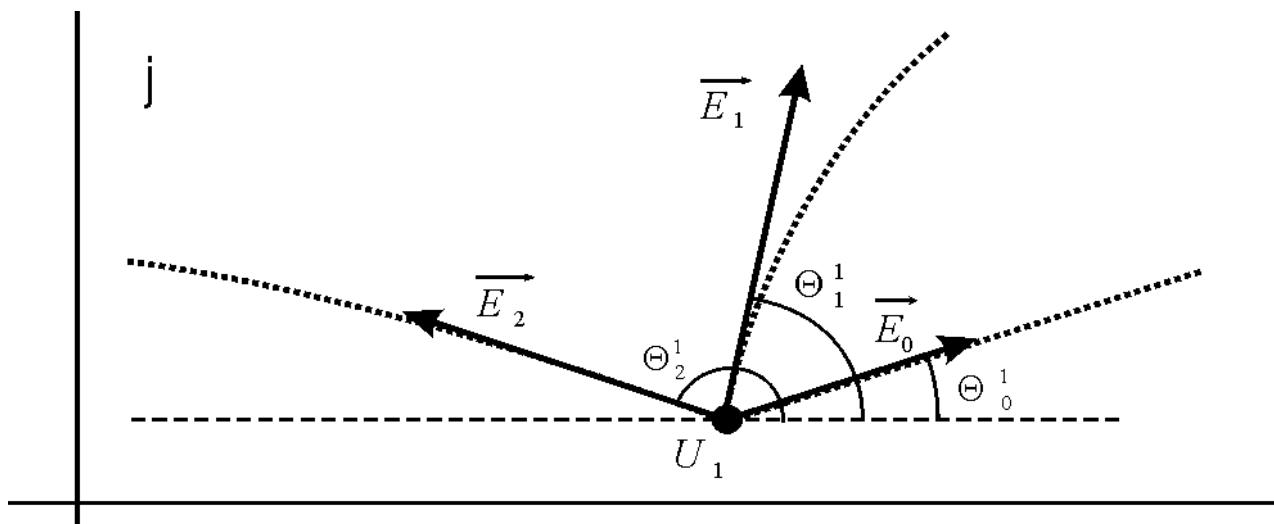


Рис.1.9. Определение граничного комплексного узла

Зная последовательность изменения углов выхода реберных корневых ветвей из узла  $U_1$ :

$$\Theta_0^1 < \Theta_1^1 < \Theta_2^1,$$

можно определить последовательность изменения интервальных параметров системы при обходе ПМ:

$$(T_2, T_0) \rightarrow T_1 \rightarrow (T_0, T_2) \rightarrow (T_2, T_0) \rightarrow T_1 \rightarrow (T_0, T_2).$$

Такая очередность соответствует граничному реберному маршруту ПМ по следующим его вершинам:

$$(V_1, V_7) \rightarrow V_2 \rightarrow V_3 \rightarrow (V_4, V_8) \rightarrow V_5 \rightarrow V_6 \rightarrow V_2 \rightarrow (V_1, V_7).$$

На рис.1.10 представлены области локализации корней характеристического полинома системы, построенный путем обхода найденного граничного реберного маршрута.

Как видно из рис.1.10, корневой узел  $U_1$  является граничным только для областей отображения сопряженных корней  $s_1$  и  $s_2$ . Для областей  $S_3$  и  $S_4$  корневой узел  $U_1$  - внутренний. Это обусловлено наличием особого корневого узла  $U^*(\alpha, j\beta)$ ,  $\alpha = 0$ . То есть при переходе через мнимую ось очередность углов выхода ветвей корневого годографа изменяется. Таким образом могут изменяться и граничные корневые узлы.

Поэтому, для избежания неточностей, необходимо отобразить все ребра грани  $G_{02}^1$  параметров  $T_0$  и  $T_2$ .

Рассмотренный пример подтверждает правильность утверждения о том, что граничный реберный маршрут является единым при построении всех областей локализации корней характеристического полинома.

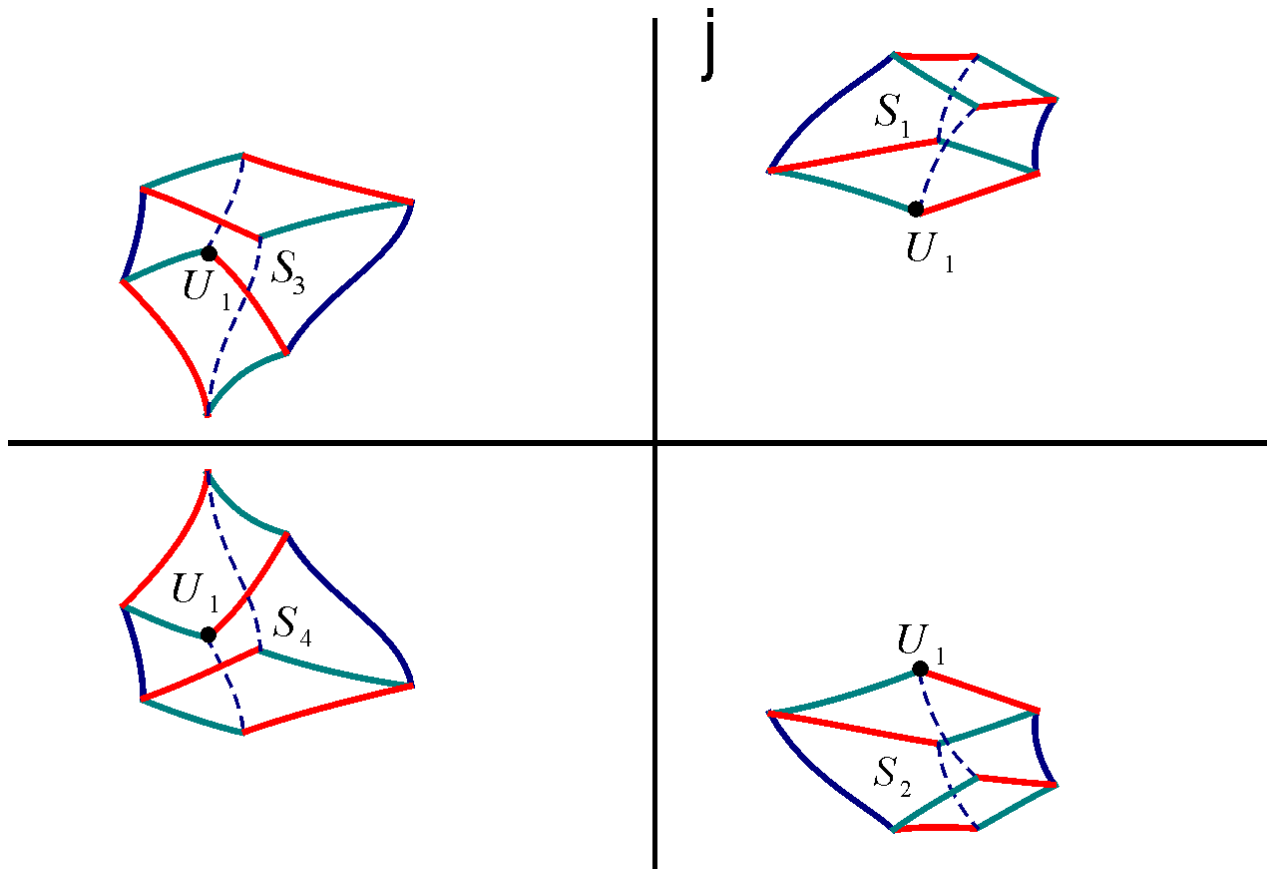


Рис.1.10. Области локализации корней

## 1.6. Основные результаты

Целью данной главы являлось получение алгоритмов определения набора существенных ребер (реберного маршрута) для ПМ по имеющейся информации о структуре полинома и интервалах неопределенности его параметров.

Для этого были установлены основные свойства отображения ПМ на комплексную плоскость корней и сделан вывод о том, что необязательно строить отображения всех ребер ПМ для определения границ локализации корней, а достаточно найти и отобразить только граничные ребра. Отображением последних будут являться граничные реберные ветви интервального корневого годографа.

Показано, что реберные ветви могут входить в состав границы как полностью, так и частично, причем в последнем случае они пересекаются в  $U^*$ . Данное свойство необходимо учитывать при граничной маршрутизации  $P_T$ , в связи с чем, представляется целесообразным заранее знать о возможности наличия  $U^*$  в области  $S_r$ . Для этого разработаны методики проверки плоскостей граней ПМ на наличие особых прямых для интервальной и аффинной неопределенности. Наличие таких особых прямых указывает на возможность существования  $U^*$  при построении границ областей локализации корней.

Установлено, что для нахождения граничного реберного маршрута необходимо определить углы выхода всех реберных ветвей корневого годографа из граничного корневого узла. В связи с этим получено условие принадлежности корневого узла границе области локализации корня. Оно заключается в принадлежности всех реберных векторов  $\vec{E}_i$  углу, меньшему  $180^\circ$ .

Разработаны методики определения реберного маршрута ПМ в случаях аффинной и интервальной неопределенностей для левой полуплоскости корней.

Реберный маршрут может содержать как последовательно соединенные ребра (если нет особого корневого узла), так и последовательно-параллельно соединенные (при наличии особого корневого узла). В последнем случае необходимо полностью отображать границы грани ПМ, в плоскости которой существует особая прямая, и границы параллельной ее грани.

Доказано, что реберный маршрут является единственным для построения областей локализации всех корней интервальной системы.

Полученные алгоритмы нахождения реберных маршрутов позволят в будущем упростить задачу анализа и синтеза робастных систем при интервальном задании их параметров.

Приведены примеры, иллюстрирующие определение реберного маршрута для параметрического многогранника интервальных систем.

## ГЛАВА 2. АНАЛИЗ ГАРАНТИРУЕМОЙ РОБАСТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

### 2.1. Постановка задачи

Очевидно, что для проектировщика системы с интервальными параметрами важен не только анализ ее робастной устойчивости [61, 62], гарантирующей сохранение устойчивости при любых возможных значениях интервальных параметров, но и оценка обеспечения при этом допустимых показателей качества управления. Такая постановка задачи, согласно [5, 63, 64], соответствует анализу робастной региональной устойчивости, которая определяется вхождением корней характеристического полинома с интервальными параметрами в заданную область левой полуплоскости. Границы этой области могут определять, например, минимальную степень устойчивости системы и максимальную колебательность.

На рис.2.1 представлены возможные варианты задания областей расположения корней.

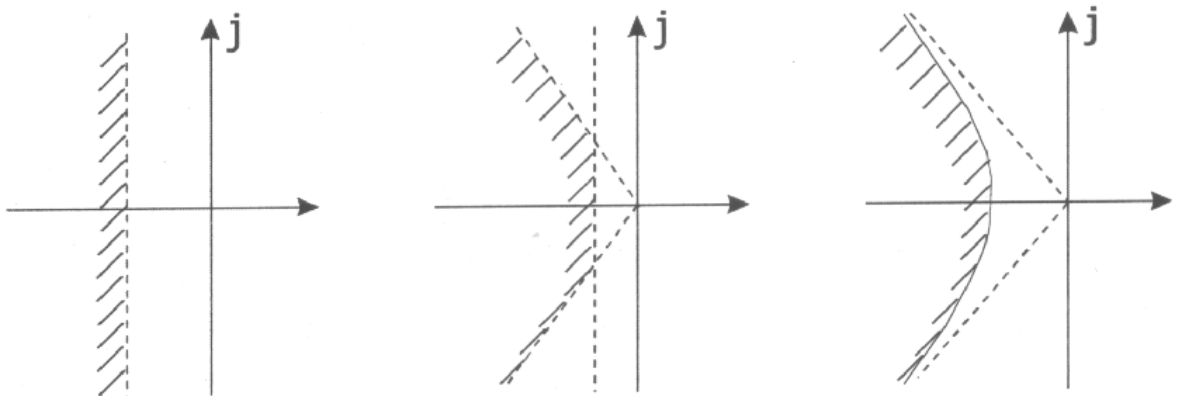


Рис.2.1. Варианты задания областей расположения корней

Граница области описывается выражением:

$$X(j\omega) = -\delta(\omega) + j\omega, \quad -\infty < \omega < \infty \quad (2.1)$$

На основе результатов главы 1 для анализа региональной робастной устойчивости целесообразно использовать информацию о реберном маршруте  $P_T$ .

Очевидно, что система будет являться регионально робастно устойчивой, если все корни лежат в определенной области левой полуплоскости комплексной плоскости. Следовательно, при определении реберного маршрута можно не учитывать особые корневые узлы (ОКУ) на мнимой оси. Таким образом, решения системы (1.11) с  $\alpha = 0$  не являются признаком наличия ОКУ в области локализации корней характеристического полинома. Это упростит реберный маршрут. Таким образом, при определении реберного маршрута для анализа региональной робастной устойчивости, следует обращать внимание только на решения (1.11) при  $\alpha \neq 0$  и  $\beta \neq 0$ .

Проверка региональной робастной устойчивости на реберном маршруте возможна путем непосредственного построения области  $S_r$  в виде корневых траекторий и анализа их вхождения в заданные области. Однако, это может быть связано со значительными вычислительными трудностями, что затрудняет анализ робастной региональной устойчивости. Поэтому в качестве других способов предлагается использовать известный метод D-разбиения а также известное уравнение Теодорчика-Эванса.

## **2.2. Анализ региональной робастной устойчивости на основе построения многопараметрического интервального корневого годографа**

Так как, согласно реберной теореме [18], области локализации корней ограничены отображениями ребер, то можно утверждать, что они ограничены реберными ветвями интервальных корневых годографов. Такой вывод позволяет рассматривать объединение всех замкнутых областей локализации



корней, являющееся полным отображением  $P_m$  как некоторый многопараметрический интервальный корневой годограф (по аналогии, например, с интервальным годографом Михайлова и многопараметрическим корневым годографом из [23]).

На основе найденного ранее реберного маршрута для построения интервального корневого годографа необходимо отобразить на комплексной плоскости корней все ребра, входящие в реберный маршрут. Для этой цели можно использовать современные программные аппараты, такие как MathCad, MatLab и другие.

Для анализа системы по интервальному корневому годографу можно использовать классические методы корневых оценок качества системы. В частности, предложенный метод дает исчерпывающую информацию о показателях качества при любых изменениях интервальных параметров. Таким образом, мы можем оценить региональную робастную устойчивость системы при заданных интервалах изменения параметров.

Приведем методику анализа региональной робастной устойчивости на основе построения многопараметрического интервального корневого годографа [65, 66]. Она включает следующие этапы:

1. Приведение характеристического полинома системы к виду (1.1).
2. Определение реберного маршрута для построения областей локализации корней характеристического полинома (см. 1.4).
3. Если при проверке реберного маршрута на наличие особых корневых узлов решение системы (1.11) дало результат  $\alpha = 0$ , то  $U^*$  принадлежит мнимой оси. Таким образом, заданная система является неустойчивой и анализ на этом можно завершить.
4. Построение границ областей локализации корней полинома с интервальными параметрами на комплексной плоскости корней.
5. Определение степени устойчивости и колебательности по расположению корней.

6. Вывод о соответствии полученных корневых оценок с заданными показателями качества.

Рассмотрим применение предложенной методики анализа региональной робастной устойчивости на примере электромеханической системы (ЭМС) с упругими связями. Система автоматической стабилизации упругой силы, состоит из упругого элемента, электропривода, датчика и регулятора силы натяжения.

На рис.2.2 представлена функциональная схема системы, по которой определяется характеристический полином.

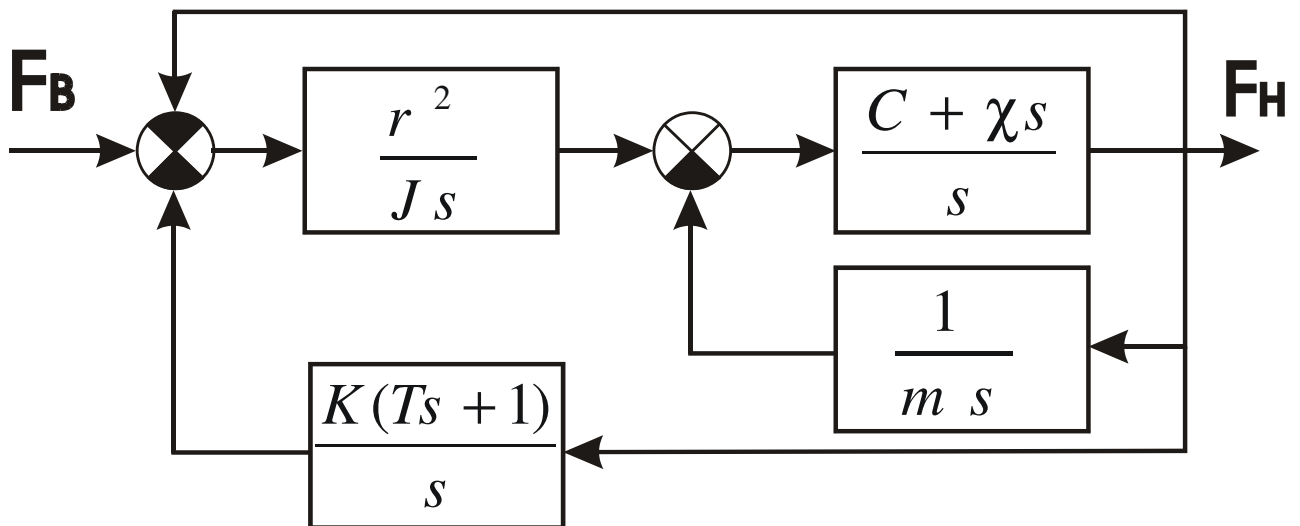


Рис.2.2. Функциональная схема ЭМС стабилизации упругой силы

Характеристический полином системы имеет вид

$$a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0,$$

где  $a_3 = mlJ$ ,

$$a_2 = J\chi + m\chi r^2 (1 + Tk_1 k_2),$$

$$a_1 = Jc + mcr^2 + mk_1 k_2 r^2 (\chi + Tc),$$

$$a_0 = mck_1 k_2 r^2,$$

$m$  - масса груза,

$l$  - длина упругого элемента,

$J$  - момент инерции электропривода системы,

$\chi$  - удельный коэффициент демпфирования упругого элемента,

$c$  - удельная жесткость упругого элемента,

$r$  - радиус приводного шкива электропривода,

$k_1$  - коэффициент усиления электрической части привода,

$k_2$  коэффициент передачи ПИ-регулятора,

$T$  - постоянная времени ПИ-регулятора.

Постоянные параметры обобщенного объекта управления имеют значения

$$J = 0.5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2,$$

$$\chi = 1 \cdot 10^4 \text{ нс},$$

$$c = 2 \cdot 10^4 \text{ н},$$

$$r = 0.1 \text{ м}.$$

Его интервальные параметры заданы диапазонами:

$$m \in [50, 500] \text{ кг},$$

$$l \in [50, 100] \text{ м},$$

$$k_1 \in [5, 50].$$

Настройки регулятора  $k_2 = 1$ ,  $T = 0.01 \text{ с}$  определены для средних значений интервальных параметров.

Приведем характеристический полином системы к виду (1.1)

$$l \cdot A_1(s) + \frac{1}{m} \cdot A_2(s) + k_1 \cdot A_3(s) + A_4(s) = 0,$$

где  $A_1(s) = Js^3$ ;

$$A_2(s) = J(c + \chi s)s;$$

$$A_3(s) = ck_2 r^2 + (ck_2 T r^2 + \chi k_2 r^2)s + \chi T k_2 r^2 s^2;$$

$$A_4(s) = (c + \chi s)r^2 s.$$

ПМ образован тремя интервальными параметрами и содержит 8 вершин (Рис.2.3):  $V_1(50,50,5)$ ,  $V_2(500,50,5)$ ,  $V_3(500,50,50)$ ,  $V_4(50,50,50)$ ,  $V_5(50,100,5)$ ,  $V_6(500,100,5)$ ,  $V_7(500,100,50)$ ,  $V_8(50,100,50)$ , где первая координата -  $m$ , вторая -  $l$ , третья -  $k_1$ .

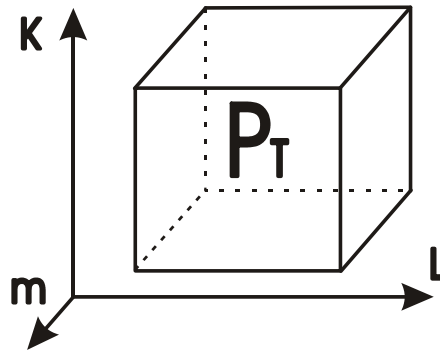


Рис.2.3. Параметрический многогранник для трех интервальных параметров

Для трех функций вида (1.6) в первой вершине ПМ определены постоянные полюсы  $(3.34+j3.88, -3.34-j3.88, -1.53)$ , а также три набора нулей (три нулевых корня  $A_1(s)$ ; корни  $A_2(s)$ : 0 и  $-2$ ; корни  $A_3(s)$ :  $-2$  и  $-100$ ). Для корневого узла  $3.34+j3.88$  на основании (1.10), (1.11) найдены  $\Theta_m^{V_1} = 34^\circ$ ,  $\Theta_l^{V_1} = 5^\circ$ ,  $\Theta_{k_1}^{V_1} = 86^\circ$ . При таких углах условие (1.23) выполняется и, следовательно,  $V_1$  принадлежит реберному маршруту.

Проверка отображения ПМ на наличие особых корневых узлов показала их отсутствие на комплексной плоскости. Поэтому на основании  $\Theta_l^{V_1} < \Theta_m^{V_1} < \Theta_{k_1}^{V_1}$  имеем последовательность изменения параметров системы из вершины  $V_1$ :  $l \rightarrow m \rightarrow k_1 \rightarrow l \rightarrow m \rightarrow k_1 \rightarrow l$ . Такая очередность соответствует граничному реберному маршруту ПМ по следующим его вершинам:  $V_1 \rightarrow V_5 \rightarrow V_6 \rightarrow V_7 \rightarrow V_3 \rightarrow V_4 \rightarrow V_1$ . Путем обхода этой границы построены и представлены на рис.2.4 многопараметрический интервальный корневой годограф (МИКГ), по которому определены минимальная степень устойчивости  $\alpha_{\min} = 0,34$  и максимальная колебательность  $\mu_{\max} = 86^\circ$ .

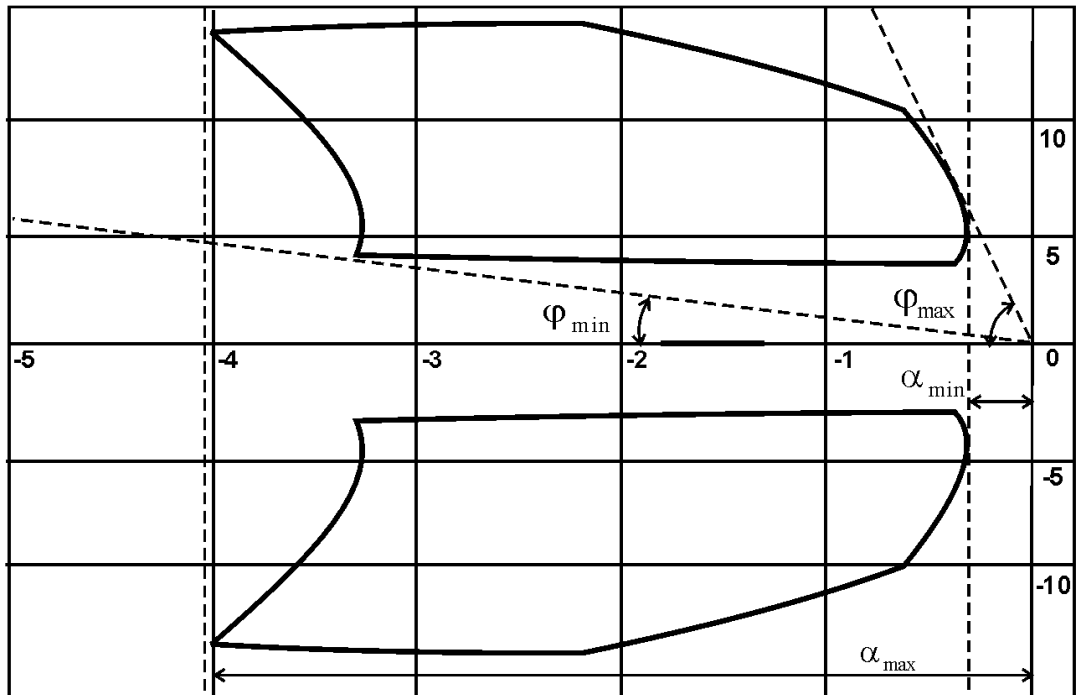


Рис.2.4. Многопараметрический интервальный корневой годограф

Программа построения многопараметрического интервального корневого годографа по каждому ребру ПМ в ППП MathCad приведена в приложении 1.

### 2.3. Анализ региональной робастной устойчивости на основе реберного D-разбиения

Заметим, что при большом числе интервально неопределенных параметров непосредственное построение границ области локализации в виде корневых траекторий может быть связано со значительными вычислительными трудностями. Поэтому представляется целесообразным, следуя [46], использовать метод робастного D-разбиения, который позволяет выделять в пространстве интервальных параметров области, отвечающие требуемому расположению корней характеристического полинома в левой полуплоскости.

Реберный маршрут состоит из непрерывной последовательности ребер и его отображение на плоскость корней есть объединение отображений этих

ребер. Поэтому устойчивость системы на реберном маршруте определяется устойчивостью на граничных ребрах  $P_T$ . Проверить последнюю легко с помощью реберного D-разбиения, которое предусматривает построение областей D-разбиения как по отдельным ребрам, так и по парам ребер на всем установленном реберном маршруте.

D-разбиение по одному ребру заключается в построении области D-разбиения по одному интервальному параметру  $T_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ , изменяющемуся по граничному ребру  $P_T$  при значениях остальных интервальных параметров в одной из вершин  $V$  этого ребра.

Характеристическое уравнение для построения D-разбиения по одному ребру имеет вид:

$$T_i \cdot A_i(s) + \sum_k T_k^q \cdot A_k(s) + B(s) = 0, \quad s = -\delta(\omega) + j\omega. \quad (2.2)$$

D-разбиение по двум ребрам заключается в построении области D-разбиения по двум интервальным параметрам  $T_i$  и  $T_j$ , изменяющимся по граничным ребрам  $P_T$  из одной вершины  $V$ , определяющей значения остальных интервальных параметров.

Характеристическое уравнение для построения D-разбиения по двум ребрам имеет вид

$$T_i \cdot A_i(s) + T_j \cdot A_j(s) + \sum_k T_k^q \cdot A_k(s) + B(s) = 0, \quad s = -\delta(\omega) + j\omega \quad (2.3)$$

Принадлежность интервалов каждого параметра или областей возможного изменения различных пар параметров соответствующим областям D-разбиений свидетельствует о нахождении корней интервальной системы в заданной области и, следовательно, о ее робастной региональной устойчивости.

Сформулируем основанные на реберном D-разбиении критерии робастной региональной устойчивости.

Критерий 1. Для обеспечения в системе (1.1) робастной региональной устойчивости с границей  $s = -\delta(\omega) + j\omega$  необходимо и достаточно, чтобы на реберном маршруте  $P_T$  интервал изменения каждого параметра  $T_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ , принадлежал построенной при условии (2.2) области D-разбиения по граничному ребру, соответствующему изменению  $T_i$ .

Данный критерий предусматривает построение в плоскости каждого интервального параметра двух областей региональной устойчивости по одному уравнению D-разбиения.

Критерий 2. Для обеспечения в системе (1.1) робастной региональной устойчивости с границей  $s = -\delta(\omega) + j\omega$  необходимо и достаточно, чтобы параметрическая область каждой из  $m$  граней  $P_T$ , содержащих по два различных ребра граничного маршрута, принадлежала построенной при условии (2.3) области D-разбиения по двум граничным ребрам грани.

Данный критерий предусматривает построение областей региональной устойчивости в плоскостях пар интервальных параметров.

Сравнивая трудоемкость каждого из критериев, заметим, что для инженерной методики анализа устойчивости с применением современных средств вычислительной техники больше подходит первый критерий. Используемые в нем уравнения D-разбиения полностью задают границы областей устойчивости, не требуя построения особых прямых и определения для них направления штриховки.

Приведем методику анализа региональной робастной устойчивости на основе реберного D-разбиения:

1. Приведение характеристического полинома системы к виду (1.1).
2. Определение требуемых показателей качества исследуемой системы путем задания границы области расположения корней (2.1).
3. Определение реберного маршрута параметрического многогранника (см.1.4).

4. Построение кривых D-разбиения по каждому из интервальных параметров, соответствующих ребрам найденного граничного реберного маршрута, с учетом заданной границы расположения корней.
5. Определение отрезков устойчивости для каждого параметра.
6. Проверка на принадлежность интервалов изменения каждого переменного параметра соответствующему отрезку устойчивости.
7. Вывод о региональной робастной устойчивости системы.

Проверим данную методику на выше рассмотренном примере. Итак, для заданной системы был найден граничный реберный маршрут обхода параметрического многогранника. Для анализа необходимо построить шесть областей D-разбиения, соответствующих изменению параметров по каждому из граничных ребер  $P_T$ . Для этого были составлены три уравнения D-разбиения по  $l$ ,  $m$ ,  $k_I$ , приведенные в приложении 2.

Пусть задана граница робастной устойчивости  $s = -0.3 + j\omega$ . Проведем анализ региональной робастной устойчивости ЭМС.

