

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Суходоев Михаил Сергеевич

**КОРНЕВОЙ АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СИСТЕМ
С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ НА ОСНОВЕ
ВЕРШИННЫХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ**

05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка информации

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель
кандидат технических наук
доцент С.А. Гайворонский

Томск – 2008

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
ГЛАВА 1. Отображение параметрического многогранника интервального полинома на корневую плоскость	18
1.1. Основные понятия и обозначения при отображении параметрического многогранника.....	18
1.2. Свойства отображения параметрического многогранника при интервальной неопределенности.....	22
1.3. Свойства отображения параметрического многогранника при аффинной неопределенности.....	29
1.4. Основные результаты	32
ГЛАВА 2. Анализ робастного качества интервальных систем автоматического управления	33
2.1. Определение граничных вершин при аффинной неопределенности.....	33
2.2. Реберный анализ робастного качества системы при аффинной неопределенности.....	35
2.3. Определение граничных вершин при интервальной неопределенности.....	46
2.4. Вершинный анализ робастного качества системы при интервальной неопределенности.....	49
2.5. Примеры анализа качества интервальных систем.....	52
2.6. Основные результаты	60
ГЛАВА 3. Параметрический синтез регуляторов интервальных систем автоматического управления	61
3.1. Интервально-параметрический синтез П-регулятора.....	61
3.2. Интервально-параметрический синтез ПИ-регулятора.....	65

3.3. Интервально-параметрический синтез ПИД-регулятора, гарантирующего апериодический переходный процесс интервальной системы	71
3.4. Влияние нулей замкнутой интервальной системы на качество переходного процесса.....	77
3.5. Примеры синтеза.....	80
ГЛАВА 4. Программная реализация алгоритмов анализа и синтеза интервальных систем.....	88
4.1. Описание программной среды MATLAB.....	88
4.2. Математическое представление границ интервальных коэффициентов в ППП RASIS	91
4.3. Общие модули ППП RASIS	92
4.4. Модули ППП RASIS для анализа и синтеза регуляторов интервальных систем.....	96
4.5. Примеры использования ППП RASIS	97
ГЛАВА 5. Исследование котельного агрегата ДКВР-10 с использованием ППП RASIS	101
5.1. Описание котельного агрегата ДКВР-10.....	101
5.2. Синтез ПИД-регулятора системы автоматического управления котлоагрегата ДКВР-10	111
5.3. Анализ качества системы автоматического управления котлоагрегата ДКВР-10	112
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	117
ЛИТЕРАТУРА.....	119
ПРИЛОЖЕНИЕ А. АКТЫ ВНЕДРЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ.....	132

ВВЕДЕНИЕ

Практически все реальные системы автоматического управления содержат интервально-неопределенные параметры. Их неопределенность обусловлена неточным знанием параметров или их изменением в процессе эксплуатации систем по заранее неизвестным законам. Если при этом известны диапазоны возможных значений постоянных параметров или пределы изменяющихся параметров, то в таких случаях говорят о параметрической интервальной неопределенности [1, 8, 88]. Системы с подобными параметрами получили название интервальных систем автоматического управления [72].

Первоначальной задачей исследования интервальных систем была проверка их робастной устойчивости, отвечающей на вопрос: устойчива или нет интервальная система при любых значениях интервально-неопределенных параметров. Интервальные параметры могут входить в коэффициенты интервального характеристического полинома (ИХП) различными способами, определяющими тип неопределенности полинома.

Пусть интервальный полином имеет вид $D(s, q) = a_n(q)s^n + a_{n-1}(q)s^{n-1} + \dots + a_1(q)s + a_0(q)$, $q \in P_m$, где параметры q изменяются в допустимом множестве P_m .

Существует 4 вида неопределенностей такого интервального полинома [1, 8, 88]: интервальная, аффинная, полилинейная и полиномиальная.

При интервальной неопределенности коэффициенты полинома являются интервальными параметрами (например, $q_2s^2 + q_1s + q_0$, $q_i \in [q_{i\min}, q_{i\max}]$).

При аффинной неопределенности коэффициенты полинома образованы суммой или разностью интервальных параметров (например, $(q_3 + q_2)s^3 + (q_2 + q_1)s^2 + (q_3 - 2q_2 + 5q_1)s + 10q_2 - 7q_1$, $q_i \in [q_{i\min}, q_{i\max}]$).

При полилинейной неопределенности коэффициенты полинома линейно зависят от каждого параметра, если остальные параметры фиксированы (например,

$$(q_1q_2 + q_3)s^3 + (2q_2q_3 + q_1)s^2 + (9q_1q_3 - 3q_2)s + q_1q_3 - 5q_2, \quad q_i \in [q_{i\min}, q_{i\max}]).$$

При полиномиальной неопределенности коэффициенты полинома зависят полиномиально хотя бы от одного параметра (например, $s^2 + (2q_1 + 3q_2^2)s + 10q_1, \quad q_i \in [q_{i\min}, q_{i\max}])$).

Интервальный полином $D(s, q)$ называется робастно устойчивым, если он устойчив при всех $q \in P_m$. В данной ситуации нельзя непосредственно воспользоваться известными критериями устойчивости, так как множество P_m , вообще говоря, содержит бесконечно много элементов. Поэтому для решения этой задачи отечественными и зарубежными авторами были разработаны различные критерии. Ряд из них использует известную теорему В.Л. Харитонова [116], на основании которой для робастной устойчивости полинома $D(s, q)$ с интервальной неопределенностью необходимо и достаточно, чтобы четыре специальным образом сформированных полинома Харитонова были устойчивы. Коэффициенты этих полиномов имеют предельные значения из заданных интервалов.

Теорема Харитонова имеет свою графическую форму, благодаря которой для установления робастной устойчивости достаточно проверить поведение лишь одного (а не четырех) годографов. Часто этот годограф называется годографом Цыпкина-Поляка [93].

Для анализа робастной устойчивости в более сложной ситуации – аффинной неопределенности в ИХП, как правило, применяется реберная теорема. Она использует понятие реберного полинома, который соответствует ребру параметрического многогранника P_m , соединяющему две соседние вершины. Эти вершины, в свою очередь, образуют вершинные полиномы. В соответствии с реберной теоремой для робастной устойчивости

ИХП необходима и достаточна устойчивость всех реберных полиномов. Заметим, что реберная теорема позволяет эффективно проводить анализ робастной устойчивости, лишь если число интервальных параметров сравнительно мало.

Однако для проектировщика систем автоматического управления важно не только проверять робастную устойчивость интервальной системы, но и анализировать ее региональную робастную устойчивость [66, 67, 68, 72, 81, 88, 91, 95, 110, 111], соответствующую определенному робастному качеству системы. Анализ робастного качества ИС предусматривает определение наихудших показателей качества системы при изменении интервальных параметров в заданных диапазонах. В этом направлении до настоящего времени исследования интервальных систем велись преимущественно на основании сравнительно неконсервативных достаточных условий региональной робастной устойчивости [6, 7, 21, 73, 116]. При этом использовались, как правило, алгебраические и частотные методы. Так, например, в [89] разработаны условия попадания корней ИХП в заданный сектор комплексной плоскости, основанные на достаточном алгебраическом критерии устойчивости Липатова-Соколова. Эти условия

имеют вид $\frac{a_i^2}{a_{i-1} \cdot a_{i+1}} \geq \delta^*$, где $\overline{a_i}$ и $\underline{a_i}$ - границы интервала коэффициента a_i

ИХП.

Задача анализа принадлежности корней ИХП сектору в левой полуплоскости решается также в [63]. Для этого в частотной области формируется 4 специальных вершинных полинома степени $2n$, где n – порядок полинома, и проверяется их устойчивость. При этом количество вершинных полиномов, подлежащих проверке, не зависит от степени ИХП. Заметим, что разработанное в [63] условие региональной робастной устойчивости является достаточным и поэтому обладает определенной степенью консерватизма.

Наряду с консерватизмом, недостатками указанных выше методов является также трудность нахождения предельных отклонений параметров систем, при которых обеспечиваются заданные характеристики качества. Указанные методы не отвечают на вопросы: в каких пределах сохраняется устойчивость, как изменять параметры, чтобы обеспечить заданные характеристики системы. Поэтому актуальной является дальнейшая разработка методов исследования интервальных систем, характеризующихся большей точностью и, при этом, простотой применения.

В основу разработки таких методов предлагается положить корневой подход, использующий законы миграции корней характеристических полиномов интервальных систем [94–98]. При корневом подходе понятие региональной робастной устойчивости связано с различными вариантами расположения корней ИХП, соответствующими определенным сочетаниям интервальных параметров. При проектировании интервальной системы на основе корневого подхода основная задача состоит в обеспечении желаемого качества её функционирования при любых возможных значениях интервальных параметров, которое достигается гарантированным расположением корней в желаемой области.

Запишем интервальный характеристический полином с интервальной неопределенностью в виде

$$P(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i, \quad a_{i \min} \leq a_i \leq a_{i \max},$$

где n – максимальная степень интервального характеристического полинома, a_i – интервальные коэффициенты.

Известно [5], что при интервальной и аффинной неопределенностях характеристических полиномов области отображения параметрического многогранника коэффициентов полинома ограничены образами его ребер, по которым можно определить корневые показатели качества интервальных систем. При этом границы областей локализации определяются не всеми ребрами, а только некоторыми, задающими минимальный реберный

маршрут. Его нахождение для дальнейшего использования при анализе интервальных систем представляет определенный интерес.

Заметим, что при интервальной неопределенности ИХП, согласно [72, 118], можно перейти от анализа отображения ребер параметрического многогранника к анализу отображения только его вершин. Так, например, в [72] для проверки факта принадлежности корней ИХП заданной области предлагается проверить попадание в нее корней 2^n вершинных полиномов, соответствующих всем вершинам многогранника P_m ИХП. Однако, и такой процесс, безусловно, оказывается весьма трудоемким и представляет интерес задача уменьшения числа проверяемых вершин.

Следует отметить, что при полилинейной и полиномиальной неопределенностях (в большей мере соответствующих реальным ситуациям в системах управления) границы областей локализации корней могут определяться также и внутренними точками параметрического многогранника, которые можно установить только его полным отображением на корневую плоскость, что достаточно затруднительно в плане практической реализации при большом числе интервальных коэффициентов. Поэтому в дальнейшем в работе предлагается рассматривать системы автоматического управления только с интервальной и аффинной неопределенностями их характеристических полиномов. При этом в случаях, когда ИХП интервальной системы имеет полиномиальную или полилинейную неопределенность, предлагается переходить от них к интервальной или аффинной неопределенности на основе правил интервальной арифметики, как это делается в [72]. Заметим, что параметрический многогранник в случае интервальной неопределенности полинома образуется его интервальными коэффициентами, а в случае аффинной неопределенности – интервальными параметрами системы, линейно входящими в коэффициенты характеристического полинома.

Для получения заданных корневых показателей качества ИС необходимо корни ИХП замкнутой системы располагать на комплексной

плоскости соответствующим образом. Обычно корневые оценки качества стационарных систем характеризуются следующими показателями: степенью устойчивости η и колебательностью μ . Для робастных систем следует задавать максимально допустимую колебательность и минимально допустимую степень устойчивости. Задание первой заставляет ограничивать область Γ расположения корней двумя лучами, которые составляют с вещественной осью угол $\varphi = \arctg \mu$ (рисунок 1).

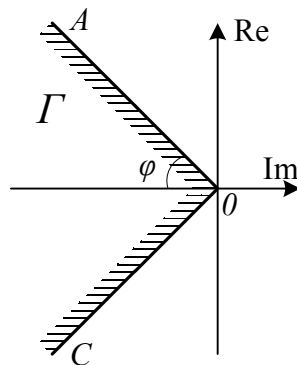


Рисунок 1 – область локализации корней с заданной максимальной колебательностью

Задание минимально допустимой степени устойчивости требует ограничивать область Γ расположения корней вертикальной прямой, проходящей параллельно мнимой оси на расстоянии η (рисунок 2).

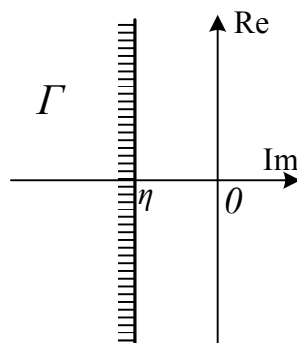


Рисунок 2 – область локализации корней с заданной минимальной степенью устойчивости

Для одновременного обеспечения максимально допустимой колебательности φ и минимально допустимой степени устойчивости η

системы необходимо, чтобы корни характеристического полинома располагались левее вертикальной прямой, отстоящей от мнимой оси на расстоянии η и внутри сектора с углом 2φ (рисунок 3).

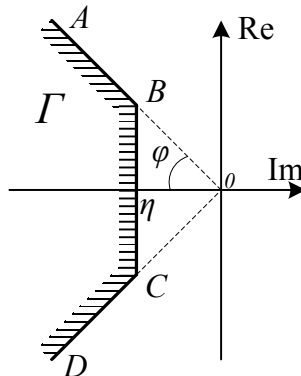


Рисунок 3 – область желаемой локализации корней ИХП

Ломаную границу, показанную на рисунке 3 можно аппроксимировать левой ветвью гиперболы. При этом будем считать, что сектор формируется двумя асимптотами $y = \pm \frac{b}{a}x$, а угловой коэффициент асимптот

$\mu = \pm \operatorname{tg} \varphi = \pm \frac{b}{a}$, где a и b – элементы гиперболы, описываемые уравнением

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Полагая $a = \eta$, представим гиперболу на комплексной плоскости,

как показано на рисунке 4.

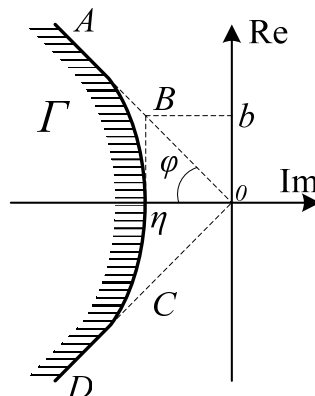


Рисунок 4 – аппроксимированная область желаемой локализации корней

Следует также отметить, что существуют системы автоматического управления, у которых требования к технологическому процессу не

допускают множественных колебаний переходного процесса. Поэтому представляет интерес также обеспечение аperiodичности переходного процесса для интервальных систем. Подобная задача ставится и решается в [63, 93] на основе частотных критериев робастной устойчивости.

Аperiodичным называется процесс, степень затухания которого находится в пределах от 0,55 до 1 (совершается менее одного колебания) [62]. Степень затухания переходного процесса характеризуется отношением амплитуд двух перерегулирований (последовательных колебаний одного знака). Числителем является амплитуда первого колебания. Колебательным является процесс, степень затухания которого меньше 0,55. Монотонным называется процесс, степень затухания которого больше 1.

Аperiodический характер переходного процесса можно обеспечить доминантным расположением ближайшего к мнимой оси вещественного корня [62]. Для достижения заданного условия необходимо границы областей локализации корней интервального характеристического полинома расположить специальным образом, показанным на рисунке 5, где $a_3 < a_2 < a_1$. При этом на интервале $[a_1, a_2]$ мигрирует один вещественный корень, а остальные корни должны располагаться в усеченном секторе ABCD, ограниченном углом 2φ и вертикальной прямой, проходящей через a_3 .

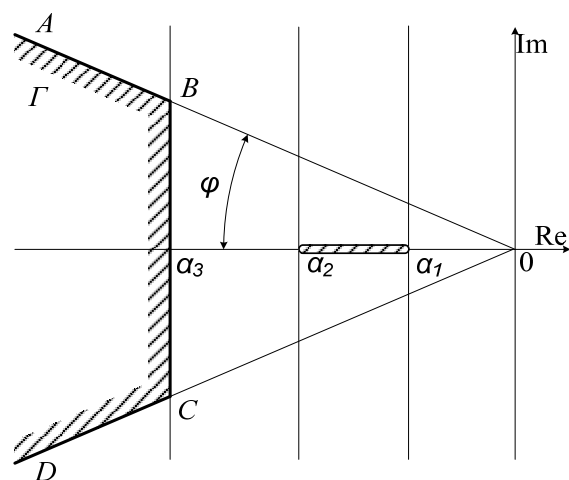


Рисунок 5 – области локализации корней для обеспечения аperiodического переходного процесса

Наряду с расположением корней ИХП (полюсов замкнутой интервальной системы) необходимо учитывать и расположение ее нулей, так как именно их взаимное расположение влияет на прямые характеристики переходного процесса системы: перерегулирование и время регулирования [105].

Вместе с задачей анализа интервальных систем, актуальной является также задача синтеза для них регуляторов [54]. В ряде работ, посвященных этому направлению, для решения задачи синтеза используется робастное расширение метода D-разбиения. Так, например, в [90] для обеспечения робастной устойчивости интервальной системы разработана методика определения ее настраиваемых параметров, основанная на применении прямоугольников Харитонова и метода D-разбиения. В результате синтеза в плоскости настраиваемых параметров ИС строится граница D-разбиения, состоящая из прямоугольников Харитонова, и из полученной области робастной устойчивости выбирают значения синтезируемых параметров.

Однако проектировщику интервальной системы желательно не только обеспечить ее робастную устойчивость, но и гарантировать допустимые показатели качества. При использовании корневого подхода задача параметрического синтеза регуляторов сводится к расположению областей локализации корней характеристического полинома в желаемых областях комплексной плоскости.

Таким образом, для решения поставленных выше задач представляет интерес разработка на основе корневого подхода методов анализа робастного качества интервальных систем, а также методов параметрического синтеза линейных регуляторов, гарантирующих заданное качество управления. Указанные методики предлагается разрабатывать на основе свойств отображения области интервальных параметров (параметрического многогранника) на корневую плоскость. Для этого необходимо провести анализ отображения ребер и вершин параметрического многогранника и

установить связь их образов с корневыми показателями качества (степень устойчивости и колебательность).

Для решения задачи обеспечения требуемого качества интервальных систем предлагается использовать линейные П-, ПИ- или ПИД-законы управления, широко применяемые в промышленных контроллерах реальных систем автоматического управления.

Заметим, что проектировщику систем автоматического управления с интервальными параметрами нужен эффективный инструмент, позволяющий проводить анализ и синтез указанных систем. Для этого разрабатываемые методики следует алгоритмизировать и довести до программной реализации на ЭВМ. При этом предлагается использовать среду MatLab, широко применяемую в настоящее время в различных областях при решении прикладных задач. Пакет MatLab имеет простой, но достаточно гибкий входной язык программирования, позволяющий писать программы в традиционном виде, которые хранятся в обычных текстовых файлах. Широкий набор универсальных и весьма эффективных базовых функций, а также наличие специализированных библиотек пакета MatLab ставит его в разряд наиболее перспективных для исследовательских целей. Для эффективной работы с пакетом MatLab, уместны знания как технологии программирования, так и численных методов, так как пользователь может активно влиять на выбор метода решения.

Из известных разработанных программ в среде MatLab [52, 117] для исследования систем автоматического управления следует выделить программный пакет для анализа интервальных систем «АСИАС» [117], основанный на корневом подходе. Однако он имеет ряд недостатков, а именно: нет единой программы-оболочки анализа интервальных систем, отсутствует возможность параметрического синтеза линейных регуляторов с интервальной неопределенностью, отсутствует возможность интеграции используемых алгоритмов в созданный инженером пакетный сценарий. В связи с этим актуальна задача создания специализированного пакета

прикладных программ для решения поставленных выше задач анализа и синтеза интервальных систем.

Научную новизну работы определяют:

- методики анализа робастного качества ИС с интервальной и аффинной неопределенностями на основе выбора вершинных характеристических полиномов;
- методики интервально-параметрического синтеза П- и ПИ-регуляторов, обеспечивающих гарантированные корневые показатели качества ИС при любых значениях ее интервальных параметров;
- методики интервально-параметрического синтеза ПИД-регулятора обеспечивающего апериодический вид переходного процесса при любых значениях интервальных параметров ИС;
- методики коррекции желаемой области расположения полюсов ИС с учетом расположения нулей для обеспечения гарантированных прямых показателей качества системы.

Практическая ценность работы составляют:

- разработанные в среде Matlab на основе полученных алгоритмов прикладные программы анализа робастного качества ИС;
- разработанные в среде Matlab на основе полученных алгоритмов прикладные программы параметрического синтеза линейных П-, ПИ-, ПИД-регуляторов для ИС, гарантирующих робастное качество управления;
- разработанный пакет прикладных программ RASIS, рассчитанный на инженерный уровень использования, что делает его доступным средством для решения практических задач управления в ИС, а также обучения студентов соответствующих специальностей;

- установленное взаимное влияние нулей и полюсов ИС на ее перерегулирование и возможность получения его заданного значения на основе коррекции области расположения полюсов ИС.

Апробация работы.

Результаты проведенного исследования отражены в научных статьях, тезисах. Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях и симпозиумах:

- III, V и VI Всероссийская научно-практическая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодежь и современные информационные технологии», г. Томск, 2005-2008 гг.;
- XI, XII и XIII Международная научно-практическая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Современные техника и технологии», г. Томск, 2005-2007 гг.

По теме диссертационной работы опубликовано 10 работ и 4 статьи в журналах, рекомендованных ВАК:

1. **Суходоев, М.С.** Анализ и синтез робастных систем автоматического управления в среде Matlab // М.С. Суходоев, С.А. Гайворонский, С.В. Замятин // Известия Томского политехнического университета, 2008. - т.312 – № 5. – С. 61–65.
2. **Суходоев, М.С.** Интервально-параметрический синтез робастной системы с гарантированной секторной устойчивостью. / М.С. Суходоев, С.А. Гайворонский // Молодежь и современные информационные технологии: Сборник трудов V Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. Томск, 27 февраля – 1 марта 2007. – Томск: ТПУ, 2007. – С.333–334.
3. **Суходоев, М.С.** Интервально-параметрический синтез робастной системы с гарантированными корневыми показателями качества. / М.С. Суходоев, С.А. Гайворонский // Современные техника и технологии: Труды XIII Международной научно-практической конференции

студентов, аспирантов и молодых ученых - Томск, 26–30 марта 2007. – Томск: ТПУ, 2007. – С.447–449.

4. **Суходоев М.С.** Исследование интервальных полиномов на основе свойств критерия Рауса. / М.С. Суходоев, С.В. Замятин, С.В. Ефимов // Современные техника и технологии: Труды XII Международной научно-практической конференции студентов и молодых ученых, – Томск, 27–31 марта 2006. – Томск: ТПУ, 2006. – С.61–63.
5. **Суходоев, М.С.** Определение желаемой области расположения доминирующих полюсов замкнутой системы с учетом ее нулей / М.С. Суходоев, С.А. Гайворонский // Известия Томского политехнического университета, 2007. – т.311 – № 5. – С. 57–61.
6. **Суходоев М.С.** Пакет прикладных программ для анализа и синтеза интервальных систем // Молодежь и современные информационные технологии: Сборник трудов VI Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых – Томск, 26–28 февраля 2008. – Томск: СПб Графикас, 2008. – С.377–378.
7. **Суходоев, М.С.** Параметрический синтез линейного регулятора интервальной системы с гарантированными корневыми показателями качества / М.С. Суходоев, С.А. Гайворонский, С.В. Замятин // Известия Томского политехнического университета, 2007. – т.311 – № 5. – С.10–13.
8. **Суходоев М.С.** Размещение областей локализации доминирующих полюсов интервальной системы автоматического управления в заданном усеченном секторе / М.С. Суходоев, С.А. Гайворонский, С.В. Замятин // Известия Томского политехнического университета, 2007. – т.311 – № 5. – С.5–9.
9. **Суходоев, М.С.** Условия робастной устойчивости интервального полинома. / М.С. Суходоев, С.А. Гайворонский // «Молодежь и современные информационные технологии» III Всероссийская научно-

практическая конференция студентов. Томск, 15–17 февраля 2005 г. – Томск: Изд-во ТПУ, 2005. – с. 216–217.

10. **Суходоев, М.С.** Условия робастной устойчивости полинома с аффинной неопределенностью. / М.С. Суходоев, С.А. Гайворонский // Современные техника и технологии: Труды XI Международной научно-практической конференции студентов и молодых учёных. В 2 т. – Т. 2 – г. Томск, ТПУ, 28 марта – 1 апреля 2005 г. – Томск: Изд-во ТПУ, 2005. – С.266–268.

Структура и объем работы.

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы, включающего 118 наименований; содержит 131 печатную страницу основного текста, 59 рисунков и 6 таблиц.

ГЛАВА 1. Отображение параметрического многогранника интервального полинома на корневую плоскость

1.1. Основные понятия и обозначения при отображении параметрического многогранника

Фундаментальные результаты, позволяющие исследовать робастную устойчивость системы с интервальной неопределенностью, получены в работах В.Л. Харитонова [114].

Пусть характеристический полином системы с интервальной неопределенностью имеет вид:

$$P(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i, \quad \underline{a}_i \leq a_i \leq \overline{a}_i, \quad (0.1)$$

где a_i - интервальные коэффициенты, \overline{a}_i - максимальное значение a_i , а \underline{a}_i - его минимальное значение.

Рассмотрим четыре полинома, составленные из крайних значений коэффициентов, чередующихся парами (два нижних значения – два верхних)

$$\begin{aligned} P_1(s) &= \underline{a}_0 + \underline{a}_1 s + \overline{a}_2 s^2 + \overline{a}_3 s^3 + \dots; \\ P_2(s) &= \overline{a}_0 + \underline{a}_1 s + \underline{a}_2 s^2 + \overline{a}_3 s^3 + \dots; \\ P_3(s) &= \overline{a}_0 + \overline{a}_1 s + \underline{a}_2 s^2 + \underline{a}_3 s^3 + \dots; \\ P_4(s) &= \underline{a}_0 + \overline{a}_1 s + \overline{a}_2 s^2 + \underline{a}_3 s^3 + \dots \end{aligned} \quad (0.2)$$

Эти полиномы получили название полиномов Харитонова. Теорема Харитонова звучит следующим образом: для робастной устойчивости интервального семейства необходимо и достаточно, чтобы все полиномы Харитонова были устойчивы [116].