На рис.2.5 показаны области D-разбиения для параметра  $m$  при фиксированных остальных интервальных параметрах в двух вершинах. Сплошной линией показан график кривой D-разбиения при  $k_I=50$ ,  $l=50$ . Пунктирная кривая построена при  $k_I=5$ ,  $l=100$ .

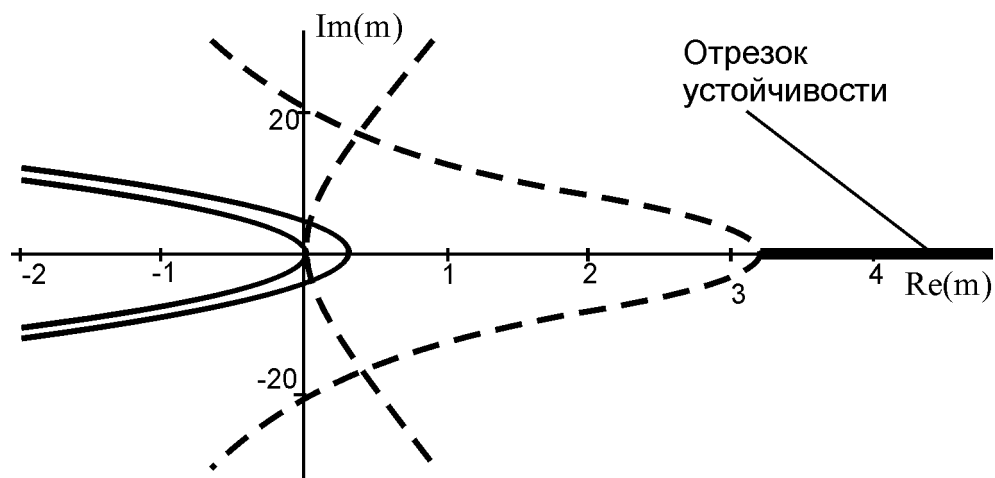


Рис.2.5. Кривые D-разбиения для параметра  $m$



Из иллюстрации видно, что в системе сохраняется робастная устойчивость при изменении массы в диапазоне  $m \in [50, 500] \text{ кг}$ , так как заданный интервал изменения массы полностью входит в найденный отрезок устойчивости.

На рис.2.6 показаны области D-разбиения для параметра  $l$  при фиксированных остальных интервальных параметрах в двух вершинах. Сплошной линией показан график кривой D-разбиения при  $k_l=50, m=50$ . Пунктирная кривая построена при  $k_l=5, m=500$ .

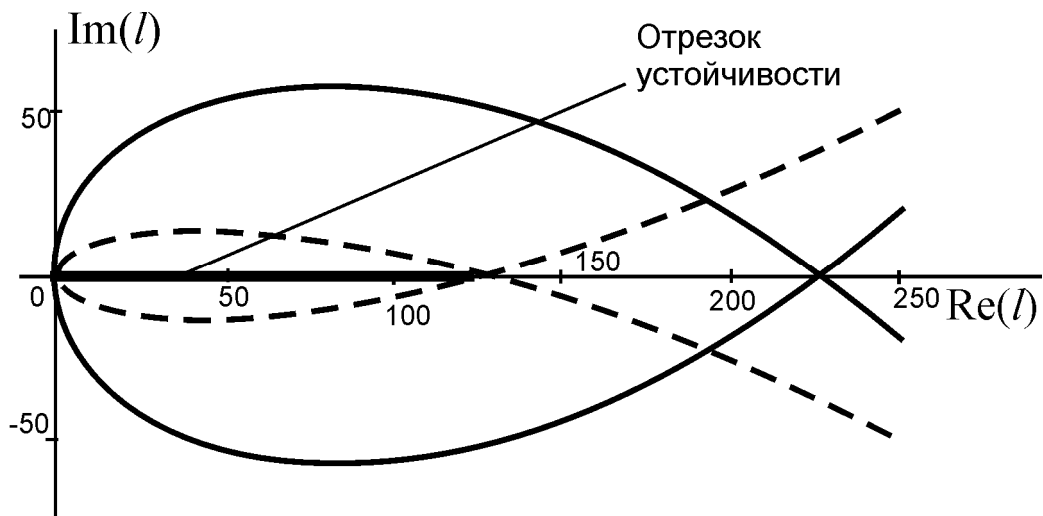


Рис.2.6. кривые D-разбиения для параметра  $l$

Из иллюстрации видно, что в системе сохраняется робастная устойчивость при изменении длины троса в диапазоне  $l \in [50, 100] \text{ м}$ , так как заданный интервал изменения длины полностью входит в найденный отрезок устойчивости.

На рис.2.7 показаны области D-разбиения для параметра  $k_l$  при фиксированных остальных интервальных параметрах в двух вершинах. Сплошной линией показан график кривой D-разбиения при  $l=50, m=50$ . Пунктирная кривая построена при  $l=100, m=500$ .

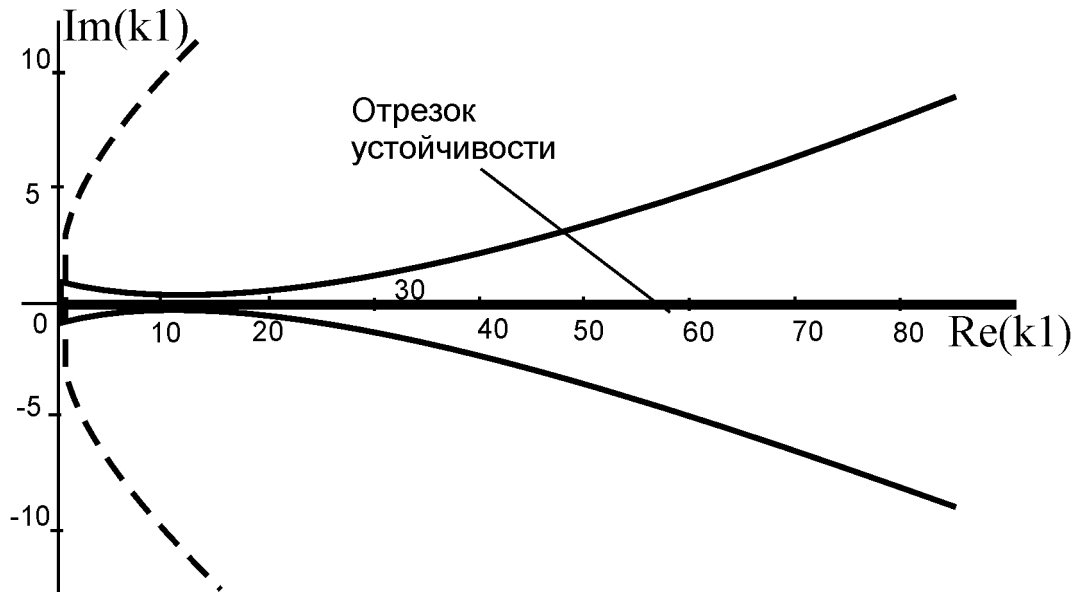


Рис.2.7. Кривые D-разбиения для параметра  $k_1$

Из иллюстрации видно, что в системе сохраняется робастная устойчивость при изменении коэффициента усиления в диапазоне  $k_1 \in [5, 50]$ , так как заданный интервал изменения коэффициента полностью входит в найденный отрезок устойчивости.

Таким образом, проанализировав систему, можно сделать вывод о робастной региональной устойчивости ЭМС, определяемой границей  $s = -0.3 + j\omega$ .

#### 2.4. Анализ региональной робастной устойчивости на основе уравнения Теодорчика-Эванса

Анализ региональной робастной устойчивости на основе D-разбиения предусматривает для каждого интервально неопределенного параметра определение максимального интервала его изменения, при котором сохраняется региональная робастная устойчивость, и сравнение этого интервала с заданным интервалом неопределенности.

Данная процедура может быть легко выполнена без графических построений. Для этого следует использовать известное уравнение Теодорчика-Эванса [67], позволяющее аналитически находить точки пересечения ветвей реберного маршрута с заданной границей и соответствующие им значения интервальных параметров.

Представим уравнение (1.1), выделив варьируемый параметр  $T_i$  в виде:

$$T_i \cdot A_i(s) + D_q(s) = 0, \quad s = -\delta(\omega) + j\omega, \quad (2.4)$$

где 
$$D_q(s) = \sum_k T_k^q \cdot A_k(s) + B(s).$$

Запишем интервально неопределенный параметр  $T_i$  в виде  $T_i = U + jV$ .

Найдем из (2.4) функцию отображения комплексных плоскостей  $T_i$  и  $s$ :

$$-T_i = \frac{D_q(s)}{A_i(s)}, \quad (2.5)$$

Пусть  $-\infty < U < \infty$ ,  $V = const$ . Очевидно, на плоскости комплексного переменного  $s$  образуются траектории корней уравнения (1.1), которые назовем корневым годографом с постоянной комплексной частью интервально неопределенного параметра. Основное аналитическое уравнение такого корневого годографа

$$F(\delta, \omega) \cdot P(\delta, \omega) - E(\delta, \omega) \cdot R(\delta, \omega) + V(P^2(\delta, \omega) + R^2(\delta, \omega)) = 0 \quad (2.6)$$

где  $E(\delta, \omega) = \operatorname{Re} D_q(s);$

$$F(\delta, \omega) = \operatorname{Im} D_q(s);$$

$$P(\delta, \omega) = \operatorname{Re} A_i(s);$$

$$R(\delta, \omega) = \operatorname{Im} A_i(s).$$

Поскольку в рассматриваемых классах реальных ИС интервально-неопределенные параметры изменяются в области действительных чисел, т.е.  $V = 0$ , то из уравнения (2.6) следует известное уравнение корневого годографа Теодорчика-Эванса

$$F(\delta, \omega) \cdot P(\delta, \omega) - E(\delta, \omega) \cdot R(\delta, \omega) = 0 \quad (2.7)$$

Корневой годограф симметричен относительно действительной оси плоскости  $s$ , причем ось  $\delta$  принадлежит годографу. В каждой точке корневого годографа можно найти соответствующее значение варьируемого параметра

$$T_i = \frac{E(\delta, \omega) \cdot P(\delta, \omega) - F(\delta, \omega) \cdot R(\delta, \omega)}{P^2(\delta, \omega) + R^2(\delta, \omega)}. \quad (2.8)$$

Выражения (2.7), (2.8) позволяют легко установить допустимые пределы вариации параметра, при которых система сохраняет устойчивость. Поскольку система робастно устойчива, если все корни уравнения (1.1) лежат левее границы (2.1) комплексной плоскости  $s$ , то достаточно найти точки пересечения ветвей корневого годографа с границей (2.1) и подставить их координаты в формулу параметра (2.8), т. е. решить уравнение (2.7) при заданном значении  $\delta$

$$F(\omega) \cdot P(\omega) - E(\omega) \cdot R(\omega) = 0, \quad (2.9)$$

и полученные действительные корни  $\omega_k$  подставить в выражение

$$T_i = \frac{E(\omega_k) \cdot P(\omega_k) - F(\omega_k) \cdot R(\omega_k)}{P^2(\omega_k) + R^2(\omega_k)}; k = \overline{1, r}. \quad (2.10)$$

Минимальное и максимальное значения  $T_i$  и определяют допустимые пределы изменения варьируемого параметра, при которых система сохраняет свою устойчивость.

Таким образом, с помощью метода Теодорчика-Эванса можно проверять систему не только на устойчивость, но и на соответствие определенной степени устойчивости и качеству регулирования.

Методика анализа региональной робастной устойчивости на основе уравнения Теодорчика-Эванса содержит следующие этапы:

1. Приведение характеристического полинома системы к виду (1.1).

2. Определение требуемых показателей качества исследуемой системы путем задания границы области расположения корней (2.1).
3. Определение реберного маршрута для построения областей локализации корней характеристического полинома (см. п. 1.4).
4. Решение уравнения (2.9) относительно  $\omega$  для каждого интервально-неопределенного параметра, соответствующего ребрам найденного граничного реберного маршрута при заданной границе (2.1).
5. Определение пределов  $T_i$  путем решения (2.10) при найденных в п. 4 действительных значениях  $\omega_k$ .
6. Определение интервалов устойчивости для каждого параметра. Для этого можно использовать любой из доступных критериев устойчивости системы при значениях параметров взятых из различных диапазонов.
7. Проверка на принадлежность интервалов изменения каждого переменного параметра соответствующему интервалу устойчивости.
8. Вывод о региональной робастной устойчивости системы.

Проведем анализ робастной региональной устойчивости известной системы (см. п.2.3) с помощью предложенного метода. Для данной системы был найден граничный реберный маршрут обхода параметрического многогранника.

Пусть задана граница робастной устойчивости  $s = -0.3 + j\omega$ .

Для анализа составлены и приведены в приложении 3 три пары уравнений (2.9) и (2.10), соответствующих трем интервально неопределенным параметрам.

В результате вычислений было получено шесть решений уравнения (2.10) соответствующих изменению параметров, соответствующих каждому из граничных ребер  $P_T$ .

При изменении массы были получены следующие результаты, соответствующие двум ребрам  $P_T$ .

При  $k_I=50, l=50$

$$m = \begin{pmatrix} -58.161 \\ 0.303 \end{pmatrix}.$$

Система робастно устойчива при  $m \in (-\infty; -58.161) \cup (0.303; \infty)$ .

При  $k_I=5, l=100$

$$m = \begin{pmatrix} 3.207 \\ 3.058 \cdot 10^4 \end{pmatrix}.$$

Система робастно устойчива при  $m \in (3.207; 3.058 \cdot 10^4)$ .

Пересечение найденных интервалов дает отрезок устойчивости для данного параметра:  $m \in (3.207; 3.058 \cdot 10^4)$ .

Из полученного решения видно, что в системе сохраняется робастная устойчивость при изменении массы в диапазоне  $m \in [50, 500] \text{ кг}$ , так как заданный интервал изменения массы полностью входит в найденный отрезок устойчивости.

При изменении длины были получены следующие результаты, соответствующие двум ребрам  $P_T$ .

При  $k_I=50, m=500$ ,

$$l = \begin{pmatrix} -1.211 \cdot 10^5 \\ 127.705 \\ 6.236 \cdot 10^5 \end{pmatrix}.$$

Исключив отрицательные значения, получили отрезок устойчивости  $l \in (0; 127.705)$ .

При  $k_I=5, m=50$ ,

$$l = \begin{pmatrix} -1.317 \cdot 10^5 \\ 226.815 \\ 5.522 \cdot 10^4 \end{pmatrix}.$$

Исключив отрицательные значения, получили отрезок устойчивости  $l \in (0; 226.815)$ .

Пересечение найденных интервалов дает отрезок устойчивости для данного параметра:  $l \in (0; 127.705)$ .

Таким образом, заданная робастная региональная устойчивость сохраняется, если длина троса не выходит за пределы диапазона  $l \in (0; 127.705)$  м. Так как заданный интервал изменения длины троса  $l \in [50, 100]$  м полностью входит в найденный отрезок устойчивости, то система является робастно устойчивой при любом изменении длины троса в заданном интервале.

При изменении коэффициента передачи  $k_1$  были получены следующие результаты, соответствующие двум ребрам  $P_T$ .

При  $l=100, m=500$ ,

$$k_1 = 0.339.$$

Система робастно устойчива при  $k_1 \in (0.339; +\infty)$ .

При  $l=50, m=50$ ,

$$k_1 = 0.606.$$

Система робастно устойчива при  $k_1 \in (0.606; +\infty)$ .

В результате пересечения этих интервалов, получается отрезок устойчивости для данного параметра:  $k_1 \in (0.606; +\infty)$ . В системе сохраняется робастная устойчивость при изменении коэффициента передачи в диапазоне  $k_1 \in [5, 50]$ , так как заданный интервал изменения полностью входит в отрезок устойчивости  $k_1 \in [0.606, \infty]$ .

Таким образом, ИС является робастно устойчивой с заданным качеством при любых интервальных параметрах из многогранника  $P_T$ .

## 2.5. Основные результаты

1. Разработана методика анализа робастной региональной устойчивости ИС на основе реберной маршрутизации ПМ путем построения многопараметрического интервального корневого годографа. Методика предусматривает нахождение корневых траекторий и поэтому анализ робастной региональной устойчивости является достаточно наглядным и позволяет оценивать все корневые показатели качества ИС.

2. Разработана методика анализа робастной региональной устойчивости ИС на основе реберной маршрутизации ПМ с использованием метода робастного D-разбиения. Данный подход не требует непосредственного вычисления корней ИС и поэтому менее трудоемок для проектировщика. С этих позиций предпочтение следует отдавать D-разбиению по одному параметру (реберному D-разбиению).

3. Разработана методика анализа робастной региональной устойчивости ИС на основе реберной маршрутизации ПМ с использованием уравнения Теодорчика-Эванса. Данная методика полностью исключает графические построения, поскольку является аналитической. Решение уравнений Теодорчика-Эванса позволяет наиболее точно определить интервалы устойчивости параметров исследуемой ИС.

4. Приведенные примеры наглядно иллюстрируют работоспособность и эффективность разработанных методик.



## **ГЛАВА 3. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ИНТЕРВАЛЬНЫХ СИСТЕМ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩИХ ГАРАНТИРУЕМУЮ ДИНАМИКУ**

### **3.1. Постановка задачи**

Синтезу линейных регуляторов в условиях интервальной неопределенности параметров посвящено большое число публикаций [41, 42, 43, 68, 44, 69, 70, 71].

Одной из основных задач, решаемых при проектировании интервальных систем автоматического управления, является задача обеспечения гарантированной динамики системы при любых значениях интервально неопределенных параметров [9, 14, 72, 73, 74, 75]. Известно, что в стационарной системе качество переходных процессов зависит от расположения полюсов замкнутой системы. При этом ее динамические свойства (степень устойчивости, колебательность) определяются двумя-тремя доминирующими полюсами, поскольку влияние остальных полюсов оказывается незначительным либо из-за их удаленности от мнимой оси и доминирующих полюсов, либо благодаря наличию нуля, расположенного поблизости.

Поэтому при синтезе системы, исходя из требования к ее качеству, достаточно с помощью регулятора задать желаемые полюсы и для обеспечения из доминирования локализовать остальные полюсы в некоторой области комплексной плоскости.

Очевидно, что в системе с интервально неопределенными параметрами и линейным динамическим регулятором изменение интервальных параметров будет приводить к смещению как доминирующих, так и свободных полюсов. При этом может нарушиться условие доминирования, а также уменьшиться

степень устойчивости системы. Поэтому, исходя из требований, предъявляемых к динамике интервальной системы, можно сформулировать две задачи синтеза регулятора:

1. Локализация доминирующих полюсов, гарантирующая допустимую степень устойчивости системы;
2. Стабилизация доминирующих полюсов в заданных точках комплексной плоскости.

При этом обе задачи предусматривают локализацию свободных полюсов, обеспечивающую их требуемое удаление от доминирующих.

Для решения первой задачи предлагается использовать робастный линейный регулятор, а для второй – адаптивный с самонастройкой параметров. В основе способа решения этих задач синтеза регуляторов может лежать метод D-разбиения, разработанный Ю. И. Неймарком, а также корневой метод реберной маршрутизации параметрического многогранника [76].

### **3.2. Доминантное расположение полюсов стационарной системы линейным регулятором пониженного порядка**

Решение задачи размещения доминирующих полюсов в заданных точках комплексной плоскости рассматривается в ряде работ. В [51], например, эта задача решается с помощью полиномиальных уравнений синтеза. В [49, 50] используется интерполяционный метод назначения доминирующих полюсов. При этом свободные полюса системы могут располагаться на комплексной плоскости произвольно. Поэтому на заключительном этапе предусматривается дополнительная проверка выполнения условия доминантности.

Очевидно, что недостатком такого подхода является невозможность при синтезе регулятора одновременно располагать доминирующие полюса в заданной области, а следовательно гарантировать требуемое качество.

Пусть характеристическое уравнение линейной непрерывной системы управления приведено к виду

$$\sum_{i=1}^r k_i A_i(p) + B(p) = 0, \quad (3.1)$$

где  $k_i, j = 1, 2, \dots, r$  – параметры, значения которых необходимо выбрать так, чтобы обеспечить требуемое качество управления,  $A_i(p), j = 1, 2, \dots, r, B(p)$  – полиномы.

Для того чтобы  $l$  доминирующих полюсов системы приняли предписанные значения, необходимо не менее  $l$  изменяемых параметров. Если  $r > l$ , то можно не только обеспечить заданное положение доминирующих полюсов, но и задать дополнительные условия на размещение остальных (свободных) полюсов. В частности, можно потребовать, чтобы эти полюса располагались в заданной области левой полуплоскости, в соответствии с условием доминантности. На рис. 2.1 представлены возможные варианты задания областей расположения свободных полюсов. Граница области описывается выражением (2.1)

$$X(j\omega) = -\delta(\omega) + j\omega, \quad -\infty < \omega < \infty.$$

Поэтому полагаем, что число  $r$  варьируемых параметров в (3.1) превышает число  $l$  заданных доминирующих полюсов. Варьируемые параметры  $k_1, k_2, \dots, k_r$  разобьем на две группы. В первую включим параметры, которые назовем свободными. С их помощью будем обеспечивать размещение свободных полюсов в желаемой области, используя метод D-разбиения. Так как названный метод наиболее эффективен для выбора одного или двух параметров, то число  $s$  свободных параметров предлагается задавать не более двух. При помощи метода D-разбиения граница желаемой области свободных полюсов, описываемая выражением (2.1), отображается в пространство свободных параметров и на ее основе формируется параметрическая область, внутри которой выбираются значения свободных параметров.

Ко второй группе варьируемых параметров отнесем  $l$  параметров и назовем их зависимыми, поскольку их значения будут рассчитываться после выбора свободных параметров из условия, чтобы  $l$  доминирующих полюсов системы приняли предписанные значения. Таким образом, вектор  $\bar{g} = (k_1, \dots, k_r)^T$  варьируемых параметров оказывается разбитым на два вектора: вектор  $\bar{g}_1 = (k_1, \dots, k_c)^T$  свободных параметров размерностью  $c$  и вектор  $\bar{g}_2 = (k_{c+1}, \dots, k_r)^T$  зависимых параметров размерностью  $l = r - c$ .

С учетом сказанного характеристическое уравнение (3.1) системы преобразуем к виду

$$\sum_{i=1}^c k_i \cdot A_i(p) + \sum_{i=c+1}^r k_i \cdot A_i(p) + B(p) = 0. \quad (3.2)$$

Задачу доминантного расположения полюсов стационарной системы можно сформулировать следующим образом. Задано характеристическое уравнение системы вида (3.1), имеющее степень  $n$ . Необходимо найти значения  $c$  свободных и  $l$  зависимых варьируемых параметров, при которых  $l$  заданных доминирующих полюсов системы принимают предписанные значения  $\lambda_j, j = 1, \dots, l$ , а остальные  $n - l$  свободных полюсов лежат слева от заданной на комплексной плоскости границы (2.1).

*Использование D-разбиения по одному параметру.*

Для случая  $c = r - l = 1$  характеристическое уравнение (3.2) запишем в виде

$$k_1 \cdot A_1(p) + \sum_{i=2}^r k_i \cdot A_i(p) + B(p) = 0, \quad (3.3)$$

где  $k_1$  – свободный варьируемый параметр,  $k_2, \dots, k_r$  – зависимые параметры. Подстановка  $p = \lambda_j, j = 1, \dots, l$  в (3.1) дает  $l$  уравнений

$$k_1 \cdot A_1(\lambda_j) + \sum_{i=2}^r k_i \cdot A_i(\lambda_j) + B(\lambda_j) = 0, j = 1, \dots, l. \quad (3.4)$$

Эти уравнения связывают варьируемые параметры  $k_i, i = 1, \dots, r$  с задаваемыми доминирующими полюсами  $\lambda_j, j = 1, \dots, l$ .

Представим систему уравнений (3.4) в матричной форме

$$\mathbf{Q}_{11}(\lambda) \cdot k_1 + \mathbf{Q}_{12}(\lambda) \cdot \bar{\mathbf{g}}_2 = \mathbf{R}_1(\lambda), \quad (3.5)$$

где

$$\mathbf{Q}_{11}(\lambda) = \begin{bmatrix} A_1(\lambda_1) \\ \dots \\ A_1(\lambda_l) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q}_{12}(\lambda) = \begin{bmatrix} A_2(\lambda_1) & \dots & A_r(\lambda_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ A_2(\lambda_l) & \dots & A_r(\lambda_l) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{g}_2 = \begin{bmatrix} k_2 \\ \dots \\ k_r \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}_1(\lambda) = \begin{bmatrix} -B(\lambda_1) \\ \dots \\ -B(\lambda_l) \end{bmatrix}.$$

Для размещения свободных полюсов системы левее линии, заданной формулой (2.1), в случае одного свободного параметра  $k_1$  воспользуемся известным методом D-разбиения на плоскости одного параметра. С этой целью в (3.3) сделаем подстановку  $p = -\delta(\omega) + j\omega$ . В результате получим

$$k_1 \cdot A_1(-\delta(\omega) + j\omega) + \sum_{i=2}^r k_i \cdot A_i(-\delta(\omega) + j\omega) + B(-\delta(\omega) + j\omega) = 0. \quad (3.6)$$

В матричной форме (3.6) имеет вид

$$\mathbf{Q}_{21}(\omega) \cdot k_1 + \mathbf{Q}_{22}(\omega) \mathbf{g}_2 = \mathbf{R}_2(\omega), \quad (3.7)$$

где

$$\mathbf{Q}_{21}(\omega) = A_1(-\delta(\omega) + j\omega);$$

$$\mathbf{Q}_{22}(\omega) = [A_2(-\delta(\omega) + j\omega) \quad \dots \quad A_r(-\delta(\omega) + j\omega)];$$

$$\mathbf{R}_2(\omega) = -B(-\delta(\omega) + j\omega).$$

Для определения уравнения границы D-разбиения объединим (3.5) и (3.7) в одну систему уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_{11}(\lambda) \cdot k_1 + \mathbf{Q}_{12}(\lambda) \cdot \mathbf{g}_2 = \mathbf{R}_1(\lambda), \\ \mathbf{Q}_{21}(\omega) \cdot k_1 + \mathbf{Q}_{22}(\omega) \mathbf{g}_2 = \mathbf{R}_2(\omega). \end{cases} \quad (3.8)$$

Из первого уравнения системы (3.8) имеем

$$\mathbf{g}_2 = \mathbf{Q}_{12}^{-1}(\lambda) \cdot \mathbf{R}_1(\lambda) - \mathbf{Q}_{12}^{-1}(\lambda) \cdot \mathbf{Q}_{11}(\lambda) \cdot k_1. \quad (3.9)$$

После подстановки полученного выражения (3.9) для вектора  $\mathbf{g}_2$  зависимых варьируемых параметров во второе уравнение системы (3.8), получим искомое уравнение границы D-разбиения

$$k_1(\omega) = \frac{\mathbf{R}_2(\omega) - \mathbf{Q}_{22}(\omega) \cdot \mathbf{Q}_{12}^{-1}(\lambda) \cdot \mathbf{R}_1(\lambda)}{\mathbf{Q}_{21}(\omega) - \mathbf{Q}_{22}(\omega) \cdot \mathbf{Q}_{12}^{-1}(\lambda) \cdot \mathbf{Q}_{11}(\lambda)} = \alpha(\omega) + j\beta(\omega). \quad (3.10)$$

Далее задаваясь значениями  $\omega$  в пределах от  $-\infty$  до  $\infty$ , строим границу D-разбиения на комплексной плоскости. Она разделяет плоскость параметра  $k_1$  на ряд областей, среди которых необходимо выделить (если она имеется) область, которой соответствует требуемое расположение свободных полюсов системы. Для выделения указанной области используются стандартные правила штриховки границы D-разбиения. Значения  $k_1$ , гарантирующие требуемое размещение полюсов системы, располагаются на отрезке действительной оси внутри найденной области.

После выбора значения  $k_1$  из найденной области при помощи выражения (3.9) рассчитываются значения зависимых варьируемых параметров  $k_2, \dots, k_r$ , являющихся составляющими вектора  $\mathbf{g}_2$ .

### Пример

Пусть для объекта с передаточной функцией

$$W_0(p) = \frac{10}{(p+1)(0.1p+1)(0.01p+1)},$$

необходимо выбрать параметры ПИД-регулятора

$$W_p(p) = \frac{k_3 p^2 + k_2 p + k_1}{p},$$

обеспечивающие расположение двух доминирующих полюсов в точках  $\lambda_1 = -3 + j3$  и  $\lambda_2 = -3 - j3$  при условии локализации остальных полюсов в секторе  $X(j\omega) = -10 - \omega + j\omega$ ,  $-\infty < \omega < \infty$ .

Характеристическое уравнение системы имеет вид

$$p(p+1)(0.1p+1)(0.01p+1) + 10(k_3 p^2 + k_2 p + k_1) = 0.$$

Для решения данного примера варьируемые параметры регулятора разделены на свободный  $k_1$  и зависимые  $k_2$  и  $k_3$ . После формирования необходимых матриц и векторов проведено D-разбиение по  $k_1$  и на рис.3.1 построена область, соответствующая нахождению свободных полюсов в заданном секторе.

Исходя из условия получения максимальной добротности в системе, на вещественной оси в области D-разбиения выбрано максимальное допустимое значение  $k_1 = 8.2$ . После его подстановки в (3.9) определены значения зависимых параметров  $k_2 = 2.82$  и  $k_3 = 0.41$ . Найденные таким образом настройки ПИД-регулятора размещают полюса системы в точках  $\lambda_1 = -3 + j3$ ,  $\lambda_2 = -3 - j3$ ,  $\lambda_3 = -52.4 + j42.4$ ,  $\lambda_4 = -52.4 - j42.4$ , удовлетворяющих заданным требованиям (рис.3.2).