Пусть полином имеет m интервальных коэффициентов. Они образуют параметрический многогранник, представляющий собой прямоугольный гиперпараллелепипед, содержащий 2^m вершин и $m \cdot 2^{m-1}$ ребер. Пример

параметрического многогранника для полинома системы с тремя интервальными коэффициентами изображен на рисунке 1.1.

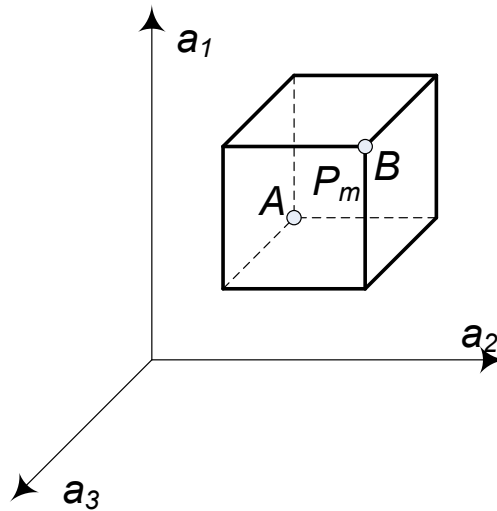


Рисунок 1.1 – Параметрический многогранник P_m

Координаты любой точки P_m относительно вершины V_q , $q = \overline{1, 2^m}$ определяются выражениями:

$$a_i = a_i^q + \Delta a_i, i = \overline{1, n}, \quad (0.3)$$

$$(\underline{a}_i - a_i^q) \leq \Delta a_i \leq (\overline{a}_i - a_i^q), \quad (0.4)$$

где Δa_i – приращение i -го интервального параметра, a_i^q – его значение в вершине V_q . Пусть $M(s)$ и $N(s)$ – два соседних полинома, определяемых двумя соседними вершинами, связанными одним ребром. Введем понятие реберного полинома. Он представляет собой однопараметрическое семейство вида $\gamma M(s) + (1 - \gamma)N(s)$, где $0 \leq \gamma \leq 1$.

Справедлива следующая теорема [5]: пусть задан параметрический многогранник P_m . Тогда для робастной устойчивости семейства полиномов, задаваемых многогранником P_m необходима и достаточна устойчивость всех его реберных полиномов. Данная теорема названа реберной. Она позволяет эффективно проверять робастную устойчивость, если число m неопределенных коэффициентов мало (достаточно проверить все реберные

полиномы). Однако если m велико, то число таких проверок значительно (даже для $m=5$ нужно проверить $m \cdot 2^{m-1} = 80$ реберных полиномов), что потребует большого объема вычислений.

В связи с этим актуальна проблема исследования возможности сокращения числа проверяемых ребер. Из рассмотрения областей отображения параметрического многогранника (см. рисунок 1.1), следует очевидный вывод, что для анализа робастной устойчивости достаточно проверить только те его существенные ребра, образы которых составляют границы областей локализации корней полинома. Однако для этого необходимо уметь заранее определять существенные ребра по имеющейся информации о структуре полинома и интервалах неопределенности его коэффициентов.

Обозначим отображения вершин V_q параметрического многогранника как U_q . На рисунке 1.2 представлено отображение вершин P_m на комплексную плоскость корней, при котором комплексно-сопряженные корни локализуются в двух областях, ограниченных образами ребер P_m .

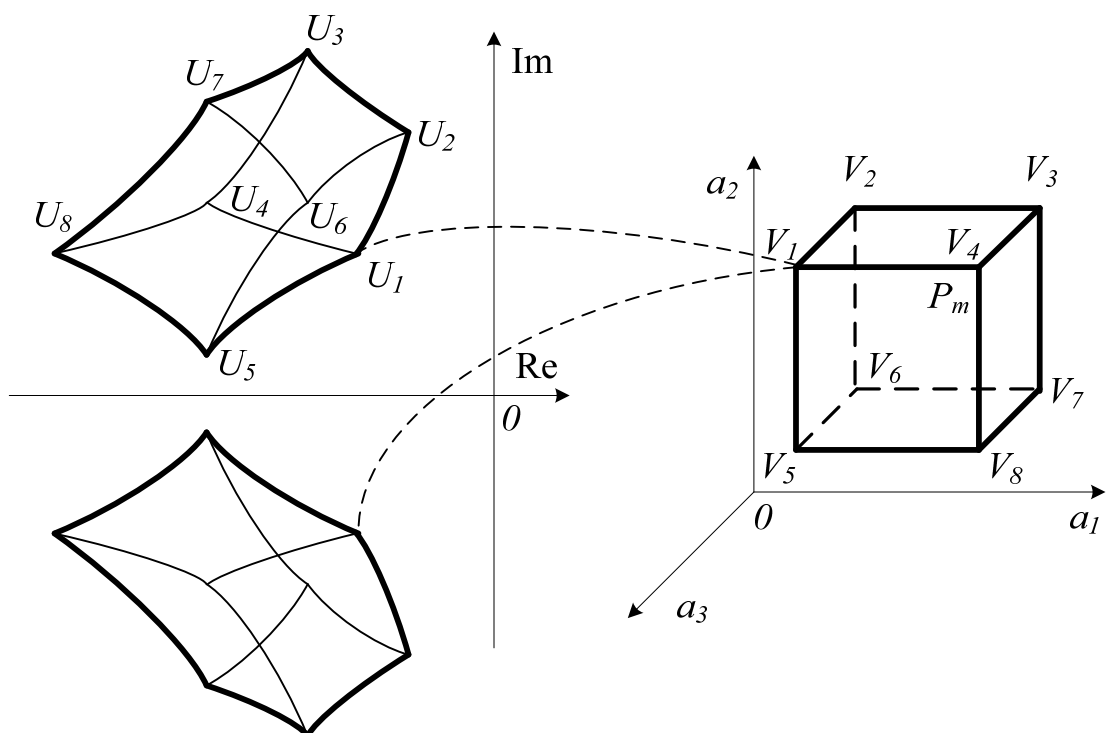


Рисунок 1.2 – Отображение вершин параметрического многогранника

Ребра интервального полинома обозначим как R_i^q , $i = \overline{1, m}$, где m – количество интервальных коэффициентов, q – порядковый номер вершины. Образы ребер обозначим через RS_i^q и назовем их реберными ветвями. Ребра P_m и их образы представлены на рисунке 1.3.

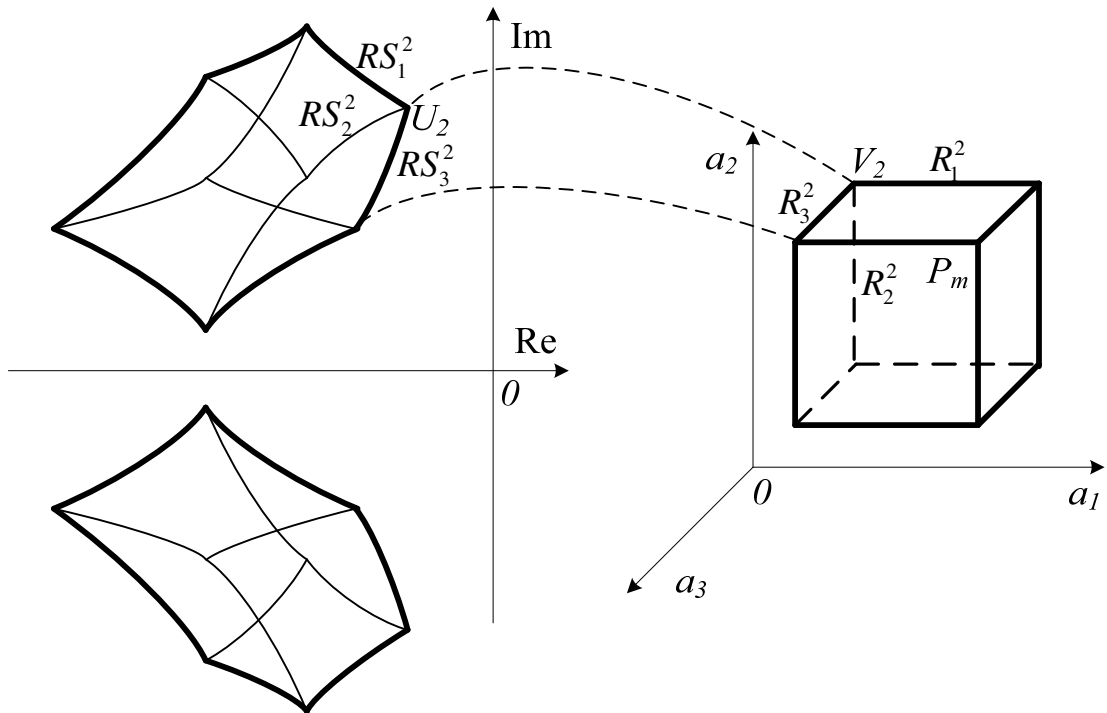


Рисунок 1.3 – Отображение ребер параметрического многогранника

По определению многогранника P_m любая его грань является прямоугольником на плоскости изменения двух интервальных коэффициентов из одной вершины. Грани интервального полинома обозначим как G_{ij}^q (рисунок 1.4), $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, m}$, $i \neq j$, q – порядковый номер вершины. Образы граней обозначим через GS_{ij}^q .

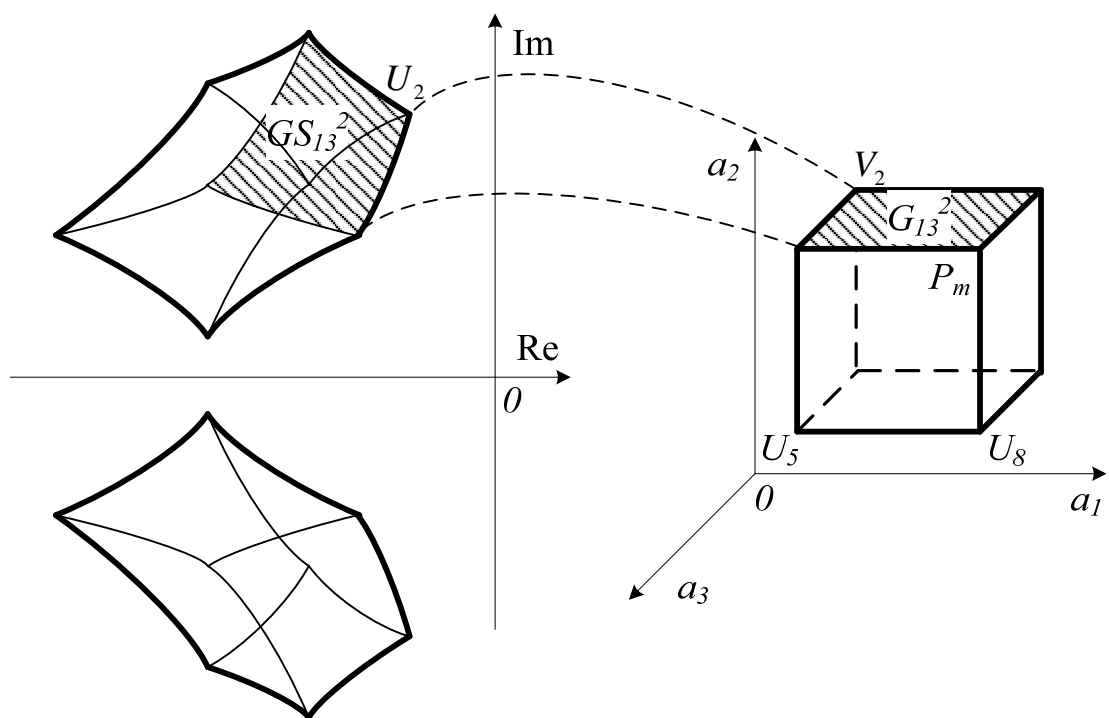


Рисунок 1.4 – Отображение граней параметрического многогранника

Обозначим угол выхода из корневого узла U_q по j параметру как φ_j (рисунок 1.5). Векторы, определяющие углы выхода реберных ветвей, обозначим через E_j .

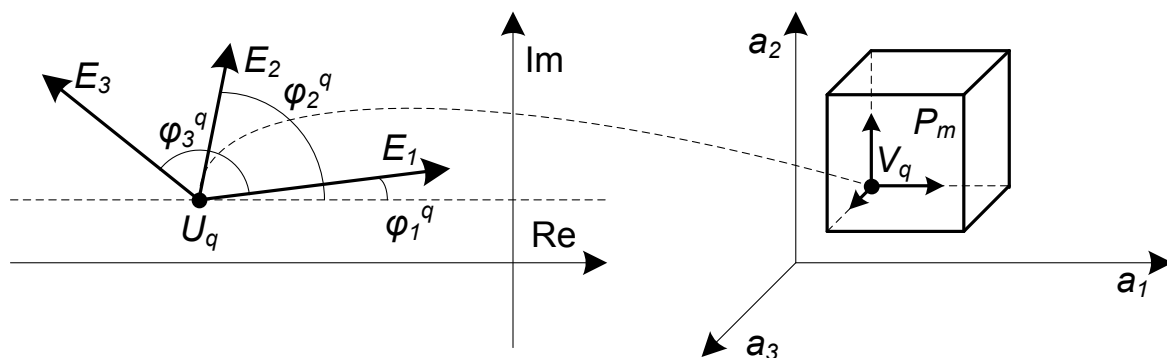


Рисунок 1.5 – Углы выхода реберных ветвей

1.2. Свойства отображения параметрического многогранника при интервальной неопределенности

Для отображения $\phi: P_m \rightarrow S$, где S – множество корней (0.1), необходимо иметь соотношение, связывающее координаты точек P_m с n

корнями полинома (0.1). Таким соотношением для случая интервальной неопределенности может быть уравнение, полученное в результате подстановки в (0.1) выражения (0.3)

$$P(s) + \sum_{i=0}^n \Delta a_i s^i = 0. \quad (0.5)$$

На основании (0.5) запишем уравнение отображения ребра R_i^q на плоскость корней

$$P(s) + \Delta a_i s^i = 0. \quad (0.6)$$

Пусть (0.6) является характеристическим уравнением системы с единичной обратной связью. Тогда передаточная функция эквивалентной разомкнутой системы для ребра будет иметь вид

$$W_i^q(\Delta a_i, s) = \frac{\Delta a_i s^i}{P(s)} \quad (0.7)$$

Анализируя (0.6) и (0.7) с позиции теории корневого годографа, заметим, что при изменении Δa_i в интервале (0.3) корни движутся от полюсов функции (0.7), соответствующих одному концу R_i^q , к корням (0.6) на другом конце R_i^q . При этом они образуют фрагментарные ветви корневого годографа.

Тогда для $\phi: P_m \rightarrow S$ будут справедливы выражения: $\phi(R_i^q) = RS_i^q$, $\phi(V_q) = U_q$. Следовательно, согласно реберной теореме области локализации корней (0.1), объединением которых является S , будут ограничены реберными ветвями RS_i^q однопараметрических интервальных корневых годографов. Такой вывод позволяет рассматривать S как некоторый многопараметрический интервальный корневой годограф.

На основании (0.1) запишем уравнение отображения плоскости грани G_{ij}^q при снятии интервальных ограничений

$$a_i s^i + a_j s^j + P(s) = 0. \quad (0.8)$$

Пусть один из корней уравнения (0.8) имеет вид $s_r = \alpha + j\beta, r \in \overline{1, n}$. Подставляя в (0.8) координаты s_r и выделяя вещественную и мнимую части, получаем систему двух линейных уравнений с двумя переменными a_i и a_j :

$$\begin{cases} a_i \operatorname{Re}(\alpha + j\beta)^i + a_j \operatorname{Re}(\alpha + j\beta)^j + \\ + \operatorname{Re} \left[\sum_k a_k^q (\alpha + j\beta)^k + \sum_p a_p (\alpha + j\beta)^p \right] = 0; \\ a_i \operatorname{Im}(\alpha + j\beta)^i + a_j \operatorname{Im}(\alpha + j\beta)^j + \\ + \operatorname{Im} \left[\sum_k a_k^q (\alpha + j\beta)^k + \sum_p a_p (\alpha + j\beta)^p \right] = 0. \end{cases} \quad (0.9)$$

Для уравнений системы (0.9) характерны следующие два случая.

1. Уравнения независимы и система имеет единственное решение $a_i = a_i^*$, $a_j = a_j^*$. Следовательно, $\phi^{-1}(s_r) = P^*$, где $P^* = (a_i^*, a_j^*)$, причем $P^* \in G_{ij}^q$.
2. Уравнения отличаются постоянным множителем. Из этого следует, что в плоскости G_{ij}^q существует особая прямая t (
3. рисунок 1.6), описываемая любым из уравнений системы (0.9), причем $\phi^{-1}(s_r) = t$.

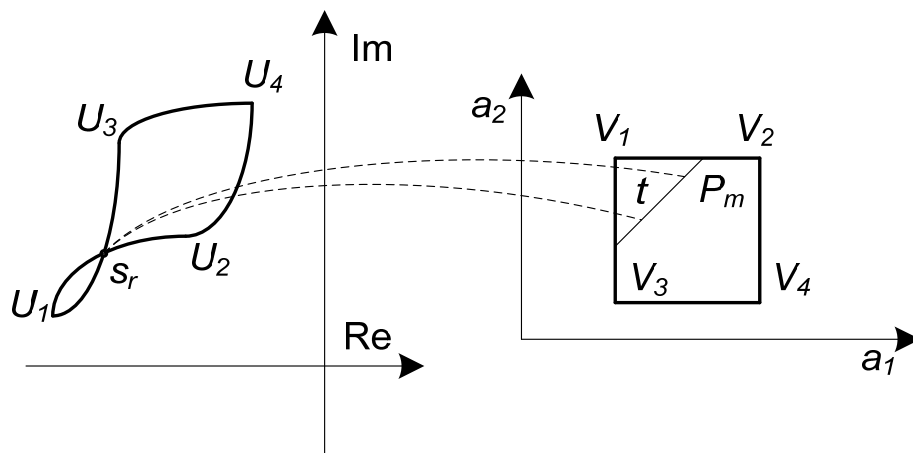


Рисунок 1.6 – Отображение грани параметрического многогранника с особой прямой

Учитывая эти особенности обратного отображения s_r , рассмотрим границы области S_r локализации этого корня при условии

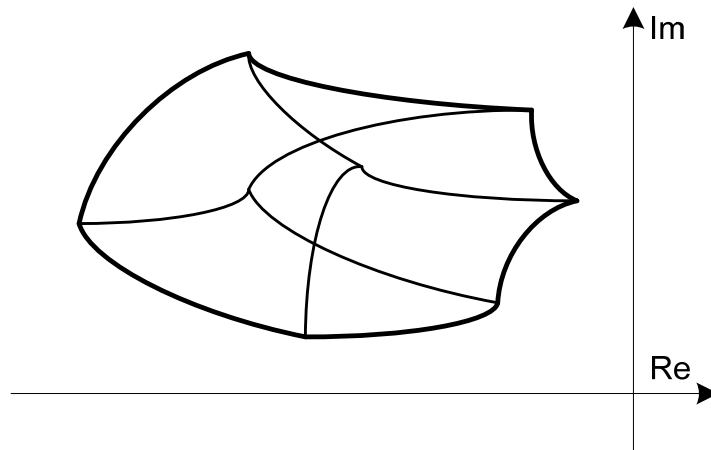
$$\phi^{-1}(S_r) = G_{ij}^q. \quad (0.10)$$

Пусть $\phi^{-1}(s_r) = P^*$, причем $P^* \in R_i^q$. Так как координаты P^* являются единственным решением (0.9), то RS_i^q – единственная ветвь, проходящая через s_r . Следовательно, при условии (0.10) границами S_r являются непересекающиеся образы ребер G_{ij}^q .

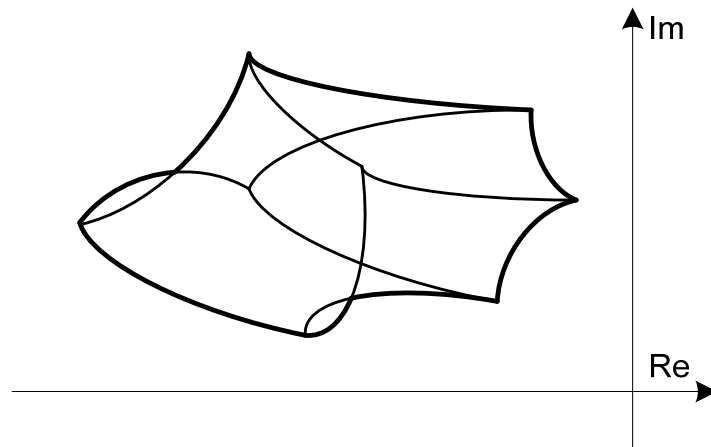
Пусть $\phi^{-1}(s_r) = t$ и $t \cap G_{ij}^q = \overline{P_1 P_2}$ (точки P_1 и P_2 принадлежат ребрам G_{ij}^q). Следовательно, $\phi(\overline{P_1 P_2}) = s_r$ и через s_r (назовем его особым корневым узлом и обозначим U^*) проходит множество ветвей корневых годографов по интервальным коэффициентам, образующим пересекаемые прямой t ребра. Угол входа каждой такой ветви в U^* на основании свойств корневого годографа равен углу выхода и поэтому все пересекающиеся в U^* ветви лежат между двумя пересекающимися там же реберными ветвями. Следовательно, в этом случае при условии (0.10) в состав границы S_r входят пересекающиеся образы двух ребер G_{ij}^q .

Таким образом, RS_i^q могут входить в состав границ областей локализации корней уравнения (0.1) как целиком, так и частично, пересекаясь в U^* . Назовем такие реберные ветви граничными (обозначим GRS_i^q), их прообразы – граничными ребрами (GR_i^q), а образы вершин, принадлежащих GR_i^q , – граничными корневыми узлами (GU_q).

На рисунке 1.7 приведены примеры отображения параметрического многогранника системы с тремя интервальными параметрами на комплексную плоскость корней. На рисунке 1.7а показана область S_r , границами которой являются непересекающиеся образы ребер P_m , а на рисунке 1.7б она ограничена пересекающимися образами ребер P_m .



а)



б)

Рисунок 1.7 – Примеры образования границ областей локализации корней интервального характеристического полинома

Покажем, что у P_m существует единственный набор GR_i^q для всех областей локализации комплексных корней. Пусть $\phi(V_q) = s_1$, $s_1 = \alpha_1 + j\beta_1$, и $\phi(V_q) = s_2$, $s_2 = \alpha_2 + j\beta_2$, причем s_1 является граничным для S_1 при $\phi^{-1}(S_1) = P_m$, а s_2 – внутренним для S_2 при $\phi^{-1}(S_2) = P_m$. Допустим, что один из интервальных коэффициентов a_i при изменении из V_q выходит за свою границу, определяемую условиями (0.3) и (0.4). В результате может оказаться, что $s_1 \notin S_1$, а $s_2 \in S_2$. В этом случае $\phi^{-1}(s_1) \notin P_m$, а $\phi^{-1}(s_2) \in P_m$, что

противоречит существованию у s_1 и s_2 одного прообраза. Поэтому если хоть одно отображение V_q есть GU_q , то ими же являются и все другие ее отображения. Из этого можно сделать вывод, что для $\phi: P_m \rightarrow S$ существует единственный набор GR_i^q , составляющий искомый граничный реберный маршрут.

Из проведенного анализа следует, что если $U^* \in S_r$, то GRS_i^q могут входить в состав границ S_r как полностью, так и частично, причем последний случай является результатом их пересечения в узлах U^* . Поэтому при определении набора GR_i^q необходимо учитывать возможное наличие U^* в областях S_r .

Очевидно, что необходимым условием $U^* \in S_r$ является присутствие прямых t в плоскостях P_m . Заметим, что если в двухмерном пространстве какой-либо грани существует прямая t , то и в плоскости любого сечения P_m , параллельного рассматриваемой грани, также будет соответствующая прямая t . Поэтому необходимым условием $U^* \in S_r$ является наличие прямой t хотя бы в одной из плоскостей граней P_m , имеющих одну общую вершину. Число таких плоскостей равно C_m^2 .

Как было указано ранее, условием существования прямой t в пространстве коэффициентов a_i и a_j и ее отображения в $U^*(\alpha; j\beta)$ является линейная зависимость уравнений системы (0.9). Эта зависимость имеет место, если существуют значения α и β , при которых выполняются равенства

$$\frac{\operatorname{Re}((\alpha + j\beta)^i)}{\operatorname{Im}((\alpha + j\beta)^i)} = \frac{\operatorname{Re}((\alpha + j\beta)^j)}{\operatorname{Im}((\alpha + j\beta)^j)} =$$

$$= \frac{\operatorname{Re}\left[\sum_k a_k^q (\alpha + j\beta)^k + \sum_p a_p (\alpha + j\beta)^p\right]}{\operatorname{Im}\left[\sum_k a_k^q (\alpha + j\beta)^k + \sum_p a_p (\alpha + j\beta)^p\right]}. \quad (0.11)$$

Очевидно, что такие α и β должны являться решениями полученных из (0.11) систем нелинейных уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{Re}((\alpha + j\beta)^i) \operatorname{Im}((\alpha + j\beta)^j) - \operatorname{Re}((\alpha + j\beta)^j) \operatorname{Im}((\alpha + j\beta)^i) = 0; \\ \operatorname{Re}((\alpha + j\beta)^j) \operatorname{Im}\left[\sum_k a_k^q (\alpha + j\beta)^k + \sum_p a_p (\alpha + j\beta)^p\right] - \\ \operatorname{Im}((\alpha + j\beta)^j) \operatorname{Re}\left[\sum_k a_k^q (\alpha + j\beta)^k + \sum_p a_p (\alpha + j\beta)^p\right] = 0. \end{cases} \quad (0.12)$$

Заметим, что для устойчивого полинома S_r располагаются в левой полуплоскости и поэтому возможные узлы U^* имеют координаты $\alpha < 0$ и $\beta \neq 0$. В результате анализа уравнений системы (0.12) получено следующее утверждение.