Программа MathCad для доминантного расположения полюсов системы рассмотренной в примере приведена в приложении 3.

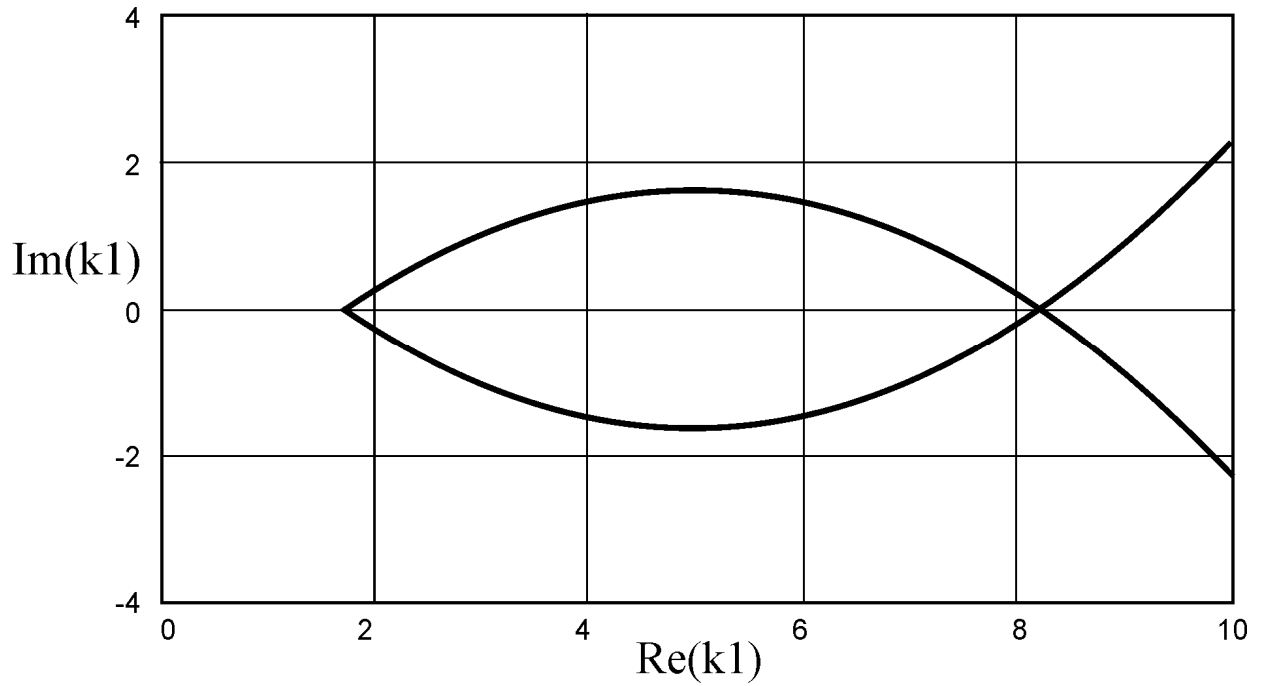


Рис.3.1. Область D-разбиения по  $k_1$

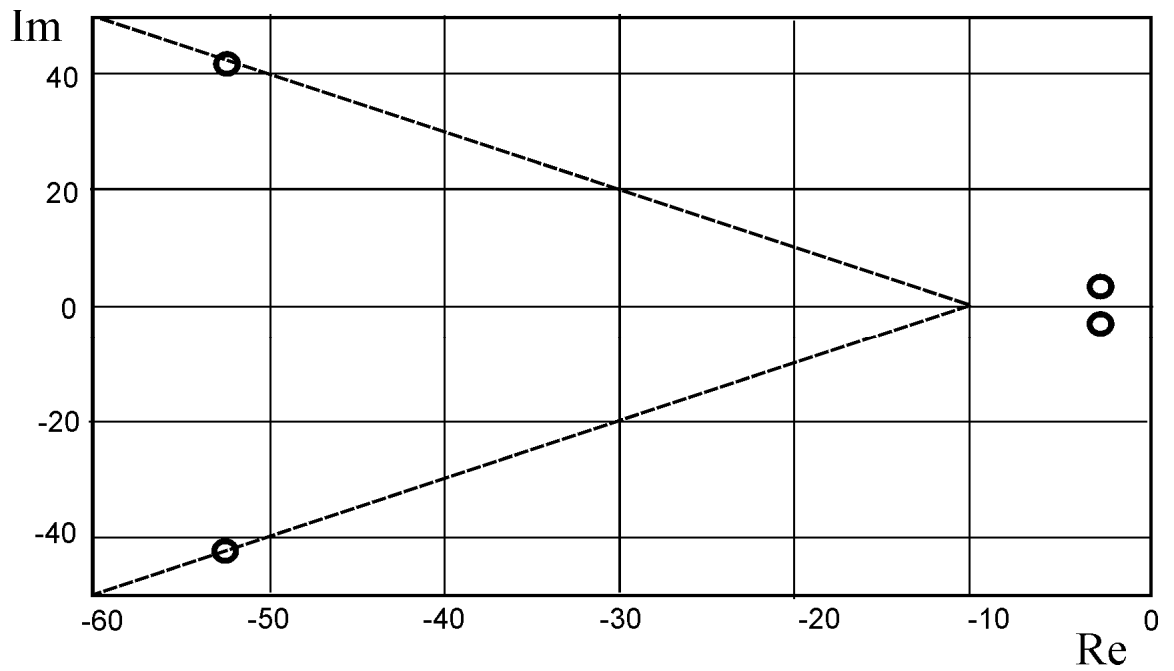


Рис.3.2. Расположение полюсов стационарной системы с синтезированными настройками регулятора



*Использование D-разбиения по двум параметрам*

Рассмотрим основные соотношения, необходимые для случая двух свободных варьируемых параметров. Для этого представим характеристическое уравнение (3.2) в виде

$$\sum_{i=1}^2 k_i \cdot A_i(p) + \sum_{i=3}^r k_i \cdot A_i(p) + B(p) = 0. \quad (3.11)$$

Матричное уравнение, связывающее варьируемые параметры и задаваемые доминирующие полюса, можно получить из (3.11) после замены скаляра  $k_1$  на вектор  $\mathbf{g}_1 = (k_1, k_2)^T$

$$\mathbf{Q}_{11}(\lambda) \cdot \mathbf{g}_1 + \mathbf{Q}_{12}(\lambda) \cdot \mathbf{g}_2 = \mathbf{R}_1(\lambda). \quad (3.12)$$

При этом векторы  $\mathbf{g}_2$ ,  $\mathbf{R}_1(\lambda)$  и матрицы  $\mathbf{Q}_{11}(\lambda)$ ,  $\mathbf{Q}_{12}(\lambda)$  будут иметь вид

$$\mathbf{g}_2 = \begin{bmatrix} k_3 \\ \vdots \\ k_r \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}_1(\lambda) = \begin{bmatrix} -B(\lambda_1) \\ \dots \\ -B(\lambda_l) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{Q}_{11}(\lambda) = \begin{bmatrix} A_1(\lambda_1) & A_2(\lambda_1) \\ \dots & \dots \\ A_1(\lambda_l) & A_2(\lambda_l) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q}_{12}(\lambda) = \begin{bmatrix} A_3(\lambda_1) & \dots & A_r(\lambda_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ A_3(\lambda_l) & \dots & A_r(\lambda_l) \end{bmatrix}.$$

Для вывода уравнения границы D-разбиения на плоскости двух свободных параметров сделаем в (3.12) уже известную подстановку  $p = -\delta(\omega) + j\omega$  и преобразуем получившееся комплексное уравнение в систему двух вещественных уравнений. В матричной форме она будет иметь вид

$$\mathbf{Q}_{21}(\omega) \cdot \mathbf{g}_1 + \mathbf{Q}_{22}(\omega) \mathbf{g}_2 = \mathbf{R}_2(\omega), \quad (3.13)$$

где

$$\mathbf{Q}_{21}(\omega) = \begin{bmatrix} \operatorname{Re} A_1(\omega) & \operatorname{Re} A_2(\omega) \\ \operatorname{Im} A_1(\omega) & \operatorname{Im} A_2(\omega) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q}_{22}(\omega) = \begin{bmatrix} \operatorname{Re} A_3(\omega) & \cdots & \operatorname{Re} A_r(\omega) \\ \operatorname{Im} A_3(\omega) & \cdots & \operatorname{Im} A_r(\omega) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{R}_2(\omega) = \begin{bmatrix} -\operatorname{Re} B(\omega) \\ -\operatorname{Im} B(\omega) \end{bmatrix}.$$

В результате объединения (3.13) и (3.14) получим систему уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_{11}(\lambda) \mathbf{g}_1 + \mathbf{Q}_{12}(\lambda) \mathbf{g}_2 = \mathbf{R}_1(\lambda); \\ \mathbf{Q}_{21}(\omega) \mathbf{g}_1 + \mathbf{Q}_{22}(\omega) \mathbf{g}_2 = \mathbf{R}_2(\omega). \end{cases} \quad (3.14)$$

Из первого уравнения выразим вектор  $\mathbf{g}_2$  зависимых варьируемых параметров:

$$\mathbf{g}_2 = \mathbf{Q}_{12}^{-1}(\lambda) \cdot \mathbf{R}_1(\lambda) - \mathbf{Q}_{12}^{-1}(\lambda) \cdot \mathbf{Q}_{11}(\lambda) \cdot \mathbf{g}_1. \quad (3.15)$$

Уравнение границы D-разбиения найдем из второго уравнения с учетом (3.15):

$$\mathbf{g}_1 = \begin{bmatrix} k_1(\omega) \\ k_2(\omega) \end{bmatrix} = \left[ \mathbf{Q}_{21}(\omega) - \mathbf{Q}_{22}(\omega) \cdot \mathbf{Q}_{12}^{-1}(\lambda) \cdot \mathbf{Q}_{11}(\lambda) \right]^{-1} \times$$

$$\times \left[ \mathbf{R}_2(\omega) - \mathbf{Q}_{22}(\omega) \cdot \mathbf{Q}_{12}^{-1}(\lambda) \cdot \mathbf{R}_1(\lambda) \right] \quad (3.16)$$

Для каждого конкретного значения  $\omega$  на основании (3.16) получаем пару числовых значений  $k_1$  и  $k_2$ , определяющих одну точку границы D-разбиения. Изменяя в (3.16)  $\omega$  в пределах от  $-\infty$  до  $\infty$ , можно получить всю кривую D-разбиения в плоскости  $k_1, k_2$  свободных параметров системы.

Некоторые значения частоты дают при вычислениях неопределенности вида  $0/0$  или  $\infty/\infty$ . Этим значениям  $\omega$  соответствуют уже не отдельные точки, а так называемые особые прямые. Получим уравнения особых прямых.

Первая особая прямая соответствует  $\omega = 0$ . Для того чтобы получить ее уравнение, в (3.11) подставим  $p = -\delta(\omega) + j\omega|_{\omega=0} = -\delta(0)$ . Будем иметь

$$\sum_{i=1}^2 k_i \cdot A_i[-\delta(0)] + \sum_{i=3}^r k_i \cdot A_i[-\delta(0)] + B[-\delta(0)] = 0. \quad (3.17)$$

Запишем это уравнение в векторно-матричной форме

$$\mathbf{Q}_{21}(0) \cdot \mathbf{g}_1 + \mathbf{Q}_{22}(0) \mathbf{g}_2 = \mathbf{R}_2(0), \quad (3.18)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{21}(0) &= [A_1[-\delta(0)] \quad A_2[-\delta(0)]]; \\ \mathbf{Q}_{22}(0) &= [A_3[-\delta(0)] \quad \dots \quad A_r[-\delta(0)]]; \quad \mathbf{R}_2[-\delta(0)] = -B[-\delta(0)]. \end{aligned}$$

И, наконец, подставив в (3.18) выражение (3.15), получим уравнение первой особой прямой в векторно-матричной форме:

$$\begin{aligned} [\mathbf{Q}_{21}(0) - \mathbf{Q}_{22}(0) \cdot \mathbf{Q}_{12}^{-1}(\lambda) \cdot \mathbf{Q}_{11}(\lambda)] \cdot \mathbf{g}_1 &= \\ &= \mathbf{R}_2(0) - \mathbf{Q}_{22}(0) \cdot \mathbf{Q}_{12}^{-1}(\lambda) \cdot \mathbf{R}_1(\lambda). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Вторая особая прямая получается путем приравнивания к нулю коэффициента  $a_n$  при слагаемом со старшей степенью характеристического уравнения (3.11).

Штриховка границы D-разбиения производится в соответствии со знаком определителя системы уравнений (3.13)

$$\Delta(\omega) = \mathbf{Q}_{21}(\omega) - \mathbf{Q}_{22}(\omega) \cdot \mathbf{Q}_{12}^{-1}(\lambda) \cdot \mathbf{Q}_{11}(\lambda)$$

на основании известных правил. Штриховка особых прямых выполняется в соответствии со штриховкой границы D-разбиения в точках сопряжения.

**Пример**

Пусть для объекта управления из [60], описываемого передаточной функцией

$$W_0(p) = \frac{2.5 \cdot 10^9}{p(p+10)(p+50)(p+100)(p+200)},$$

задан регулятор

$$W_p(p) = \frac{k_3 p^2 + k_2 p + k_1}{k_5 p^2 + k_4 p + 1}.$$

Необходимо выбрать  $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5$  таким образом, чтобы расположить три доминирующих полюса в точках  $\lambda_1 = -10 + j17.3$ ,  $\lambda_2 = -10 - j17.3$ ,  $\lambda_3 = -10$ , а остальные полюса локализовать левее границы  $X(j\omega) = -45 + j\omega$ ,  $-\infty < \omega < \infty$ .

Характеристическое уравнение системы с объектом и регулятором имеет вид

$$k_1 \cdot A_1(p) + k_2 \cdot A_2(p) + k_3 \cdot A_3(p) + k_4 \cdot A_4(p) + k_5 \cdot A_5(p) + B(p) = 0,$$

где  $A_1(p) = 1$ ;

$$A_2(p) = p;$$

$$A_3(p) = p^2;$$

$$A_4(p) = 4 \cdot 10^{-10} \cdot p^2 (p+10)(p+50)(p+100)(p+200);$$

$$A_5(p) = 4 \cdot 10^{-10} \cdot p^3 \cdot (p+10)(p+50)(p+100)(p+200);$$

$$B(p) = 4 \cdot 10^{-10} \cdot p(p+10)(p+50)(p+100)(p+200).$$

Для решения задачи варьируемые параметры разделены на свободные  $k_1$ ,  $k_2$  и зависимые  $k_3, k_4, k_5$  и сформированы необходимые векторы и матрицы.

На основе полученных соотношений проведено D-разбиение по двум свободным параметрам и на рис.3.3 построена область, соответствующая нахождению свободных полюсов левее заданной границы.

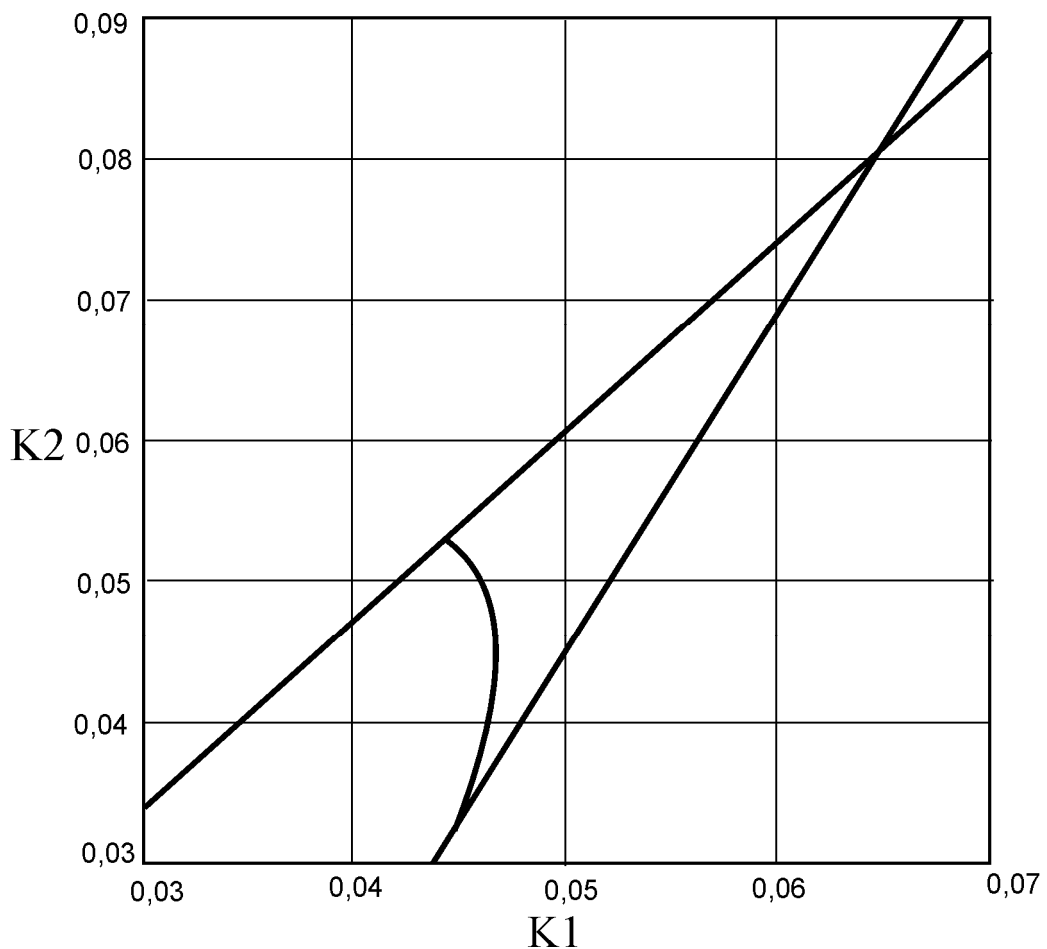


Рис.3.3. Область D-разбиение по двум свободным параметрам  $k_1$ ,  $k_2$

Внутри области D-разбиения выбрано максимальное значение  $k_1 = 6.43 \cdot 10^{-2}$ , обеспечивающее максимальную добротность в системе, и соответствующее ему значение  $k_2 = 8 \cdot 10^{-3}$ . После подстановки этих значений в (3.15) получены следующие значения зависимых параметров:  $k_3 = 1.57 \cdot 10^{-4}$ ,  $k_4 = 4.06 \cdot 10^{-2}$ ,  $k_5 = 1.45 \cdot 10^{-5}$ . При найденных значениях параметров регулятора система имеет корни  $\lambda_1 = -10 + j17.3$ ,  $\lambda_2 = -10 - j17.3$ ,  $\lambda_3 = -10$ ,  $\lambda_4 = -45$ ,  $\lambda_5 = -113.37$ ,  $\lambda_6 = -196.58$ ,  $\lambda_7 = -2776.55$ , удовлетворяющие заданным требованиям на их расположение (рис.3.4).

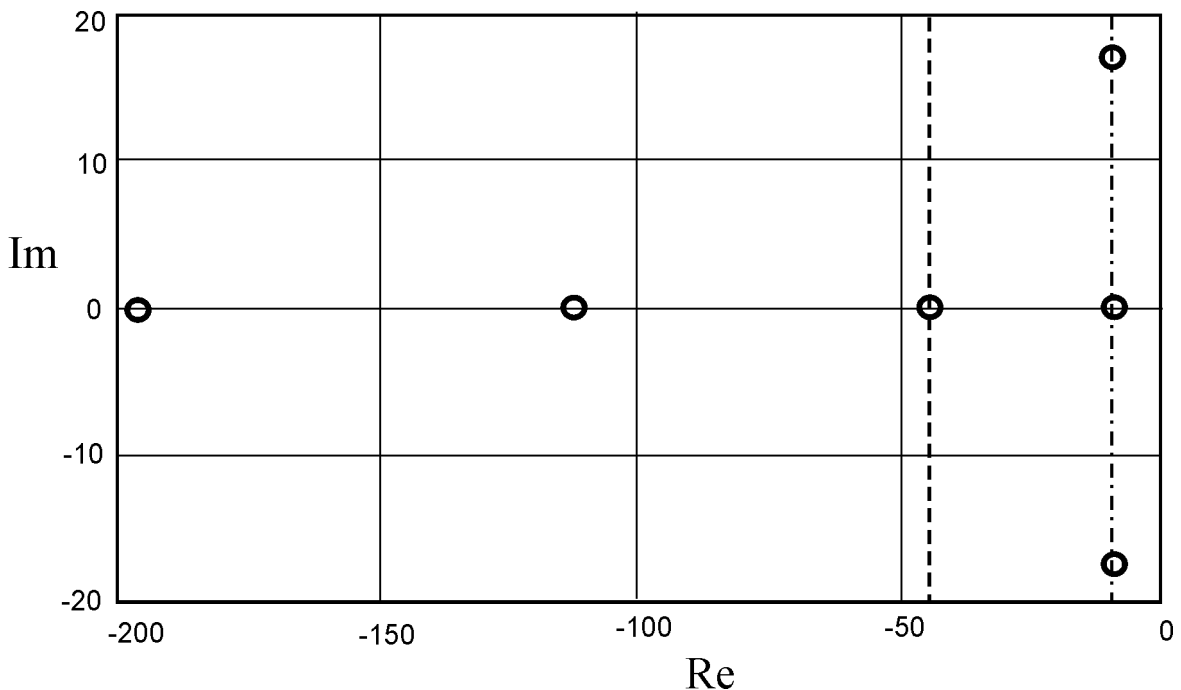


Рис.3.4. Расположение полюсов стационарной системы с синтезированными настройками регулятора

Программа MathCad для доминантного расположения полюсов системы рассмотренной в примере приведена в приложении 4.

*Методика доминантного расположения полюсов стационарной системы*

На основе полученных соотношений предлагается следующий порядок выбора параметров системы, обеспечивающих желаемые значения для доминирующих полюсов и расположение остальных полюсов в заданной области комплексной плоскости.

1. Задание числа  $l$  и значений  $\lambda_i, i = 1, \dots, l$  доминирующих полюсов системы, числа  $c = n - l$  свободных варьируемых параметров и уравнения (2.1) границы области свободных полюсов.
2. Формирование матриц  $\mathbf{Q}_{11}(\lambda), \mathbf{Q}_{12}(\lambda), \mathbf{Q}_{21}(\omega), \mathbf{Q}_{22}(\omega)$  и векторов  $\mathbf{R}_1(\lambda), \mathbf{R}_2(\omega)$ .
3. Построение на основании полученных соотношений в пространстве свободных параметров границы D-разбиения и ее штриховка в соответствии с общими правилами. Назначение свободных варьируемых параметров из построенной выше области.
4. Расчет зависимых варьируемых параметров при помощи выражений (3.9) или (3.15).
5. Подстановка значений варьируемых параметров в характеристическое уравнение системы с целью проверки выполнения заданных требований на расположение полюсов.

### 3.3. Синтез робастного регулятора для локализации полюсов интервальных систем

Согласно предложенной выше процедуре синтеза может быть обеспечена требуемая динамика системы при фиксированных значениях интервально заданных параметров.

Для желаемого расположения полюсов в случае интервальной неопределенности предлагается комбинировать этапы рассмотренной выше процедуры с робастным подходом [43]. Так выбор составляющих  $g_1$  (свободных параметров динамического регулятора) будем проводить на основе робастного D-разбиения. Его цель - найти такую область в пространстве свободных параметров, выбор значений из которой гарантировал бы расположение свободных полюсов левее заданной границы (2.1) при любых значениях интервальных параметров и соответствующих им значениях зависимых параметров. Для этого следовало бы построить области D-разбиения для всех возможных сочетаний интервальных параметров из  $P_T$ , и найти область их пересечения. Однако на основе известного из [77, 78] свойства квазивыпуклости степени устойчивости линейной системы по коэффициентам ее характеристического полинома установлено, что при линейном вхождении интервальных параметров в коэффициенты полинома минимальная степень устойчивости системы достигается в вершинах многогранника  $P_T$ . Поэтому искомая область робастного D-разбиения может быть легко определена как область пересечения параметрических областей, построенных только для вершин  $P_T$ .

Для синтеза робастного регулятора с использованием D-разбиения по одному параметру характеристический полином (3.3) примет вид



$$k_1 \cdot A_1(p) + \sum_{i=2}^r k_i \cdot A_i(p) + B(T, p) = 0, \quad (3.20)$$

где  $k_1$  – свободный варьируемый параметр,  $k_2, \dots, k_r$  – зависимые параметры,  $T = (T_1, \dots, T_m)$  –  $m$  интервально неопределенных параметров  $T_i$ ,  $\underline{T}_i \leq T_i \leq \overline{T}_i$ ,  $\underline{T}_i = T_{i\min}$ ,  $\overline{T}_i = T_{i\max}$ ; Так как  $m$  параметров заданы своими граничными значениями, то ПМ, внутри которого  $T_i$  могут изменяться произвольным образом, представляет собой прямоугольный гиперпараллелепипед

$$P_T = \{T_i \mid \underline{T}_i \leq T_i \leq \overline{T}_i, i = \overline{1, m}\},$$

содержащий  $2^m$  вершин (рис.1.1).

Подстановка  $p = \lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, l$  в (3.20) дает  $l$  уравнений

$$k_1 \cdot A_1(\lambda_j) + \sum_{i=2}^r k_i \cdot A_i(\lambda_j) + B(T, \lambda_j) = 0, \quad j = 1, \dots, l. \quad (3.21)$$

Эти уравнения связывают варьируемые параметры  $k_i$ ,  $i = 1, \dots, r$  с задаваемыми доминирующими полюсами  $\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, l$ .

Система уравнений (3.5) с учетом интервально неопределенных параметров примет вид

$$\mathbf{Q}_{11}(\boldsymbol{\lambda}) \cdot k_1 + \mathbf{Q}_{12}(\boldsymbol{\lambda}) \cdot \bar{\mathbf{g}}_2 = \mathbf{R}_1(T, \boldsymbol{\lambda}), \quad (3.22)$$

где

$$\mathbf{R}_1(T, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} -B(T, \lambda_1) \\ \dots \\ -B(T, \lambda_r) \end{bmatrix}.$$

При учете интервально-неопределенных параметров в (3.7) имеем

$$\mathbf{Q}_{21}(\omega) \cdot k_1 + \mathbf{Q}_{22}(\omega) \mathbf{g}_2 = \mathbf{R}_2(T, \omega), \quad (3.22)$$

где  $\mathbf{R}_2(T, \omega) = -B(T, -\delta(\omega) + j\omega)$ .

Вектор зависимых варьируемых параметров будет иметь вид:

$$\mathbf{g}_2 = \mathbf{Q}_{12}^{-1}(\boldsymbol{\lambda}) \cdot \mathbf{R}_1(T, \boldsymbol{\lambda}) - \mathbf{Q}_{12}^{-1}(\boldsymbol{\lambda}) \cdot \mathbf{Q}_{11}(\boldsymbol{\lambda}) \cdot k_1. \quad (3.23)$$

А искомое уравнение границы D-разбиения

$$k_1(T, \omega) = \frac{\mathbf{R}_2(T, \omega) - \mathbf{Q}_{22}(\omega) \cdot \mathbf{Q}_{12}^{-1}(\boldsymbol{\lambda}) \cdot \mathbf{R}_1(T, \boldsymbol{\lambda})}{\mathbf{Q}_{21}(\omega) - \mathbf{Q}_{22}(\omega) \cdot \mathbf{Q}_{12}^{-1}(\boldsymbol{\lambda}) \cdot \mathbf{Q}_{11}(\boldsymbol{\lambda})} = \alpha(T, \omega) + j\beta(T, \omega). \quad (3.24)$$

Далее задаваясь значениями  $\omega$  в пределах от  $-\infty$  до  $\infty$ , строим границу D-разбиения на комплексной плоскости для всех сочетаний интервально неопределенных параметров, соответствующих вершинам  $P_T$ . Каждая граница D-разбиения разделяет плоскость параметра  $k_1$  на ряд областей, среди которых необходимо выделить (если она имеется) область, которой соответствует требуемое расположение свободных полюсов системы. Для выделения указанной области используются стандартные правила штриховки границы D-разбиения. Значения  $k_1$ , гарантирующие требуемое размещение полюсов системы, располагаются на отрезке действительной оси внутри найденной

области являющейся пересечением всех областей устойчивости соответствующим вершинам  $P_T$ .

Этот подход основан на указанном выше свойстве степени устойчивости принимать минимальные значения в вершинах  $T_V$  [111]. На его основании искомым является такой вектор  $g_2$ , который вместе с ранее выбранным  $k_1$ , обеспечивает в одной из вершин  $T_V$  заданные  $\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, l$ , а во всех других вершинах  $T_V$  доставляет  $a > a^*$ . Таким образом, синтез  $g_2$  сводится к поиску  $T_V$ .

После выбора значения  $k_1$  из найденной области при помощи выражения (3.23) рассчитываются значения зависимых варьируемых параметров  $k_2, \dots, k_r$ , являющихся составляющими вектора  $g_2$ . При этом значения интервально неопределенных параметров  $T_i$  соответствуют одной из вершин  $P_T$ .

Для проверки результатов необходимо построить области локализации корней при найденных настройках регулятора по реберному маршруту. Если области выходят за установленные границы, то необходимо снова рассчитать  $g_2$  для других вершинных значений  $T_i$ . И так до тех пор, пока результаты не будут удовлетворять заданным условиям.