Утверждение. Узлы U^* пересечения реберных ветвей существуют только в отображениях плоскостей тех граней, которые образованы коэффициентами полинома (0.1) с индексами, удовлетворяющими условию

$$|i - j| \geq 3. \quad (0.13)$$

Доказательство. Сделаем в (0.12) обратную подстановку $\alpha + j\beta = s$. На основе формулы Муавра в ее тригонометрическом представлении

$$s^b = |s|^b (\cos(b\varphi) + j \sin(b\varphi))$$

преобразуем систему (0.12) к виду

$$\begin{cases} |s|^{i+j} (\cos(i\varphi) \sin(j\varphi) - \cos(j\varphi) \sin(i\varphi)) = 0; \\ \sum_z a_z |s|^{j+z} (\cos(j\varphi) \sin(z\varphi) - \cos(z\varphi) \sin(j\varphi)) = 0, \end{cases} \quad (0.14)$$

где $z = k \cup p$. В системе (0.14) координатами U^* теперь являются угол ϕ и модуль s . Учитывая, что $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, а также используя теорему разности аргументов тригонометрических функций, уравнения системы (0.14) можно упростить

$$\begin{cases} \sin((j-i)\varphi) = 0; \\ \sum_z a_z |s|^{j+z} \sin((z-j)\varphi) = 0. \end{cases} \quad (0.15)$$

Очевидно, что при наложенных условиях $\alpha < 0$ и $\beta \neq 0$ решения (0.15) должны удовлетворять неравенствам $\varphi \neq 0^\circ, \varphi \neq 90^\circ$. В этом случае первое уравнение системы (0.15) будет иметь решения только при $|i-j| \geq 3$. Эти решения для верхней полуплоскости корней определяются выражением

$$\varphi = \pi - \frac{\pi}{|i-j|}, \quad |i-j| = 3, 4, 5, \dots$$

Подстановка значения φ во второе уравнение системы (0.15) позволяет найти модуль s , и, тем самым, определить координаты U^* на комплексной плоскости.

Таким образом, необходимым условием $U^* \in S_r$ является наличие в уравнении (0.1) пар интервальных коэффициентов с индексами, удовлетворяющими (0.13).

1.3. Свойства отображения параметрического многогранника при аффинной неопределенности

Рассмотрим далее свойства отображения P_m для случая аффинной неопределенности, когда интервальными являются реальные (физические) параметры системы, линейно входящие в коэффициенты характеристического полинома. Пусть характеристический полином системы имеет вид:

$$D(s) = \sum_{i=0}^m (T_i \cdot A_i(s)) + B(s) = 0, \quad \underline{T}_i \leq T_i \leq \overline{T}_i, \quad (0.16)$$

где $A_i(s) = \sum_{j=0}^k (a_{i,j} s^j)$, $B(s) = \sum_{j=0}^k (b_j s^j)$.

Для отображения $\phi: P_m \rightarrow S$ используем следующее выражение:

$$D_q(s) + \sum_{i=0}^k (\Delta T_i \cdot A_i(s)) = 0, \quad (0.17)$$

где $D_q(s)$ – полином со значениями интервальных параметров, соответствующих вершине q параметрического многогранника.

При рассмотрении ребер P_m будем использовать введенное выше обозначение R_i^q , где i – индекс ΔT_i , $i = \overline{1, m}$, q – индекс V_q , из которой по ребру меняется T_i . На основании (0.17) запишем уравнение отображения ребра R_i^q на комплексную плоскость корней:

$$D_q(s) + \Delta T_i \cdot A_i(s) = 0 \quad (0.18)$$

Выражение (0.7) для случая рассматриваемой аффинной неопределенности будет иметь вид:

$$W_i^q(\Delta T_i, s) = \frac{\Delta T_i \cdot A_i(s)}{D_q(s)} \quad (0.19)$$

При изменении ΔT_i корни (0.18), стремясь от полюсов функции (0.19) к ее нулям, образуют однопараметрический интервальный корневой годограф.

Любая грань P_m является прямоугольником на плоскости изменения двух интервальных параметров T_i и T_j из одной вершины V_q . На основании (0.16) запишем уравнение отображения плоскости грани G_{ij}^q :

$$D_q(s) + \Delta T_i \cdot A_i(s) + \Delta T_j \cdot A_j(s) = 0 \quad (0.20)$$

Пусть $s_r = \alpha + j\beta$, $r \in \overline{1, n}$. Подставляя в (0.20) координаты s_r , получаем систему двух линейных уравнений с двумя переменными T_i и T_j :

$$\begin{cases} T_i \cdot \operatorname{Re}(A_i(\alpha + j\beta)) + T_j \cdot \operatorname{Re}(A_j(\alpha + j\beta)) + \operatorname{Re}(D_q(s)) = 0; \\ T_i \cdot \operatorname{Im}(A_i(\alpha + j\beta)) + T_j \cdot \operatorname{Im}(A_j(\alpha + j\beta)) + \operatorname{Im}(D_q(s)) = 0. \end{cases} \quad (0.21)$$

Для уравнений (0.21), как и для случая интервальной неопределенности коэффициентов полинома, характерны те же два случая:

1. Уравнения независимы и система имеет единственное решение $T_i = T_i^*$, $T_j = T_j^*$. Следовательно, $\phi^{-1}(s_r) = P^*$, $P^* = (T_i^*, T_j^*)$, причем точка P^* принадлежит плоскости G_{ij}^q .

2. Уравнения отличаются постоянным множителем. Из этого следует, что в плоскости G_{ij}^q существует прямая t , описываемая любым из уравнений системы (0.21), причем $\phi^{-1}(s_r) = t$.

По аналогии с отображением P_m в случае интервальной неопределенности при отображении ребер P_m для полинома с аффинной неопределенностью можно доказать, что реберные ветви могут также входить в состав границы как полностью, так и частично, пересекаясь в U^* . Определим условие наличия U^* .

Как было указано ранее, таким условием является линейная зависимость уравнений (1.8). Эта зависимость имеет место, если существуют такие α и β , что выполняются равенства:

$$\frac{\operatorname{Re} A_i(\alpha + j\beta)}{\operatorname{Im} A_i(\alpha + j\beta)} = \frac{\operatorname{Re} A_j(\alpha + j\beta)}{\operatorname{Im} A_j(\alpha + j\beta)} = \frac{\operatorname{Re}(D_q(\alpha + j\beta))}{\operatorname{Im}(D_q(\alpha + j\beta))} \quad (0.22)$$

Для этой проверки необходимо решить полученную из (0.22) систему двух нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(A_i(\alpha + j\beta)) \cdot \operatorname{Im}(A_j(\alpha + j\beta)) - \\ - \operatorname{Re}(A_j(\alpha + j\beta)) \cdot \operatorname{Im}(A_i(\alpha + j\beta)) = 0; \\ \operatorname{Re}(A_j(\alpha + j\beta)) \cdot \operatorname{Im}(D_q(\alpha + j\beta)) - \\ - \operatorname{Im}(A_j(\alpha + j\beta)) \cdot \operatorname{Re} D_q(\alpha + j\beta) = 0. \end{cases} \quad (0.23)$$

Левые части каждого из уравнений системы (0.23) являются полиномами нечетной степени β без свободного члена. Поэтому если (0.23) не имеет решения с $\beta \neq 0$, то в отображениях рассматриваемой грани и

параллельных ей сечений P_m нет U^* . Отсутствие решений (0.23) для всех сочетаний интервальных параметров означает, что границы S_r состоят из непересекающихся реберных ветвей.

1.4. Основные результаты

В данной главе введены основные обозначения, применяемые при робастном расширении метода корневого годографа и проведен анализ свойств отображения на корневую плоскость параметрического многогранника интервального характеристического полинома при двух типах его неопределенности: интервальной и аффинной.

В результате анализа установлено, что образы граничных ребер многогранника при обоих типах неопределенностей могут входить в состав границы областей локализации корней интервального полинома как целиком, так и частично, пересекаясь в особых корневых узлах U^* . При этом для обоих типов неопределенностей сформированы условия наличия U^* на границах областей локализации. Показано, что возможное пересечение реберных ветвей необходимо учитывать при составлении замкнутого граничного реберного маршрута интервального характеристического полинома. Этот маршрут необходим для построения областей локализации корней ИХП с целью дальнейшего анализа на их основе робастного качества интервальной системы.

ГЛАВА 2. Анализ робастного качества интервальных систем автоматического управления

2.1. Определение граничных вершин при аффинной неопределенности

Определим условия принадлежности U_q границе S_r (рисунок 2.1). Для этого введем в рассмотрение угол выхода R_i^q из комплексного U_q . Обозначим этот угол через Θ_i^q . Его можно найти из уравнения фаз [83], записанного для U_q . Если $D^q(s)$ имеет степень n , а $A_i(s)$ степень z , тогда Θ_i^q при увеличении T_i находится по формуле

$$\Theta_i^q = 180^\circ - \sum_{k=1}^n \Theta_k + \sum_{l=1}^z \Theta_l, \quad (0.24)$$

а при уменьшении T_i

$$\Theta_i^q = -\sum_{k=1}^n \Theta_k + \sum_{l=1}^z \Theta_l, \quad (0.25)$$

где Θ_k и Θ_l - углы между вещественной осью и векторами, направленными из U_q соответственно к k -ому полюсу и к l -ому нулю функции (1.6).

Проанализируем возможные направления движения s_r из U_q , рассматривая области отображения граней P_m с общей вершиной V_q (рисунок 2.1). В каждой из них направление движения s_r определяется вектором $\vec{E}_{ij} = \vec{E}_i + \vec{E}_j$, где \vec{E}_i и \vec{E}_j - реберные векторы, задаваемые Θ_i^q и Θ_j^q [98]. Согласно правилам векторной алгебры, \vec{E}_{ij} выходит из U_q и лежит внутри образованного \vec{E}_i и \vec{E}_j угла Ψ_{ij} , причем $0^\circ \leq \Psi_{ij} \leq 180^\circ$.

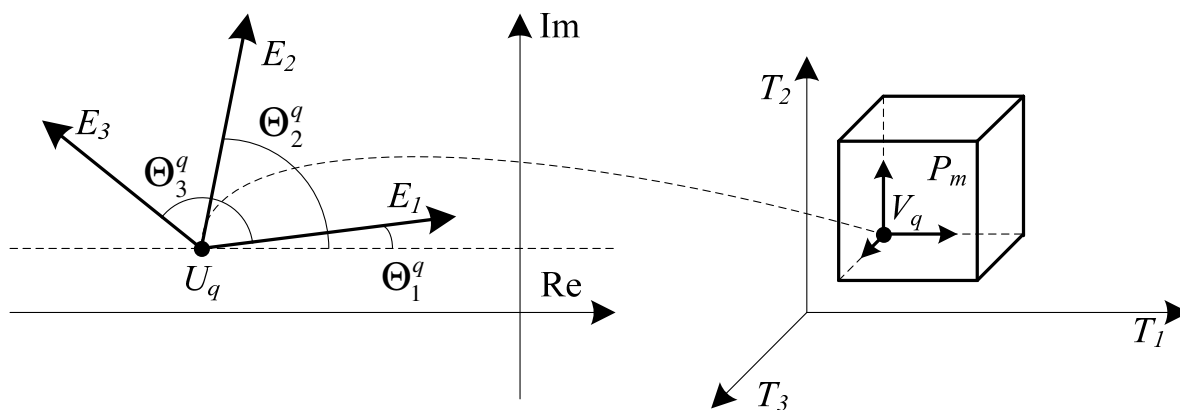


Рисунок 2.1 – Отображение вершин параметрического многогранника

Так как из GU_q выходят две граничные реберные ветви, то соответствующие им векторы образуют граничный угол $G\Psi_{ij}$, также лежащий в диапазоне $[0^\circ, 180^\circ]$. В этом случае все остальные углы Ψ_{ij} , и, следовательно, определяющие их реберные векторы должны принадлежать $G\Psi_{ij}$. Выразим данное условие через углы выхода реберных ветвей, отсчитываемые от положительной вещественной полуоси. Оно соответствует выполнению C_m^2 неравенств

$$|\Theta_m^{Vq} - \Theta_1^{Vq}| < 180^\circ \quad (0.26)$$

Таким образом, на основании проверки (0.26) можно установить принадлежность вершины P_m границе области S_r локализации комплексного корня ИХП.

На рисунке 2.2 показаны возможные варианты расположения векторов выхода RS_i^q из граничного корневого узла GU_q (рисунок 2.2а) и из узла, расположенного внутри S_r (рисунок 2.2б).

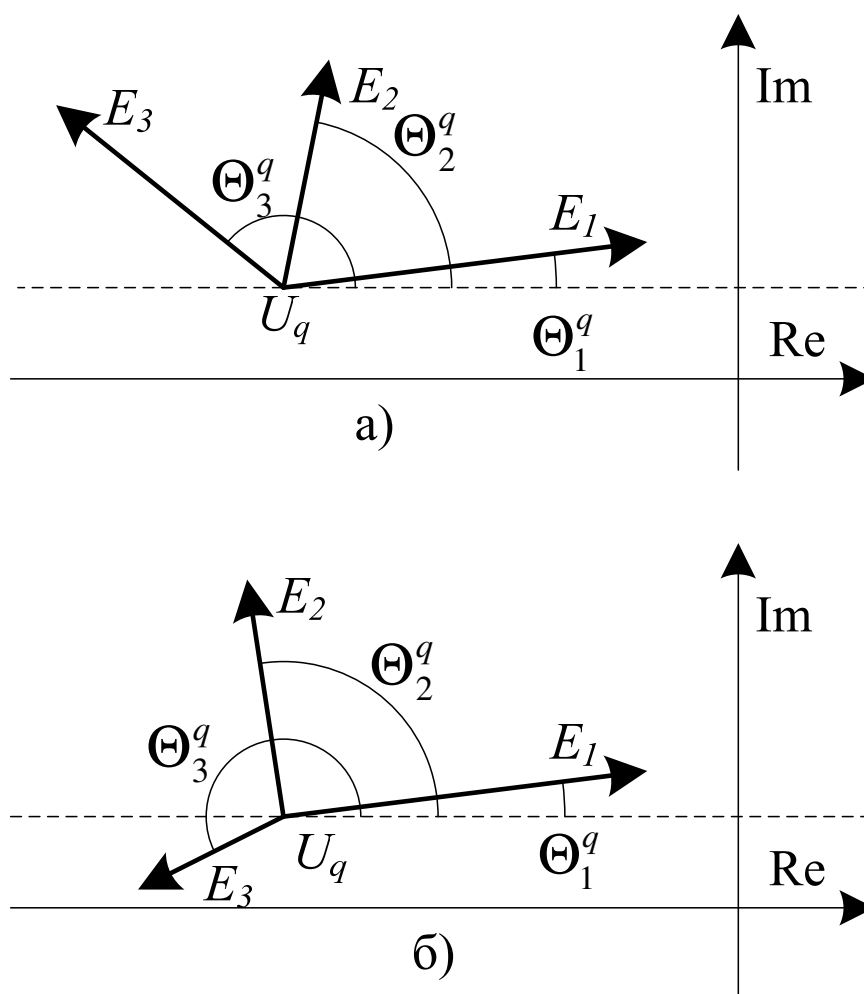


Рисунок 2.2 – Расположение векторов выхода RS_i^q из корневого узла

2.2. Реберный анализ робастного качества системы при аффинной неопределенности

Проанализируем возможные соотношения углов выхода двух реберных ветвей (RS_i и RS_j) из соседних граничных корневых узлов S_r , связанных одной граничной реберной ветвью GRS_k . Очевидно, что прообразы RS_i и RS_j являются ребрами одной грани P_m .

Пусть $U^* \notin S_r$. При изменении T_k по ребру GR_k корень s_r движется по GRS_k . При этом могут изменяться углы выхода из s_r ветвей RS_i^s и RS_j^s . Однако, так как $U^* \notin S_r$, то RS_i^s и RS_j^s не пересекаются. Поэтому при переходе

s_r от одного GU_q к другому будет сохраняться последовательность величин Θ_i^s и Θ_j^s (рисунок 2.3а). Обобщая этот случай на большее число рассматриваемых реберных ветвей, можно заключить, что в соседних граничных корневых узлах значения их углов выхода будут располагаться в одинаковой последовательности.

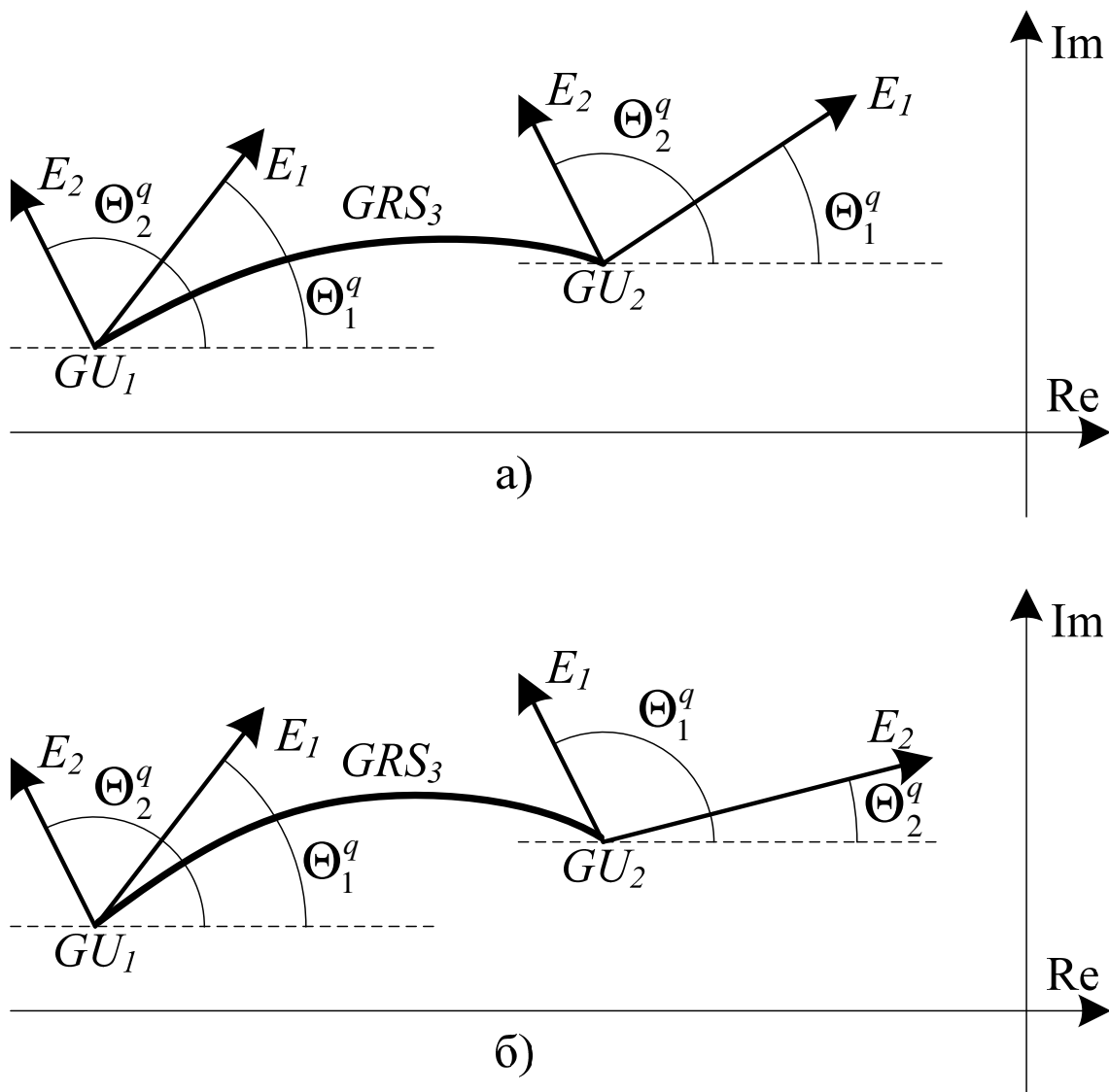


Рисунок 2.3 – Расположение векторов выхода RS_i^q из корневого узла при варьировании одного параметра

Пусть $U^* \in S_r$, тогда RS_i^s и RS_j^s могут пересекаться в U^* . Если при изменении T_k возникнет ситуация $s_r = U^*$ и далее U^* выйдет из S_r , то на

оставшемся участке GRS_k изменится соотношение Θ_i^s и Θ_j^s . В этом случае в соседних граничных корневых узлах не будет сохраняться последовательность углов выхода реберных ветвей (рисунок 2.3б).

На основе установленных фазовых соотношений для граничных реберных ветвей и анализа возможности их пересечения в особых корневых узлах разработаем алгоритмы граничной реберной маршрутизации P_m для случая аффинной неопределенности.

Пусть системы (0.21) при аффинной неопределенности не имеют решений ни для одной из граней P_m с выбранной общей вершиной ($U^* \notin S_r$). Тогда если известен GU_q и выходящая из него GRS_i^q , то очередной граничной реберной ветвью будет та, модуль разности между углом выхода которой и углом выхода известной GRS_i^q будет наименьшим (наибольшим). Поэтому, зная величины углов Θ_i^q , $i = \overline{1, m}$ для любого граничного корневого узла и расположив их в порядке возрастания (убывания), можно определить последовательность ветвей RS_i^q , $q = \overline{1, 2m}$, $i = \overline{1, m}$ ограничивающих область локализации комплексного корня.

Этой последовательности соответствует упорядоченный набор ребер P_m - замкнутый граничный реберный маршрут. Логично заключить, что он состоит из $2m$ ребер, связывающих m пар вершин P_m , причем координаты каждой пары имеют противоположные граничные значения интервальных параметров.

Если хотя бы для одной пары интервальных параметров система (0.21) имеет решение, то в области S_r возможно наличие U^* . В этом случае необходимо также найти узел GU_q , затем для него определить последовательность Θ_i^q и соответствующую ей последовательность ребер P_m . Если при движении по полученному таким образом реберному маршруту очередное ребро и следующее за ним окажутся образованными интервальными параметрами T_i и T_j для которых система (0.21) имеет решение, то в

границный реберный маршрут в этом случае следует включить все ребра грани G_{ij} .

Таким образом, алгоритм реберного анализа для определения робастного качества системы с интервальными параметрами предусматривает выполнение следующих этапов:

1. Приведение характеристического полинома системы к виду (0.16).
2. Определение координат вершин P_m , соответствующих граничным значениям интервальных параметров.
3. Решение систем уравнений (0.21) в одной из вершин P_m для установления интервальных параметров, граничные реберные ветви которых могут пересекаться.
4. Нахождение на основании (1.21) граничного узла U^* области локализации корней.
5. Граничная реберная маршрутизация P_m по углам выхода реберных ветвей из граничного корневого узла с учетом результатов п.3.
6. Отображение граничного реберного маршрута на корневую плоскость.
7. Анализ расположения областей локализации корней интервального полинома и определение робастного качества системы.

Допустим, что интервальные параметры входят в состав аффинного характеристического уравнения с максимальной степенью полинома, равной l . В таком случае характеристический полином будет иметь вид:

$$P(s) = B(s) + \sum_{i=0}^m (T_i A_i^*(s)), \quad (0.27)$$

где $B(s) = \sum_{j=0}^k (b_j s^j)$, $A_i^*(s) = \sum_{j=0}^l (a_{i,j} s^j)$, $\underline{T}_i < T_i < \overline{T}_i$.

Полином $B(s)$ может быть любой степени. Следовательно, ни для одной пары интервальных параметров система (0.27) не имеет решение, значит, в области S_r невозможно наличие U^* .

Нули характеристического полинома с аффинной неопределенностью будут отображены на вещественной оси (рисунок 2.4).

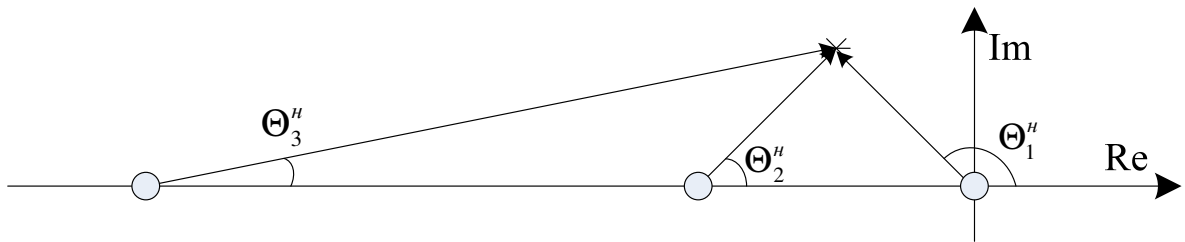


Рисунок 2.4 – Пример расположения нулей характеристического полинома с аффинной неопределенностью с максимальным значением степени полинома при интервальных параметрах, равным l

Таким образом, если нули передаточных функций образуют последовательность $s_1 > s_2 > \dots > s_m$, то ей будет соответствовать последовательность углов выхода $\Theta_1^H > \Theta_2^H > \dots > \Theta_n^H$. Разность крайних углов для этой последовательности всегда меньше 180° , следовательно, соответствующий вершине с крайними значениями параметров T_i узел является граничным.

Согласно уравнениям фазовых соотношений (0.28) и (0.29), разность крайних углов выхода из вершины, образованной граничными значениями интервальных коэффициентов (всеми минимальными или всеми максимальными), будет меньше 180° , т.к. минимальный угол от нуля до полюса равен 0° (в случае, если нуль стремится к минус ∞), а максимальный равен 180° (в случае, если нуль стремится к плюс ∞).

Рассмотрим вектора углов выхода из граничной вершины (рисунок 2.5)

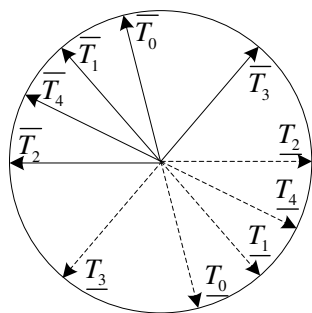


Рисунок 2.5 – Пример изображения векторов углов выхода из граничной вершины

Последовательно заменяя векторы углов выхода реберных ветвей интервальных параметров на противоположные в порядке их увеличения (уменьшения), получим все граничные вершины (рисунок 2.6), определяющие минимальный реберный маршрут для ИС.

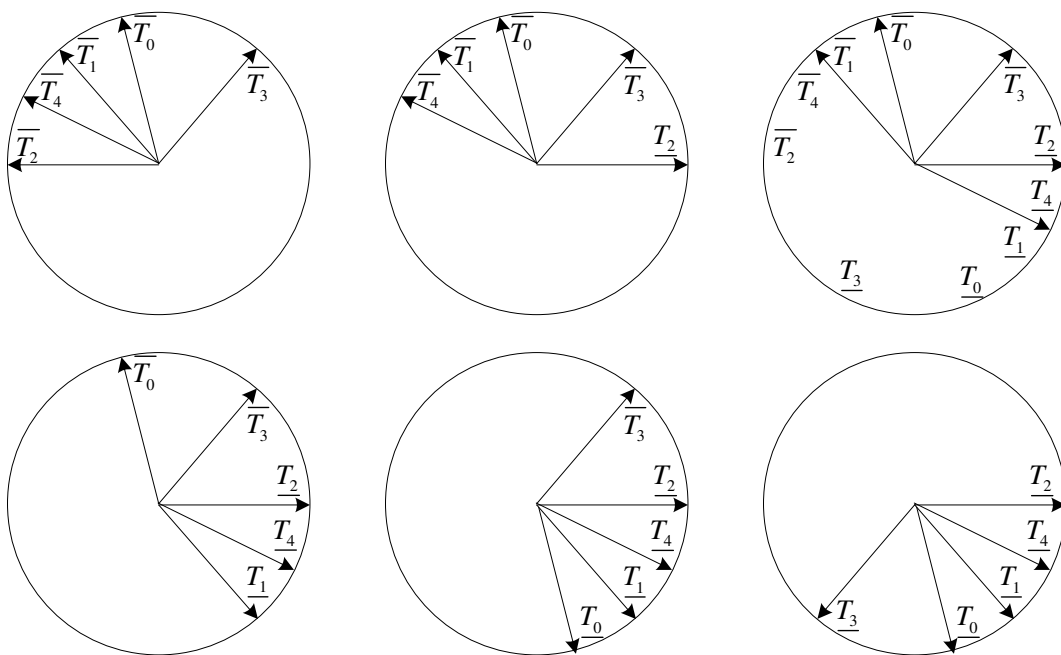


Рисунок 2.6 – Вектора углов выхода из граничных вершин

Составим таблицу вершин, строками которой будут их координаты в порядке возрастания индексов. Правило составления таблицы существенных вершин следующее:

В первой строке записываются одинаковые пределы коэффициентов, начиная с любого предела a_j . В каждой следующей строке по сравнению с

предыдущей изменяется предел только одного коэффициента (по очереди, начиная с первого). После получения в $m+1$ строке пределов, противоположных первой строке, изменение пределов повторяется в том же порядке. В результате в таблице образуется m пар вершин P_m , координаты которых имеют противоположные пределы.

Так как в двух соседних строках таблицы записываются координаты вершин одного ребра P_m , то можно заключить, что данная таблица задает замкнутый реберный маршрут из $2m$ ребер, связывающих $2m$ вершин P_m . В качестве примера в таблице 2.1 приведены существенные вершины для интервального характеристического полинома третьего порядка, все коэффициенты которого являются интервальными.

Таблица 2.1 – Существенные вершины для характеристического полинома с аффинной неопределенностью третьего порядка (при максимальной степени интервальных коэффициентов, равной единице)

Номер вершины	Координаты вершин				
1	\bar{T}_2	\bar{T}_3	\bar{T}_0	\bar{T}_1	\bar{T}_4
2	\underline{T}_2	\bar{T}_3	\bar{T}_0	\bar{T}_1	\bar{T}_4
3	\underline{T}_2	\underline{T}_3	\bar{T}_0	\bar{T}_1	\bar{T}_4
4	\underline{T}_2	\underline{T}_3	\underline{T}_0	\bar{T}_1	\bar{T}_4
5	\underline{T}_2	\underline{T}_3	\underline{T}_0	\underline{T}_1	\bar{T}_4
6	\underline{T}_2	\underline{T}_3	\underline{T}_0	\underline{T}_1	\underline{T}_4
7	\bar{T}_2	\underline{T}_3	\underline{T}_0	\underline{T}_1	\underline{T}_4
8	\bar{T}_2	\bar{T}_3	\underline{T}_0	\underline{T}_1	\underline{T}_4
9	\bar{T}_2	\bar{T}_3	\bar{T}_0	\underline{T}_1	\underline{T}_4
10	\bar{T}_2	\bar{T}_3	\bar{T}_0	\bar{T}_1	\underline{T}_4

Таким образом, алгоритм определения границ областей локализации корней полинома с интервальными параметрами предусматривает выполнение следующих этапов:

1. Приведение характеристического полинома системы к виду (0.27).
2. Определение координат нулей характеристического полинома.
3. Формирование последовательности координат нулей характеристического полинома в порядке возрастания (убывания).
4. Формирование вершины с максимальными значениями интервалов параметров, записанных в порядке возрастания (убывания) нулей.
5. Формирование реберного маршрута последовательным изменением граничных значений интервалов параметров в порядке, записанном в п.4.
6. Отображение реберного маршрута на корневую плоскость.
7. Анализ расположения областей локализации корней интервального полинома и определение робастного качества системы.

Для анализа эффективности разработанных алгоритмов была проведена серия экспериментов по расчету отображения ребер интервальных характеристических полиномов с различным количеством полюсов на каждом ребре и различным количеством интервальных коэффициентов. Результаты проведенных опытов представлены в таблицах 2.2 и 2.3.

Таблица 2.2 – Сравнительный анализ эффективности алгоритма нахождения минимального реберного маршрута при интервальной неопределенности по сравнению с реберной теоремой

Интервальный полином с интервальной неопределенностью					
Количество интервальных коэффициентов	Количество точек на ребре	Время, с		$t_{\text{реб}}/t_{\text{min}}$	Средне-арифметическое $t_{\text{реб}}/t_{\text{min}}$
		Реберная теорема ($t_{\text{реб}}$)	Прохождение по минимальному маршруту (t_{min})		
4	5	0,55	0,2	2,75	2,5865
4	20	1,75	0,71	2,4648	
4	50	3,7	1,45	2,5517	
4	100	7,3	2,83	2,5795	
5	5	1,3	0,35	3,7143	3,5909
5	20	4,6	1,3	3,5385	
5	50	10,8	3,1	3,4838	
5	100	21,4	5,9	3,6271	
6	5	3,6	0,6	6	5,9162
6	20	11,6	2	5,8	
6	50	27,3	4,7	5,8085	
6	100	53,9	8,9	6,0562	

Зависимость времени расчета границ отображения интервального характеристического полинома с аффинной неопределенностью (реберная теорема и минимальный реберный маршрут) представлены на рисунке 2.7.

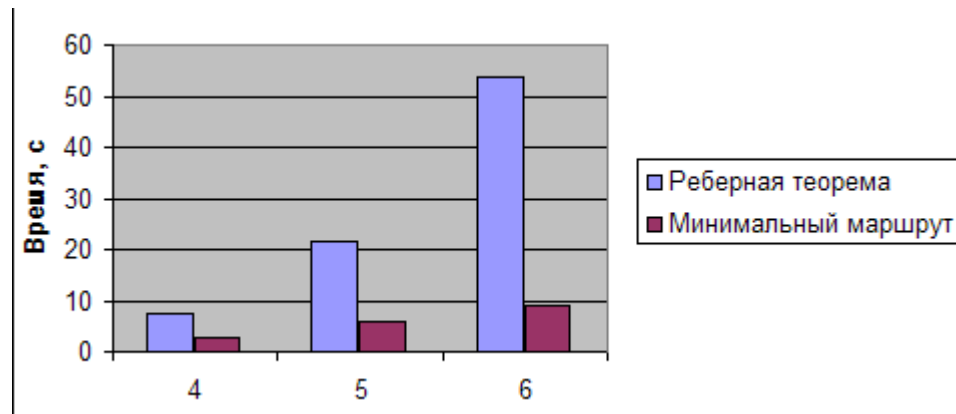


Рисунок 2.7 – Время расчета границ отображения ИХП с интервальной неопределенностью (реберная теорема и минимальный маршрут)

Из проведенного анализа эффективности разработанного в программной среде MATLAB алгоритма поиска и расчета границ характеристического полинома с интервальной неопределенностью видно, что скорость расчета границы отображения возрастает в геометрической прогрессии при увеличении количества интервальных коэффициентов, по сравнению с реберной теоремой. Расчеты нахождения минимального реберного маршрута при 6 интервальных коэффициентах производятся быстрее расчетов всех ребер (в соответствии с реберной теоремой) в 6 раз.

При увеличении точек разбиения ребра соотношение времени расчета границ увеличивается пропорционально постоянному коэффициенту, зависящему от количества интервальных коэффициентов при обоих методах.

Таблица 2.3 – Сравнительный анализ эффективности алгоритма нахождения минимального реберного маршрута при аффинной неопределенности по сравнению с реберной теоремой

Интервальный полином с аффинной неопределенностью					
Количество интервальных коэффициентов	Количество точек на ребре	Время, с		$t_{\text{реб}}/t_{\text{min}}$	Среднеарифметическое $t_{\text{реб}}/t_{\text{min}}$
		Реберная теорема ($t_{\text{реб}}$)	Прохождение по минимальному маршруту (t_{min})		
4	5	0,8	0,18	4,4444	4,1111
4	20	2,2	0,55	4	
4	50	5,2	1,3	4	
4	100	10	2,5	4	
5	5	1,7	0,2	8,5	8,4010
5	20	5,5	0,6	9,1667	
5	50	12,7	1,6	7,9375	
5	100	24,8	3,1	8	
6	5	3,8	0,25	15,2	15,9108
6	20	14,8	0,9	16,4444	
6	50	34,5	2,2	15,6818	
6	100	66,9	4,1	16,3171	

Зависимость времени расчета границ отображения интервального характеристического полинома с аффинной неопределенностью (реберная теорема и минимальный реберный маршрут) представлены на рисунке 2.8.

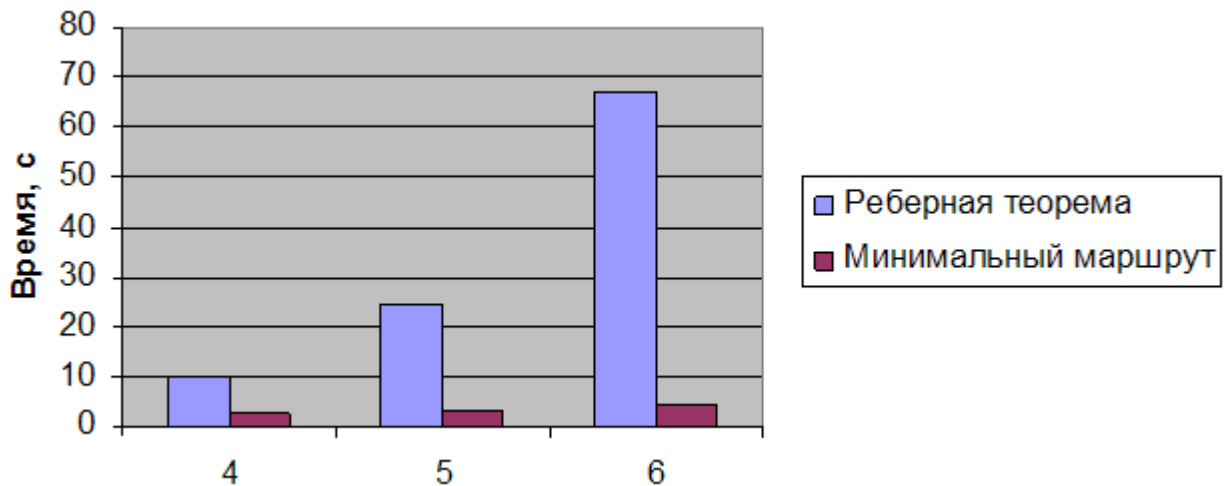


Рисунок 2.8 – Время расчета границ отображения полинома с аффинной неопределенностью (реберная теорема и минимальный маршрут)

Из проведенного анализа эффективности разработанного в программной среде MATLAB алгоритма поиска и расчета границ характеристического полинома с аффинной неопределенностью видно, что скорость расчета границы отображения возрастает в геометрической прогрессии при увеличении количества интервальных коэффициентов, по сравнению с реберной теоремой. Расчеты нахождения минимального реберного маршрута при 6 интервальных коэффициентах производятся быстрее расчетов всех ребер (в соответствии с реберной теоремой) приблизительно в 16 раз.

При увеличении точек разбиения ребра соотношение времени расчета границ увеличивается пропорционально постоянному коэффициенту, зависящему от количества интервальных коэффициентов при обоих методах.

2.3. Определение граничных вершин при интервальной неопределенности

Известно [72], что при интервальной неопределенности колебательность и степень устойчивости системы автоматического управления определяется вершинами параметрического многогранника интервального характеристического полинома. Однако при увеличении

количества интервальных коэффициентов ИХП количество вершин возрастает в геометрической прогрессии, что делает затруднительным либо долгим процедуру проверки всех вершин для анализа корневых показателей качества интервальной системы. Поэтому в данной главе разрабатывается методика определения только тех вершин, по которым проходит граничный реберный маршрут. Именно проверка этих граничных вершин позволит определить робастное качество интервальной системы.

Запишем уравнения углов выхода реберной ветви из вершины q при изменении коэффициента a_i . Угол Θ_i^q при увеличении a_i находится по формуле

$$\Theta_i^q = 180^\circ - \sum_{g=1}^n \Theta_g + i\Theta_0, \quad (0.28)$$

а при уменьшении a_i

$$\Theta_i^q = -\sum_{g=1}^n \Theta_g + i\Theta_0, \quad (0.29)$$

где Θ_g и Θ_0 – углы между вещественной осью и векторами, направленными из U_q соответственно к g -ому полюсу и к i нулям функции (0.13), имеющим одинаковые координаты $(0; j0)$.

В [111] на основании (0.28) и (0.29) получено следующее условие отображения вершины P_m на границу корневой области: U_q будет принадлежать границе области локализации корня, если разница между максимальным и минимальным углами Θ_i^q меньше 180 градусов. Заметим, что, согласно (0.28) и (0.29), у всех углов Θ_i^q есть общая составляющая

$$\sum_{g=1}^n \Theta_g, \text{ которая не влияет на выполнение условия граничного положения } U_q.$$

Поэтому перейдем от рассмотрения углов Θ_i^q к рассмотрению углов Φ_i^q , рассчитываемым при увеличении a_i по формуле

$$\Phi_i^q = \pi + i\Theta_0. \quad (0.30)$$

а при уменьшении a_i – по формуле

$$\Phi_i^q = i\Theta_0 \quad (0.31)$$

Введем в рассмотрение единичные векторы \overline{E}_i выходящие из начала координат под углами Φ_i^q . Если задать значение Θ_0 , то, согласно (0.30) и (0.31), угол вектора каждого коэффициента легко определяется без вычисления корней соответствующего вершинного полинома. Очевидно, что по взаимному расположению \overline{E}_i можно судить о характере узла U_q . Он будет принадлежать границе корневой области, если векторы \overline{E}_i всех интервальных коэффициентов будут располагаться в угле, меньшем 180 градусов.

Наиболее просто и наглядно проверить выполнение этого условия можно геометрическим способом, строя \overline{E}_i на круговой диаграмме. На рисунке 2.9 на примере ИХП с четырьмя интервальными коэффициентами показано возможное расположение \overline{E}_i для случая граничной вершины.

Заметим, что изменение предела коэффициента с минимального на максимальный или наоборот позволяет поворачивать соответствующий вектор на 180 градусов. Это дает возможность, выбрав один из векторов крайним, расположить остальные векторы желаемым образом. Следовательно, таким способом можно легко сформировать пределы коэффициентов граничной вершины P_m .

На основании анализа возможного расположения \overline{E}_i можно сделать следующее утверждение: если для каждого из m коэффициентов ИХП построить на круговой диаграмме в соответствии с (0.30) и (0.31) два противоположных вектора, то любые m последовательно расположенных векторов будут лежать в угле, меньшем π , и, следовательно, определять координаты граничной вершины P_m (рисунок 2.10).

Таким образом, задавая направление вращения и выбирая в качестве начального каждый из $2m$ векторов, можно получить набор из $2m$ возможных граничных вершин P_m .

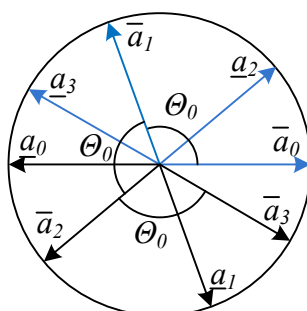


Рисунок 2.9 – Диаграмма расположения всех векторов

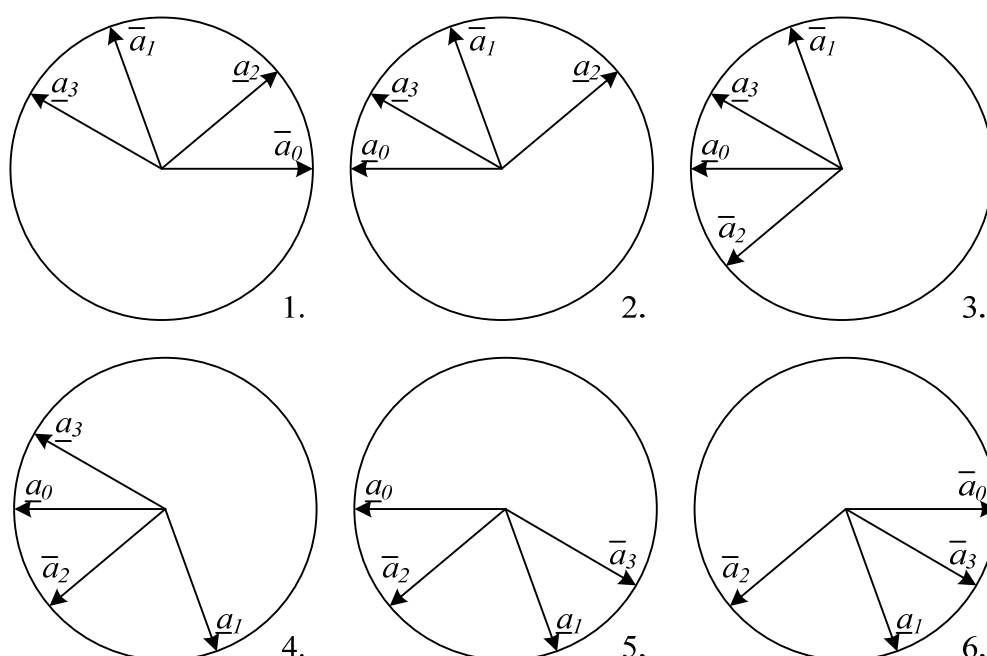


Рисунок 2.10 – Векторы граничных вершин

2.4. Вершинный анализ робастного качества системы при интервальной неопределенности

Для определения полного набора проверочных вершинных полиномов следует учитывать установленное выше свойство границ областей локализации ИХП: реберные ветви RS_i^q могут входить в состав границ корневых областей как полностью, так и частично, пересекаясь в определенных точках. Причина последнего случая состоит в том, что

реберные ветви грани, образованной коэффициентами a_i и a_j , пересекаются на луче, выходящем из начала координат под углом $\varphi = \pi - \frac{\pi}{|i-j|}$. Поэтому U_q , граничные в одном секторе, при переходе через такие особые лучи могут становиться внутренними в другом секторе. Следовательно, необходим учет данного факта при формировании набора граничных вершин P_m . Для этого предлагается определить особые лучи, лежащие в заданном угле γ . Углы особых лучей, как было показано выше, находятся по формуле $\varphi = \pi - \frac{\pi}{n-k}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-2$.

Пример расположения особых лучей показан на рисунке 2.11. Если в угле γ заданного сектора не содержится особых лучей, то формирование граничных вершин следует проводить описанным выше способом при любом Θ_0 из диапазона

$$\pi - \frac{\pi}{n} < \Theta_0 < \pi. \quad (0.32)$$

Если же γ содержит особые лучи, то необходимо выполнять указанную процедуру при Θ_0 из (0.32) и из дополнительных диапазонов

$$\pi - \frac{\pi}{n-k+1} < \Theta_0 < \pi - \frac{\pi}{n-k+2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, k_{\max}, \quad (0.33)$$

$$\pi - \gamma < \Theta_0 < \pi - \frac{\pi}{n - k_{\max} + 1}. \quad (0.34)$$

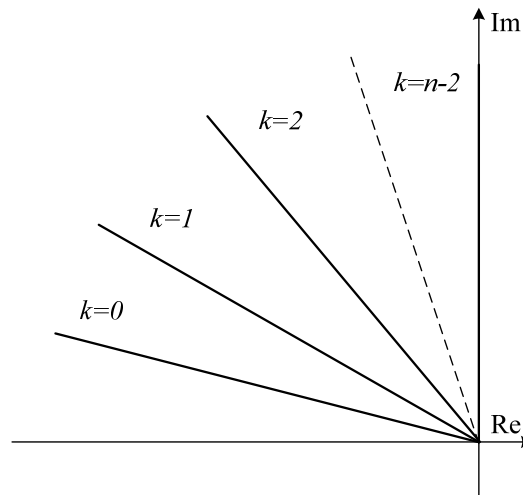


Рисунок 2.11 – Пример расположения особых лучей

Полное множество граничных вершин P_m является объединением множеств вершин, полученных при различных значениях Θ_0 . При этом количество искомых граничных вершин P_m определяется формулой $2(n+1 + \sum_{i=0}^k i)$.

Методика вершинного анализа робастного качества системы при интервальной неопределенности.

На основании проведенного выше анализа разработано следующая процедура формирования набора граничных вершин P_m .

1. Для заданных угла γ и числа m интервальных коэффициентов ИХП определить углы особых лучей, лежащих в секторе AOD.
2. Задать значение угла Θ_0 из диапазона (0.32).
3. На круговой диаграмме для всех интервальных коэффициентов с обоими пределами построить лучи, выходящие из начала координат под углами (0.33) и (0.34).
4. На круговой диаграмме, начиная с любого луча, определить последовательность m лучей, расположенных один за другим при движении в положительном направлении (против часовой стрелки).

5. Из соответствующих этим лучам пределов коэффициентов ИХП сформировать координаты граничной вершины P_m .
6. Последовательно изменяя начальные лучи, повторить процедуру п.4,5 и получить координаты $2m$ граничных вершин P_m .
7. Если $\pi - \frac{\pi}{n} > \pi - \gamma$, то повторить действия п. 3,4,5,6 при значениях угла Θ_0 из диапазонов (0.33) и (0.34).
8. При каждом последующем Θ_0 необходимо из получающихся наборов граничных вершин выбирать новые и добавлять их к найденным ранее.

2.5. Примеры анализа качества интервальных систем

Примеры определения граничного реберного маршрута.

Пример 1. Пусть задан полином с интервальной неопределенностью $s^3 + [6;8] \cdot s^2 + [14;18] \cdot s + [9,5;10,5]$.

Необходимо определить минимальный реберный маршрут параметрического многогранника интервального характеристического полинома.

Определим граничный реберный маршрут для P_3 , который содержит 12 ребер. Отображением одной из его вершин V_1 с координатами $a_2 = 6$, $a_1 = 14$, $a_0 = 9,5$ является узел $U_1 = (-2,45 + j1,61)$. Углы выхода из U_1 реберных ветвей по интервальным коэффициентам имеют следующие значения: $\Theta_{a_2}^{U_1} = 254^\circ$, $\Theta_{a_1}^{U_1} = 107^\circ$, $\Theta_{a_0}^{U_1} = 321^\circ$. Так как для них не выполняется условие (0.26), то выбираем другую вершину V_2 , отличающуюся от первой координатой $a_0 = 10,5$. Ей соответствуют узел $U_2 = (-2,31 + j1,52)$ и углы $\Theta_{a_2}^{U_2} = 257^\circ$, $\Theta_{a_1}^{U_2} = 112^\circ$, $\Theta_{a_0}^{U_2} = 141^\circ$. В этом случае условие (0.26) выполняется, то есть U_2 является граничным корневым узлом.