Таким образом, методику синтеза робастного регулятора можно сформулировать следующим образом:

1. Приведение характеристического полинома системы к виду (3.20).
2. Определение координат вершин  $P_T$ , соответствующих граничным значениям интервальных параметров.
3. Задание числа  $l$  и значений  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, l$  доминирующих полюсов системы, числа  $c = n - l$  свободных варьируемых параметров и уравнения (2.1) границы области свободных полюсов.
4. Формирование матриц  $\mathbf{Q}_{11}(\lambda)$ ,  $\mathbf{Q}_{12}(\lambda)$ ,  $\mathbf{Q}_{21}(\omega)$ ,  $\mathbf{Q}_{22}(\omega)$  и векторов  $\mathbf{R}_1(T, \lambda)$ ,  $\mathbf{R}_2(T, \omega)$ .

5. Построение на основании полученных соотношений в пространстве свободных параметров границ D-разбиения для каждой вершины  $P_T$  и ее штриховка в соответствии с общими правилами. Назначение свободных варьируемых параметров из области, соответствующей пересечению найденных выше областей.
6. Расчет зависимых варьируемых параметров при помощи выражения (3.23). При этом значения  $T_i$  должны принадлежать какой либо из вершин  $P_T$ .
7. Построение областей локализации корней при найденных настройках регулятора на основе реберного маршрута.
8. Если области выходят за установленные границы, то необходимо снова рассчитать  $\mathbf{g}_2$  для других вершинных значений  $T_i$ .

Предложенную методику проиллюстрируем на примере из п. 3.2. Для этого характеристический полином приведем к виду

$$10k_3p^2 + 10k_2p + 10k_1 + T_1p^4 + T_2p^3 + T_3p^2 + p = 0,$$

где интервальные параметры заданы диапазонами

$$T_1 \in [0, 0.002],$$

$$T_2 \in [1, 1.22],$$

$$T_3 \in [0.1, 0.122].$$

Параметрический многогранник  $P_T$  содержит восемь вершин:  $V_1(50, 50, 5)$ ,  $V_2(500, 50, 5)$ ,  $V_3(500, 50, 50)$ ,  $V_4(50, 50, 50)$ ,  $V_5(50, 100, 5)$ ,  $V_6(500, 100, 5)$ ,  $V_7(500, 100, 50)$ ,  $V_8(50, 100, 50)$ , где первая координата –  $T_1$ , вторая –  $T_2$ , третья –  $T_3$ .

Регулятор должен обеспечивать расположение двух доминирующих полюсов в точках  $\lambda_1 = -3 + j3$  и  $\lambda_2 = -3 - j3$  при условии локализации остальных полюсов в секторе  $X(j\omega) = -10 - \omega + j\omega$ ,  $-\infty < \omega < \infty$ .

Для решения данной задачи при одном свободном параметре варьируемые параметры регулятора разделены на свободный  $k_1$  и зависимые  $k_2$  и  $k_3$ . После формирования необходимых матриц и векторов проведено D-разбиение по  $k_1$  и на рис.3.5 построена область, соответствующая нахождению свободных полюсов в заданном секторе при вершинных значениях  $T_i$ .

Исходя из условия получения максимальной добротности в системе, на вещественной оси в области D-разбиения выбрано максимальное допустимое значение  $k_1 = 2.25$ . После его подстановки в (3.23) определены значения зависимых параметров  $k_2 = 0.808$  и  $k_3 = 0.059$ . Найденные таким образом настройки ПИД-регулятора размещают полюса системы в областях представленных на рис.3.6 удовлетворяющих заданным требованиям.

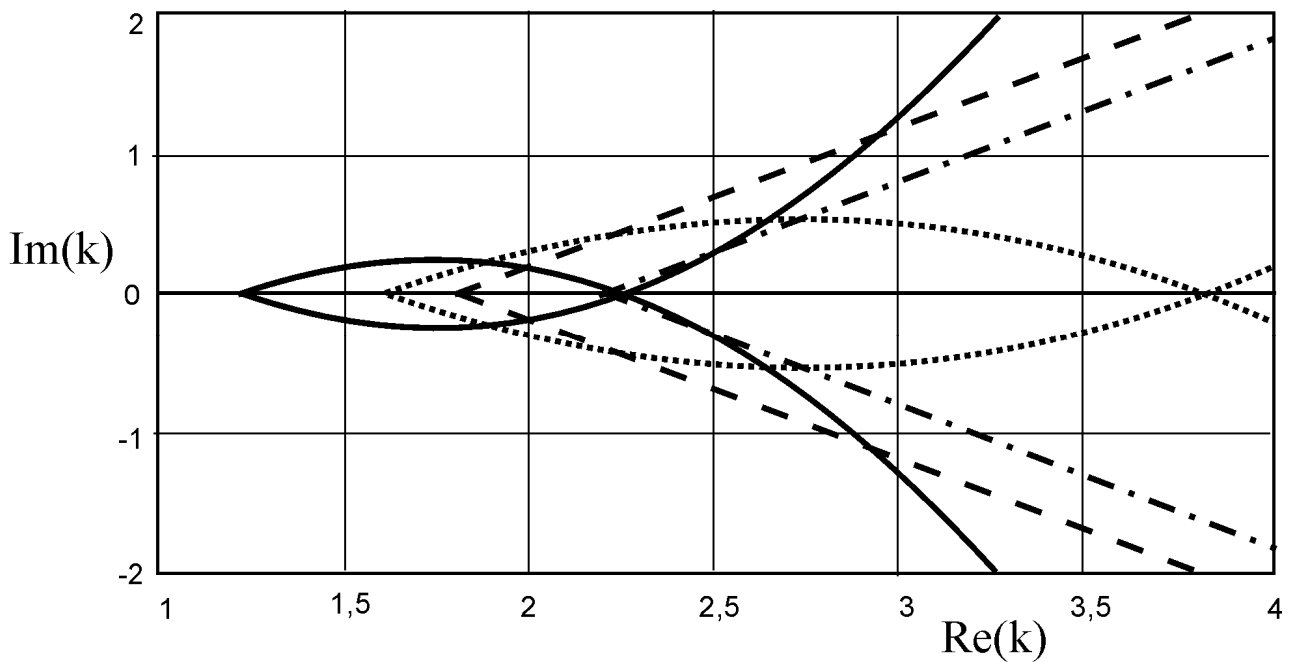


Рис.3.5. Области D-разбиения

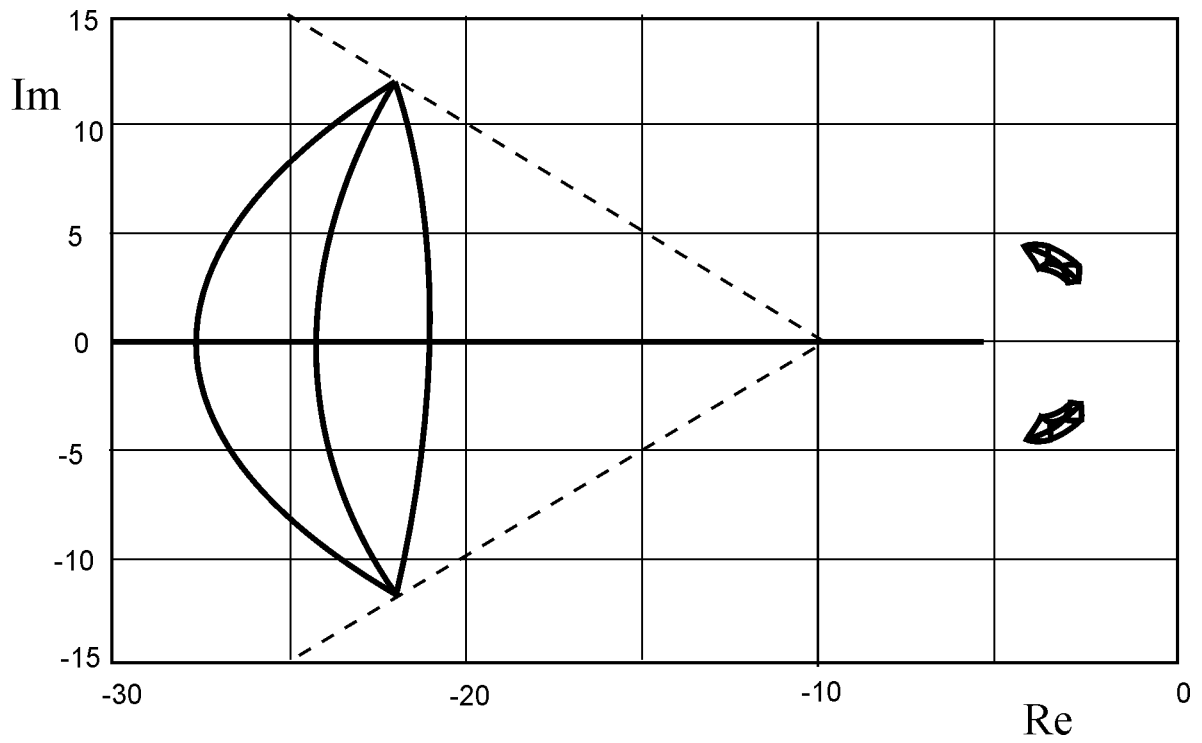


Рис.3.6. Области локализации параметров системы

Программа MathCad для синтеза робастного регулятора рассматриваемой в примере интервальной системы приведена в приложении 5.

### 3.4. Синтез адаптивно-робастного регулятора для стабилизации доминирующих полюсов

Чтобы синтезировать адаптивный регулятор, стабилизирующий доминирующие полюсы в заданных точках, необходимо при выбранных свободных параметрах организовать самонастройку зависимых настроек в соответствии со значением интервальных параметров. Таким образом, выражение (3.23) примет вид

$$\mathbf{g}_2(T) = \mathbf{Q}_{12}^{-1}(\lambda) \cdot \mathbf{R}_1(T, \lambda) - \mathbf{Q}_{12}^{-1}(\lambda) \cdot \mathbf{Q}_{11}(\lambda) \cdot k_1, \quad (3.24)$$

то есть параметры настройки регулятора, входящие в вектор  $\mathbf{g}_2$  зависят непосредственно от значения интервально неопределенных параметров в данный момент. Такой способ настройки регулятора позволяет нам стабильно расположить доминирующие полюсы в заданных точках и локализовать свободные полюсы левее заданной границы (2.1) вне зависимости от значений интервально неопределенных параметров.

Таким образом, методику синтеза адаптивного регулятора можно сформулировать следующим образом:

1. Приведение характеристического полинома системы к виду (3.20).
2. Определение координат вершин  $P_T$ , соответствующих граничным значениям интервальных параметров.
3. Задание числа  $l$  и значений  $\lambda_i, i = 1, \dots, l$  доминирующих полюсов системы, числа  $c = n - l$  свободных варьируемых параметров и уравнения (2.1) границы области свободных полюсов.
4. Формирование матриц  $\mathbf{Q}_{11}(\lambda), \mathbf{Q}_{12}(\lambda), \mathbf{Q}_{21}(\omega), \mathbf{Q}_{22}(\omega)$  и векторов  $\mathbf{R}_1(T, \lambda), \mathbf{R}_2(T, \omega)$ .

5. Построение на основании полученных соотношений в пространстве свободных параметров границ D-разбиения для каждой вершины  $P_T$  и ее штриховка в соответствии с общими правилами. Назначение свободных варьируемых параметров из области, соответствующей пересечению найденных выше областей.
6. Вывод, на основе (3.24) выражения для зависимых варьируемых параметров настройки регулятора, содержащих значения интервально неопределенных параметров системы.

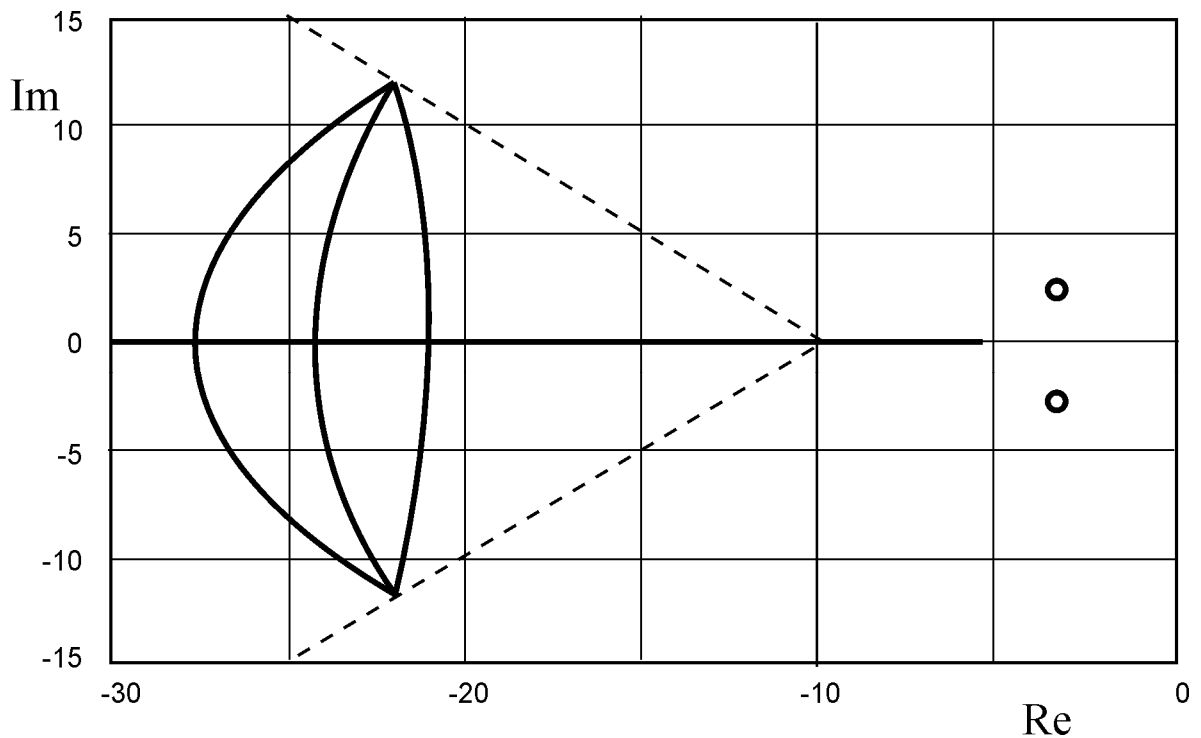


Рис.3.7. Области локализации параметров системы

Программа MathCad для синтеза адаптивно-робастного регулятора рассматриваемой в примере интервальной системы приведена в приложении 6.



### 3.5. Основные результаты

1. Разработана методика доминантного расположения полюсов стационарной системы с использованием метода D-разбиения. Предложенный подход дает достаточно простую процедуру определения варьируемых параметров системы, обеспечивающих желаемые значения для доминирующих полюсов и расположение остальных полюсов в заданной области комплексной плоскости. Процедура основана на разделении варьируемых параметров системы на свободные и зависимые и их последовательном нахождении с использованием метода D-разбиения.

2. Разработана методика синтеза робастного регулятора для локализации полюсов интервальной системы в заданной области комплексной плоскости. Такой регулятор способен обеспечивать в системе заданные степень устойчивости и динамические качества в интервальной системе.

3. Разработана методика синтеза адаптивно-робастного регулятора для стабилизации доминирующих полюсов интервальной системы. Такой регулятор способен устранить влияние недоминантных полюсов на качество регулирования, а доминантные полюса стабилизировать в точках комплексной плоскости для обеспечения желаемых динамических свойств системы.

## **ГЛАВА 4. СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ПСЕВДОЛИНЕЙНЫХ КОМПЕНСАТОРОВ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ ИНТЕРВАЛЬНЫХ СИСТЕМ**

### **4.1. Постановка задачи**

Характерной особенностью интервальных систем с упругими связями, имеющими изменяющиеся параметры, является наличие частотнонестабильных колебаний [58]. Степень их отрицательного влияния на динамику системы определяется в каждом конкретном случае с помощью построения частотных характеристик. Как правило, учету подлежат те тона колебаний, которые деформируют логарифмическую амплитудночастотную характеристику (ЛАЧХ) выше оси частот или пересекают эту ось, являясь источниками неустойчивости системы.

Известно [79], что линейные корректирующие устройства обладают существенным недостатком, заключающимся в том, что для них имеет место жесткая зависимость между их АЧХ и ФЧХ. Например, дифференцирующие звенья, создавая фазовое опережение, поднимают усиление на высоких частотах; интегрирующие звенья, подавляя усиление на высоких частотах, создают фазовое запаздывание.

Использование линейной коррекции с целью демпфирования упругих тонов колебаний допустимо при нахождении их спектра в области высоких частот. При низкочастотных и среднечастотных резонансах применение линейной коррекции значительно снижает быстродействие упругих систем. Поэтому для обеспечения в них максимально возможного быстродействия, определяемого, согласно требованиям [58], только динамическими свойствами исполнительного привода, необходимы специальные корректирующие звенья. Желательно, чтобы они подавляли упругие колебания во всем спектре

изменяющейся частоты, не сужая при этом заданную полосу пропускания системы.

Таковыми устройствами могут быть нелинейные корректирующие устройства. Существует большое количество различных корректирующих устройств, реализующих самые разнообразные нелинейные законы управления. Рассматривать их с единых позиций трудно из-за сложности процессов, протекающих в нелинейных системах. Достаточно наглядное качественное, а часто и количественное суждение о процессах в нелинейных системах может быть во многих случаях получено на основе частотных представлений, базирующихся на методе гармонической линеаризации.

Принцип независимого формирования АЧХ и ФЧХ корректирующего устройства наиболее полно воплощен в так называемых псевдолинейных корректирующих устройствах (ПЛКУ), к которым относятся цепи, коэффициенты гармонической линеаризации которых зависят от частоты и не зависят от амплитуды входного сигнала [80, 81, 82, 83].

Следует также заметить, что если часть резонансного спектра находится правее границы полосы пропускания системы, то для коррекции в этой частотной области нет необходимости точно сглаживать амплитудные всплески. В этом случае достаточно, начиная с определенной граничной частоты, просто опустить резонансные пики под частотную ось вместе со всей ЛАЧХ и обеспечить при этом запас устойчивости по фазе.

Проведенный анализ показывает, что для нестационарных слабодемпфированных систем с широким диапазоном изменения резонансной частоты (выходящим за полосу пропускания) представляется целесообразной декомпозиция общей задачи коррекции на следующие две задачи:

- 1) точная (частотннепрерывная) компенсация амплитудного всплеска в полосе пропускания системы;
- 2) загрузка системы в частотном диапазоне правее полосы пропускания.

Выбирая пути решения данных задач [84, 85, 86], отметим, что перспективным направлением для первой задачи является применение адаптивной коррекции с самонастройкой на изменяющуюся резонансную частоту, а для второй - использование робастной коррекции со свойствами фильтра низких частот. В пользу такой комбинированной коррекции говорит и тот факт [87], что адаптивные системы могут эффективно работать только в определенных частотных диапазонах входного сигнала. Вне этих диапазонов адаптивные системы имеют низкое качество и могут даже потерять устойчивость.

#### **4.2. Способ компенсации частотнонестабильных резонансов**

Рассмотрим вначале существующие способы демпфирования упругих тонов колебаний в системах с изменяющимися параметрами.

Требованию подавления амплитудных резонансных пиков отвечает, например, многоканальное псевдолинейное корректирующее устройство из [52, 88]. Его каналы настраиваются на фиксированные резонансные частоты, задаваемые в результате дискретизации известного спектра колебаний системы. Каждый канал формирует ЛАЧХ, инверсную по отношению к амплитудному пику соответствующей резонансной характеристики, и независимо от этого создает необходимый запас устойчивости по фазе. При этом главной причиной, ограничивающей использование такого устройства при изменении резонансной частоты в широком диапазоне, является частотная дискретность реализуемой коррекции и, как следствие, трудность обеспечения высокой точности компенсации резонансов без значительного увеличения числа каналов и усложнения устройства.

Существует также способ фазового управления антирезонансной коррекцией, основанный на включении алгоритма стабилизации по сигналу,

несущему информацию о фазе упругих колебаний [53]. Недостатком такого способа является отключение на время стабилизации базового алгоритма управления и необходимость организации безударного переключения с основного алгоритма управления на алгоритм стабилизации, что связано с дополнительными затратами.

При анализе существующих способов антирезонансной коррекции выявились также следующие их недостатки.

Во-первых, это то, что для настройки коррекции некоторых систем необходимо знать характер изменения частотных характеристик (ЧХ) объекта в процессе его работы (чаще всего эта информация априори неизвестна).

Во-вторых, необходимо заранее знать ограниченный линейными фильтрами частотный диапазон фазового опережения псевдолинейного корректирующего устройства (в этом случае, например, при изменении инерционности объекта, а, следовательно, и его частотных свойств, возможно уменьшение запаса устойчивости системы по фазе, приводящее к ухудшению качества работы системы).

Согласно [58], перспективным направлением в при проектировании ИС с упругими связями является применение адаптивной коррекции с самонастройкой на изменяющуюся резонансную частоту. Такой подход позволяет осуществлять точную частотнонепрерывную компенсация амплитудного всплеска. Для его реализации предлагается использовать компенсатор на основе управляемой гистерезисной нелинейности типа упор [89]. Образующее ею последовательное корректирующее устройство в отличие от рассмотренного в [52] является одноканальным и частотнонепрерывным (не требуется формировать каналы для ряда фиксированных резонансных частот из их спектра).

Основной задачей, на решение которой направлен предлагаемый способ адаптивной антирезонансной коррекции нестабильных частотных характеристик объекта управления, является компенсация фазового

запаздывания с одновременным демпфированием резонансного пика амплитудной частотной характеристики (АЧХ) объекта управления [90].

На основе свойств гистерезисной нелинейности типа упор предлагается разрабатывать адаптивный принцип компенсации влияния частотнонестабильного тона упругих колебаний интервальной системы. При этом псевдолинейный характер предлагаемой коррекции позволит синтезировать алгоритмы адаптивного управления параметрами упора методом частотных характеристик.

В предлагаемом способе корректирующий сигнал формируется путем вычитания из входного сигнала управления фазоотстающего сигнала с выхода нелинейного звена с характеристикой типа «люфт». При этом управление шириной зоны нечувствительности и наклоном характеристики «люфт» осуществляют двумя сигналами, формируемыми по различным законам из сигнала, пропорционального создаваемому объектом управления фазовому сдвигу. Этот сигнал получают при сравнении фаз сигналов на входе и выходе объекта управления.

На основе данного способа антирезонансной коррекции с самонастройкой на изменяющуюся резонансную частоту разработана структура псевдолинейного компенсатора (см. рис. 4.1). Проведем анализ динамических характеристик управляемого «упора». Данная модель содержит звено типа "люфт" с настраиваемыми углом  $\alpha$  наклона характеристики и шириной  $B$  зоны нечувствительности. Эти настройки определяются соответственно коэффициентами  $k_1$  и  $k_2$ . Для формирования  $B$  используется канал измерения амплитуды входного сигнала  $x$  люфта [91].

Предположим, что  $x = A \sin \omega t$  и коэффициенты  $k_1$  и  $k_2$  зависят от частоты  $\omega$ . В этом случае первая гармоническая составляющая выходного сигнала  $z$  люфта имеет вид

$$z = A(q_1(A, \omega) \sin \omega t + q_2(A, \omega) \cos \omega t), \quad (4.1)$$

где  $q_1(A, \omega)$  и  $q_2(A, \omega)$  - коэффициенты гармонической линеаризации люфта.

Они определяются известным образом

$$q_1(A, \omega) = \frac{k_1(\omega)}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} + \psi(A, \omega) + \frac{\sin 2\psi(A, \omega)}{2} \right), \quad (4.2)$$

$$q_2(A, \omega) = -\frac{k_1(\omega)}{\pi} \cos^2 \psi(A, \omega), \quad (4.3)$$

где

$$\psi(A, \omega) = \arcsin\left(1 - \frac{2Uk_2(\omega)}{A}\right). \quad (4.4)$$

Если принять  $U = A$ , то выражение (4.4) преобразуется к виду

$$\psi(\omega) = \arcsin(1 - 2k_2(\omega)). \quad (4.5)$$

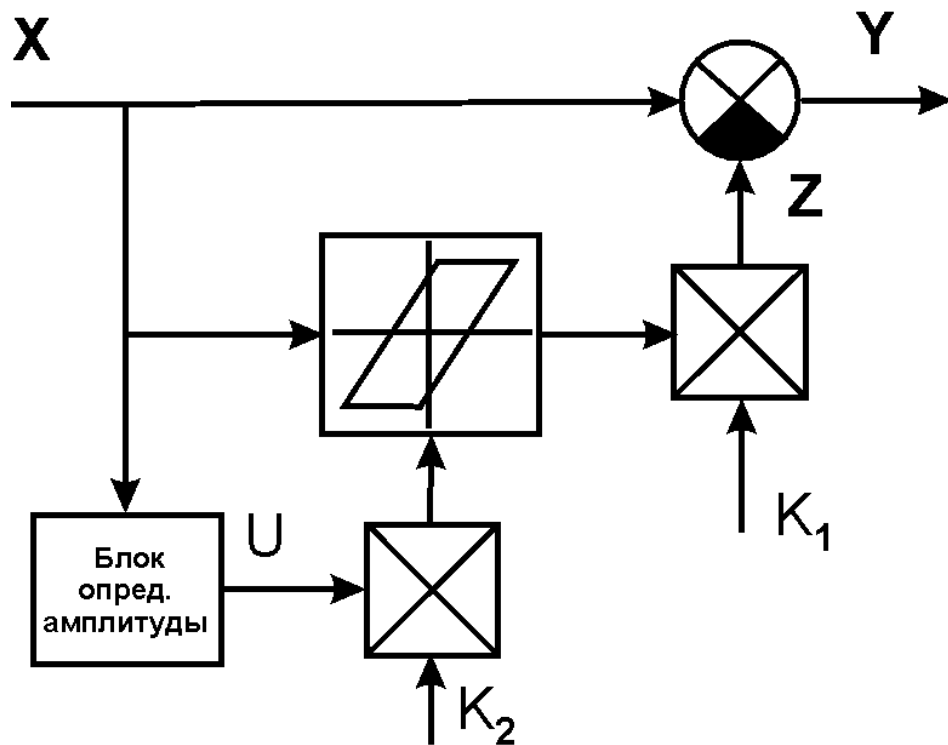


Рис.4.1 Структурная схема псевдолинейного компенсатора на основе управляемого «упора»

В этом случае коэффициенты гармонической линеаризации люфта зависят только от частоты входного сигнала  $x$ , что делает корректирующее устройство на основе упора однородным (псевдолинейным). Его амплитудночастотная и фазочастотная характеристики на основании выражения  $y = x - z$  и с учетом (4.1) - (4.5) имеют соответственно вид

$$a_y(\omega) = \sqrt{(1 - q_1(\omega))^2 + q_2(\omega)^2}; \quad (4.6)$$

$$\varphi_y(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{q_2(\omega)}{q_1(\omega) - 1}. \quad (4.7)$$

На рис.4.2 представлены построенные по формулам (4.6) и (4.7) зависимости коэффициента передачи и фазового сдвига упора от величины ширины зоны нечувствительности «люфта»  $k_2$  при различных значениях коэффициента наклона характеристики «люфт»  $k_1$ :

$$1) K_I = 0.5;$$

$$2) K_I = 1;$$

$$3) K_I = 1.5;$$

$$4) K_I = 2.$$

Анализ этих зависимостей выявил следующие свойства управляемого упора, определяющие целесообразность его применения в качестве компенсатора упругих тонов колебаний системы.

1. При  $k_1 = 1$  и уменьшении  $k_2$  происходит уменьшение коэффициента передачи упора, причем его величина практически совпадает с величиной  $k_2$ . При этом фазовое опережение, создаваемое упором, увеличивается от 0 до 90 градусов.
2. При  $k_1 = 2$  и уменьшении  $k_2$  коэффициент передачи упора остается практически без изменения, а фазовое опережение при этом возрастает свыше 90 градусов.



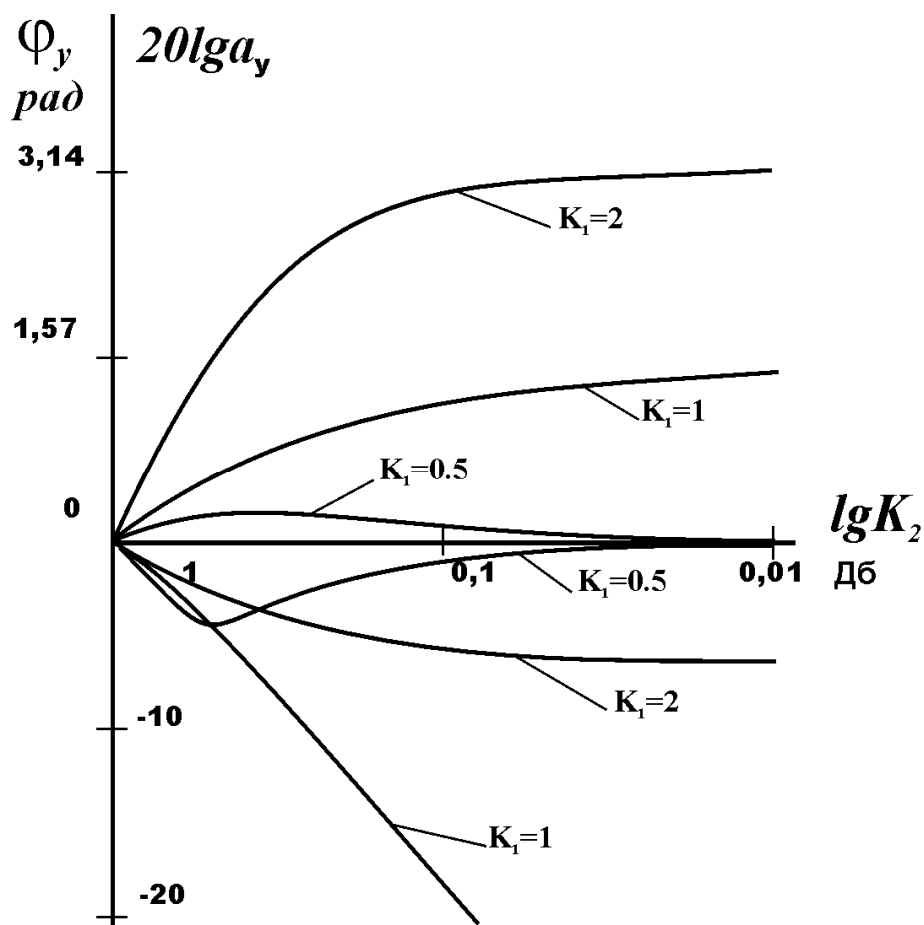


Рис.4.2. Зависимости коэффициента передачи и фазового сдвига «упора» от величины ширины зоны нечувствительности «люфта»

Первое свойство «упора» при соответствующем изменении  $k_2$  может быть использовано для сглаживания частотнонеустойчивого резонансного всплеска амплитудной характеристики системы (адаптивная амплитудная компенсация резонанса). На основе второго свойства упора также при соответствующей настройке  $k_2$  может быть осуществлена практически полная адаптивная фазовая компенсация резонанса путем создания, начиная с резонансной частоты, необходимого положительного фазового сдвига.

Таким образом, задача синтеза адаптивной коррекции на базе упора заключается в идентификации резонанса в системе и формировании на основе этой информации законов изменения параметров люфта  $k_1(\omega)$  и  $k_2(\omega)$ .

### 4.3. Синтез адаптивного псевдолинейного компенсатора

Для синтеза алгоритма адаптивной настройки параметров люфта предлагается рассмотреть способ фазового управления антирезонансной коррекцией [53, 92], в котором для идентификации резонанса используется информация о фазе упругих колебаний в системе. Известно, что у фазочастотной характеристики  $\varphi_0(\omega)$  колебательного звена в области резонансной частоты происходит резкий отрицательный фазовый сдвиг до 180 градусов. Информацию о нем предлагается получать на основе жесткой связи между фазовой и амплитудной частотными характеристиками. Примером такого подхода может служить устройство определения фазового сдвига [93], которое измеряет и сравнивает амплитуды сигналов со входа и выхода исследуемого звена. Его выходной сигнал имеет уровень, пропорциональный рассогласованию фаз входного и выходного сигналов.

В соответствии с известным видом амплитудной и фазовой частотных характеристик колебательного звена для амплитудной компенсации порождаемого им резонанса необходимо при увеличении  $\varphi_0$  от 0 до 90 градусов создавать компенсатором нарастающее амплитудное ослабление, а в интервале  $\varphi_0$  от 90 до 180 градусов обратно увеличивать его коэффициент передачи до 1. При этом желательно осуществлять также и фазовую компенсацию резонанса, которая должна обеспечивать при увеличении  $\varphi_0$  от 0 до 180 градусов соответствующее увеличение фазового опережения и сохранять его в диапазоне частот справа от резонансной частоты.

На основании графиков на рис.4.2 можно сделать вывод, что совместная амплитудная и фазовая компенсация резонанса возможна с помощью упора при одновременном изменении  $k_1$  и  $k_2$  в зависимости от величины фазового сдвига  $\varphi_0$ . Для определения необходимых диапазонов изменения  $k_1$  и  $k_2$  рассмотрим крайние значения  $\varphi_0$ . При  $\varphi_0 = 0^\circ$  имеют смысл настройки люфта  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 1$ ,

при которых корректирующий эффект упора отсутствует. При  $\varphi_0 = 180^\circ$  для коррекции только фазочастотной характеристики системы целесообразно, чтобы  $k_1 = 2$ , а  $k_2 \rightarrow 0$ . Таким образом, при увеличении  $\varphi_0$  параметр самонастройки  $k_1$  должен увеличиваться от 1 до 2, а  $k_2$  - уменьшаться от 1 до 0. При этом в середине фазового диапазона при  $\varphi_0 = 90^\circ$  (на частоте резонанса) для получения компенсатором амплитудного ослабления коэффициент  $k_2$  должен быть значительно меньше 1, а  $k_1$  - близок к 1.

На основании этих выводов предлагается осуществлять самонастройку наклона люфта и ширины его зоны нечувствительности в соответствии со следующими аналитическими зависимостями

$$k_1(\varphi_0) = 2 - \cos^k\left(\frac{\varphi_0}{2}\right); \quad (4.8)$$

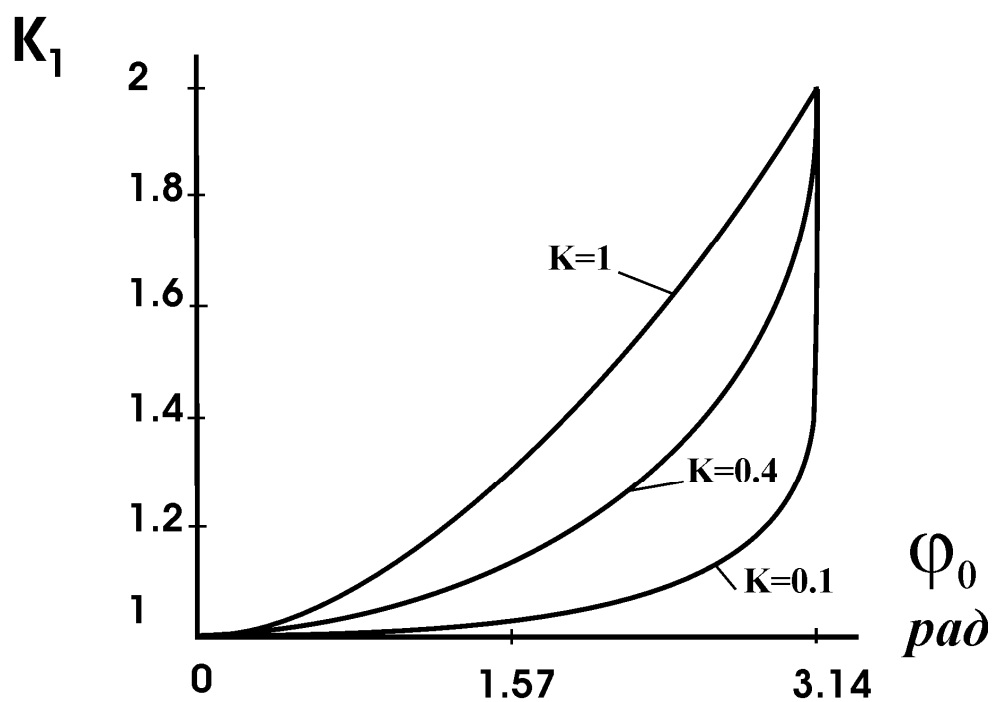
$$k_2(\varphi_0) = 1 - \sin^k\left(\frac{\varphi_0}{2}\right). \quad (4.9)$$

Графики зависимостей (4.8) и (4.9) при различных значениях коэффициента  $k$  представлены соответственно на рис.4.3а и рис.4.3б.

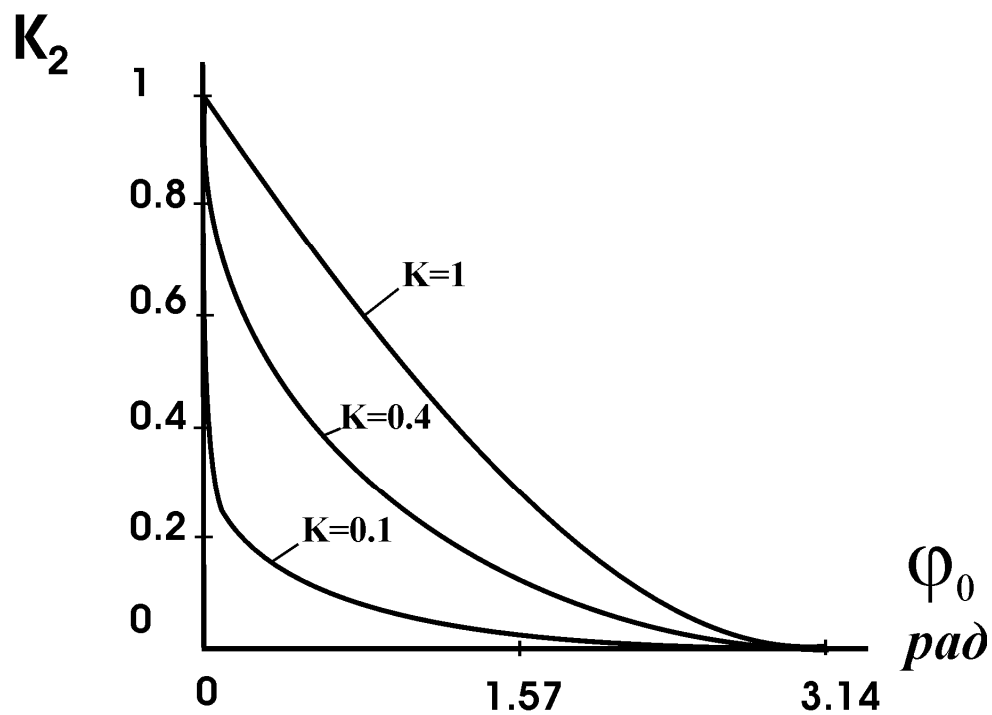
Параметр  $k$  является жесткой настройкой предложенных адаптивных алгоритмов. Его выбор определяется требуемым амплитудным ослаблением компенсатора на частоте резонанса, соответствующим величине амплитудного пика. Данный коэффициент может быть выбран на основе анализа экспериментальной ЛАЧХ системы и графиков на рис.4.2, рис.4.3.

Структурная схема системы, реализующей адаптивный алгоритм коррекции упругих колебаний приведена на рис.4.4. Работа самонастраивающейся системы основана на получении на выходе первого блока сравнения сигнала с АЧХ, инверсной к амплитудному пику АЧХ резонансного объекта управления, и с фазовой частотной характеристикой (ФЧХ), компенсирующей фазовое запаздывание. В самонастраивающейся системе второй блок сравнения, усилитель, первый и второй формирователи,

первый и второй блоки умножения, блок определения амплитуды и блок типа «люфт» функционально образуют псевдолинейный компенсатор.



а)



б)

Рис.4.3. Графики зависимостей (4.8) и (4.9) при различных значениях коэффициента  $k$

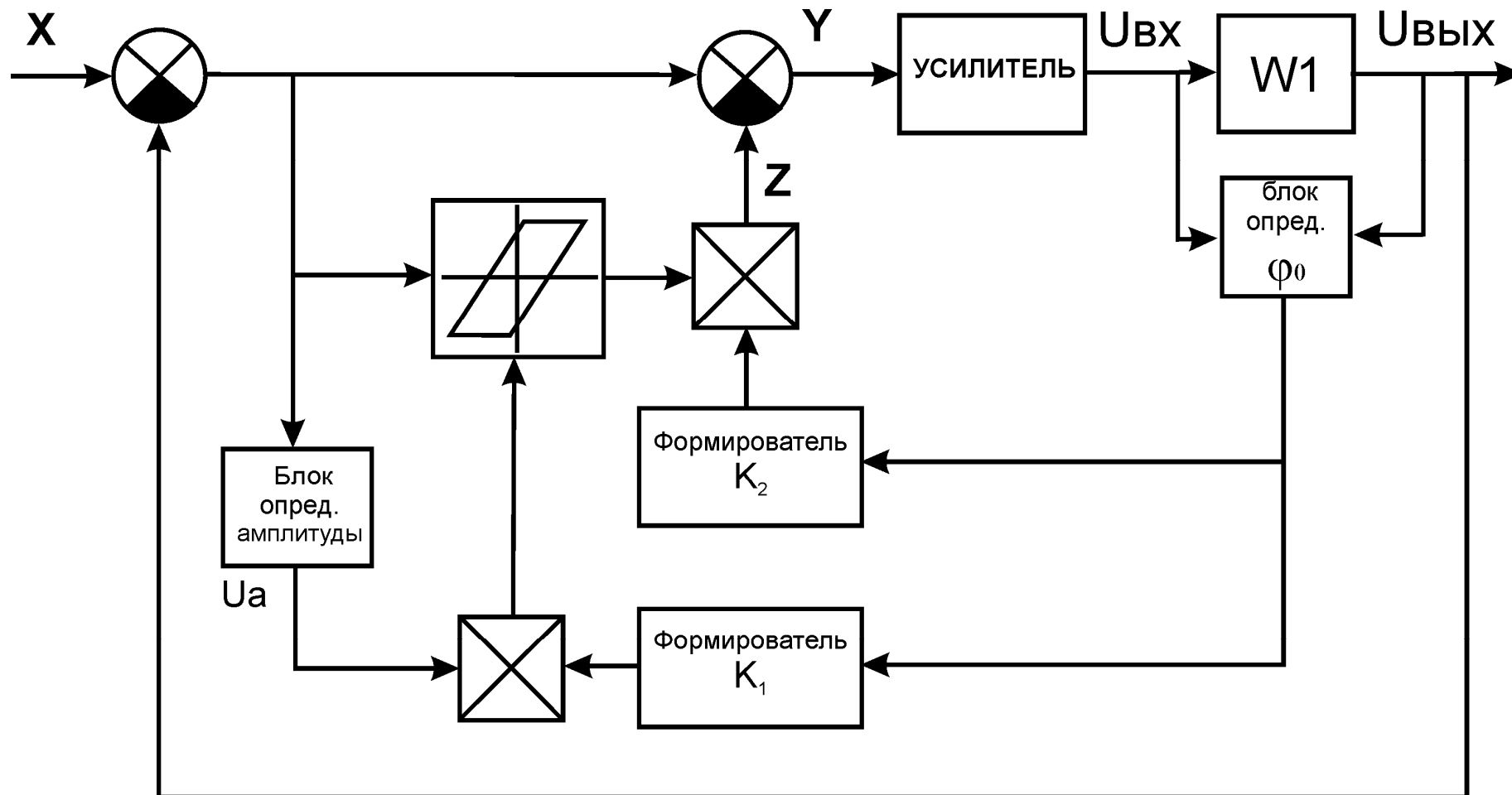
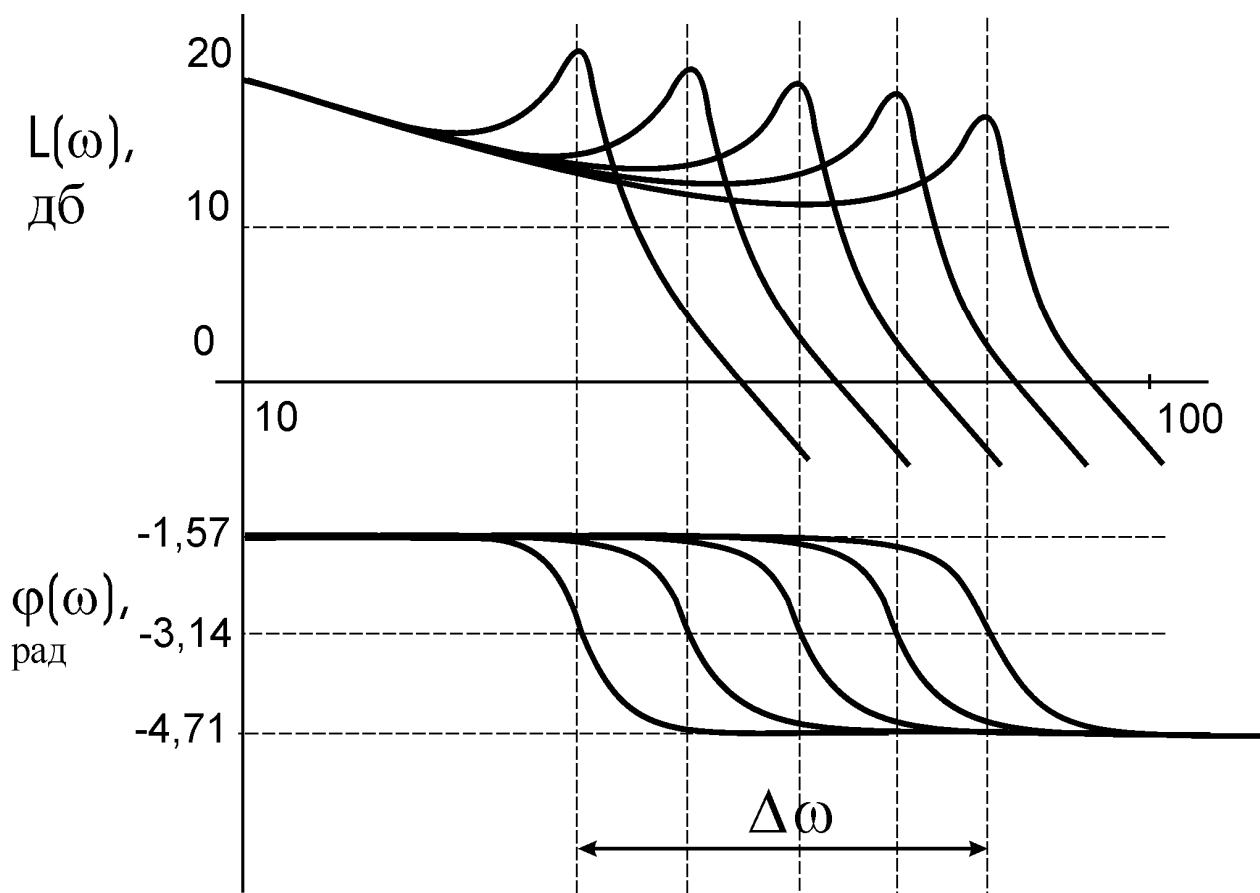


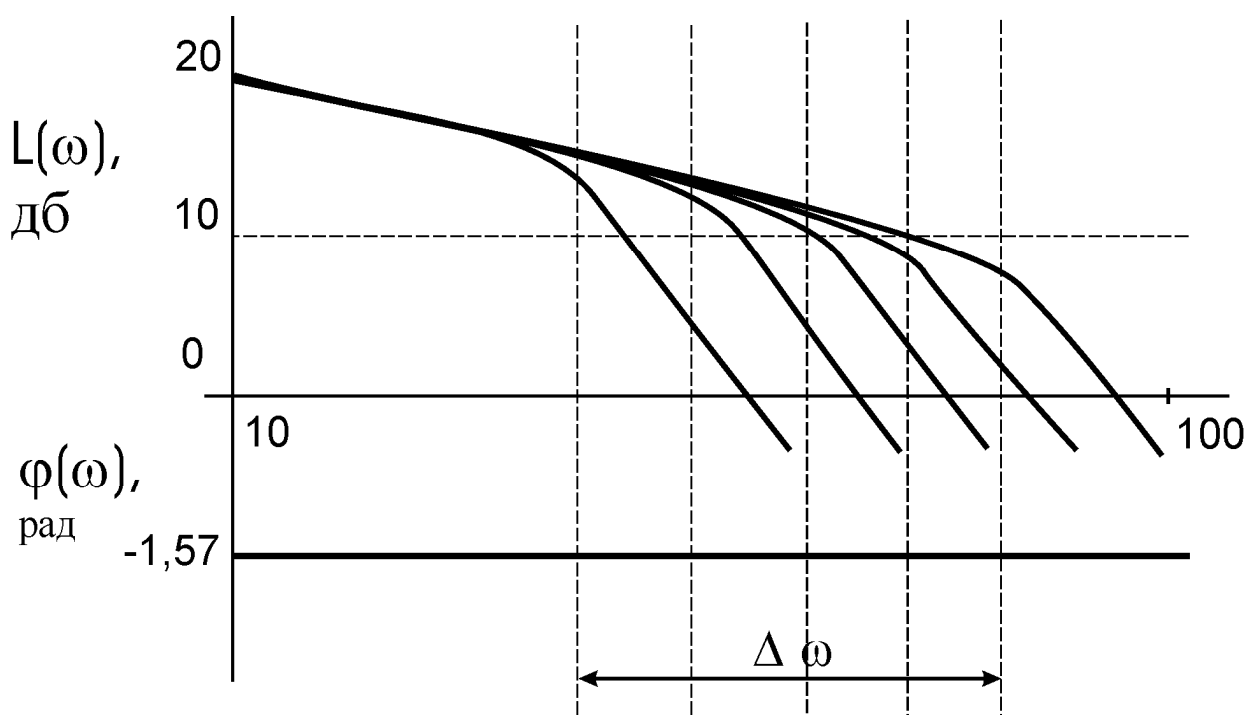
Рис.4.4. Структурная схема самонастраивающейся системы.

Получение информации о возникновении резонансных явлений в системе для компенсатора основано на жесткой связи между фазовой и амплитудной частотными характеристиками упругого объекта управления, имеющего передаточную функцию колебательного звена. На рис.4.5а представлен вид ЛАЧХ и ЛФЧХ колебательного звена с частотонестабильными резонансными пиками. Как известно, на частоте резонанса в таком звене происходит увеличение фазового запаздывания. Таким образом, информация о возникновении резонансов поступает в компенсатор в виде сигнала с определенным уровнем напряжения, пропорциональным рассогласованию фаз на входе и выходе упругого объекта управления. Для этого используется блок определения фазового сдвига, обрабатывающий сигналы со входа и, выхода объекта управления.

Иллюстрацией эффективности применения разработанного адаптивного компенсатора являются частотные характеристики, представленные на рис.4.5б. Вид частотных характеристик подтверждает сделанный выше вывод о том, что его амплитудная и фазовая характеристики являются инверсными по отношению соответственно к амплитудному пику и фазовому сдвигу в системе в области резонанса, поскольку, в результате такой компенсации система имеет скорректированные характеристики, на которых практически не отражается влияние резонанса. Данный корректирующий эффект будет иметь место при любой возможной резонансной частоте в системе. Поэтому применение адаптивного компенсатора резонансов позволяет максимально расширить полосу пропускания системы.



а)



б)

Рис. 4.5. Логарифмические частотные характеристики

#### 4.4. Синтез робастного псевдолинейного компенсатора

При анализе корректирующих свойств управляемого упора было установлено, что на его основе может быть реализован также и робастный компенсатор со свойствами фильтра низких частот. Он должен, начиная с определенной частоты, резко уменьшать свой коэффициент передачи, опуская тем самым ЛАЧХ системы вместе с резонансными пиками под частотную ось. При этом на робастный компенсатор предлагается возложить и невыполнимую линейным фильтром низких частот задачу создания фазового опережения, обеспечивающего в системе требуемый запас устойчивости по фазе.

При синтезе робастного компенсатора необходимо определить его настройки  $k_1$  и  $k_2$ . Выше была установлена важная особенность: при  $k_1 = 1$  величина  $a_y$  практически совпадает с величиной  $k_2$ , изменяющейся в диапазоне  $[0;1]$ . На основании этого свойства для получения желаемой зависимости  $a_y(\omega)$  в виде АЧХ низкочастотного фильтра предлагается вместо блока умножения в канале управления шириной люфта использовать линейный фильтр низких частот  $W_\phi(s)$ , поставив его перед блоком измерения амплитуды. При таком амплитудном управлении шириной люфта справедливо соотношение  $a_y(\omega) \approx |W_\phi(j\omega)|$ . Таким образом, синтез робастного компенсатора сводится к выбору передаточной функции  $W_\phi(s)$ . Пусть она имеет вид

$$W_\phi(s) = \frac{1}{(T_\phi s + 1)^m}. \quad (4.9)$$

В этом случае робастный компенсатор содержит две настройки:  $T_\phi$  и  $m$ . Постоянная времени  $T_\phi$  фильтра  $W_\phi(s)$  задает левую границу частотной области робастной коррекции и определяется выражением  $T_\phi = \frac{1}{\omega_{2p}}$ , где  $\omega_{2p}$  -



граничная частота полосы пропускания системы. Показатель степени  $m$  задает крутизну ЛАЧХ компенсатора в области робастного демпфирования. Он определяется величиной амплитудных пиков нестабильных тонов упругих колебаний системы.

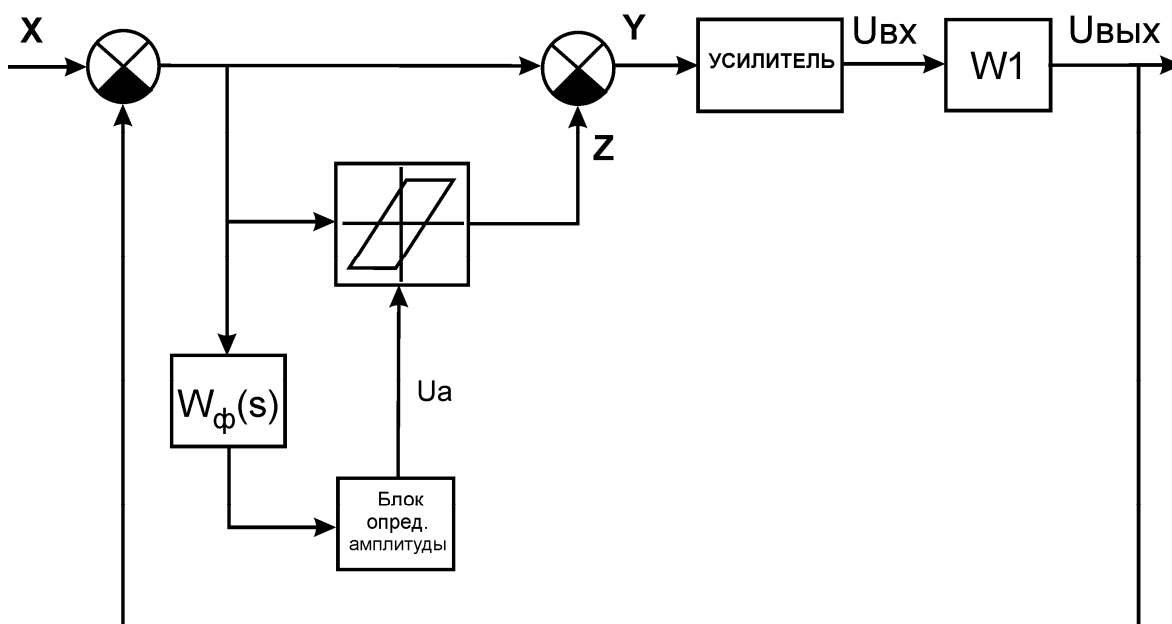


Рис.4.6. Структурная схема робастной системы

#### 4.5. Комбинирование адаптивной и робастной псевдолинейной коррекции упругих интервальных систем

Предлагаемый принцип комбинирования адаптивной и робастной коррекции является отражением концепции многорежимного регулирования [94, 95, 96, 97], основанной на системном подходе к синтезу законов управления сложными динамическими объектами. Следуя этой концепции, для осуществления в рассматриваемой системе комбинированной коррекции необходим специальный контроллер, состоящий из анализатора динамической ситуации и коммутатора. Анализатор при переходе изменяющейся частоты

колебаний через границу полосы пропускания системы должен вырабатывать сигнал, инициирующий переключение коррекции с адаптивной на робастную или наоборот [98].

На рис.4.7 представлен разработанный на основе управляемого упора комбинированный компенсатор с контроллером. Формирователи коэффициентов  $k_1$  и  $k_2$  компенсатора используют информацию с колебательного звена системы, имеющего передаточную функцию  $W_1(s)$ . В качестве анализатора динамической ситуации применен компаратор, сравнивающий уровни выходных сигналов  $U_A$  и  $U_P$  блоков измерения амплитуд соответственно в каналах адаптивной и робастной настройки компенсатора. Учитывая, что в адаптивном режиме работы компенсатора измеряется амплитуда входного сигнала корректирующего устройства, а в робастном – после прохождения этого сигнала через фильтр  $W_\phi(s)$  с передаточной функцией (9), указанные уровни одинаковы и равны  $A$  для всех частот слева от  $\omega_{cp}$ , а при  $\omega > \omega_{cp}$  уровень сигнала  $U_P$  меньше  $A$ . Поэтому при превышении  $\omega$  над  $\omega_{cp}$  компаратор срабатывает и формирует сигнал, свидетельствующий о необходимости перехода от адаптивной коррекции к робастной. Этот сигнал подается на коммутатор, представляющий собой релейный элемент с блоком управляемых ключей. По сигналу компаратора происходит срабатывание релейного элемента и изменение положений ключей, приводящее к переводу компенсатора в робастный режим.

Возврат на адаптивную коррекцию происходит при обратном переходе  $\omega$  через  $\omega_{cp}$ , когда  $U_P$  становится равным  $U_A$ . В этом случае обнуляется сигнал компаратора, происходит отпускание релейного элемента и возврат ключей в исходное состояние, соответствующее адаптивному режиму компенсатора.

Синтезируя контроллер, следует обратить внимание на увеличение его быстродействия и минимизацию сложности. Важной задачей, согласно [97],

является также обеспечение в системе условий "безударного" перехода от одного типа коррекции к другому.