Поскольку неравенство (0.32) не выполняется ни для одной пары индексов интервальных коэффициентов, то в отображении P_3 нет особых

корневых узлов. Поэтому граничный реберный маршрут из V_2 определяется изменением коэффициентов в соответствии с фазовым соотношением $\Theta_{a_1}^U < \Theta_{a_0}^U < \Theta_{a_2}^U$. Схема полученного маршрута из 6 ребер приведена на рисунке 2.12, где стрелка вверх возле интервального коэффициента означает его увеличение, а стрелка вниз – уменьшение.

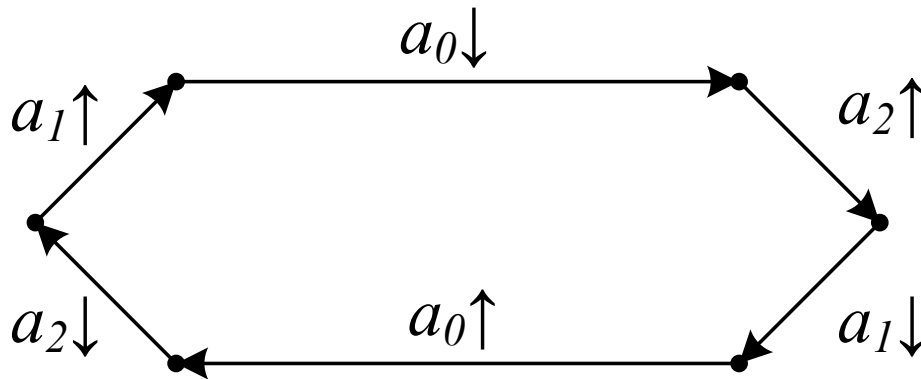


Рисунок 2.12 – схема минимального реберного маршрута

Пример 2. Пусть полином с интервальной неопределенностью имеет вид $D(s) = a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$, где $a_3 \in [0,07;0,1]$, $a_2 \in [0,3;0,45]$, $a_1 \in [1,1;1,5]$, $a_0 \in [1;2]$.

Необходимо определить минимальный реберный маршрут интервальной системы.

В данном случае P_4 образован четырьмя интервальными коэффициентами и содержит 32 ребра. В результате проверки выбранной вершины V с координатами $a_3 = 0,07$, $a_2 = 0,45$, $a_1 = 1,1$, $a_0 = 1$ установлено, что она является граничной и углы выхода реберных ветвей из ее образа $U(-2,07; j1,4)$ имеют значения: $\Theta_{a_3}^U = 89^\circ$, $\Theta_{a_2}^U = 123^\circ$, $\Theta_{a_1}^U = 154^\circ$, $\Theta_{a_0}^U = 17^\circ$. Они определяют необходимое для дальнейшей маршрутизации P_4 фазовое соотношение $\Theta_{a_0}^U < \Theta_{a_3}^U < \Theta_{a_2}^U < \Theta_{a_1}^U$.

Для заданного полинома условие (0.32) не выполняется для индексов коэффициентов a_3 и a_0 . С учетом этого и в соответствии с полученным

фазовым соотношением на рисунке 2.13 построен граничный реберный маршрут, содержащий только 12 ребер многогранника P_4 .

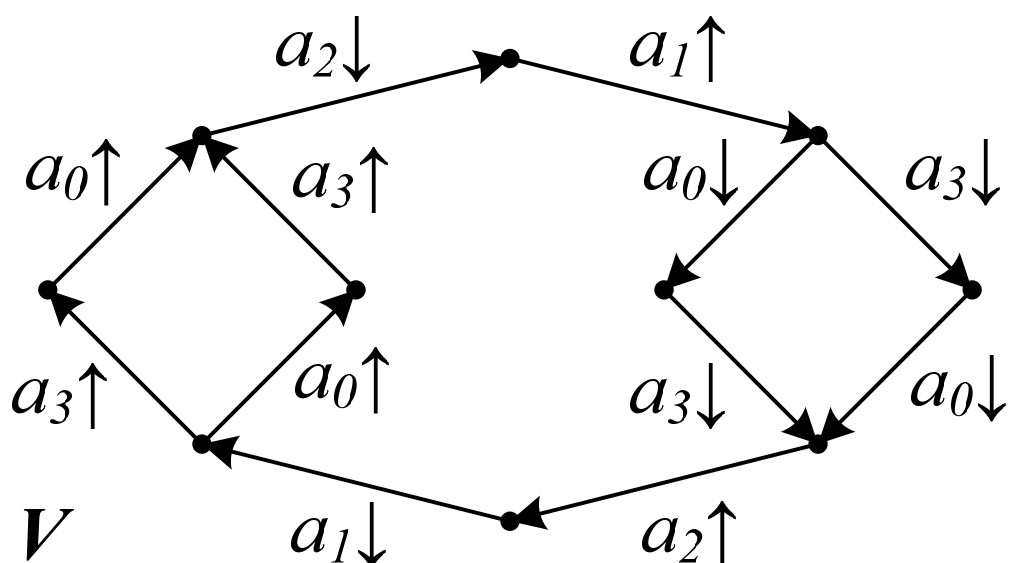


Рисунок 2.13 – схема минимального реберного маршрута

Для проверки разработанного алгоритма реберной маршрутизации, полученные в примерах 1, 2 реберные маршруты были отображены на корневую плоскость. Также на нее путем сканирования P_3 и P_4 были отображены все точки многогранников коэффициентов. В результате образы реберных маршрутов полностью составили границы областей локализации корней соответствующих интервальных полиномов, что свидетельствует о работоспособности предложенного алгоритма.

Примеры определения робастного качества.

Пример 3. Пусть задан полином с интервальной неопределенностью $D(s) = a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$, где $a_3 \in [0,07;0,09]$, $a_2 \in [0,45;0,49]$, $a_1 \in [1,1;1,5]$, $a_0 \in [0,1;0,7]$. Необходимо оценить его робастную устойчивость в секторе Γ с углом $\gamma = 70^\circ$.

В таблице 2.4 приведены все граничные вершины P_4 , полученные на основании построения круговых векторных диаграмм, согласно разработанной методике. Связывающий их реберный маршрут отображен на

верхнюю корневую полуплоскость в виде границы области локализации пары комплексно-сопряженных корней (см. рисунок 2.14). Как видно из рисунка 2.14, корневая область комплексного корня интервального характеристического полинома лежит в секторе с углом $\gamma_4 = 60^\circ$. Следовательно, заданный интервальный характеристический полином обладает робастной устойчивостью в секторе Γ с углом $\gamma = 70^\circ$.

Таблица 2.4 – Существенные вершины P_4

номер вершины	координаты вершины			
	1	$\underline{a_0}$	$\overline{a_1}$	$\underline{a_2}$
2	$\overline{a_0}$	$\overline{a_1}$	$\underline{a_2}$	$\overline{a_3}$
3	$\overline{a_0}$	$\underline{a_1}$	$\underline{a_2}$	$\overline{a_3}$
4	$\overline{a_0}$	$\underline{a_1}$	$\overline{a_2}$	$\overline{a_3}$
5	$\overline{a_0}$	$\underline{a_1}$	$\overline{a_2}$	$\underline{a_3}$
6	$\underline{a_0}$	$\underline{a_1}$	$\overline{a_2}$	$\underline{a_3}$
7	$\underline{a_0}$	$\overline{a_1}$	$\overline{a_2}$	$\underline{a_3}$
8	$\underline{a_0}$	$\overline{a_1}$	$\underline{a_2}$	$\underline{a_3}$

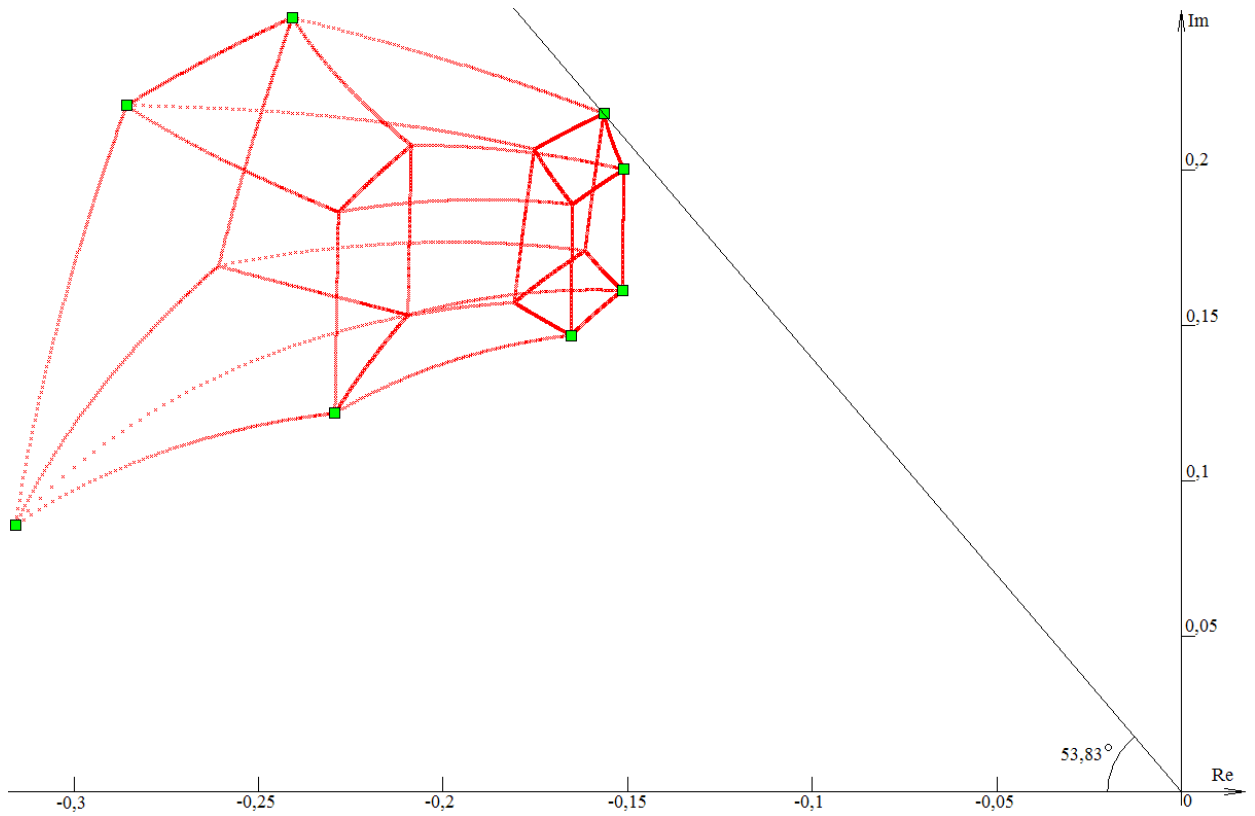


Рисунок 2.14 – Область локализации корней интервального характеристического полинома

Пример 4. Рассмотрим систему автоматической стабилизации упругой силы, состоящую из упругого элемента, электропривода, датчика и регулятора силы натяжения. Характеристический полином системы имеет вид

$$a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0,$$

где $a_3 = mlJ$, $a_2 = J\chi + m\chi r^2(1 + Tk_1k_2)$, $a_1 = Jc + mcr^2 + mk_1k_2r^2(\chi + Tc)$, $a_0 = mck_1k_2r^2$, m – масса груза, l – длина упругого элемента, J – момент инерции электропривода, χ – удельный коэффициент демпфирования упругого элемента, c – удельная жесткость упругого элемента, r – радиус приводного шкива электропривода, k_1 , k_2 – соответственно коэффициент усиления электрической части привода и коэффициент передачи ПИ-регулятора, T – постоянная времени ПИ-регулятора.

Постоянные параметры обобщенного объекта управления имеют значения: $J = 0.5 \text{ кгм}^2$, $\chi = 1 \cdot 10^4 \text{ нс}$, $c = 2 \cdot 10^4 \text{ н}$, $r = 0.1 \text{ м}$. Его интервальные параметры заданы диапазонами: $m \in [50, 500] \text{ кг}$, $l \in [50, 100] \text{ м}$, $k_1 \in [5, 50]$. Настройки регулятора $k_2 = 1$, $T = 0,01 \text{ с}$ определены для средних значений интервальных параметров. Необходимо на основе разработанной процедуры анализа робастной региональной устойчивости построить многопараметрический интервальный корневой годограф для данной системы стабилизации силы натяжения и по нему определить предельные значения корневых показателей качества системы.

Приведем характеристический полином системы к виду (0.27):

$$l \cdot A_1(s) + \frac{1}{m} \cdot A_2(s) + k_1 \cdot A_3(s) + A_4(s) = 0, \quad \text{где } A_1(s) = Js^3; \quad A_2(s) = J(c + \chi s)s;$$

$$A_3(s) = ck_2 r^2 + (ck_2 T r^2 + \chi k_2 r^2)s + \chi T k_2 r^2 s^2, \quad A_4(s) = (c + \chi s)r^2 s.$$

Параметрический многогранник образован тремя интервальными параметрами и содержит 8 вершин: $V_1(50; 50; 5)$, $V_2(500; 50; 5)$, $V_3(500; 50; 50)$, $V_4(50; 50; 50)$, $V_5(50; 100; 5)$, $V_6(500; 100; 5)$, $V_7(500; 100; 50)$, $V_8(50; 100; 50)$, где первая координата – m вторая – l , третья – k_1 .

Для трех функций вида (0.19) в первой вершине параметрического многогранника определены постоянные полюсы ($3,34 + j3,88$, $-3,34 - j3,88$, $-1,53$), а также три набора нулей (три нулевых корня $A_1(s)$; корни $A_2(s)$: 0 и -2 ; корни $A_3(s)$: -2 и -100). Для корневого узла $3,34 + j3,88$ на основании (0.24), (0.25) найдены $\Theta_m^{V_1} = 34^\circ$, $\Theta_l^{V_1} = 5^\circ$, $\Theta_{k_1}^{V_1} = 86^\circ$. При таких углах выхода условие (0.26) выполняется и, следовательно, V_1 принадлежит реберному маршруту. Так как, $\Theta_l^{V_1} < \Theta_m^{V_1} < \Theta_{k_1}^{V_1}$, то, следуя разработанной методике, запишем последовательность изменения интервальных параметров системы из вершины V_1 параметрического многогранника: $l \rightarrow m \rightarrow k_1 \rightarrow l \rightarrow m \rightarrow k_1 \rightarrow l$. Изменение параметров в такой очередности соответствует граничному реберному маршруту по следующим вершинам:

$V_1 \rightarrow V_5 \rightarrow V_6 \rightarrow V_7 \rightarrow V_4 \rightarrow V_3 \rightarrow V_1$. Отображение маршрута на верхнюю полуплоскость корней представлено на рисунке, где построены и все остальные несущественные реберные ветви многопараметрического интервального корневого годографа.

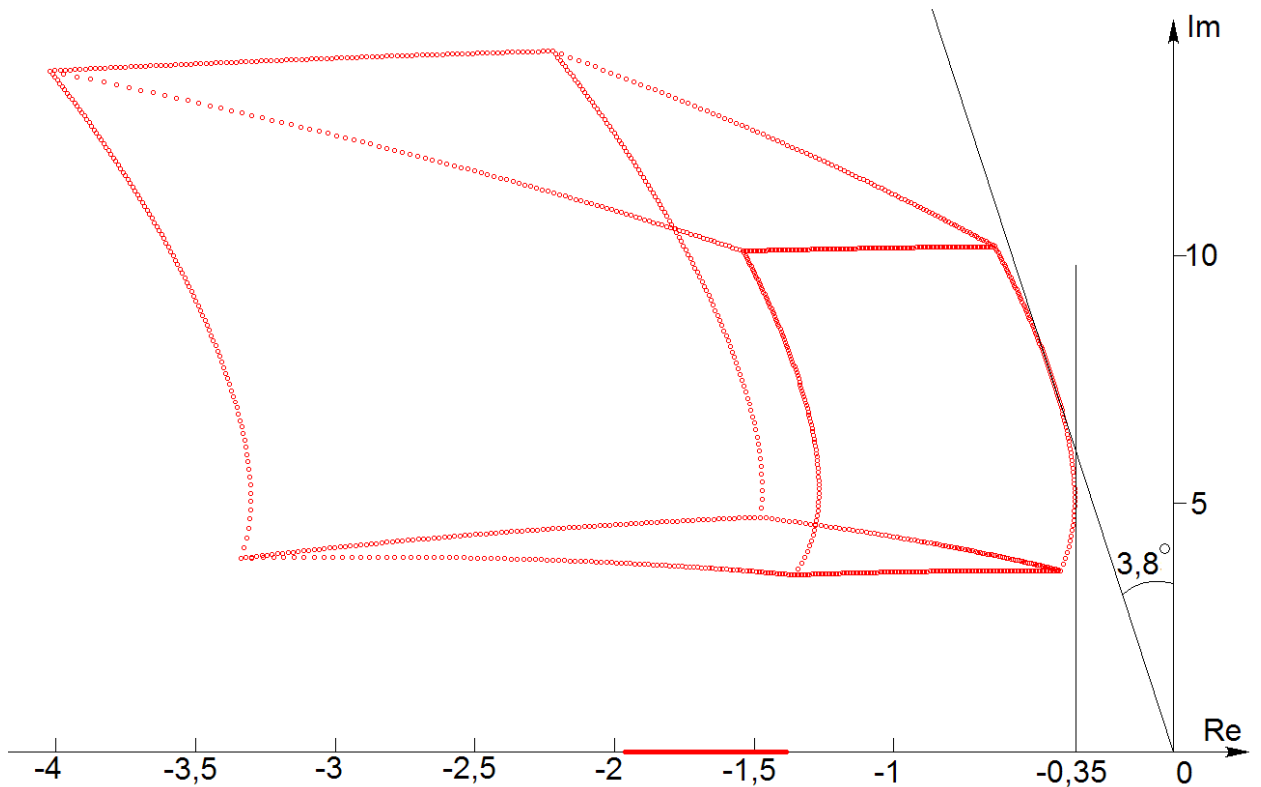


Рисунок 2.15 – Область локализации корней интервального характеристического полинома

По локализации корней интервальной системы можно оценить ее региональную устойчивость: минимальная степень устойчивости равна $-0,35$, а максимальная колебательность $-3,8$ градусов.

Пример 5. Пусть характеристический полином с аффинной неопределенностью имеет вид:

$$D(s) = 10^4 s^2 + s(a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 3a_4 + 20) + 2a_1 + a_2 + 5a_3 + 5,$$

где $a_1 = [0; 50]$, $a_2 = [0; 50]$, $a_3 = [0; 50]$, $a_4 = [0; 50]$.

Необходимо определить минимальный реберный маршрут, построить корневой годограф согласно найденному маршруту и вычислить корневые

оценки качества (максимальную колебательность и минимальную степень устойчивости).

Найдем нули представленного полинома:

при $a_1: -2$,

при $a_2: -0,5$,

при $a_3: -2,5$,

при $a_4: 0$;

Следовательно, менять пределы интервальных коэффициентов будем в следующей последовательности: a_4, a_2, a_1, a_3 , начиная с одной из граничных точек (либо при всех минимальных значениях интервальных коэффициентов, либо при всех максимальных). В результате произведенных расчетов получим реберный маршрут, представленный на рисунке 2.16.

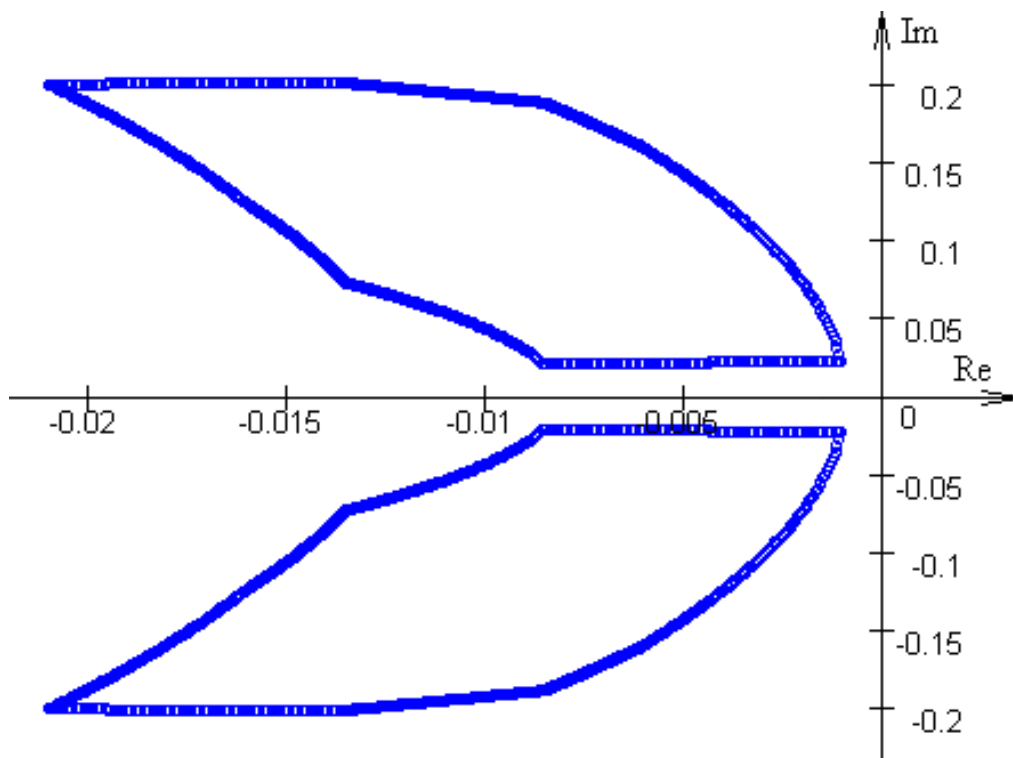


Рисунок 2.16 – Минимальный реберный маршрут

На основании построенного корневого годографа определим корневые характеристики интервальной системы: максимальная колебательность равна 1,15 градусов, а минимальная степень устойчивости равна 0,001.

2.6. Основные результаты

В данной главе определены условия принадлежности ребер интервального характеристического полинома граничному реберному маршруту при интервальной и аффинной неопределенностях. Рассмотрены основные фазовые соотношения, определены условия определения граничного корневого узла для рассматриваемых типов неопределенностей ИХП.

Разработаны методики определения граничного реберного маршрута для интервального характеристического полинома с аффинной неопределенностью с учетом особых лучей. Показано, что если интервальные параметры входят в состав рассматриваемого полинома с максимальной степенью, равной 1, то невозможно существование особых лучей в левой полуплоскости. Поэтому для нахождения граничного реберного маршрута достаточно разместить найденные нули замкнутой системы в порядке возрастания (убывания) и последовательным изменением границ интервальных параметров, начиная с максимальных значений, определить искомый маршрут.

Разработаны методики определения граничных корневых узлов для ИХП с интервальной неопределенностью. Показано, что для нахождения таких узлов необходимо найти возможные особые лучи и определить наборы граничных вершин для каждого сектора, образованного этими лучами. Искомым набором граничных вершин будет полный набор всех найденных вершин.

Приведен ряд числовых примеров, наглядно иллюстрирующих работоспособность разработанных методик анализа робастного качества интервальных систем.

ГЛАВА 3. Параметрический синтез регуляторов интервальных систем автоматического управления

3.1. Интервально-параметрический синтез П-регулятора

В практике проектирования систем автоматического управления (САУ) современными объектами очень часто параметры объекта управления в процессе эксплуатации изменяются в широких интервалах по заранее неизвестным законам. Применение для синтеза таких интервальных САУ известных методов, разработанных для объектов с постоянными параметрами, связано с большими трудностями. По мнению авторов, для этой цели наилучшим образом подходит интервальное расширение известного метода корневого годографа. Для получения в интервальной САУ переходных процессов с гарантированными показателями качества (минимальной степенью устойчивости η и максимальной колебательностью μ) необходимо, чтобы корни характеристического полинома интервальной САУ располагались левее вертикальной прямой, отстоящей от мнимой оси на расстоянии η , и внутри сектора с углом 2φ , $\varphi = \arctg(\mu)$.

Задача синтеза интервальной системы автоматического управления состоит в локализации полюсов интервальной САУ в области Γ при любых возможных значениях интервальных параметров объекта управления.

Рассмотрим САУ с П-регулятором, представленную на рисунке:

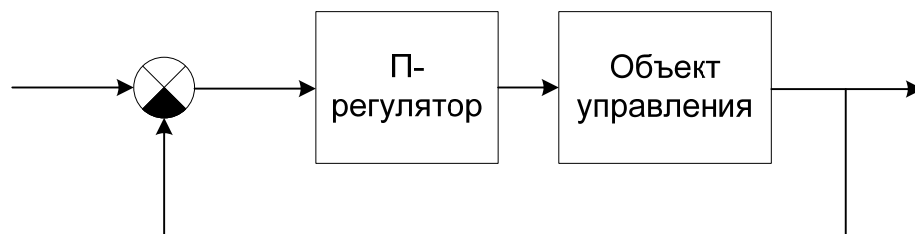


Рисунок 3.1 – Схема системы автоматического управления

Пусть САУ имеет ИХП с интервальной неопределенностью:

Пусть линейный регулятор имеет передаточную функцию П-регулятора:

$$W_p(s) = K, \quad (0.35)$$

где K – варьируемый параметр П-регулятора, а передаточная функция объекта управления имеет вид:

$$W_{ov}(s) = \frac{A(s)}{B(s)}, \quad (0.36)$$

где $A(s) = \sum_{i=0}^m (a_i s^i)$, $B(s) = \sum_{j=0}^n b_j \cdot s^j$, $\underline{b}_j \leq b_j \leq \overline{b}_j$.

Необходимо определить настройки П-регулятора, обеспечивающие расположение корневых областей интервального характеристического полинома в заданном усеченном секторе Γ при любых значениях интервальных параметров объекта управления.