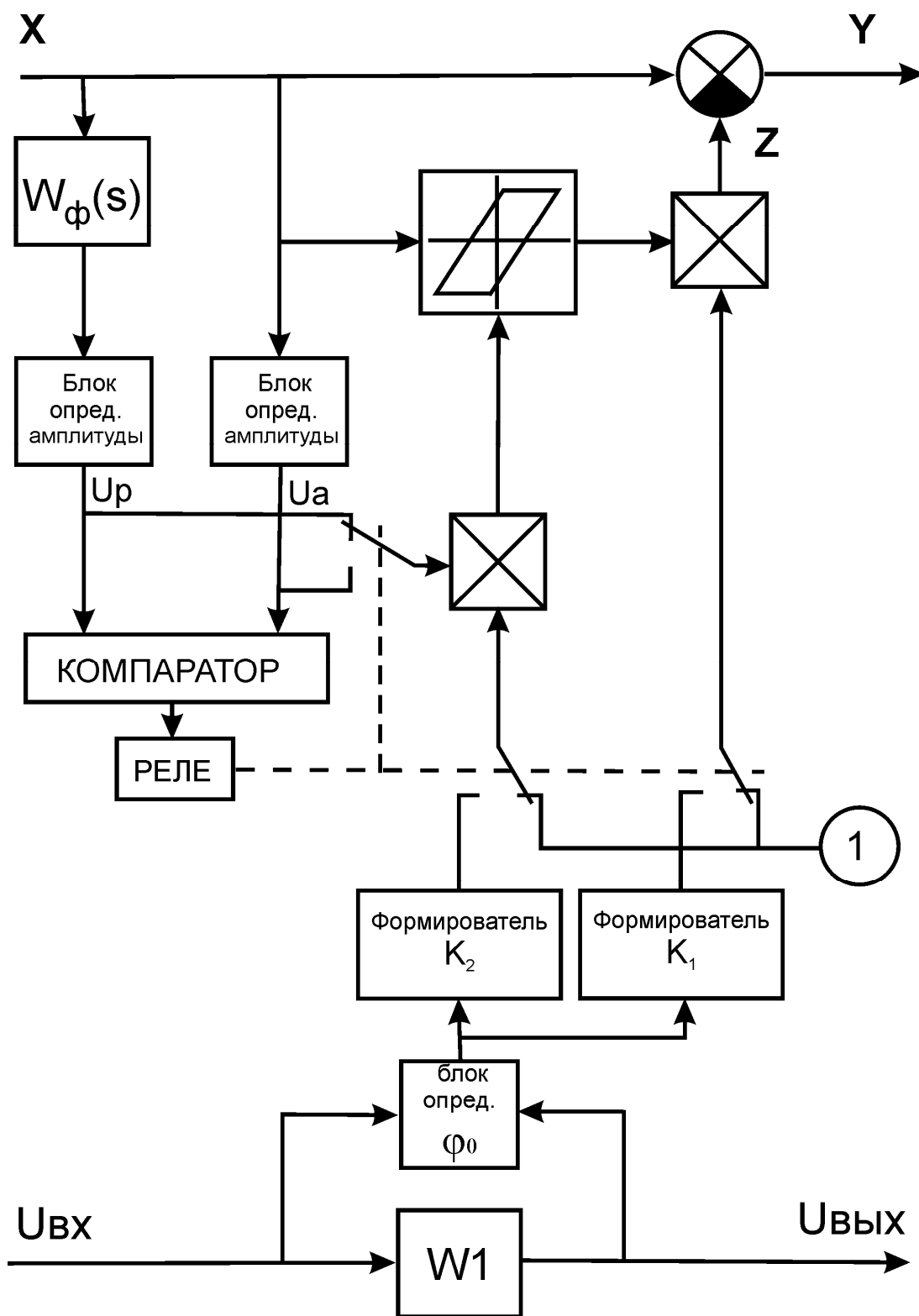


Рис.4.6. Структурная схема комбинированной системы

## 4.6. Основные результаты

1. На основе анализа нестационарных слабодемпфированных систем с широким диапазоном изменения резонансной частоты (выходящим за полосу пропускания) показана целесообразность декомпозиция общей задачи коррекции на следующие две задачи:

- точная (частотнонепрерывная) компенсация амплитудного всплеска в полосе пропускания системы;
- загрузка системы в частотном диапазоне правее полосы пропускания.

2. Разработан способ адаптивной антирезонансной коррекции нестабильных частотных характеристик объекта управления на основе свойств управляемого упора. В его основе лежит компенсация фазового запаздывания с одновременным демпфированием резонансного пика амплитудной частотной характеристики объекта управления.

3. Получена структура псевдолинейного корректирующего устройства на основе разработанного способа антирезонансной коррекции с самонастройкой на изменяющуюся резонансную частоту. Рсчитаны настройки адаптивного псевдолинейного корректора. Его амплитудная и фазовая характеристики являются инверсными по отношению соответственно к амплитудному пику и фазовому сдвигу в системе в области резонанса. В результате такой компенсации система имеет скорректированные характеристики на которых практически не отражается влияние резонанса.

4. Получена структура робастного псевдолинейного компенсатора на основе управляемого упора со свойствами фильтра низких частот.

5. Предложен способ комбинирования адаптивной и робастной антирезонансной коррекции и структура его реализующая.

## ГЛАВА 5. ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ РАЗРАБОТАННЫХ АЛГОРИТМОВ

### 5.1. Постановка задачи

В настоящее время для анализа и синтеза ИС широко используются специализированные пакеты прикладных программ [99, 100].

Методика определения реберного маршрута имеет ключевое значение при анализе и синтезе робастных систем, которые были рассмотрены в трех первых главах. Для программной реализации методик анализа и синтеза систем с интервальными параметрами необходимо разработать универсальные алгоритмы определения углов выхода ветвей корневого годографа из заданного корневого узла. При этом задача может быть декомпозирована на три подзадачи:

1. Разработка программы определения угла между вещественной осью и вектором, направленным из любой точки комплексной плоскости к заданному корневному узлу. Данная процедура необходима для нахождения фазовых соотношений (см. п. 1.3).

2. Разработка программы определения углов выхода реберных ветвей корневого годографа из заданного корневого узла при изменении соответствующих интервальных коэффициентов ИХП (при интервальной неопределенности системы).

3. Разработка программы определения углов выхода реберных ветвей корневого годографа из заданного корневого узла при изменении соответствующих интервальных параметров (при аффинной неопределенности системы).

Решение на ЭВМ поставленных задач значительно упростит применение разработанных методов анализа и синтеза интервальных систем, описанных во второй и третьей главах. При этом необходимо заметить, что наиболее эффективно их решать в интерактивном режиме.

Второй задачей является практическая реализация разработанного адаптивного алгоритма антирезонансной коррекции. Для ее решения предлагается в качестве системы с интервальными параметрами рассмотреть следующую систему с двигателем, который работает в резонансном режиме и имеет интервальную постоянную времени.

В соответствии с разработанным алгоритмом адаптации задачу синтеза адаптивного компенсатора для данной системы можно декомпозировать на три подзадачи:

1. техническая реализация основного элемента компенсатора, имеющего нелинейную характеристику типа «упор»;
2. техническая реализация устройства определения амплитуды входного сигнала компенсатора;
3. техническая реализация устройства определения фазового сдвига между входным и выходным сигналами интервального упругого объекта управления.

## **5.2. Программная реализация робастного алгоритма определения реберного маршрута**

Для нахождения алгоритма процедуры определения угла между вещественной осью и вектором, направленным из любой точки комплексной плоскости к заданному корневому узлу, необходимо принять несколько ограничений:

1. Выбираемый корневой узел должен находиться во второй четверти комплексной плоскости.
2. Углы отсчитываются от вещественной положительной полуоси против часовой стрелки (должны быть положительными).

На рис.5.1 пронумерованы возможные зоны взаимного расположения выбранного корневой узла  $U$  и любой точки, которая может быть либо нулем передаточной функции, либо полюсом.

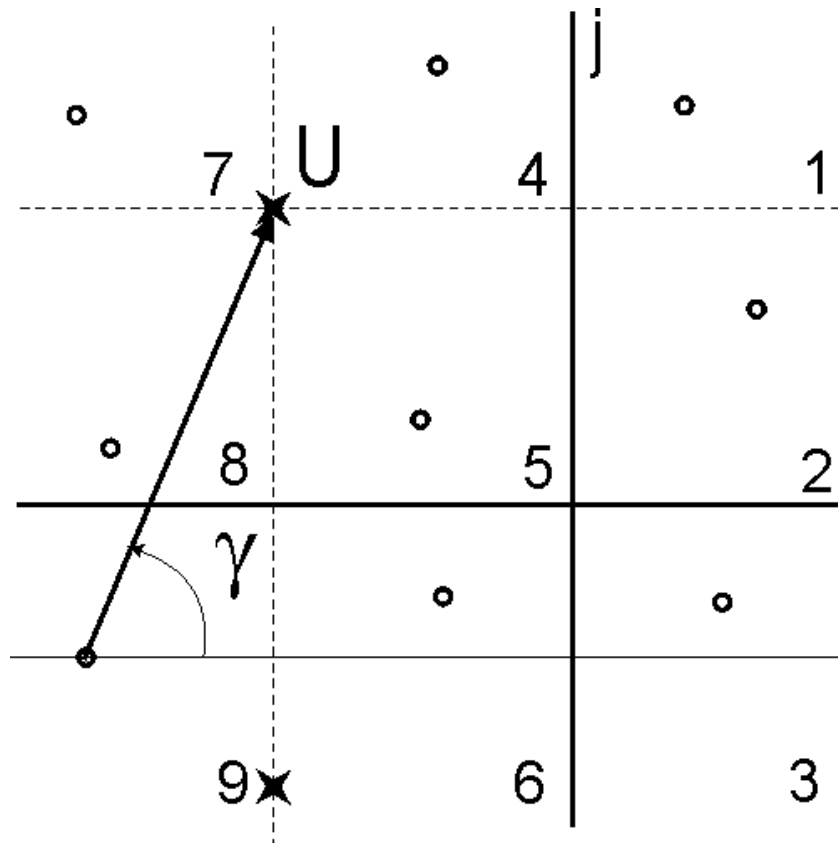


Рис.5.1. Возможное расположение корневого узла  $U$  и нулей (полюсов) на комплексной плоскости

В каждой зоне комплексной плоскости нахождение угла  $\gamma$  между действительной осью и вектором, проведенным из нуля (полюса) к выбранному корневому узлу  $U$ , подчиняется единому закону.

Зная координаты проверяемого узла  $U$  и координаты нуля (полюса), в каждой зоне можно определить искомый угол по одному из приведенных в табл.1 уравнений. Мнимую координату узла  $U$  обозначим через  $\beta_U$ , а действительную  $\alpha_U$ . Координаты нуля (полюса) обозначим соответственно через  $\alpha_i, \beta_i$ , где  $i = [0, n]$ ,  $n$  – число нулей или полюсов передаточной функции. Выражения для углов  $\gamma$  в каждой зоне комплексной плоскости сведены в таблице 1.

№	№ зоны	Ограничения по действительной оси	Ограничения по мнимой оси	Выражение для угла $\gamma$
1	1	$\alpha_i > 0;$ $\alpha_i > \alpha_U$	$\beta_i \geq 0; \beta_i \geq \beta_U$	$\pi + \operatorname{arctg} \frac{\ \beta_i\  - \ \beta_U\ }{\ \alpha_i\  + \ \alpha_U\ }$
2	2		$\beta_i \geq 0; \beta_i < \beta_U$	$\pi - \operatorname{arctg} \frac{\ \beta_i\  - \ \beta_U\ }{\ \alpha_i\  + \ \alpha_U\ }$
3	3		$\beta_i < 0; \beta_i < \beta_U$	$\pi - \operatorname{arctg} \frac{\ \beta_i\  + \ \beta_U\ }{\ \alpha_i\  + \ \alpha_U\ }$
4	4	$\alpha_i \leq 0;$ $\alpha_i > \alpha_U$	$\beta_i \geq 0; \beta_i \geq \beta_U$	$\pi + \operatorname{arctg} \frac{\ \beta_i\  - \ \beta_U\ }{\ \alpha_i\  - \ \alpha_U\ }$
5	5		$\beta_i \geq 0; \beta_i < \beta_U$	$\pi - \operatorname{arctg} \frac{\ \beta_i\  - \ \beta_U\ }{\ \alpha_i\  - \ \alpha_U\ }$
6	6		$\beta_i < 0; \beta_i < \beta_U$	$\operatorname{arctg} \frac{\ \beta_i\  - \ \beta_U\ }{\ \alpha_i\  + \ \alpha_U\ }$
7	7	$\alpha_i \leq 0;$ $\alpha_i < \alpha_U$	$\beta_i \geq 0; \beta_i \geq \beta_U$	$2\pi - \operatorname{arctg} \frac{\ \beta_i\  - \ \beta_U\ }{\ \alpha_i\  - \ \alpha_U\ }$
8	8		$\beta_i \geq 0; \beta_i < \beta_U$	$\operatorname{arctg} \frac{\ \beta_i\  - \ \beta_U\ }{\ \alpha_i\  - \ \alpha_U\ }$
9	9		$\beta_i < 0; \beta_i < \beta_U$	$\operatorname{arctg} \frac{\ \beta_i\  - \ \beta_U\ }{\ \alpha_i\  + \ \alpha_U\ }$
10		$\alpha_i = \alpha_U$		$\pi/2$

На основе таблицы 1 составлена процедура нахождения угла  $\gamma$ , которая приведена в приложении 7.



Так как искомый угол  $\gamma$  зависит от координат двух точек, то обозначим его как функцию  $\gamma(U, P)$ , где  $U$  – корневой узел, а  $P$  – полюс либо ноль передаточной функции.

Используя данную процедуру  $\gamma(U, P)$ , можно составить алгоритмы для двух программ решения уравнений фаз при интервальной и аффинной неопределенности системы.

На рис.5.2 приведен алгоритм нахождения углов выхода реберных ветвей корневого годографа для случая интервальной неопределенности. Алгоритм рассчитан на интерактивный режим работы. На первом этапе необходимо ввести начальные условия (блок1), которые включают в себя: степень  $n$  ИХП, максимальные и минимальные значения коэффициентов ИХП. Далее необходимо выбрать вершину параметрического многогранника. Для выбранной вершины программа рассчитывает корни соответствующего ей характеристического полинома (блок 2). Пользователю предлагается выбрать один из корней, который будет являться проверяемым корневым узлом  $U$  с номером  $N$  (блок 3). Обязательным условием является выбор этого корневого узла из второй четверти комплексной плоскости. Если же такого узла не найдется, то необходимо выбрать другую вершину параметрического многогранника.

Далее, поочередно перебирая все корни передаточной функции и используя вычислительную процедуру  $\gamma(U, P)$ , программа определяет сумму углов, образованных полюсами передаточной функции:

$$Sloc = \sum_{m=0}^{n-1} \gamma(U, P_m) \quad (5.1)$$

При вхождении в ИХП интервальных параметров как коэффициентов полинома выражение фазового соотношения при увеличении интервального параметра (1.21) записывается в следующем виде

$$\Theta_i = 180^\circ - Sloc + i \cdot \gamma(U, 0), \quad (5.2)$$

где  $i$  – индекс интервального коэффициента, соответствующий степени  $s$  при коэффициенте. При уменьшении  $i$ -го интервального параметра выражение (1.22) имеет вид

$$\Theta_i = -Sloc + i \cdot \gamma(U, 0). \quad (5.3)$$

Проверка возрастания либо убывания  $i$ -го интервального коэффициента осуществляется в блоке 14. В блоках 15 и 16 непосредственно вычисляются фазовые соотношения по формулам (5.2), (5.3). На выходе программа формирует вектор  $D$  со значениями углов выхода реберных ветвей корневого годографа из проверяемого корневого узла  $U$ .

По найденным углам пользователь по разработанной выше методике определяет, является ли проверяемый корневой узел граничным. Если он таковым не является, то пользователю необходимо выбрать для проверки другую вершину параметрического многогранника, либо другой корневой узел. Программа, составленная по предложенному алгоритму, реализована с помощью пакета MatCad и приведена в приложении 8. Диалоговый интерфейс программы представлен на рис. 5.3.

При аффинной неопределенности алгоритм нахождения углов выхода реберных ветвей несколько усложняется (см. рис. 5.4). Это объясняется необходимостью учета ненулевых координат у нулей передаточной функции.

При вводе начальных условий в данном случае необходимо задать:

- степень характеристического полинома системы;
- число интервальных параметров;
- минимальные и максимальные значения интервальных параметров;
- выражения при  $s^i$  в характеристическом полиноме.

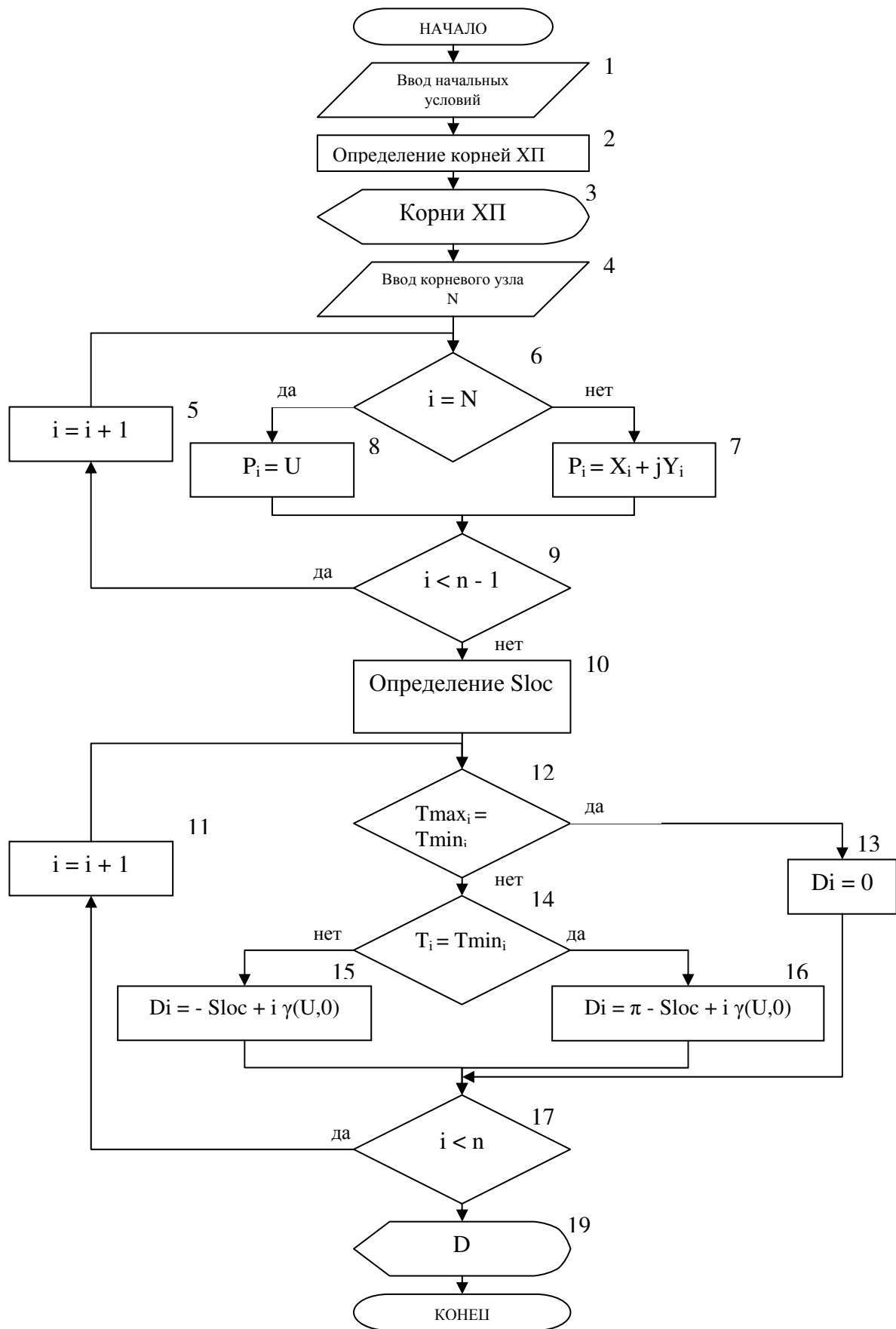


Рис. 5.2. Алгоритм определения углов выхода реберных ветвей при интервальной неопределенности

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ УГЛОВ ВЫХОДА ВЕТВЕЙ КОРНЕВОГО ГОДОГРАФА ПРИ ИНТЕРВАЛЬНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

1. Введите степень характеристического полинома системы:

n :=

2. Введите максимальные и минимальные значения интервальных коэффициентов полинома и выберите проверяемую вершину:

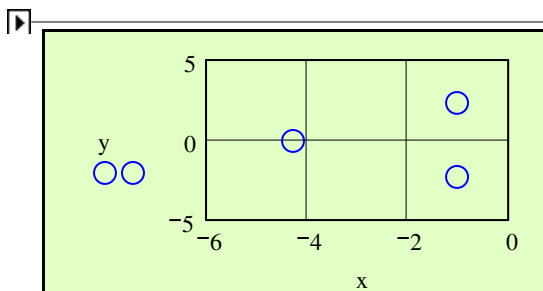
Tmin <sub>0</sub> := <input type="text" value="1"/>	Tmin <sub>1</sub> := <input type="text" value="1,1"/>	Tmin <sub>2</sub> := <input type="text" value="0,3"/>	Tmin <sub>3</sub> := <input type="text" value="0,07"/>
Tmax <sub>0</sub> := <input type="text" value="2"/>	Tmax <sub>1</sub> := <input type="text" value="1,5"/>	Tmax <sub>2</sub> := <input type="text" value="0,45"/>	Tmax <sub>3</sub> := <input type="text" value="0,1"/>
kmin <sub>0</sub> := <input type="checkbox"/> Check Box	kmin <sub>1</sub> := <input type="checkbox"/> Check Box	kmin <sub>2</sub> := <input type="checkbox"/> Check Box	kmin <sub>3</sub> := <input type="checkbox"/> Check Box
Tmin <sub>4</sub> := <input type="text" value="20"/>	Tmin <sub>5</sub> := <input type="text" value="21"/>	Tmin <sub>6</sub> := <input type="text" value="54"/>	Tmin <sub>7</sub> := <input type="text" value="76"/>
Tmax <sub>4</sub> := <input type="text" value="30"/>	Tmax <sub>5</sub> := <input type="text" value="22"/>	Tmax <sub>6</sub> := <input type="text" value="65"/>	Tmax <sub>7</sub> := <input type="text" value="87"/>
kmin <sub>4</sub> := <input type="checkbox"/> Check Box	kmin <sub>5</sub> := <input type="checkbox"/> Check Box	kmin <sub>6</sub> := <input type="checkbox"/> Check Box	kmin <sub>7</sub> := <input type="checkbox"/> Check Box

Вектор значений интервальных коэффициентов в выбранной вершине параметрического многогранника

$$T = \begin{pmatrix} 2 \\ 1.1 \\ 0.45 \\ 0.07 \end{pmatrix}$$

Значения корней интервального характеристического полинома при выбранных значениях параметров:

$$V = \begin{pmatrix} -4.322 \\ -1.053 - 2.345i \\ -1.053 + 2.345i \end{pmatrix}$$



3. Введите проверяемый корневой узел (2 четверть комплексной плоскости)

N :=

$U = -1.053 + 2.345i$

Вектор значений углов выхода ветвей корневого годографа из выбранного узла:

$$\Theta = \begin{pmatrix} 4.09 \\ 2.941 \\ 1.793 \\ 0.644 \end{pmatrix}$$

Рис. 5.3. Диалоговое окно программы расчета углов выхода реберных ветвей при интервальной неопределенности

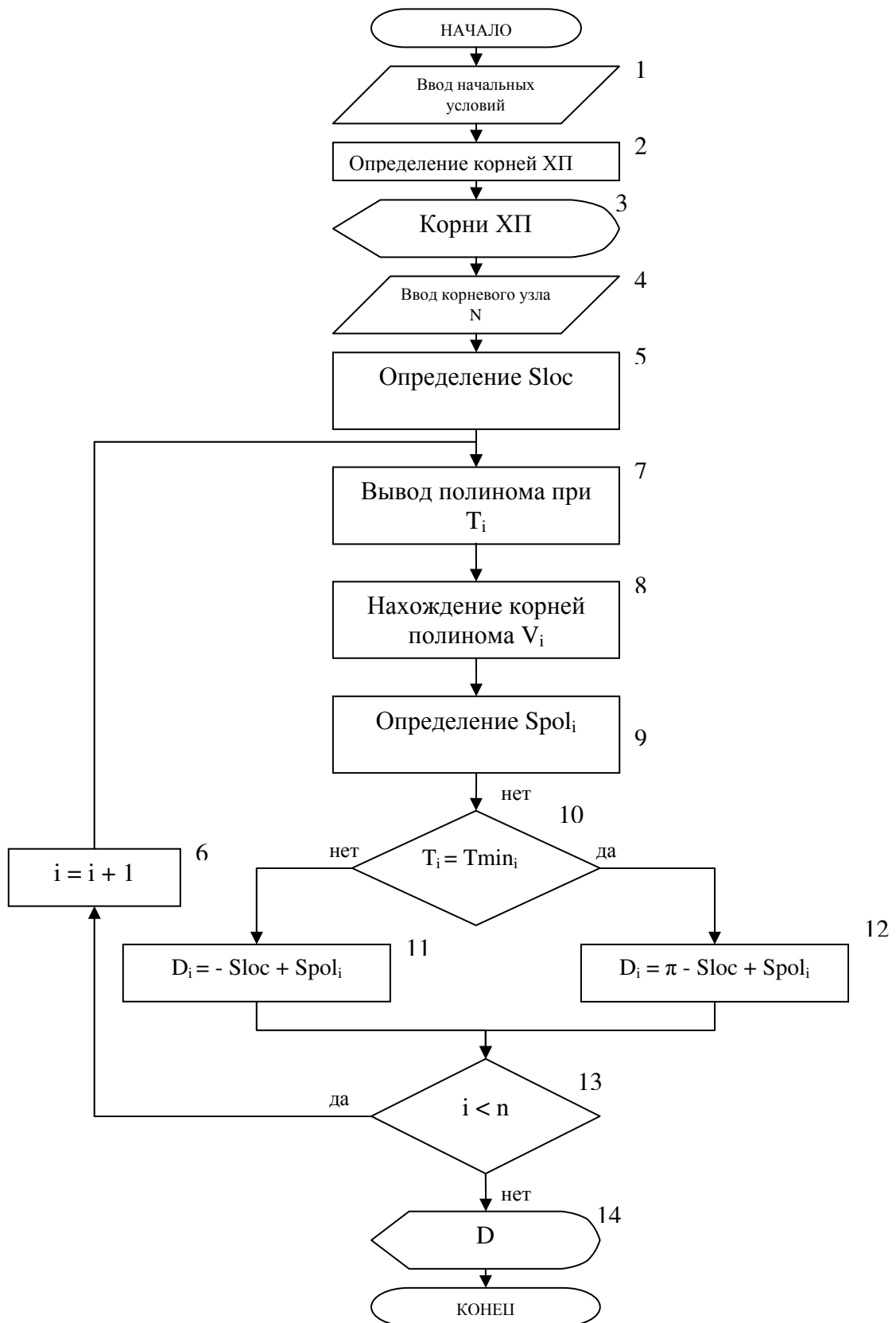


Рис.5.4. Алгоритм определения углов выхода реберных ветвей для случая аффинной неопределенности

Далее необходимо выбрать проверяемую вершину. Для нее программа рассчитывает корни характеристического полинома и выведет их на экран ЭВМ. Пользователю необходимо выбрать один из корней, который будет являться проверяемым корневым узлом с номером  $N$  (блок 4).

Обязательным условием выбора является нахождение этого корневого узла во второй четверти комплексной плоскости. Если же такого узла не найдется, то необходимо выбрать другую вершину параметрического многогранника.

Далее в цикле для каждого интервального параметра программа выполняет следующие операции.

1. Определяет коэффициенты полинома при каждом  $T_i$ .
2. Находит корни найденного полинома, которые являются нулями передаточной функции.
3. Поочередно перебирая все корни и используя процедуру  $\gamma(U, P)$ , программа определяет сумму углов, образованных нулями передаточной функции

$$Snol_i = \sum_{m=0}^k \gamma(U, P_m), \quad (5.4)$$

где  $k$  – число нулей функции,  $P_m$  – ноль передаточной функции,  $U$  – проверяемый корневой узел.

4. Проверяя условие возрастания либо убывания интервального параметра, программа вычисляет углы выхода ИКГ для каждого  $T_i$ .

На выходе программа формирует вектор  $D$  значений углов выхода реберных ветвей корневого годографа из проверяемого корневого узла. По найденным углам пользователь определяет, является ли проверяемый корневой узел граничным. Если от таковым не является, то пользователю необходимо выбрать другую вершину параметрического многогранника, либо другой корневой узел и повторить расчеты. Программ, составленная по предложенному алгоритму с помощью пакета MatCad, представлена в приложении 9.

### 5.3. Аппаратная реализация самонастраивающейся системы

Аппаратную реализацию способа адаптивной антирезонансной коррекции предлагается рассмотреть на примере упругой следящей системы, исполнительный элемент которой имеет интервальный параметр. Его влияние на динамические свойства системы заключается в наличии на АЧХ частотнонестабильных резонансных пиков. Упрощенная структурная схема такой системы приведена на рис.5.5, где  $T$  – интервальный параметр.

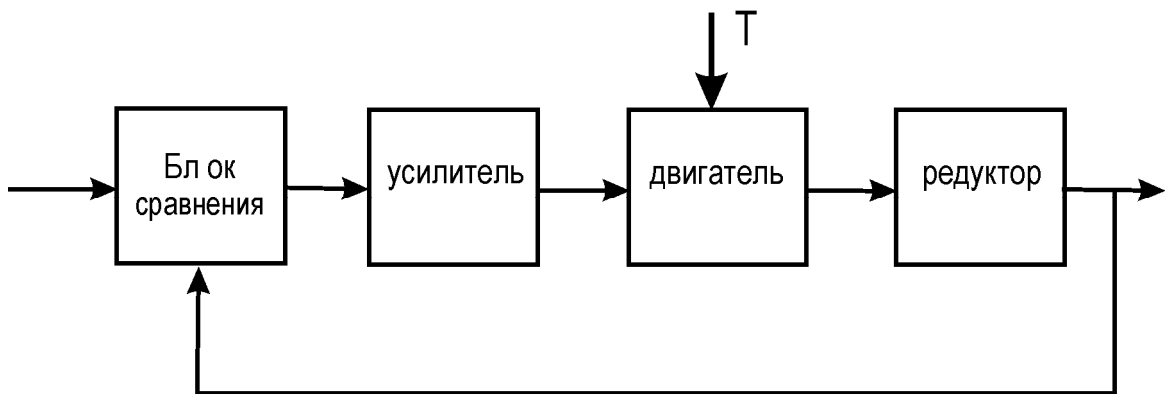


Рис.5.5. Упругая следящая система

В соответствии с разработанным способом адаптивной антирезонансной коррекции структурная схема следящей системы с компенсатором принимает вид, показанный на рис.5.6.

Работа такой самонастраивающейся системы (СНС) основана на получении на выходе второго блока сравнения сигнала с АЧХ, инверсной к амплитудному пику АЧХ резонансного двигателя, и с фазовой частотной характеристикой (ФЧХ), компенсирующей фазовое запаздывание. В СНС второй блок сравнения, усилитель, первый и второй формирователи, первый и второй блоки умножения, блок определения амплитуды и блок типа «люфт» функционально образуют адаптивный компенсатор резонансов (АКР) со свойствами ПЛКУ.

Получение информации о возникновении резонансных явлений в системе для АКР основано на жесткой связи между фазовой и амплитудной частотными характеристиками двигателя, имеющего передаточную функцию колебательного звена. Как известно, на частоте резонанса в таком звене происходит увеличение фазового запаздывания. Таким образом, информация о возникновении резонансов поступает в АКР в виде сигнала с определенным уровнем напряжения, пропорциональным рассогласованию фаз на входе и выходе двигателя. Для этого используется блок определения фазового сдвига, обрабатывающий сигналы со входа и выхода двигателя, причем последний проходит через тахогенератор и второй инерционный фильтр.

Иллюстрацией эффективности применения разработанного адаптивного компенсатора являются частотные характеристики, представленные на рис.5.7. На нем заданы и обозначены цифрой 1 исходные "замороженные" резонансные ЛАЧХ и ФЧХ разомкнутой интервальной упругой системы с передаточной функцией

$$W_p(s) = \frac{100}{s(T^2 s^2 + 0.5Ts + 1)},$$

где  $T$  является интервальным параметром. Передаточная функции соответствует разомкнутой цепочке усилитель, двигатель, редуктор.



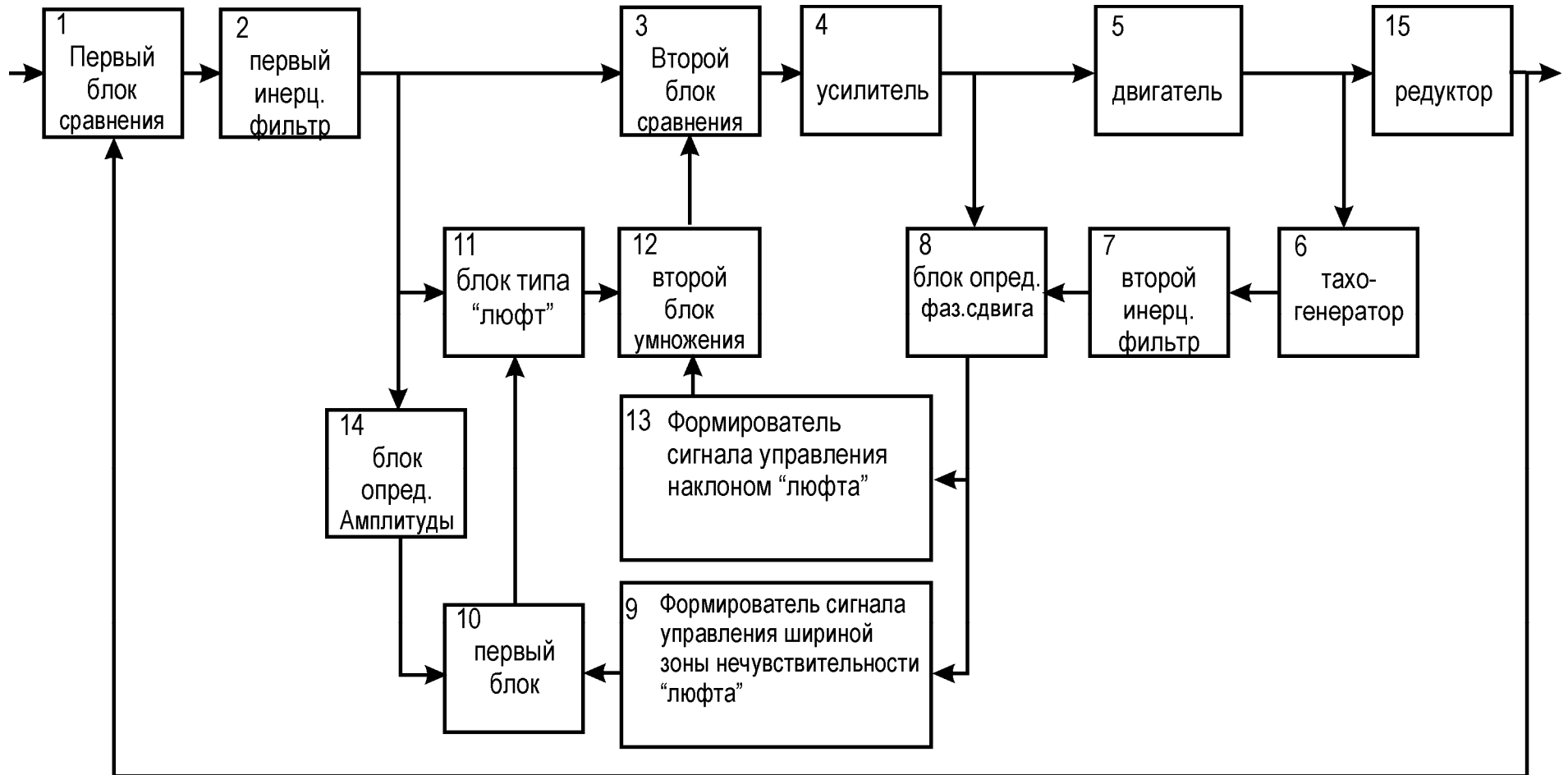
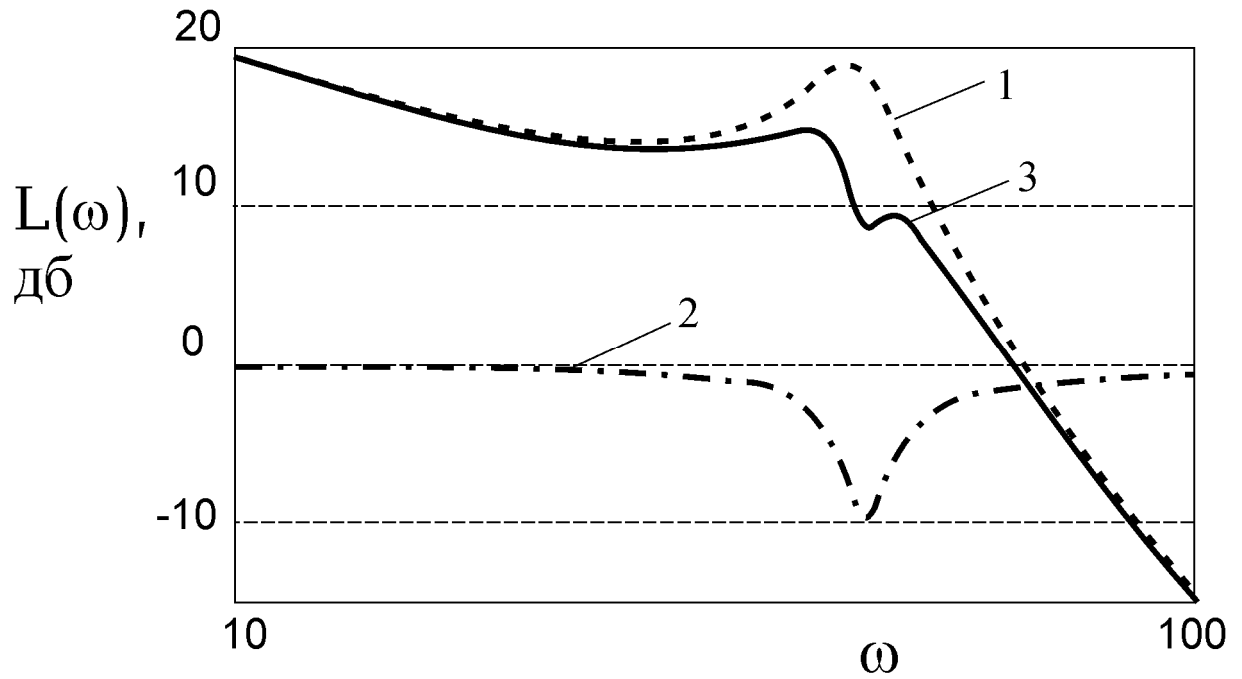
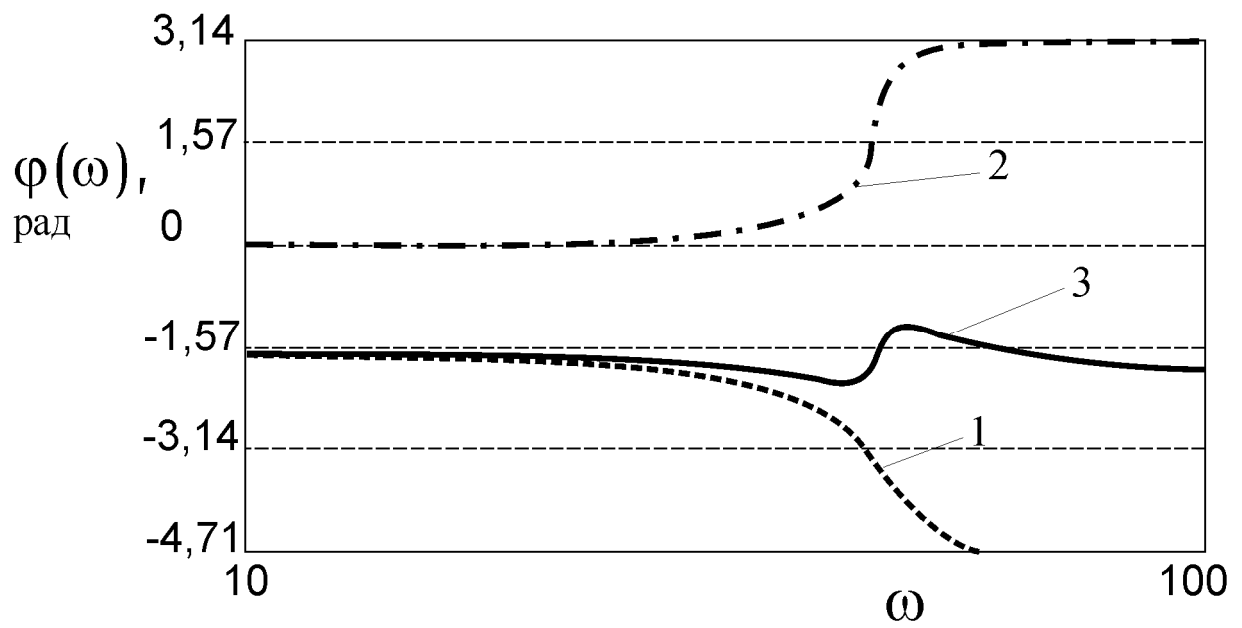


Рис.5.6. Структурная схема самонастраивающейся системы



а)



б)

Рис.5.7. Частотные характеристики СНС

Данные частотные характеристики соответствуют одному из возможных значений  $T$ , равному 0.023 с. При такой постоянной времени существуют резонансные колебания на частоте  $\omega_p = 42.7$  (1/с). На эту частоту в процессе самонастройки настраивается адаптивный последовательный компенсатор, в результате чего его частотные характеристики приобретают вид кривых 2. При этом значение параметра  $k$  постоянной настройки алгоритмов (4.8) и (4.9) выбрано равным 0.55.

Вид характеристик компенсатора подтверждает сделанный выше вывод о том, что его амплитудная и фазовая характеристики являются инверсными по отношению соответственно к амплитудному пику и фазовому сдвигу в системе в области резонанса.

В результате такой компенсации система имеет скорректированные характеристики (кривые 3), на которых практически не отражается влияние резонанса. Данный корректирующий эффект будет иметь место и при любой другой возможной резонансной частоте в системе. Поэтому применение адаптивного компенсатора резонансов позволяет максимально (до границы, определяемой только динамикой исполнительного привода) расширить полосу пропускания системы.

Техническая реализация некоторых блоков предлагаемой СНС выполнена на основании известных схем [101]:

- блоки сравнения 1 и 3 выполнены на операционных усилителях серии К140 с пассивными суммирующими цепями на их входах;
- инерционные фильтры 2, 7 реализуются на операционных усилителях, в обратных связях которых стоят параллельно включенные резистор и конденсатор;
- блоки умножения 10 и 12 реализованы на логических схемах серии К133 в сочетании с аналоговыми ключами;

- блок типа «люфт» 11 реализован на последовательно соединенных диодной схеме зоны нечувствительности и операционном усилителе с конденсаторами на входе и в обратной связи;

- блоки формирователей коэффициентов 9 и 13 можно собрать на операционных усилителях и схем фильтров описанных в [101].

Определение амплитудного значения гармонического сигнала основано на измерении его амплитуды в дискретные моменты времени, а именно в моменты достижения ее экстремума. Особенностью в определении амплитудного значения контролируемого сигнала является также то, что эта величина является переменной в течение периода наблюдения.

Для реализации блока определения амплитуды 14 могут быть использованы устройства, описанные в [102].

Эти устройства измерения амплитуды можно разделить на 3 группы,

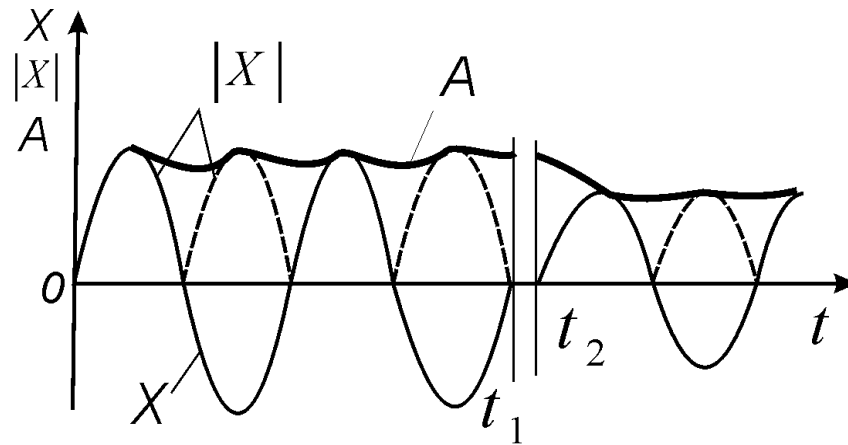
*Первая группа* основана на чисто аналоговых элементах. Для выделения амплитудного значения синусоидальных колебаний используются последовательно соединенные узкополосный фильтр, выпрямитель и усредняющее устройство, в качестве которого практически всегда применяется апериодическое звено. Временные диаграммы и структурная схема устройства приведены на рис.5.8. Выпрямитель представляет схему выделения модуля

*Вторая группа* устройств определения амплитуды может быть построена на основе использования тригонометрических зависимостей. Здесь возможно построение двух схем.

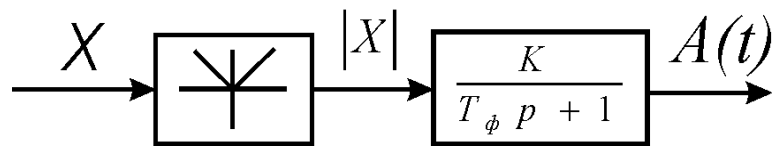
Один вариант предусматривает определение амплитуды путем обработки исходного сигнала на основе решения известной тригонометрической зависимости

$$A(t) = \sqrt{X_m^2(t) \sin^2[\omega t + \phi(t)] + X_m^2(t) \cos^2[\omega t + \phi(t)]} = X_m(t). \quad (5.5)$$

Временные диаграммы и структурная схема устройства, реализующего эту зависимость, приведены на рис.5.9.

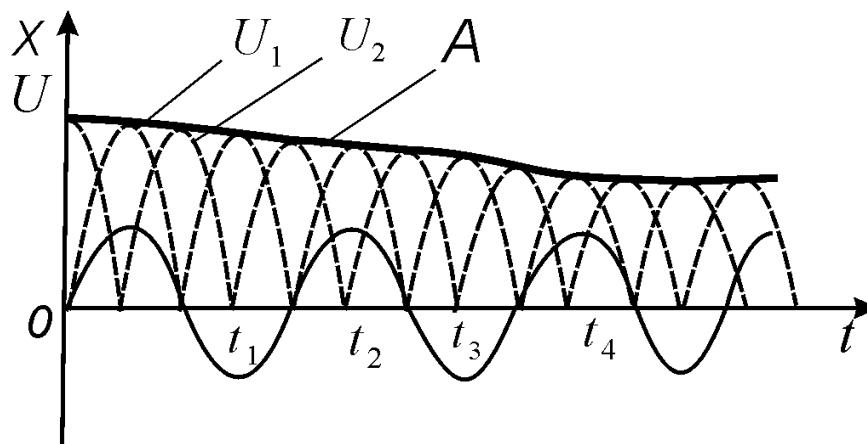


а)

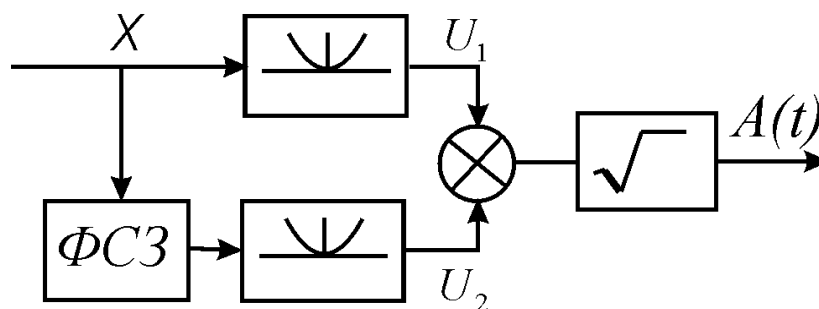


б)

Рис.5.8. Временные диаграммы а) и структурная схема б) устройства определения амплитуды на аналоговых элементах



а)



б)

Рис.5.9. Временные диаграммы а) и структурная схема б) устройства определения амплитуды на основе зависимости (5.5)

Устройство может быть реализовано на аналоговых элементах, при этом наибольшая сложность - в реализации операции извлечения корня [103].

Другой вариант устройств этой группы предусматривает реализацию тригонометрической зависимости:

$$A(t) = \frac{X(t)}{\sin[\omega t + \phi(t)]} = \frac{X_m(t) \sin[\omega t + \phi(t)]}{\sin[\omega t + \phi(t)]} = X_m(t). \quad (5.6)$$

Временные диаграммы и функциональная схема устройства приведены на рис.5.10. Это устройство отличается достаточной простотой и непрерывным определением  $A(t)$  во времени. Определенная сложность при реализации на аналоговых элементах будет состоять в прецизионном устройстве деления.

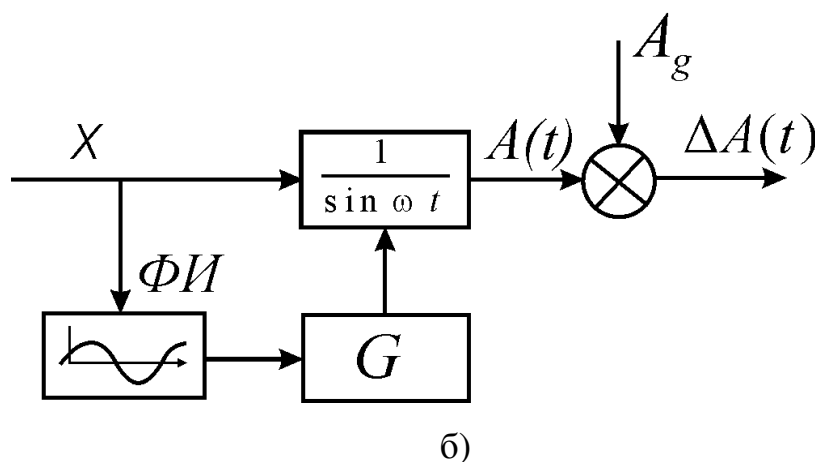
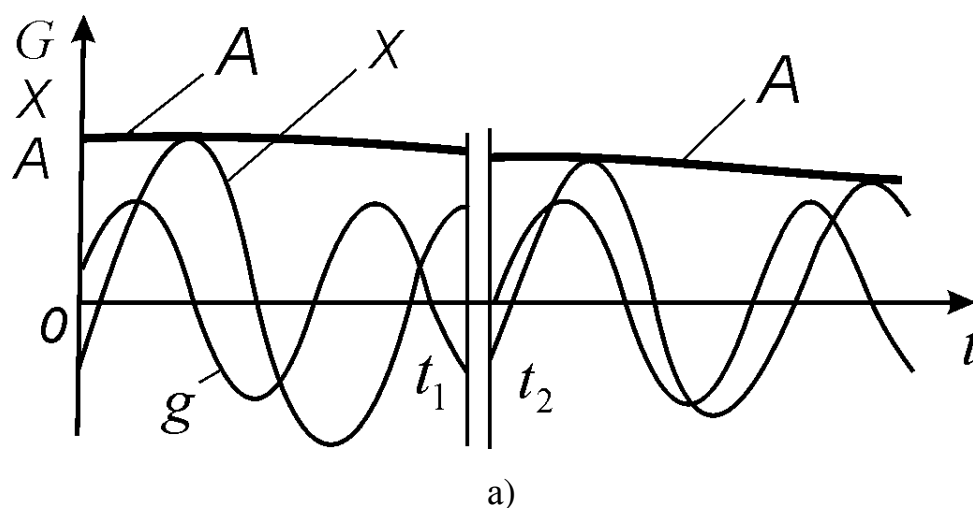


Рис.5.10. Временные диаграммы а) и структурная схема б) устройства определения амплитуды на основе зависимости (5.6)

К последней третьей группе устройств определения  $A(t)$  относятся устройства, измерения и запоминания максимального значения амплитуды периодического сигнала [104, 105]. Временные диаграммы и функциональная схема устройства приведены на рис.5.11. При анализе гармонического сигнала запоминается его текущее максимальное значение на интервале  $0 - T/2$  каждого периода. Это значение сохраняется до окончания следующего измерения в следующем периоде, после чего в выходной схеме оно заменяется на вновь измеренное. Устройство состоит из схемы измерения амплитудного значения (СИА) и логического коммутатора (ЛК), осуществляющего необходимую селекцию временных участков измерения, записи, сохранения и соответствующее управление компонентами СИА.

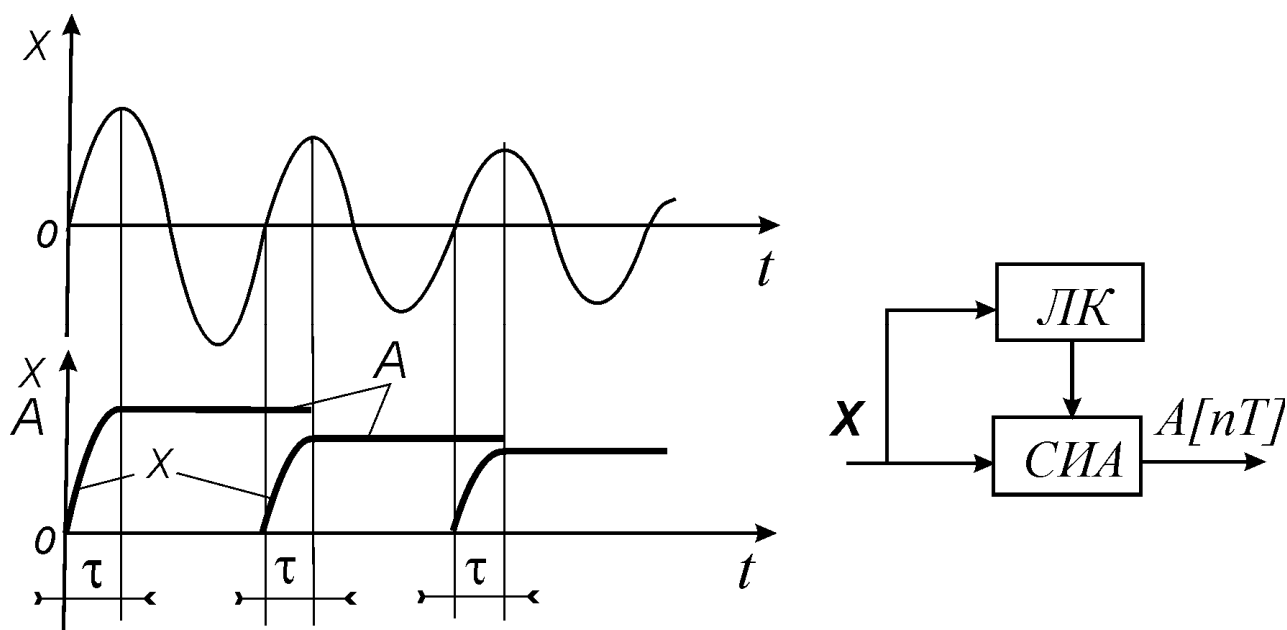


Рис.5.11. Временные диаграммы и структурная схема устройства определения и запоминания амплитуды

Как следует из временных диаграмм рис.5.11, данное устройство относится к классу импульсных элементов с амплитудно-импульсной модуляцией со

скважностью  $\nu = 1$ . Оно может быть представлено как формирующий элемент с фиксатором нулевого порядка с периодом модуляции  $T = 1/\omega$  и скважностью  $\nu = 1$ . Уравнение, описывающее работу устройства во временной области, имеет вид

$$A(t) = \sum_{n=1}^j f(X[n(T - \tau)]), \quad (5.7)$$

$$nT < t < (n + \nu)T, \quad \tau = T/2, \quad n = \overline{1, j}.$$

Это устройство сочетает достоинства устройств предыдущей группы и, кроме того, не «привязано» к фиксированной частоте, работает в большом частотном диапазоне, не требует генератора, не имеет погрешности при изменении фазы в процессе настройки и достаточно просто реализуется.

Определение фазового сдвига основано на контроле текущего сигнала в дискретные моменты времени, а именно в моменты перехода сигналов через нулевые значения. Особенностью в определении фазового сдвига является также то, что эта величина является переменной в течение периода наблюдения.

Блок определения фазового сдвига 8 может быть реализован согласно [106] на основе фазовых дискриминаторов (ФД). Отметим, что в СНС они выполняют сразу две функции:

1) определение фазового сдвига выходной координаты контура  $X(t) = X_m(t) \sin[\omega t + \phi(t)]$  относительно пробного сигнала  $G(t) = G_m \sin \omega t$ .

2) сравнение фазового сдвига эталонного и анализируемого сигналов с определением алгебраической разности  $\Delta\varphi = \varphi_{\Sigma} - \varphi$ .

Поэтому в дальнейшем, рассматривая характеристики и описание ФД, под его выходным сигналом следует иметь в виду именно искомый разностный сигнал  $\Delta\varphi = \varphi_{\Sigma} - \varphi$ .



Фазовые дискриминаторы, которые могут быть использованы в СНС, можно разделить на три группы:

на основе двух частотных фильтров;

с запоминающей емкостью;

на RS - триггерах.

*Устройства на основе двух частотных фильтров* и их описание достаточно подробно рассмотрены в работе [57], и поэтому здесь не рассматриваются. При преобразовании положено допущение, что среднее значение сигнала на выходе выпрямителя равно амплитуде гармонического сигнала на его входе и, кроме того, не учитываются постоянные времени сглаживающих фильтров в плечах. Последнее, в свою очередь, приводит к описанию его нелинейным дифференциальным уравнением.

*Устройства с запоминающей емкостью* можно разделить на две подгруппы - на основе импульсного ключа и на основе преобразования фазового сдвига во временной интервал с запоминанием.

Принцип действия и математическая модель устройства с импульсным ключом и запоминающей емкостью поясняется временными диаграммами, функциональной схемой и статической характеристикой, приведенными на рис.5.12 [107].