Область возможных значений интервально-неопределенных параметров системы отображается на комплексную плоскость корней в виде областей локализации комплексно-сопряженных корней и отрезков вещественной оси, где локализуются вещественные корни (рисунок 3.2).

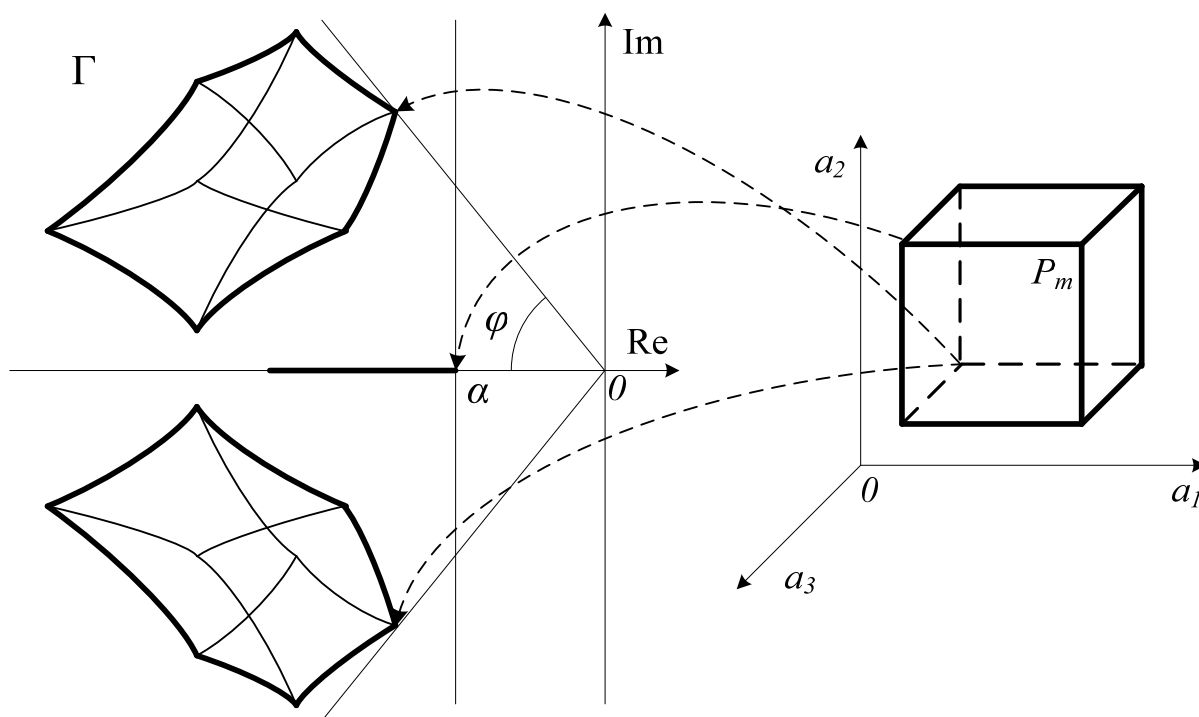


Рисунок 3.2 – Отображение параметрического многогранника P_n

Интервальный характеристический полином системы может быть записан в виде:

$$f(s) = B(s) + KA(s) = 0 \quad (0.37)$$

Коэффициенты полинома (0.37), в один из которых входит варьируемый параметр, образуют прямоугольный гиперпараллелепипед P_m , имеющий $n \cdot 2^{n-1}$ ребер и 2^n вершин. Необходимо разработать алгоритм определения интервалов K , при которых корни полинома (0.37) располагаются в области Γ . При этом следует учитывать, что, согласно [94], максимальная колебательность и минимальную степень устойчивости интервальной САУ определяется вершинами многогранника P_m .

Для решения поставленной задачи предлагаются следующие этапы:

1. Определить возможные граничные вершины P_m , отображающиеся на границу области Γ .
2. Для каждой найденной вершины определить значения варьируемого параметра K , при которых соответствующая ветвь корневого годографа пересекает границу Γ .
3. Для каждой граничной вершины определить интервалы K , при которых ветви корневого годографа будут находиться внутри области Γ .
4. Для всех граничных вершин определить пересечения найденных интервалов K , при которых корни полинома (0.37) располагаются в заданной области Γ .

Для реализации первого этапа воспользуемся основными фазовыми соотношениями теории корневого годографа [94] и определим углы выхода ветвей корневого годографа при изменении всех коэффициентов для построения круговой векторной диаграммы. Известно [110], что для граничных вершин разница между максимальным и минимальным углами не должна превышать 180° . В [110] также установлено, что вершины, граничные в одной области плоскости корней, могут становиться внутренними в другой области. Эти области разделяются на секторы особыми лучами, выходящими

из начала координат под углами: $\varphi = \frac{\pi \cdot l}{z}$, где $l = 0, 1, 2, \dots, z = 1, 2, 3, \dots, n$. Из этих лучей следует выбрать те, которые лежат внутри сектора, ограниченного углами максимальной колебательности системы. Далее следует выбрать произвольный угол в каждом полученном секторе и, согласно [110], для $\overline{a_i}$ и $\underline{a_i}$ построить векторную диаграмму углов $i\Theta_0$ и им противоположных. Затем необходимо выбрать все комбинации векторов, лежащих в угле 180° и, таким образом, определить координаты граничных вершин.

Для реализации второго этапа решения поставленной задачи воспользуемся известным уравнением корневого годографа Теодорчика-Эванса (КГТЭ) [112]:

$$F(\delta, \omega)P(\delta, \omega) - E(\delta, \omega)R(\delta, \omega) = 0, \quad (0.38)$$

где $E(\delta, \omega) = \operatorname{Re}(B(s))$, $F(\delta, \omega) = \operatorname{Im}(B(s))$,

$P(\delta, \omega) = \operatorname{Re}(A(s))$, $R(\delta, \omega) = \operatorname{Im}(A(s))$,

δ и ω – вещественные и мнимые части корня, принадлежащего КГТЭ.

Подставляя в (0.38) уравнения границ Γ , определяются значения ω , при которых происходит пересечение реберной ветви с границей Γ .

Для дальнейшего нахождения значений K необходимо воспользоваться выражением:

$$K = \frac{E(\delta, \omega) \cdot P(\delta, \omega) + F(\delta, \omega) \cdot R(\delta, \omega)}{P^2(\delta, \omega) + R^2(\delta, \omega)}. \quad (0.39)$$

Подставляя в (3.5) ранее полученные действительные значения ω , получаем значения K , при которых происходит пересечение реберной ветви с границей области Γ .

На третьем этапе подстановкой значений K из найденных интервалов определяем интервалы K , при которых корни полинома (0.37) лежат внутри Γ .

На четвертом этапе методом пересечения находим интервалы K , удовлетворяющие каждой из возможных граничных вершин.

Методика синтеза П-регулятора:

На основании проведенных исследований разработана методика интервально-параметрического синтеза П-регулятора, включающая следующие этапы:

1. Задание требуемых показателей качества (минимально допустимой степени устойчивости и максимально допустимой колебательности интервальной системы).
2. Нахождение возможных вершин многогранника P_m , отображающихся на границу области Γ .
3. Определение для каждой найденной граничной вершины на основе выражения (0.39), точек пересечения заданной области Γ с ветвью корневого годографа.
4. Определение методом подстановки значений из найденных интервалов в (0.37) интервалов значений варьируемого параметра K , при которых ветви корневого годографа находятся внутри заданной области Γ .
5. Нахождение пересечения найденных в п.3 интервалов K и определение искомого интервала K , при котором корни полинома располагаются в заданной области Γ для всех граничных вершин.

Для практического применения разработанной методики на основании предложенного алгоритма было разработано приложение в программном пакете MATLAB, дающее проектировщику эффективный инструмент для синтеза интервальных САУ с применением ЭВМ в интерактивном режиме.

3.2. Интервально-параметрический синтез ПИ-регулятора

Рассмотрим систему автоматического управления, представленную на рисунке 3.3.

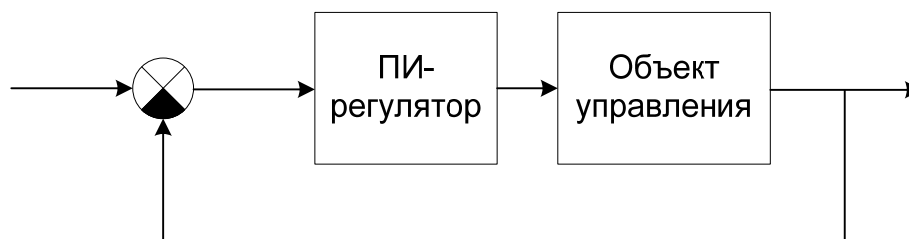


Рисунок 3.3 – Схема системы автоматического управления

Пусть линейный регулятор имеет передаточную функцию ПИ-регулятора:

$$W_P(s) = \frac{K_{II} \cdot s + K_{II}}{s}, \quad (0.40)$$

где K_{II}, K_{II} – настройки регулятора,

а передаточная функция объекта управления имеет вид:

$$W_{ov}(s) = \frac{A(s)}{B(s)}, \quad (0.41)$$

где $A(s) = \sum_{i=0}^m (a_i s^i)$, $B(s) = \sum_{j=0}^n b_j \cdot s^j$, $\underline{b}_j \leq b_j \leq \overline{b}_j$.

Тогда интервальный характеристический полином системы может быть записан в виде:

$$(K_{II} + K_{II} \cdot s) \cdot A(s) + s \cdot B(s) = 0. \quad (0.42)$$

Необходимо определить настройки ПИ-регулятора, обеспечивающие расположение корневых областей интервального характеристического полинома в заданном секторе Γ (рисунок 3.2) при любых значениях интервальных параметров объекта управления.

Приведем интервальный полином (0.42) к виду

$$\sum_{i=0}^k c_i \cdot s^i = 0, \quad (0.43)$$

где коэффициенты c_k могут являться функциями интервальных параметров объекта управления и настроек регулятора.

Интервальные коэффициенты c_i образуют параметрический многогранник, вершины которого определяются их крайними значениями.

Из теории корневого годографа известно, что если корень лежит на вещественной оси, то угол выхода корневого годографа из этого корня составляют 0° или 180° . Очевидно, что для того, чтобы вещественный корень интервального полинома двигался влево при изменении любых интервальных коэффициентов, необходимо, чтобы углы выхода по всем этим коэффициентам составляли 180° . Набор интервальных коэффициентов, который обеспечивает данное требование, определяется на основе следующего утверждения:

Утверждение 1. Если интервальные коэффициенты полинома заданы чередующимися пределами $\overline{c_0} \underline{c_1} \overline{c_2} \underline{c_3} \dots$, начиная с максимального для c_0 , то данный набор коэффициентов определяет вещественный полюс, углы выхода корневых годографов из которого по всем интервальным коэффициентам составляют 180° .

Доказательство.

Из основных фазовых соотношений теории корневого годографа известно, что угол выхода из корня при увеличении c_i можно найти по формуле:

$$\Theta_i^q = 180^\circ - \sum_{g=1}^n \Theta_g + i\Theta_0, \quad (0.44)$$

где Θ_g и Θ_0 – углы между вещественной осью и векторами, направленными из корня соответственно к g -ому полюсу и к i нулям функции.

Пусть полином (0.44) имеет правый вещественный корень S^* . Тогда для любой пары комплексно-сопряженных корней и для любого вещественного корня, лежащих левее S^* , на основе свойств корневого годографа можно заключить, что $\Theta_{p_1} + \Theta_{p_2} = 360^\circ$, $\Theta_{p_3} = 0^\circ$ (рисунок 3.4).

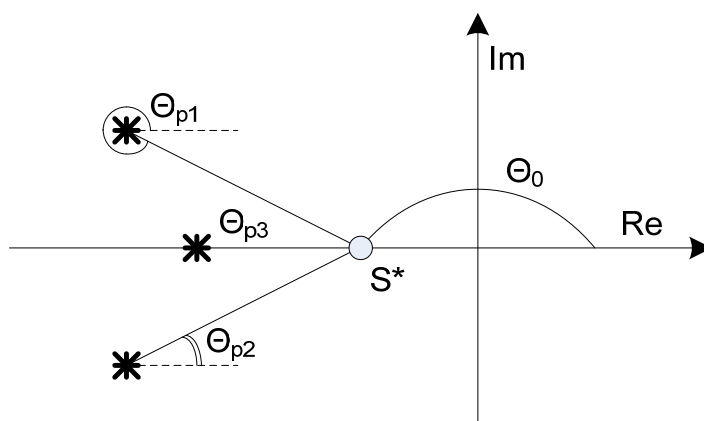


Рисунок 3.4 – Пример расположения корней

Следовательно, угол выхода из корня S^* при увеличении c_i можно найти по формуле:

$$\Theta_i^q = 180^\circ + i\Theta_0, \quad (0.45)$$

а при уменьшении

$$\Theta_i^q = i\Theta_0. \quad (0.46)$$

Таким образом, если интервальный полином будет иметь чередующиеся пределы коэффициентов $\overline{c_0} \underline{c_1} \overline{c_2} \underline{c_3} \dots$, то углы выхода из образа соответствующей этому набору вершины параметрического многогранника P_m будут равны 180° .

На основании данного утверждения можно сделать вывод, что минимальная степень устойчивости интервальной системы может быть задана вертикальной прямой, проходящей через вещественный корень, соответствующий чередующимся пределам коэффициентов интервального полинома.

Пусть минимальная степень устойчивости задается корнем $s^* = \alpha^*$. Введем информацию об этом корне в полином (0.43), задавая в нем чередующиеся значения b_j и значение $s^* = \alpha^*$. Выразив далее K_{II} через K_{II} , получим выражение:

$$K_{II} = f(K_{II}, \alpha^*, b_j^v), \quad (0.47)$$

где b_j^v – граничные значения коэффициентов полинома $B(s)$, обеспечивающие чередование пределов c_i .

Для дальнейшего синтеза ПИ-регулятора получим интервальный характеристический полином с одним варьируемым коэффициентом

$$\left(K_{II} (K_{II}, \alpha^*, b_j^v) + K_{II} \cdot s \right) \cdot A(s) + s \cdot B(s) = 0. \quad (0.48)$$

Так как известно [116], что, в случае интервальной неопределенности характеристического полинома, минимальная степень устойчивости и максимальная колебательность определяются образами некоторых вершин многогранника интервальных коэффициентов, то для решения поставленной выше задачи необходимо определить эти вершины. Для этого предлагается воспользоваться методикой, разработанной в [108].

После нахождения набора проверочных вершин необходимо на основе уравнений корневого годографа Теодорчика-Эванса [113] определить для каждой из них значения настраиваемого параметра регулятора K_{II} , при котором происходит пересечение корневого годографа с заданной на рисунке 3.3 границей области локализации корней.

Проделав данную процедуру, можно получить соответствующие интервалы значений K_{II} , при которых корни интервального полинома лежат в заданной области Γ . Для нахождения интервала значений K_{II} , удовлетворяющего всем вершинам, следует найти пересечение всех этих интервалов.

Для окончательного определения настроек ПИ-регулятора необходимо выбрать значение K_{II} из полученного интервала и подставить это значение в выражение (0.47) для нахождения значения K_{II} .

На основании проведенных исследований разработана методика интервально-параметрического синтеза ПИ-регулятора, включающая следующие этапы:

1. Задание требуемых показателей качества (минимально допустимой степени устойчивости и максимально допустимой колебательности интервальной системы).
2. Задание в характеристическом полиноме $s = \alpha^*$ и пределов интервальных параметров объекта управления, соответствующих вершине с координатами $\overline{c_0} \overline{c_1} \overline{c_2} \overline{c_3} \dots$.
3. Получение зависимости (0.47) и приведение характеристического полинома с двумя варьируемыми параметрами ПИ-регулятора к полиному с одним варьируемым параметром K_{II} .
4. Нахождение возможных вершин многогранника P_m , отображающихся на границу области Γ .
5. Определение для каждой найденной граничной вершины на основе выражения (0.39) точек пересечения заданной области Γ с ветвью корневого годографа.
6. Определение методом подстановки значений из найденных интервалов в (0.42) интервалов значений варьируемого параметра K , при которых ветви корневого годографа находятся внутри заданной области Γ .
7. Определение пересечения найденных интервалов K_{II} , при котором корни полинома располагаются в заданной области Γ для всех граничных вершин.
8. Выбор значения K_{II} из области пересечения интервалов и определение значения K_{II} на основе выражения (0.47).

Для практического применения разработанной методики на основании предложенного алгоритма также было разработано приложение в программном пакете MATLAB для синтеза интервальных САУ с применением ЭВМ в интерактивном режиме.

3.3. Интервально-параметрический синтез ПИД-регулятора, гарантирующего апериодический переходный процесс интервальной системы

Рассмотрим систему автоматического управления, представленную на рисунке 3.5.

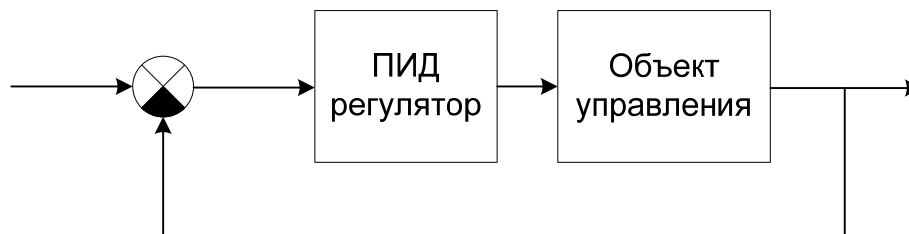


Рисунок 3.5 – Схема системы автоматического управления

Пусть линейный регулятор имеет передаточную функцию ПИД-регулятора:

$$W_p(s) = \frac{K_p \cdot s + K_i + K_d \cdot s^2}{s}, \quad (0.49)$$

где K_p, K_i, K_d – настройки регулятора,

а передаточная функция объекта управления имеет вид:

$$W_{ov}(s) = \frac{A(s)}{B(s)}, \quad (0.50)$$

где $A(s) = \sum_{i=0}^m a_i \cdot s^i$, $B(s) = \sum_{j=0}^n b_j \cdot s^j$, $\underline{b}_j \leq b_j \leq \overline{b}_j$.

Тогда интервальный характеристический полином системы может быть записан в виде:

$$(K_i + K_p \cdot s + K_d \cdot s^2) \cdot A(s) + s \cdot B(s) = 0. \quad (0.51)$$

Для достижение апериодичности переходного процесса при всех значениях интервальных коэффициентов объекта управления необходимо найти такие настройки ПИД-регулятора, которые бы обеспечили расположение корневых областей ИХП следующим образом: вещественные корни должны располагаться между α_1 и α_2 , а остальные корни должны располагаться внутри области ABCD, ограниченной вертикальной прямой,

проходящей через α_3 и углом φ , характеризующем максимальную колебательность системы (рисунок 3.6). Таким образом обеспечивается доминантное расположение вещественных корней ИХП, при котором переходный процесс будет аperiodическим при любых значениях интервальных параметров объекта управления в заданных пределах, а значения колебательности не будут превышать максимально заданного значения.

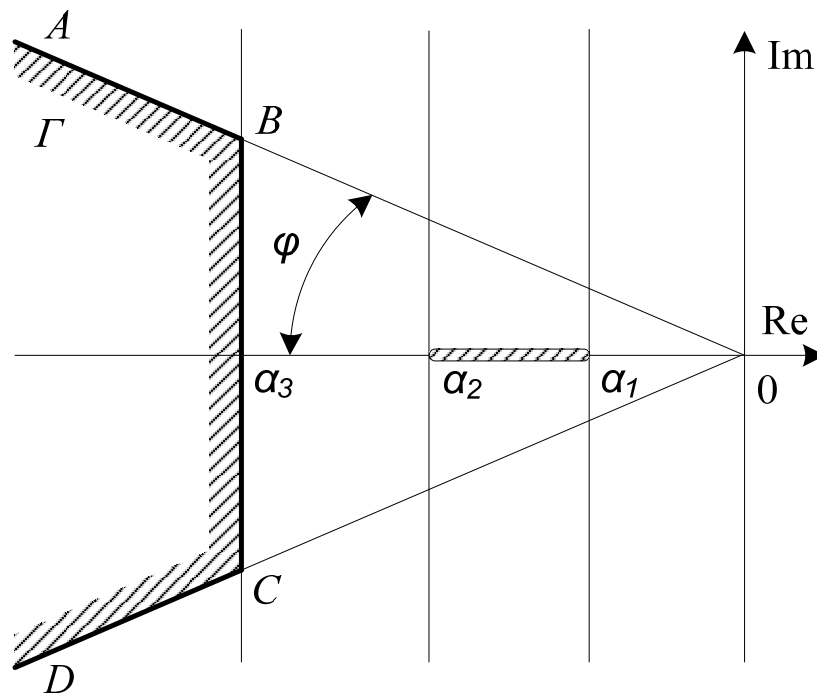


Рисунок 3.6 – Желаемая область расположения корней замкнутой системы с гарантированной аperiodичностью переходного процесса

Приведем интервальный полином (0.51) к виду

$$\sum_{i=0}^k c_i \cdot s^i = 0, \quad (0.52)$$

где коэффициенты c_k могут являться функциями интервальных параметров объекта управления и настроек регулятора. Интервальные коэффициенты c_i образуют параметрический многогранник, вершины которого определяются их крайними значениями.

Для локализации вещественного корня в заданном интервале в дополнение к утверждению 1 доказано следующее утверждение:

Утверждение 2. Если интервальные коэффициенты полинома заданы чередующимися пределами $\underline{c}_0 \overline{c}_1 \underline{c}_2 \overline{c}_3 \dots$, начиная с максимального для c_0 , то данный набор коэффициентов определяет вещественный корень, углы выхода корневых годографов из которого по всем интервальным коэффициентам составляют 0° .

Доказательство.

Из основных фазовых соотношений теории корневого годографа известно, что угол выхода из корня при увеличении c_i можно найти по формуле:

$$\Theta_i^q = 180^\circ - \sum_{g=1}^n \Theta_g + i\Theta_0, \quad (0.53)$$

где Θ_g и Θ_0 – углы между вещественной осью и векторами, направленными из корня соответственно к g -ому полюсу и к i нулям функции.

Пусть полином (3.28) имеет левый вещественный корень s^{**} . Тогда для любой пары комплексно-сопряженных корней и для любого вещественного корня, лежащих правее s^{**} , на основе свойств корневого годографа можно заключить, что $\Theta_{p1} + \Theta_{p2} = 360^\circ$, $\Theta_{p3} = 0^\circ$ (рисунок 3.7).

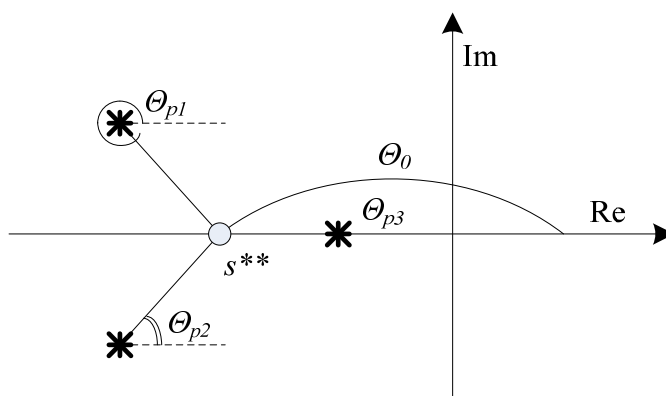


Рисунок 3.7 – Пример расположения корней

Следовательно, угол выхода из корня s^{**} при увеличении c_i можно найти по формуле:

$$\Theta_i^q = 180^\circ + i\Theta_0. \quad (0.54)$$

а при уменьшении

$$\Theta_i^q = i\Theta_0. \quad (0.55)$$

Таким образом, если интервальный полином будет иметь чередующиеся пределы коэффициентов $\underline{c}_0 \overline{c}_1 \underline{c}_2 \overline{c}_3 \dots$, то углы выхода из образа соответствующей этому набору вершины параметрического многогранника P_m будут равны 0° .

На основании данного утверждения можно сделать вывод, что максимальная степень устойчивости интервальной системы может быть задана вертикальной прямой, проходящей через вещественный корень, соответствующий чередующимся пределам коэффициентов интервального полинома.

Согласно утверждениям 1 и 2, введем информацию о корнях с минимальной степенью устойчивости, заданную корнем $s^* = \alpha_1$ и максимальной степенью устойчивости, заданную корнем $s^{**} = \alpha_2$ в полином (0.52).

Пусть минимальная степень устойчивости задается корнем $s^* = \alpha_1$, а максимальная – корнем $s^{**} = \alpha_2$. Введем информацию об этих корнях в полином (0.52), задавая в нем чередующиеся значения c_i и значениями $s^* = \alpha_1$ и $s^{**} = \alpha_2$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} f(K_{II}, K_{II}, K_D, \alpha^*, \underline{c}_0, \underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3, \dots) = 0; \\ f(K_{II}, K_{II}, K_D, \alpha^{**}, \underline{c}_0, \underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3, \dots) = 0. \end{cases} \quad (0.56)$$

Решив систему уравнений (0.56) относительно K_{II} и, приравняв оба решения, получим:

$$f(K_{II}, K_D, \alpha^*, \underline{c}_0, \underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3, \dots) = f(K_{II}, K_D, \alpha^{**}, \underline{c}_0, \underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3, \dots). \quad (0.57)$$

Выразив K_{II} из (0.57), получим

$$K_{II} = f(K_D, \alpha^*, \alpha^{**}, \underline{c}_0, \underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3, \dots, \underline{c}_0, \underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3, \dots). \quad (0.58)$$

Подставив выражение (0.58) в одно из уравнений системы (0.56), получим:

$$K_{II} = f(K_D, \alpha^*, \alpha^{**}, \underline{c_0}, \underline{c_1}, \underline{c_2}, \underline{c_3}, \dots, \overline{c_0}, \overline{c_1}, \overline{c_2}, \overline{c_3}, \dots). \quad (0.59)$$

Для дальнейшего синтеза ПИД-регулятора подставим полученные уравнения (0.58) и (0.59) в (0.52) и получим интервальный характеристический полином с одним варьируемым коэффициентом

$$(K_{II}(K_D, \alpha^*, \alpha^{**}, \tilde{c}_i) + K_{II}(K_D, \alpha^*, \alpha^{**}, \tilde{c}_i) \cdot s + K_D \cdot s^2) \cdot A(s) + s \cdot B(s) = 0. \quad (0.60)$$

На основе (0.60) следует получить уравнение корневого годографа Теодорчика-Эванса и, решив его для каждой из проверочных вершин, полученных по приведенной в [108] методике, определить для каждой из них значения настраиваемого параметра регулятора K_D , при котором происходит пересечение корневого годографа с заданной границей области локализации корней Γ .

Проделав данную процедуру для каждой проверочной вершины, можно получить соответствующие интервалы значений K_D , при которых корни интервального полинома лежат в заданной области Γ . При этом следует учесть, что один вещественный корень обязательно будет находиться в интервале от α_1 до α_2 . Для нахождения интервала значений K_D , удовлетворяющего всем вершинам, следует найти пересечение всех этих интервалов.

Для окончательного определения настроек ПИД-регулятора необходимо выбрать значение K_D из полученного интервала и подставить это значение в выражения (0.58) и (0.59) для дальнейшего нахождения K_{II} и K_{II} .

На основании проведенных исследований разработана методика интервально-параметрического синтеза ПИД-регулятора, включающая следующие этапы:

1. Задание требуемых показателей качества ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \varphi$).

2. Задание в характеристическом полиноме $s^* = \alpha_1$ и пределов интервальных параметров объекта управления, соответствующих вершине с координатами $\overline{c_0} \overline{c_1} \overline{c_2} \overline{c_3} \dots$.
3. Задание в характеристическом полиноме $s^{**} = \alpha_2$ и пределов интервальных параметров объекта управления, соответствующих вершине с координатами $\underline{c_0} \underline{c_1} \underline{c_2} \underline{c_3} \dots$.
4. Получение системы уравнений (0.56) и приведение характеристического полинома с тремя варьируемыми параметрами ПИД-регулятора к полиному с одним варьируемым параметром K_d .
5. Нахождение возможных вершин многогранника P_m , отображающихся на границу области Γ .
6. Определение для каждой найденной граничной вершины на основе выражения (0.39) точек пересечения заданной области Γ с ветвью корневого годографа.
7. Определение методом подстановки значений из найденных интервалов в (0.51) интервалов значений варьируемого параметра K , при которых ветви корневого годографа находятся внутри заданной области Γ .
8. Определение пересечения найденных интервалов K_d , при котором корни полинома располагаются в заданной области Γ для всех граничных вершин.
9. Выбор значения K_d из области пересечения интервалов и определение значения K_{II} и K_{II} на основе выражений (0.58), (0.59).

Для практического применения разработанной методики на основании предложенного алгоритма также было разработано приложение в программном пакете MATLAB.

3.4. Влияние нулей замкнутой интервальной системы на качество переходного процесса

При синтезе системы автоматического управления с гарантированными корневыми показателями качества необходимо учитывать не только полюса замкнутой интервальной системы, но и ее нули. Именно их взаимное расположение в полной мере характеризует качество переходного процесса системы.

Для оценки их влияния был проведен ряд расчетов, суть которых заключалась в следующем: выбирается передаточная функция замкнутой системы управления с варьируемой комплексно-сопряженной парой полюсов, фиксированными нулями и полюсами, расположенными в точках с минимальной степенью устойчивости и максимальной колебательности. Далее строится поверхность, оси абсцисс и ординат которой соответствуют положению варьируемых комплексно-сопряженных пар полюсов, а значению аппликаты соответствует величина перерегулирования переходного процесса.

Например, для передаточной функции замкнутой интервальной

$$\text{системы вида } P(s) = \frac{(s - a_1)(s - a_2)(s - a_3)}{(s - b_1)(s - b_2)(s - b_3)} = 0,$$

где $a_1 = -2$, $a_2 = -5 - 6j$, $a_3 = -5 + 6j$ и минимальной степенью устойчивости, равной $-3,5$ и двух варьируемых полюсах получим поверхность, изображенную на рисунке 3.8:

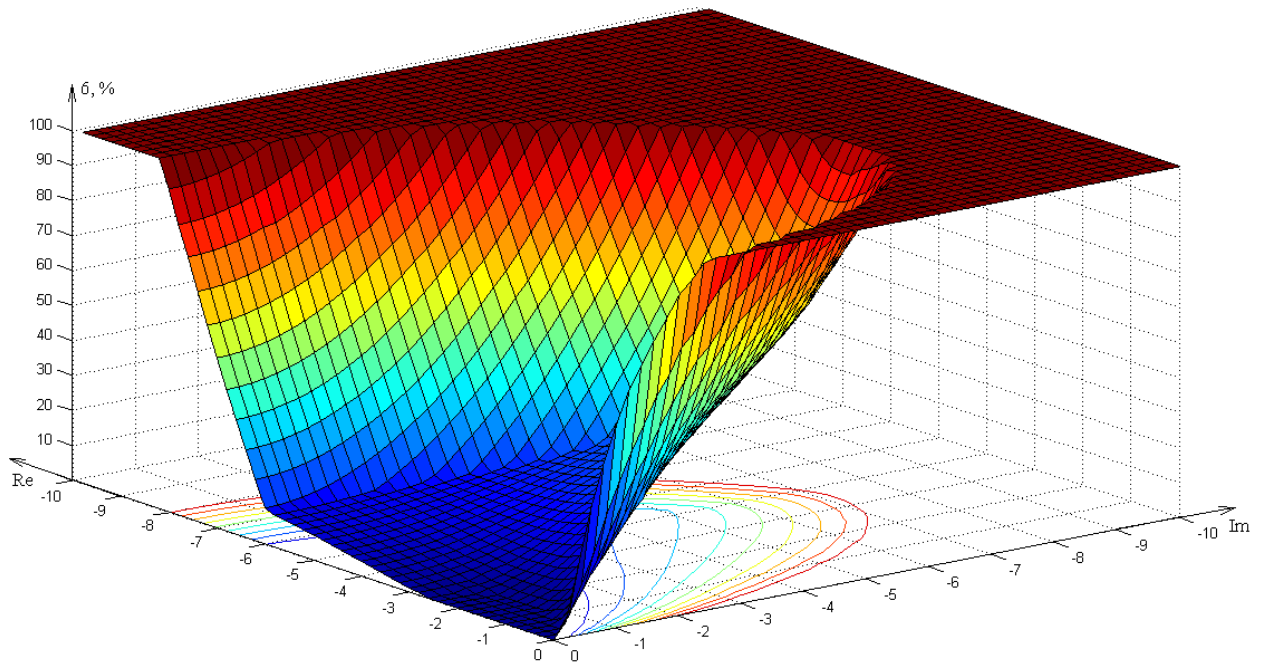


Рисунок 3.8 – График зависимости перерегулирования переходного процесса

Для определения области расположения полюсов интервальной системы с гарантированным перерегулированием переходного процесса системы автоматического управления удобно построить линии уровня перерегулирования (рисунок 3.9), показывающие равные значения перерегулирования при варьировании двух комплексно-сопряженных полюсов.

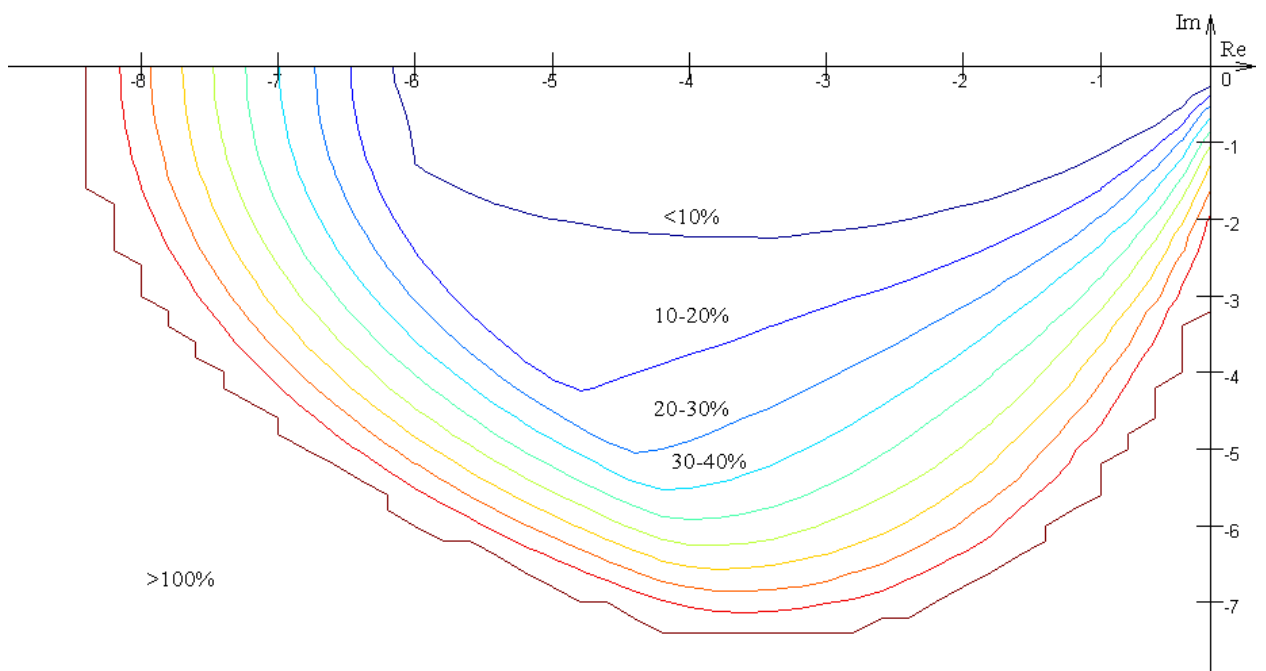


Рисунок 3.9 – Линии уровня гарантированного перерегулирования

На основании проведенных расчетов можно сделать вывод, что наихудшие показатели перерегулирования системы автоматического управления при неизменных значениях полюсов будут при нулях, приближающихся к пересечению вещественной и мнимой осей координат. При удалении от начала координат перерегулирование будет уменьшаться.

Таким образом, для обеспечения заданного качества переходного процесса необходимо учитывать также и расположение нулей при синтезе системы автоматического управления. Для этого предлагается после синтеза системы автоматического управления произвести проверку качества замкнутой системы автоматического управления и, если это необходимо, внести изменения в область G на основании найденных значений настроек регулятора. Для реализации этой процедуры разработана следующая методика:

1. Выбор пары варьируемых комплексно-сопряженных доминирующих полюсов P_1, P_2 .
2. Фиксация оставшихся полюсов в точках с наибольшей колебательностью и минимальной степенью устойчивости.
3. Фиксация нулей в точках, лежащих как можно ближе к началу координат.
4. Построение поверхности, оси абсцисс и ординат которой соответствуют положению варьируемым комплексно-сопряженной парам полюсов, а значению аппликаты соответствует величина перерегулирования переходного процесса.
5. Проверка, что при всех значениях варьируемых полюсов в синтезированных интервалах значение перерегулирования не превышает нормы.
6. При превышении заданного значения перерегулирования следует изменить границы области G и произвести повторный синтез САУ.

Следует отметить, что в разработанном ниже в среде MatLab программном пакете реализована в интерактивном режиме процедура

корректировки области Γ с учетом нулей. При этом проектировщику требуется только выбрать нужную область Γ для заданного перерегулирования на основе автоматически построенной поверхности зависимости перерегулирования от найденных настроек регулятора.

3.5. Примеры синтеза

Пример 1. Синтез P -регулятора с областью Γ , заданной в виде гиперболы, проходящей через точку, характеризующую минимальную степень устойчивости на вещественной оси и с углом, равным максимальной колебательности.

Пусть задан характеристический полином вида:

$$K + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3 = 0,$$

где $a_1 = [120, 130]$, $a_2 = [15; 28]$, $a_3 = [0, 95; 1, 05]$.

Необходимо найти интервал K , при котором области локализации корней заданного полинома находятся в области с $\phi = 120^\circ$ и $\eta = 2$.

Так как степень полинома равно трем, а $\phi = 120^\circ$, то, следуя [105], необходимо рассмотреть только один сектор во втором квадранте.

На основе анализа построенной векторной диаграммы определены возможные граничные вершины P_m : $\overline{a_1 a_2 a_3}$, $\overline{a_1 a_2 a_3}$, $\overline{a_1 a_2 a_3}$, $\underline{a_1 a_2 a_3}$, $\underline{a_1 a_2 a_3}$, $\underline{a_1 a_2 a_3}$. Далее, следуя разработанной в п. 3.1 методике, находим искомый интервал $K = [208, 43; 235, 92]$.

Для проверки полученного результата используем известную реберную теорему и построим области локализации корней интервального полинома при $K = [208, 43; 235, 92]$ (рисунок 3.10). Из рисунка видно, что эти области локализованы в заданной области Γ .

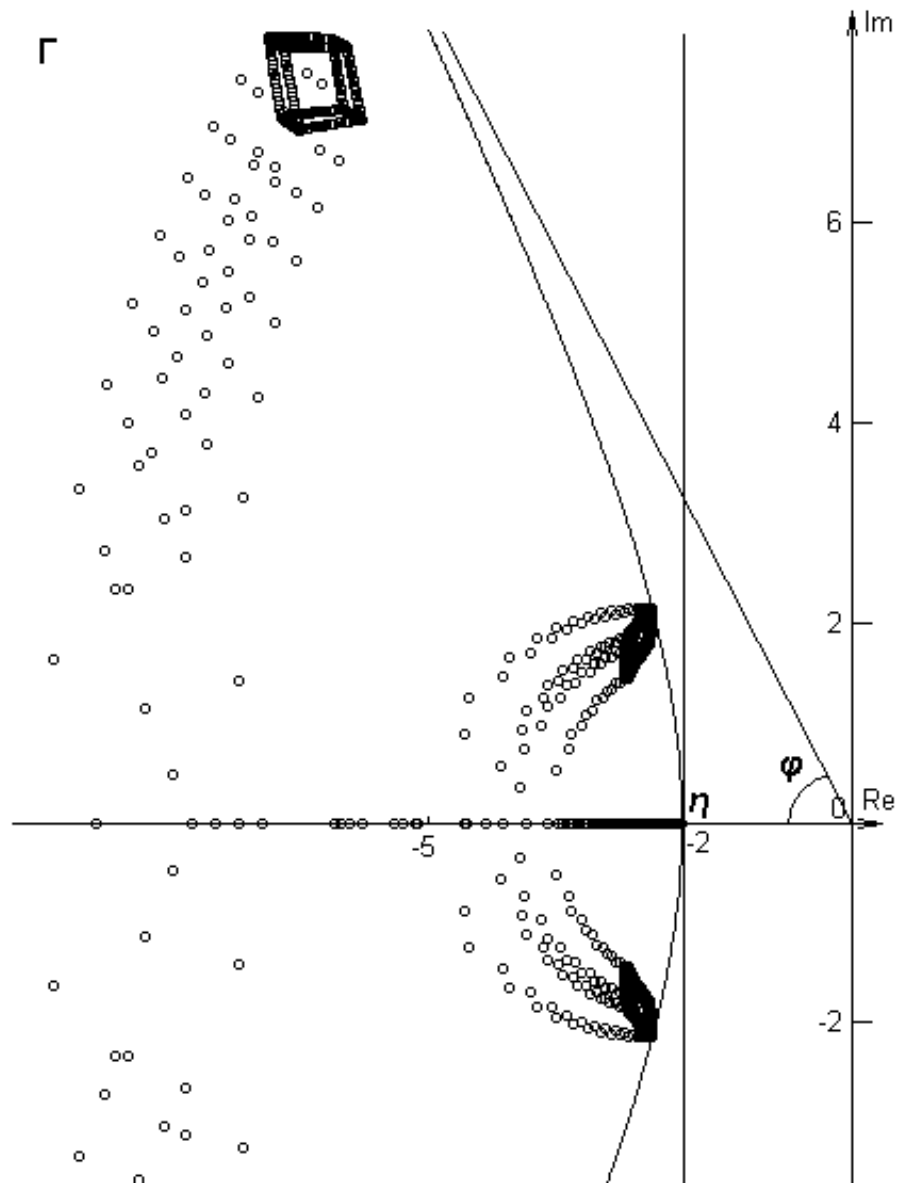


Рисунок 3.10 – Локализация корней интервальной системы с П-регулятором

Пример 2. Синтез ПИ-регулятора с гарантированными минимальной степенью устойчивости и максимальной колебательностью.

Пусть задана передаточная функция разомкнутой системы с единичной обратной связью:

$$W_p = \frac{K_p \cdot (T_p \cdot s + 1)}{s} \cdot \frac{K_0}{a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0},$$

где K_p, T_p – настраиваемые параметры регулятора,

K_0 – постоянный коэффициент передачи объекта управления,

a_2, a_1, a_0 – интервальные параметры объекта управления, $a_0 = [0,07;0,08]$, $a_1 = [0,3;0,4]$, $a_2 = [2;3]$.

Необходимо определить настройки ПИ-регулятора, гарантирующие $\alpha^* = 1$ и $\varphi = 10^\circ$.

Приведем характеристическое уравнение данной системы к виду:

$$c_3 \cdot s^3 + c_2 \cdot s^2 + c_1 \cdot s + c_0 = 0, \quad (0.61)$$

где $c_3 = a_2$, $c_2 = a_1$, $c_1 = a_0 + K_0 \cdot K_p \cdot T_p$, $c_0 = K_0 \cdot K_p$.

Подставив в (0.61) соответствующие вершине $\overline{c_0} \underline{c_1} \underline{c_2} \underline{c_3} \dots$ граничные значения коэффициентов a_i , получим зависимость:

$$T_p = - \frac{\overline{a_2} \cdot s^3 + \underline{a_1} \cdot s^2 + \overline{a_0} \cdot s + K_0 \cdot K_p}{K_0 \cdot K_p \cdot s}, \quad (0.62)$$

На основе (0.62), характеристическое уравнение системы приведем к виду:

$$a_2 s^3 + a_1 s^2 + a_0 s + K_0 K_p \left(- \frac{\overline{a_2} \alpha^{*3} + \underline{a_1} \alpha^{*2} + \overline{a_0} \alpha^* + K_0 K_p}{K_0 K_p \alpha^*} \right) s + K_0 K_p = 0. \quad (0.63)$$

После преобразований (0.63), получим:

$$a_2 \cdot s^3 + a_1 \cdot s^2 + a_0 \cdot s - (\overline{a_2} \cdot \alpha^{*2} + \underline{a_1} \cdot \alpha^{*2} + \overline{a_0}) \cdot s + K_p \cdot \left(K_0 - \frac{K_0}{\alpha^*} \cdot s \right) = 0. \quad (0.64)$$

Составим на основе (0.64) уравнения Теодорчика-Эванса вида (0.39). В соответствии с методикой [112], для шести вершин многогранника интервальных коэффициентов, найден общий интервал K_p , при котором корни полинома располагаются внутри области Γ : $K_p = [2,4733;5,0160]$.

Выберем значение K_p из найденного интервала: $K_p = 5,0160$ и на основании выражения (0.62) получим значение второго искомого параметра $T_p = 0,4458$.

Области локализации корней интервального характеристического полинома с найденными настройками ПИ-регулятора представлен на рисунке 3.11.

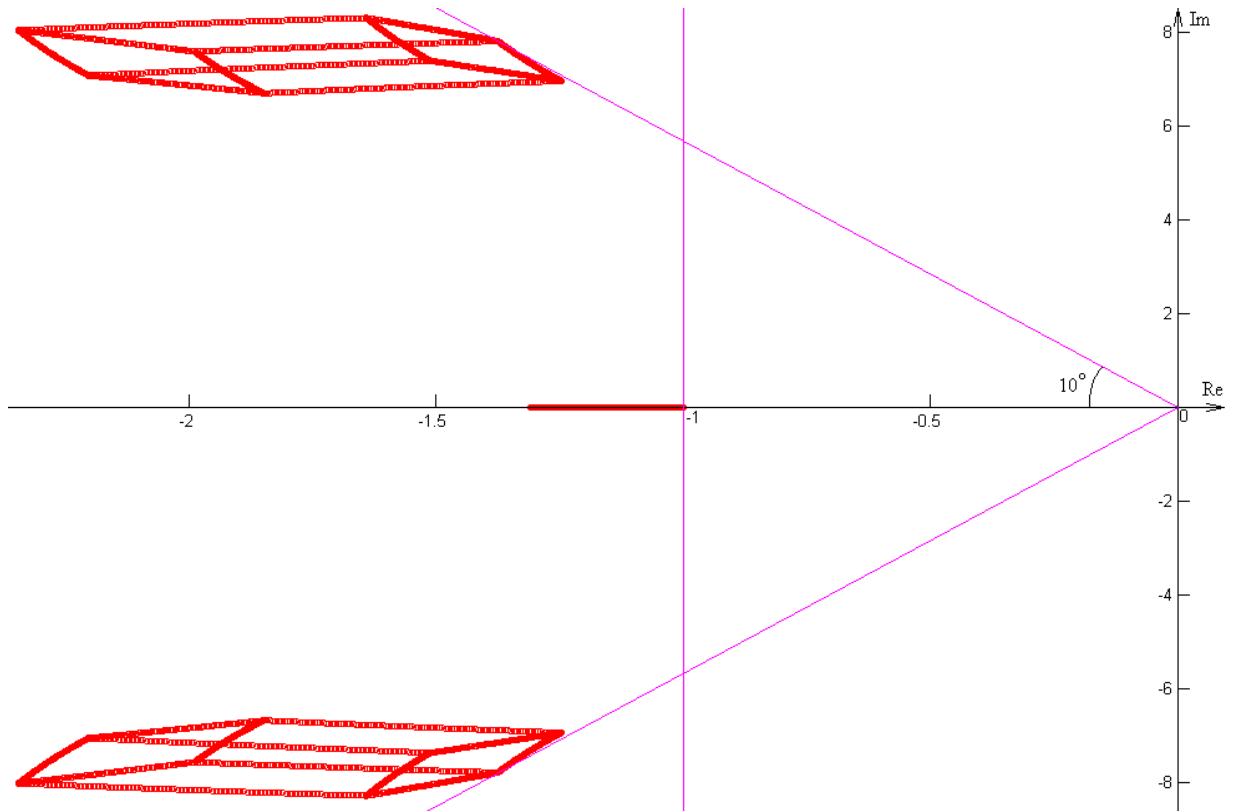


Рисунок 3.11 – Локализация корней интервальной системы с ПИ-регулятором

Пример 3. Синтез ПИД-регулятора с гарантированным аperiodическим видом переходного процесса.

Пусть задана передаточная функция разомкнутой системы с единичной обратной связью:

$$W_p = \frac{K_p \cdot s + T_i + T_d \cdot s^2}{s} \cdot \frac{K_0}{a_3 \cdot s^3 + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0},$$

где K_p, T_d, T_i – настраиваемые параметры ПИД регулятора,

$K_0 = 1$ – постоянный коэффициент передачи объекта управления,

a_3, a_2, a_1, a_0 – интервальные параметры объекта управления,

$$a_3 = [0,00002; 0,00013], \quad a_2 = [0,03; 0,034], \quad a_1 = [0,1; 0,2], \quad a_0 = [1; 4].$$

Необходимо определить настройки ПИД-регулятора, гарантирующие аperiodический переходный процесс с доминирующим вещественным корнем, находящимся в интервале от $\alpha_1 = -4$ до $\alpha_2 = -6$ и остальными

корнями, лежащими в области, ограниченной минимальной степенью устойчивости $\alpha_3 = -14$ и максимальной колебательностью $\varphi = 30^\circ$.

Приведем характеристическое уравнение данной системы к виду:

$$c_4 \cdot s^4 + c_3 \cdot s^3 + c_2 \cdot s^2 + c_1 \cdot s + c_0 = 0, \quad (0.65)$$

где $c_4 = a_3$, $c_3 = a_2$, $c_2 = a_1 + T_d$, $c_1 = a_0 + K_p$, $c_0 = T_i$.

Подставив в (0.65) соответствующие вершине $\overline{c_0} \overline{c_1} \overline{c_2} \overline{c_3} \dots$ граничные значения коэффициентов a_i и, $s = \alpha_1 = -4$, получим зависимость:

$$T_i = 16,5709 + 4 \cdot K_p - 16 \cdot T_d. \quad (0.66)$$

Подставив в (0.66) соответствующие вершине $\overline{c_0} \overline{c_1} \overline{c_2} \overline{c_3} \dots$ граничные значения коэффициентов a_i и, $s = \alpha_2 = -6$, получим зависимость:

$$T_i = 5,1115 + 6 \cdot K_p - 36 \cdot T_d. \quad (0.67)$$

Приравняв уравнения (0.66) и (0.67), выразим K_p от T_d :

$$K_p = 5,7297 + 10 \cdot T_d. \quad (0.68)$$

Подставив (0.68) в (0.66) и, выразив T_i от T_d , получим:

$$T_i = 39,4896 + 24 \cdot T_d. \quad (0.69)$$

Подставив полученные выражения (0.68) и (0.69) в (0.66), получим интервальный характеристический полином, который зависит только от T_d , а доминирующий вещественный корень уже будет мигрировать в заданном отрезке от -4 до -6 :

$$24 \cdot T_d + 39,4896 + (10 \cdot T_d + 5,7297 + a_0) \cdot s + (T_d + a_1) \cdot s^2 + a_2 \cdot s^3 + a_3 \cdot s^4 + a_4 \cdot s^5 = 0. \quad (0.70)$$

Составим на основе (0.70) уравнения Теодорчика-Эванса вида (0.39). В соответствии с разработанной методикой, для одиннадцати вершин многогранника интервальных коэффициентов, найден общий интервал T_d , при котором корни полинома располагаются внутри области Γ : $T_d = [1,0229; 1,1606]$.