Оно представляется в виде временного квантователя и схемы измерения и запоминания амплитуды (СИЗА). Тактовые импульсы синхронизированы частотой опорного (эталонного) сигнала  $G(t)$  в моменты  $0, T, 2T, 3T, \dots$ . Они подключают на заряд (перезаряд) конденсатор на период длительности импульса. Напряжение на конденсаторе сохраняется до следующего тактового импульса. Это может быть обеспечено работой конденсатора на усилитель с большим входным сопротивлением, например на полевых транзисторах. Как следует из временных диаграмм рис.5.12, данное устройство относится к классу импульсных элементов с амплитудно-импульсной модуляцией со скважностью, равной единице.

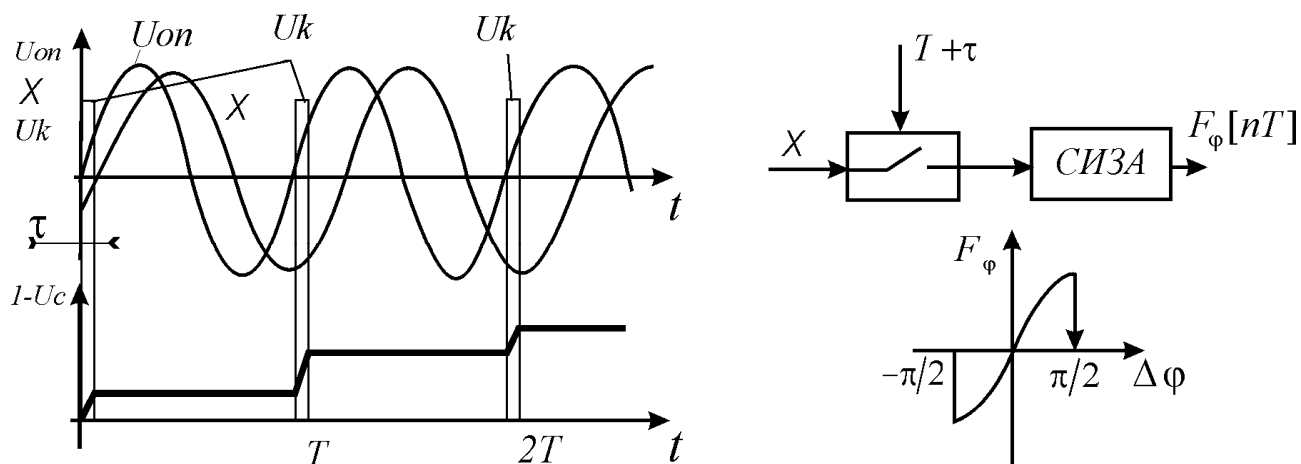


Рис.5.12. Временные диаграммы и структурная схема фазового дискриминатора с запоминающей емкостью

Недостатком этого устройства является синусоидальная зависимость выходного сигнала и, как следствие, ограниченный диапазон преобразования.

Устройство двойного преобразования фазовый сдвиг - временной интервал - уровень напряжения (код) [104, 108] и его временные диаграммы, функциональная схема и статическая характеристика приведены на рис.5.13.

Несмотря на громоздкость модели, устройство достаточно просто реализуется аппаратно и программно. По сравнению с рассмотренными, оно имеет следующие основные преимущества:

линейность преобразования;

не критичность к частоте анализируемых сигналов в диапазоне рабочих частот применяемой элементной базы;

преобразование может быть выполнено в каждый период или полупериод опорного сигнала соответственно с временем сохранения информации  $T$ ,  $T/2$ :

при использовании в измерительных системах перемещения диапазон может быть расширен до  $n$  [106, 109].

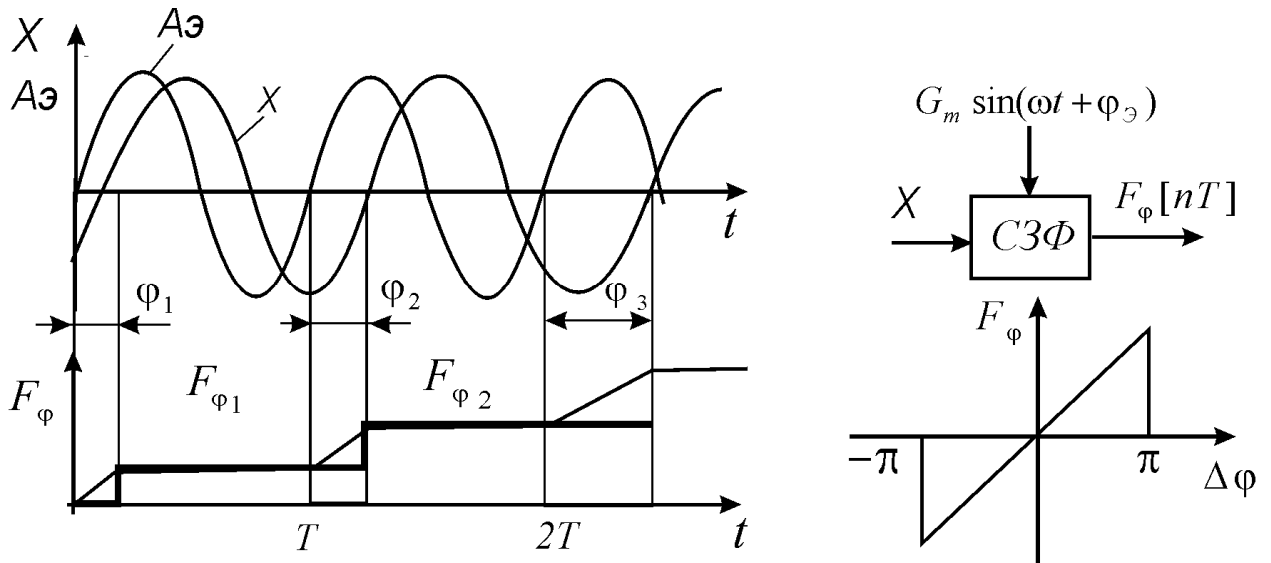


Рис.5.13. Временные диаграммы и структурная схема фазового дискриминатора двойного преобразования

Устройства на *RS*-триггерах и УПТ основаны на сложении по балансной схеме ступенчатых сигналов, адекватных полуволнам опорного и контролируемых сигналов. На выходе стоит низкочастотный фильтр, имеющий большую постоянную времени [107], что ограничивает их применение в СНС.

Усилитель 4, двигатель 5, редуктор 15 тахогенератор 6 выбираются непосредственно при проектировании электромеханической системы в зависимости от типа решаемой задачи, нагрузки, внешних факторов и т. д.

## 5.4. Основные результаты

В данной главе были разработаны: 1) варианты практической реализации методов определения реберного маршрута интервальной системы, необходимые для ее анализа и синтеза; 2) практическая реализация адаптивной следящей системы с использованием алгоритма частотнонезависимой антирезонансной коррекции. При анализе полученных результатов можно сделать следующие выводы.

1. Разработанные алгоритмы и приведенные программы определения реберного маршрута на ЭВМ в диалоговом (интерактивном) режиме в значительной мере помогут проектировщику при анализе и синтезе робастных систем. При этом будет обеспечиваться точность анализа робастной региональной устойчивости интервальной системы, а также простота синтеза робастных регуляторов.

2. Для реализации способа адаптивной антирезонансной коррекции предложены варианты схем основных устройств, входящих в состав адаптивного компенсатора и обеспечивающих его работу.

При этом в качестве устройства измерения амплитуды рекомендуется использовать импульсную схему измерения и запоминания максимального значения амплитуды, а в качестве устройства определения фазового сдвига – устройство с запоминающей емкостью.

Моделирование интервальной системы с адаптивным компенсатором резонансов показало эффективность разработанного метода.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения диссертационной работы были получены следующие основные научные и практические результаты:

1. Разработаны алгоритмы реберной маршрутизации ПМ, позволяющие определить образы границ областей локализации полюсов ИС. Для этого решены следующие задачи:

- Установлены основные свойства отображения ребер ПМ на комплексную плоскость корней и сделан вывод о том, что для определения искомым границ нет необходимости отображать все ребра ПМ, а достаточно найти и отобразить только существенные граничные ребра.

- Разработаны методики проверки плоскостей граней ПМ на наличие особых прямых при интервальной и аффинной неопределенности системы. Наличие данных прямых указывает на возможность существования особых корневых узлов, в которых могут пересекаться граничные реберные ветви интервального корневого годографа.

- Получено условие принадлежности корневого узла границе области локализации комплексного корня.

- Разработаны методики определения реберного маршрута ПМ при аффинной и интервальной неопределенностях на основе значений углов выхода реберных ветвей из граничного корневого узла и информации о наличии особого корневого узла.

- Показано, что реберный маршрут ПМ является единственным для построения областей локализации всех комплексных полюсов ИС.

2. На основе реберной маршрутизации разработаны методики анализа робастной региональной устойчивости, гарантирующей допустимые показатели качества ИС. Предложены три методики, использующие различные способы оценки робастной региональной устойчивости на реберном маршруте:

- методика анализа региональной робастной устойчивости на основе построения многопараметрического интервального корневого годографа по реберному маршруту;

- методика анализа региональной робастной устойчивости на основе робастного D-разбиения по реберному маршруту;

- методика анализа региональной робастной устойчивости на основе решения уравнений Теодорчика-Эванса для всех ребер маршрута.

3. На основе применения робастного и адаптивного подходов к доминантному расположению полюсов ИС разработаны следующие методики синтеза линейных регуляторов, обеспечивающих в ИС гарантируемую динамику:

- методика синтеза линейного робастного регулятора для региональной локализации доминирующих полюсов ИС, гарантирующей минимально-допустимую степень устойчивости;

- методика синтеза адаптивно-робастного регулятора для стабилизации доминирующих полюсов в заданных точках комплексной плоскости.

4. На основе разработанного способа компенсации частотнонестабильных резонансов проведен структурно-параметрический синтез псевдолинейных компенсаторов для упругих ИС. При этом синтезированы:

- адаптивный псевдолинейный компенсатор для ИС с низкочастотными резонансами;

- робастный псевдолинейный компенсатор для ИС с высокочастотными резонансами;

- комбинированный адаптивно-робастный компенсатор.

5. Рассмотрены вопросы практической реализации разработанных алгоритмов.

- варианты практической реализации на ЭВМ методов определения реберного маршрута интервальной системы, необходимые для ее анализа и синтеза;

- практическая реализация адаптивной следящей системы с использованием алгоритма частотнонезависимой антирезонансной коррекции.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ackermann J. Parameter space design of robust control systems // IEEE Trans. Autom. Control. – 1980. – Vol. AC-25. No. 5.
2. Ackermann J. Robust Control: Systems with Uncertain Physical Parameters. - London etc.: Springer-Verlag., 1993. – 406 p.
3. Ackermann J., Barlett A., Kaesbauer D., Sienel W., Steinhauser R. Robust Control: Systems with Uncertain Physical Parameters. – Springer, London. 1993.
4. Argoun M. V. Frequency domain conditions for the stability of perturbed polynomials / IEEE Trans. Automat. Control. – 1987. – Vol. AC-32. – No. 10.
5. Barlett A. C., Holot C. V., Lin H. Root location of an entire polytope of polynomials: it suffices to check the edges // Math. Contr., Signals. Syst. – 1987. – Vol. 1, №1. – P. 61-71.
6. Barmish B. R. A generalization of Kharitonov's four polynomial concept for robust stability problems with linearly dependent coefficients perturbations // IEEE Trans. Automat. Control. – 1989. – Vol. 34. № 2. – P. 157-165.
7. Barmish B. R. New Tools for Robustness of Linear Systems. New York: Macmillan Publishing Company, 1994.
8. Barmish B. R., Tempo R. The robust root locus // Automatica. – 1990. V.26. №2. – P. 283-292.
9. Bialas S., Garloff J. Stability of polynomials under coefficient perturbations // IEEE Trans. On Autom. Control. 1985. V. AC-30. No. 3.
10. Dorato P., Tempo R., Muscato G. Bibliography on robust control // Automatica. – 1993. – Vol. 29, №1. – P. 201-213.
11. Foo Y. K., Soh Y. C. Root clustering of interval polynomials in the left sector // Syst. Control Letters. – 1989, Vol. 13. – P 239-245/
12. Long Wang. Robust strong stabilizability of interval plants: it suffices to check two vertices. // System and control letters. – 1995. V. 26. – P.133-136.



13. Melnikov U.S., Gaivoronsky S. A., Novokshonov S.V. Stabilization of undersea object situation, connected with ship by the rope// KORUS'99 III Russian-Korean international Symposium.-Novosibirsk, Russia,1999.
14. Rantzer A. Stability condition for polytope of polynomials // IEEE Trans. Autom. Contr. 1992. V. 37. P. 79-98.
15. Rimsky G.V.,Nesenchuk A.A. Root Locus Methods for Robust Control Systems Quality and Stability Investigations / Proceedings 1996 IFAC 13th Triennial World Congress. San Francisco, USA. June 30-July 5, 1996. – Vol. G. – P. 469-474.
16. Soh C. B., Berger C. S., Dabke K. P. On the stability properties of Polynomials with perturbed coefficients // IEEE Trans. On Autom. Control. – 1985. – Vol. AC-30. № 10. – P. 1033-1036.
17. Tong Y., Sinha N. K. A computational technique for the robust root locus // IEEE Transaction on Industrial Electronics. V. IE-41. 1994. – P. 79-85.
18. Vicieno A. Robustness of pole location in perturbed systems // Automatica. 1989. V. 25. No. 3.
19. Yeung K. S. Linear system stability under parameter uncertainties // Int. J. Control. – 1983. – Vol. 38. – No. 2.
20. Zhabko A. P., Kharitonov V. L. Necessary and sufficient conditions for the stability of a linear family of polynomials // Automation and Remote Control, 1994. – Vol. 55. №10. – P. 1496-1503.
21. А.с. 332443 СССР, М. Кл. О 05Ь 23/02.
22. А.с. 661394 СССР, М. Кл. О 01 К 25/00.
23. Автоматы-настройщики следящих систем/ Б.В. Новоселов, Ю.С. Горохов, А.А. Кобзев, и др.; Под ред. Б.В. Новоселова. – М : Энергия, 1975. – 264 с
24. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. – 303 с.
25. Бендрикова Г. А., Теодорчик К. Ф. Траектории корней линейных автоматических систем. – М.: Наука, 1964. – 160 с.

26. Бесекерский В. А., Небылов А. В. Робастные системы автоматического управления. – М.: Наука, 1983. – 240с.
27. Бутковский А. Г. Частотные критерии робастной устойчивости // Известия РАН. Техническая кибернетика. 1993. №3. С.62-82.
28. Вадутов О. С., Гайворонский С. Г. Определение границ областей локализации нулей и полюсов системы с интервальными параметрами // Известия Томского политехнического университета. 2003. Т.306. №1.
29. Вадутов О. С., Гайворонский С. Г. Применение реберной маршрутизации для анализа устойчивости интервальных полиномов // Изв. Академии наук. Теория и системы управления. – 2003. – №6. – С. 7-12.
30. Вадутов О.С., Гайворонский С.А. Синтез устойчивой линейной системы при параметрических возмущениях объекта // Машинные методы оптимизации, моделирования и планирования эксперимента: Межвуз. сб. науч. тр. / Новосибирский электротехнический ин-т. – Новосибирск, 1988. – С. 112-118.
31. Вадутов О.С., Гайворонский С.А., Новокшенов С. В. Доминантное расположение полюсов системы с интервальными параметрами на основе робастного D-разбиения // Современные техника и технологии. Тез.докл. VI международ. научн.-практич. конф. – Томск: Изд. ТПУ, 2000.
32. Вадутов О.С., Мельников Ю.С., Гайворонский С.А., Новокшенов С. В. Синтез динамических регуляторов интервальных автоматических систем стенда имитации невесомости // Информационные системы и технологии. Докл. международн. конф. – Новосибирск, 2000.
33. Веремей Е. И. Обеспечение заданной степени устойчивости регуляторами с неполной информацией // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1986. №4. – С. 123-130.
34. Вукосавич С. Н., Стоич М. Р. Достаточные условия робастной относительной устойчивости линейных непрерывных систем // АиТ. – 1996. №11. – С. 84-90.

35. Гайворонский С. А. Адаптивный псевдолинейный компенсатор для нестационарных упругих электромеханических систем // Известия вузов. Электромеханика. – 2003. – №4. – С. 37-40.
36. Гайворонский С. В, Новокшенов С. В. Комбинирование адаптивной и робастной псевдолинейной коррекции в нестационарных слабодемпфированных системах // Изв. вузов. Приборостроение. – 2003. – №10.
37. Гайворонский С.А. Параметрический синтез линейно регулятора электромеханической системы при интервальной неопределенности объекта управления // Изв. высш. учеб. заведений. Электромеханика. – 1990. – №5. – С. 9-72.
38. Гайворонский С.А., Вадутов О.С., Новокшенов С. В. Анализ региональной робастной устойчивости системы методом интервального корневого годографа // Тезисы докл. рег. науч. конфер. «Наука, Техника, Инновации». – Новосибирск: Издательство НГТУ, 2001.
39. Гайворонский С.А., Новокшенов С. В. Анализ качества электроэнергетических систем с интервальными параметрами корневым методом // VII Межд. Научно-технич. конфер. Радиоэлектроника, электротехника и энергетика. – Москва: Издательство МЭИ, 2001.
40. Гайворонский С. А., Новокшенов С. В. Анализ робастной относительной устойчивости на основе многопараметрического интервального корневого годографа // Тезисы докл. X международ. Научн.-технич. конф. «Состояние и перспективы развития электротехнологии». – Иваново: Издат. ИГЭУ, 2001.
41. Гайворонский С.А., Новокшенов С. В. Построение границ корневых областей систем с интервальными параметрами // Современные техника и технологии // Тезисы докл. VII международ. научн.-практич. конф. – Томск: Издательство ТПУ, 2001.
42. Григорьев В. В. Синтез управления для систем изменяющимися параметрами // Автоматика и Телемеханика. – 1983. – №2. – С. 64-70.

43. Гусев Ю. М., Ефанов В. Н., Крымский В. Г. Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем (состояние проблемы) 1. Анализ с использованием интервальных характеристических полиномов // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1991. – №1. – С. 3-23.
44. Долгов А. М. Нелинейные многоканальные корректирующие устройства в нестационарных СУ со слабодемпфированными объектами. – В кн.: Нелинейные нестационарные системы. – М.: Машиностроение, 1986. – С. 232-246.
45. Дыда А. А., Матюхина Л. И., Михалев А. С. Частотный критерий устойчивости САУ с ПЛКУ // Известия высш. учеб. заведений. Приборостроение. – 1984. – №7. – С. 20-24.
46. Жабко А. П., Харитонов В. Л. Необходимые и достаточные условия устойчивости линейного семейства полиномов // Автоматика и Телемеханика. – 1994. – № 10. – С. 125-134.
47. Захаров А. В., Шокин Ю. И. синтез систем управления при интервальной неопределенности параметров их математических моделей // Докл. АН СССР. – 1988. – Т. 299, №2. – С. 292-295.
48. Киселев В.М. Фазовые системы числового программного управления станками. – М. : Машиностроение, 1976. – 352 с.
49. Кобзев А.А. Особенности устройств определения амплитудного значения сигнала. // Известия вузов. Электротехника. – 1998. – №2-3. – С. 51-55.
50. Кобзев А.А. Особенности устройств определения фазового сдвига в самонастраивающихся системах со стабилизацией ФЧХ. // Известия вузов. Электротехника. – 1998. – №4. – С. 41-45.
51. Кобзев А.А. Фазовый дискриминатор для систем ЧПУ // Автоматические манипуляторы и металлообрабатывающее оборудование с программным управлением. – Тула: ТПИ, 1984. – С. 38-143.

52. Корневые методы исследования интервальных систем / Под ред. Г. В. Римского. – Минск: Институт технической кибернетики НАН Беларуси, 1999. – 186 с.
53. Критров С. В., Шумилов Б. Ф., Шумилов Ю. Ю. Применение однородных корректирующих устройств в нелинейных системах автоматического управления//Теория и системы управления. – 1995. – №4. – С. 26-31.
54. Кунцевич В. М. Адаптация и робастность в системах управления // Техническая кибернетика. – 1993. – №2. – С. 91-101.
55. Курдюков А. П., Семенов А. В., Косиков В. С. Комбинирование робастного и адаптивного управления с помощью интеллектуальных систем // Изв. вузов. Приборостроение. – 1994. – Т. 37. – № 9-10. – С. 1518.
56. Кухтенко В.И. Динамика самонастраивающихся систем со стабилизацией частотных характеристик. – М.: Машиностроение, 1970. – 232 с.
57. Кушакова С. Е. Оморов Т. Т. Метод синтеза робастных систем с заданными показателями качества //
58. Липатов В. А., Соколов Н. И. О некоторых достаточных условиях устойчивости линейных непрерывных стационарных систем // Автоматика и телемеханика. – 1979. – №9. – С. 30-37.
59. Литвинов Н. Л. Метод расположения корней характеристического полинома, обеспечивающий заданные степень устойчивости и колебательность системы // Автоматика и Телемеханика. – 1995. – № 4. – С. 53-61.
60. Лучко С. В., Федоров С. М. О синтезе псевдолинейных корректирующих устройств // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1974. – №5. – С. 187-193.
61. Марков С.И., Минаев В.М., Артамонов Б Н . Идентификация параметров колебательных систем автоматического регулирования. – М.: Энергия. 1975. – 94 с.

62. Микропроцессорное управление электроприводами станков с ЧПУ / Э.Л. Тихомиров, В. В. Васильев, Б. Г. Коровин и др. – М: Машиностроение, 1990. 320 с.
63. Неймарк Ю. И. Мера робастной устойчивости и модальности линейных систем // Докл. Академии Наук. – 1992. – Т. 325, № 2. – С. 247-250.
64. Неймарк Ю. И. Мера робастной устойчивости линейных систем // Автоматика и телемеханика. – 1993. – № 1. – С. 107-110.
65. Неймарк Ю. И. Область робастной устойчивости и робастность по нелинейным параметрам // Доклады Академии Наук. – 1992. – Т. 325, № 3. – С. 438-440.
66. Неймарк Ю. И. Робастная устойчивость линейных систем // Доклады Академии Наук. – 1991. – Т. 319, № 3. – С. 578-580.
67. Неймарк Ю. И. Устойчивость линеаризованных систем. – Л.: ЛКВВИА, 1949.
68. Неймарк Ю.И. Динамические системы и управляемые процессы. – М.: Наука, 1978. – 336 с.
69. Нелинейные нестационарные системы / Г. Л. Вышковский, Л. З. Ганопольский, А. М. Долгов и др.; Под ред. Ю. И. Топчиева. – М.: Машиностроение, 1986. – 336 с.
70. Оморов Т. Т
71. Оморов Т. Т., Кушакова С. Е. Синтез робастных систем управления с гарантированной динамикой //
72. Патент № 2174252 РФ, МКИ G 05 В 13/02. Способ адаптивной антирезонансной коррекции нестабильных частотных характеристик колебательного объекта управления и самонастраивающаяся следящая система для его осуществления / Вадутов О. С., Гайворонский С. А., Новокшенов С. В. // Б.И. № 27, 27.09.2001.
73. Петров Н. П., Поляк Б. Т. Робастное D-разбиение // Автоматика и Телемеханика. – 1991. – №11. – С. 41-53.

74. Поляк Б. Т., Цыпкин Я. З. Робастный критерий Найквиста // Автоматика и телемеханика. – 1992. – №7. – С. 25-31.
75. Поляк Б. Т., Цыпкин Я. З. Частотные критерии робастной устойчивости и апериодичности линейных систем // Автоматика и Телемеханика. – 1990. – №9. – С. 45-54.
76. Потемкин В. Г., Титков А. И., Шалашов А. В. Нелинейные самонастраивающиеся системы, инвариантные к изменению параметров объектов управления. – В кн.: Нелинейные нестационарные системы. – М.: Машиностроение, 1986. – С. 264-282.
77. Принципы построения и проектирования самонастраивающихся систем управления / Б.Н. Петров, Ю.В. Рутковский, И.Н. Крутова и др. – М.: Машиностроение, 1972. – 260 с.
78. Райцын Т.М. Синтез систем автоматического управления методом направленных графов. – Л.: Энергия, 1970. – 96 с.
79. Римский Г. В. Корневой метод решения задач устойчивости интервальных систем // Вести академии наук Беларуси. Серия физико-технических наук. – 1994. – №4. – С. 80-85.
80. Римский Г. В. Корневой метод синтеза полиномов В. Л. Харитонова // Весці Акадэміі навук Беларусі. Сер Фіз.-тэхн. навук. – 1995, №3. – С. 107-114.
81. Римский Г. В. Основы общей теории корневых траекторий систем автоматического управления. – Минск: Наука и техника, 1972. – 328 с.
82. Римский Г. В., Мазуренко Е. Г. Корневой метод исследования условий устойчивости линейных интервальных динамических систем // Весці НАН Беларусі. Сер Фіз.-тэхн. навук. – 1996. – №2. – С.61-64.
83. Римский Г. В., Мазуренко Е. Г., Римский А. Г., Мазуренко В. А., Шатохин И. В., Чебаков С. В. Корневые методы исследования интервальных систем. – Минск: Институт технической кибернетики НАН Беларуси, 1999.
84. Рутковский В. Ю., Суханов В. М. Большие космические конструкции: модели, методы исследования и принципы управления // Автоматика и Телемеханика. – 1996. – № 8. – С. 55 – 66.

85. Садыков Ф. Р. К обоснованию метода замороженных коэффициентов для нестационарных систем с медленно меняющимися параметрами. – В кн.: Вопросы исследования и проектирования систем управления. – М.: Изд. МАИ, 1981. – С. 49-57.
86. Сиразетдинов Р. Т. К построению гарантированной области расположения корней характеристического уравнения замкнутой системы // Изв. вузов Авиац. техника. – 1984. – № 4.
87. Сиразетдинов Р. Т. Построение гарантированной области расположения нулей и полюсов передаточных функций динамических систем // Автоматика и телемеханика. – 1988. – №7. – С. 51-58.
88. Системы автоматического управления объектами с переменными параметрами. Инженерные методы анализа и синтеза / Б. Н. Петров, Н. И. Соколов, А. В. Липатов и др. – М.: Машиностроение, 1986. – 256 с.
89. Скворцов Л. М. Интерполяционный метод решения задачи назначения доминирующих полюсов при синтезе одномерных регуляторов // Известия Академии наук. Теория и системы управления. – 1994. – №4. – С. 10-13.
90. Скворцов Л. М. Синтез закона управления по заданным полюсам и нулям передаточной функции // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1987. – № 6. – С. 149-153.
91. Скворцов Л. М. Синтез линейных систем методом полиномиальных уравнений // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1991. – №6. – С. 54-59.
92. Скворцов Л.М. Интерполяционный метод решения задачи назначения доминирующих полюсов при синтезе многомерных регуляторов // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 1997. – № 1. – С. 31-34.
93. Скворцов Л.М. Синтез линейных систем методом полиномиальных уравнений // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1991. – № 6. – С. 54-59.
94. Соколов Н. И. Об управлении нестационарными объектами с помощью регуляторов жесткой структуры с постоянными параметрами. – В кн.:



- Задачи динамики управления летательными аппаратами. – Тр. МАИ, 1972, вып. 240. – С. 5-16.
95. Срагович В. Г. Адаптивное управление. – М.: Наука. 1981.
96. Старикова М.В. Исследование автоматических систем с логическими управляющими устройствами. – М.: Машиностроение, 1978. – 224 с.
97. Тетельбаум И.М., Шнейдлер Ю.Р. Практика аналогового моделирования динамических систем: Справочное пособие. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 384 с.
98. Удерман Э.Г. Метод корневого годографа в теории автоматического управления. – М. – Л.: Госэнергоиздат, 1963. – 112 с.
99. Федоров С.М., Быков В. П. Псевдолинейные корректирующие устройства. – В кн.: Нелинейные корректирующие устройства в системах автоматического управления. – М.: Машиностроение, 1971. – С. 197-218.
100. Филимонов Н. Б. Системы многорежимного регулирования: концепция, принципы построения, проблемы синтеза // Изв. вузов. Приборостроение, 1988. №3. – С. 18–33.
101. Фрадков А. В. Адаптивное управление сложными системами. – М.: Наука 1990.
102. Харитонов В. Л. Задача распределения корней характеристического полинома автономной системы // Автоматика и телемеханика. – 1981. – №5. – С. 53-57.
103. Харитонов В. Л. Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. Уравнения. – 1978. – №11. – С. 2086-2088.
104. Харитонов В. Л., Хинричсен Д. О выпуклых направлениях для устойчивых полиномов // Автоматика и Телемеханика. – 1997. – №3. – С. 81-92.
105. Хлебалин Н. А. Аналитический синтез регуляторов в условиях неопределенности параметров объекта управления: Дис. канд. техн. наук. – Саратов: Сарат. Политех. ин-т, 1984.

106. Хлебалин Н. А. Построение интервальных полиномов с заданно областью расположения корней. – В кн.: Аналитические методы синтеза регуляторов. – Саратов: Изд. Саратовского политехн. ин-та, 1982. – С. 92-98.
107. Хлыпало Е. И. Нелинейные корректирующие устройства в автоматических системах. – Л: Энергия, Ленингр. отделение, 1973. – 344 с.
108. Хлыпало Е. И. Расчет и проектирование нелинейных корректирующих устройств в автоматических системах. – Л.: Энергоиздат, 1982. – 272 с.
109. Ходько С. Т. Проектирование систем управления с нестабильными параметрами. – Л.: Машиностроение. Ленингр. отделение, 1987. – 232с.
110. Электромеханические системы с адаптивным и модальным управлением / Ю.А. Борцов, Н.Д. Поляхов, В.В. Путов. – Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отделение, 1984. – 216 с.