Для окончательного определения настроек ПИД-регулятора и построения корневого годографа выберем граничные (1,0229; 1,1606) и одно среднее (1,0918) значения из найденного интервала T_d . Далее на основании выражений (0.58) и (0.59) получим значения K_p и T_i . Результаты расчетов приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Расчет коэффициентов ПИД-регулятора

№ п/п	T_d	K_p	T_i
1	1,0229	15,9586	64,0391
2	1,0918	16,6474	65,6921
3	1,1606	17,3362	67,3452

Области локализации корней интервального характеристического полинома с найденными настройками ПИД-регулятора представлены на рисунках 3.12, 3.13 и 3.14, соответственно.

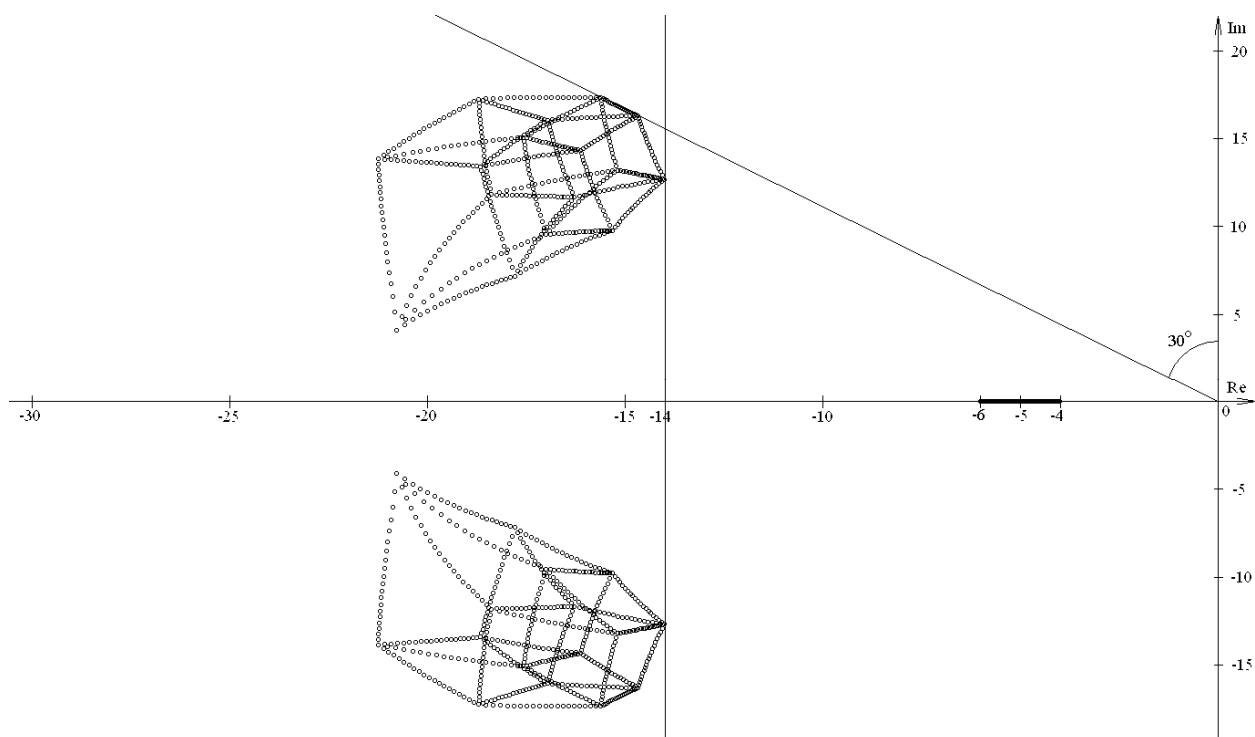


Рисунок 3.12 – Локализация корней интервальной системы с ПИД-регулятором

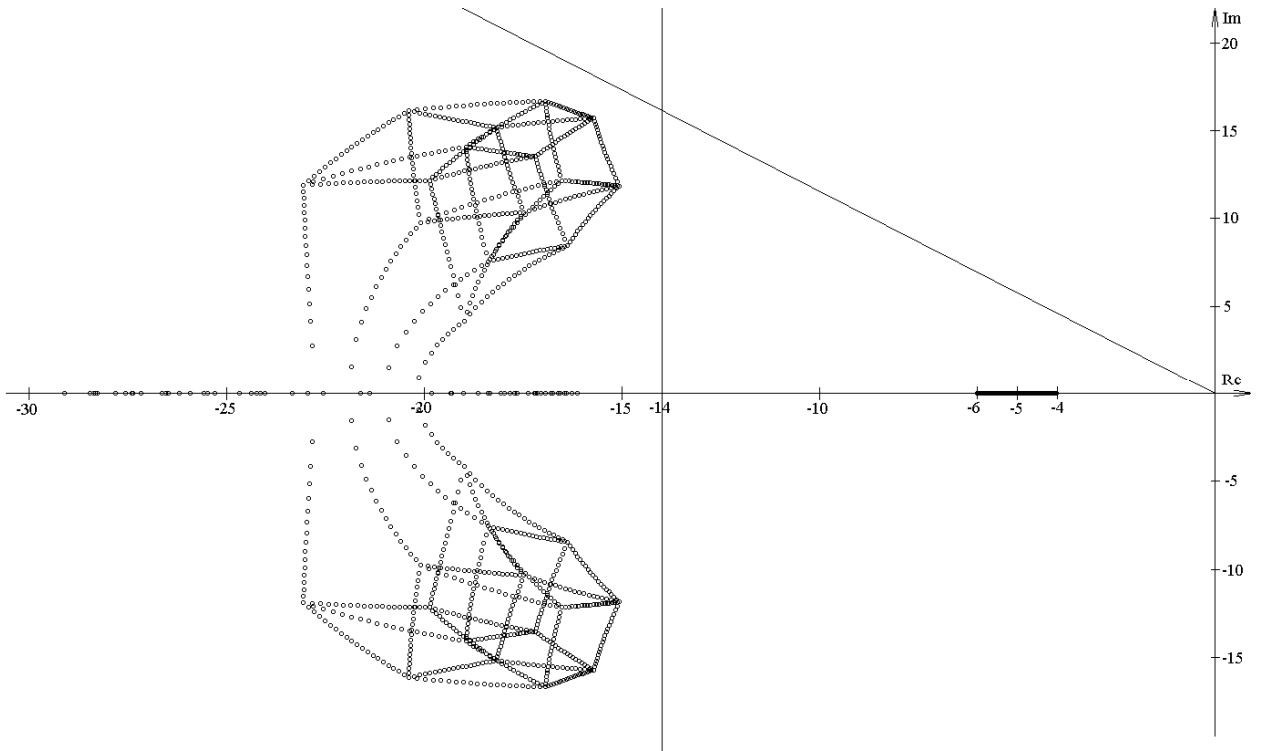


Рисунок 3.13 – Локализация корней интервальной системы с ПИД-регулятором

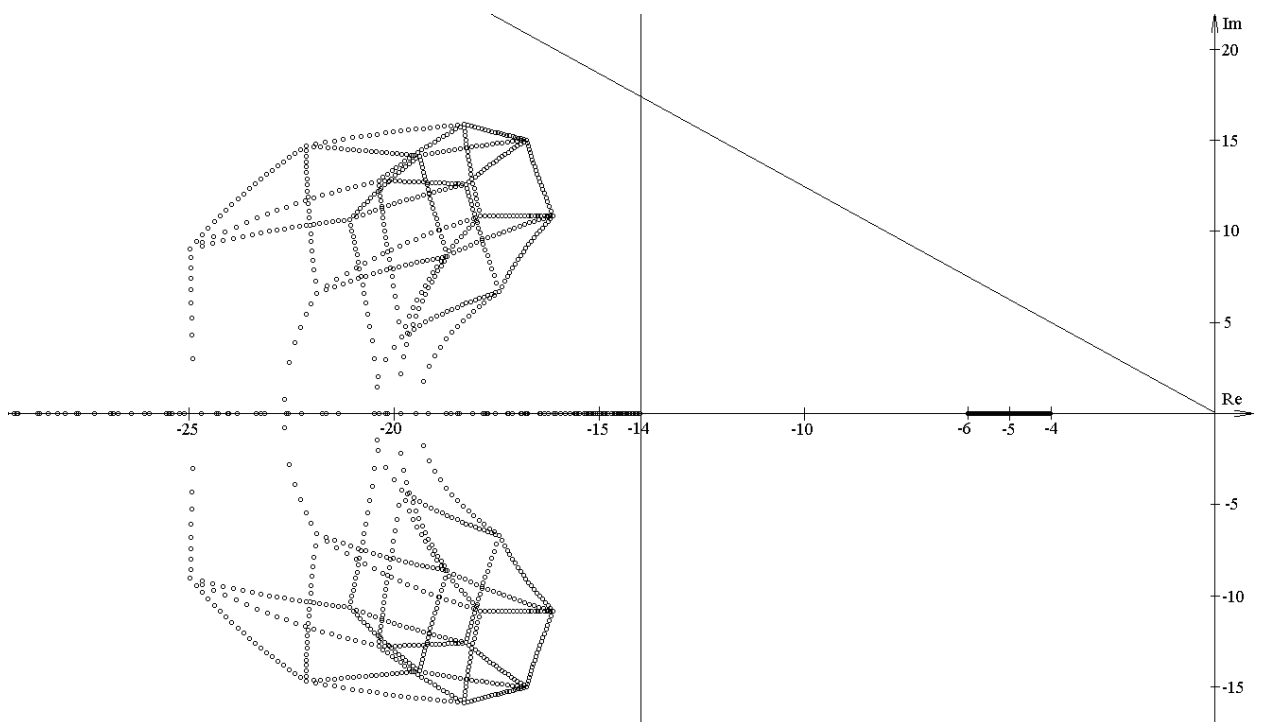


Рисунок 3.14 – Локализация корней интервальной системы с ПИД-регулятором

Построим на одной плоскости координат (рисунок 3.15) графики переходных процессов замкнутой системы при единичном входном воздействии в каждой из граничных вершин для $T_d = 1,0229$, $K_p = 15,9586$, $T_i = 64,0391$.

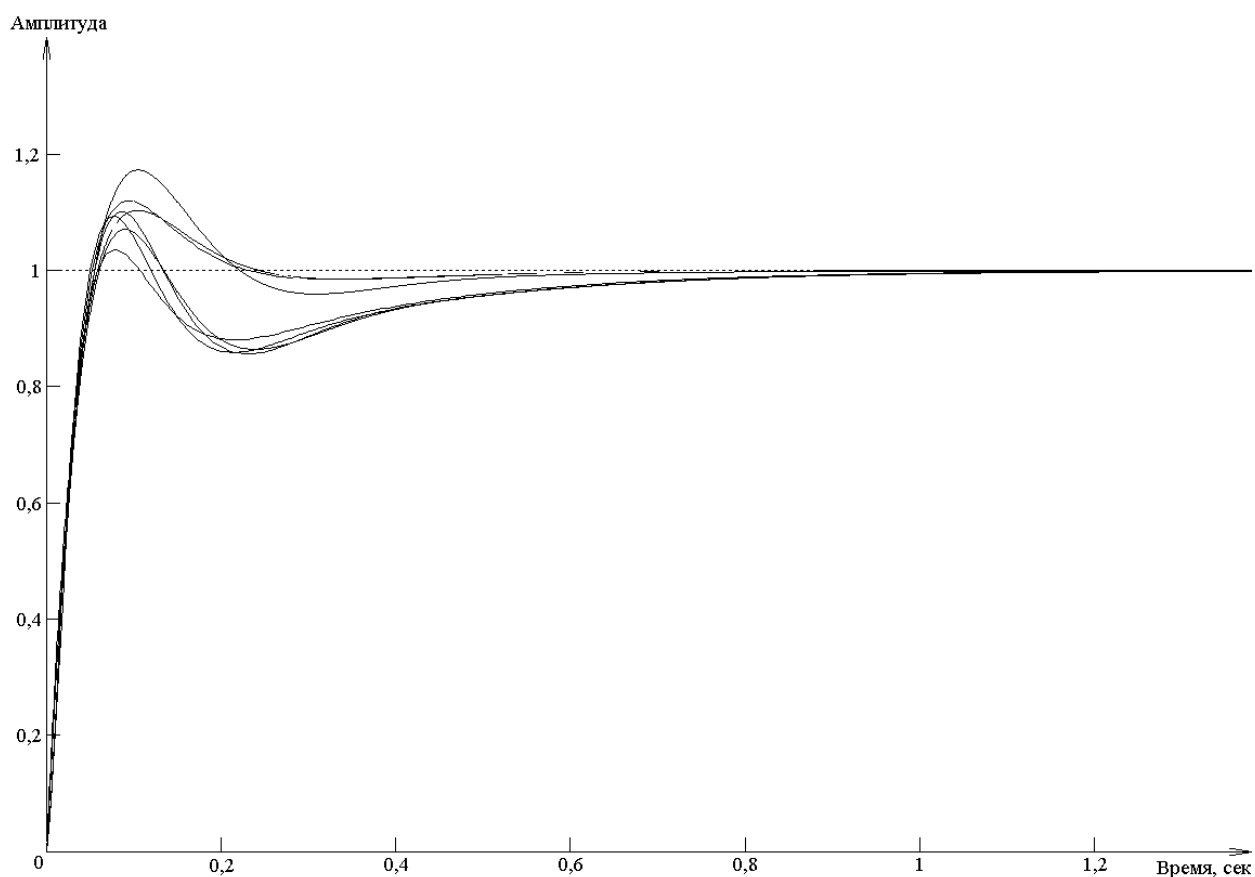


Рисунок 3.15 – Переходные процессы в граничных вершинах

На основании проведенного синтеза можно утверждать, что переходный процесс синтезированной системы автоматического управления сохраняет аperiodический вид, а полюса интервальной системы остаются расположенными в желаемой области при любых значениях интервальных параметров.

ГЛАВА 4. Программная реализация алгоритмов анализа и синтеза интервальных систем

4.1. Описание программной среды MATLAB

Научным сотрудникам, инженерам, исследователям, аспирантам и студентам при проектировании систем автоматического управления часто приходится выполнять численные эксперименты, производить обработку результатов экспериментальных исследований, просчитывать характеристики инженерных решений, выполнять расчеты. При этом существуют специализированные пакеты, позволяющие выполнять численное моделирование процессов и устройств. На практике в тоже время встречаются задачи, не укладывающиеся в традиционные рамки, либо не требующие привлечения сложных универсальных моделей, либо наоборот связанные с разработкой новых более эффективных моделей. В этом случае более эффективным оказывается использование общих математических пакетов позволяющих численно либо аналитически решать традиционные математические задачи. Тогда, владея предметной областью и имея достаточную математическую подготовку, можно интерпретировать и решать прикладные задачи на языке численных математических методов.

Наибольшее распространение в настоящее время получили такие общематематические пакеты как MathCad и MatLab, позволяющие выполнять как численные, так и аналитические операции. Пакет MathCad не требует написания, как такового традиционного текста программы, все вычисления производятся по мере написания выражений и формул в окне редактирования и сохраняются в файлах в специальном формате, что не позволяет просмотреть их обычными текстовыми редакторами. Выбор метода решения также в некоторой степени ограничен, так как производится большей частью автоматически. Для работы с пакетом MathCad от пользователя требуются минимальные знания, как программирования, так и численных методов.

Пакет MatLab напротив имеет простой, но достаточно гибкий входной язык программирования, позволяющий писать программы в традиционном виде, которые хранятся в обычных текстовых файлах. Обширные библиотеки стандартных подпрограмм – функций, по существу превращают программу в краткую запись структуры алгоритма. Для эффективной работы с пакетом MatLab, уместны знания как технологии программирования, так и численных методов, так как пользователь может активно влиять на выбор метода решения.

В связи со сказанным пакет MatLab имеет более широкое применение и пригоден, как для освоения технологии программирования и изучения численных методов, так и для реализации прикладных задач самого широкого плана. Широкий набор универсальных и весьма эффективных базовых функций, а также наличие специализированных библиотек пакета MatLab ставит его в разряд наиболее перспективных для исследовательских целей.

Система MatLab (Matrix Laboratory) является интерактивной системой для выполнения инженерных и научных расчетов, ориентированной на работу с массивами данных. Система MatLab разработана фирмой MathWork Inc. (США, г. Нейтик, штат Массачусетс).

Система содержит встроенную матричную и комплексную арифметику, поддерживает выполнение операций с векторами, матрицами и массивами данных, работу с алгебраическими полиномами, решение нелинейных уравнений и задач оптимизации, интегрирование в квадратурах, решение дифференциальных и разностных уравнений, построение различных видов графиков, трехмерных поверхностей и линий уровней.

Систему отличает простой язык программирования и удобная операционная среда из широкого набора стандартных математических функций, позволяющая формулировать проблемы и получать решения, в удобной форме не прибегая к детализации. Простота входного языка и его полнота с точки зрения структурного программирования позволяет

реализовать любой алгоритм доступный языкам высокого уровня. Кроме того, допускается подключение процедур и функций написанных на языках Си и Фортран.

Язык Matlab обеспечивает возможность работы с файлами с помощью Си подобных функций. Кроме того, в системе реализованы стандартные диалоговые панели для чтения и записи файлов.

MatLab является открытой системой – практически все процедуры и функции доступны не только для использования, но и для коррекции и модификации. Система устроена так что, программируя, пользователь расширяет ее возможности новыми программами, процедурами и функциями доступными наравне со стандартными функциями.

Современные версии системы включают широкий набор специализированных пакетов – цифровой обработки сигналов, анализа и синтеза линейных систем автоматического управления, интерактивного моделирования динамических систем, ядро символьной математики из известного пакета Maple V и другие.

Для анализа и синтеза систем управления с интервальными параметрами в Matlab существует пакет прикладных программ Robust Control Toolbox, который построен на формализованных методах теории оптимизации в пространствах H_2 и H_∞ [60].

Учитывая, что корневой метод, как было указано ранее, эффективен для анализа и синтеза интервальных систем, представляет интерес разработка на его основе в среде MATLAB специализированного пакета прикладных программ, способного решать поставленные выше задачи. Назовем данный пакет Robust Analysis and Syntheses of the Interval Systems (RASIS).

4.2. Математическое представление границ интервальных коэффициентов в ППП RASIS

Рассмотрим интервальный полином вида:

$$P(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0, \underline{a}_i \leq a_i \leq \overline{a}_i, i = \overline{0, n}, \quad (0.71)$$

где n – максимальная степень интервального характеристического полинома.

Зададим границы изменения интервальных коэффициентов в MATLAB:

$$\begin{aligned} a_{\min} &= [a_{\min n}, a_{\min(n-1)}, \dots, a_{\min 0}], \\ a_{\max} &= [a_{\max n}, a_{\max(n-1)}, \dots, a_{\max 0}]. \end{aligned} \quad (0.72)$$

Границы вершины будем обозначать матрицей-столбцом (обозначим её m), в котором i -ый элемент может быть равен нулю или единице (минимальному или максимальному значению, соответственно). Для нахождения граничной вершины воспользуемся последовательным полным перебором вершин (перебор заканчивается, если текущая вершина является граничной). Всего вершин будет n^2 . Пронумеруем их таким образом, что нулевой вершине соответствует вершина с границами: $[a_{\min n}, a_{\min(n-1)}, \dots, a_{\min 1}, a_{\min 0}]$, первой вершине соответствует вершина с границами: $[a_{\min n}, a_{\min(n-1)}, \dots, a_{\min 1}, a_{\max 0}]$, второй – $[a_{\min n}, a_{\min(n-1)}, \dots, a_{\max 1}, a_{\min 0}]$, третьей – $[a_{\min n}, a_{\min(n-1)}, \dots, a_{\max 1}, a_{\max 0}]$. Таким образом, границы вершины соответствует двоичному представлению номера вершины (таблица 4.1).

Таблица 4.1 – Соответствие номера вершины её границам.

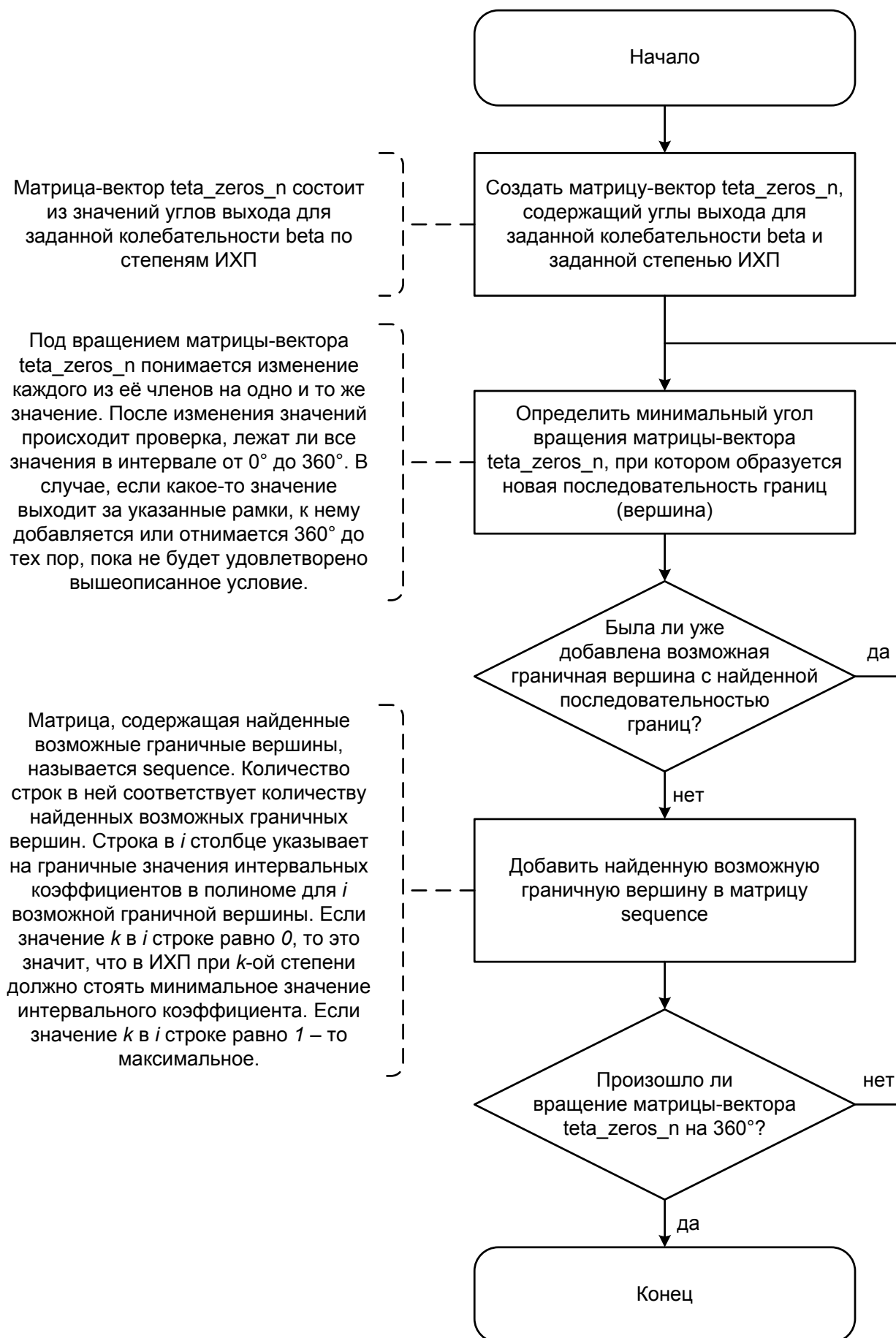
№ вершины	Границы вершины	Принятое условное обозначение границ вершины
0	$[a_{\min n}, a_{\min(n-1)}, \dots, a_{\min 1}, a_{\min 0}]$	$[0, 0, \dots, 0, 0]$
1	$[a_{\min n}, a_{\min(n-1)}, \dots, a_{\min 1}, a_{\max 0}]$	$[0, 0, \dots, 0, 1]$
2	$[a_{\min n}, a_{\min(n-1)}, \dots, a_{\max 1}, a_{\min 0}]$	$[0, 0, \dots, 1, 0]$
3	$[a_{\min n}, a_{\min(n-1)}, \dots, a_{\max 1}, a_{\max 0}]$	$[0, 0, \dots, 1, 1]$
...
n^2	$[a_{\max n}, a_{\max(n-1)}, \dots, a_{\max 1}, a_{\max 0}]$	$[1, 1, \dots, 1, 1]$

4.3. Общие модули ППП RASIS

Функция *defineAllApexes* (*power*) возвращает матрицу-строку, состоящую из всех вершин для полинома с заданной в *power* степенью интервального характеристического полинома (ИХП).

Количество строк в результирующей матрице равно количеству вершин в ИХП. В столбцах записана 1, если этому интервальному коэффициенту соответствует максимальное значение, или 0, если минимальное.

Функция *defineSectorApexes* (*power*, *beta*) возвращает матрицу-строку, состоящую из возможных граничных вершин для полинома с заданной в *power* степенью интервального характеристического полинома (ИХП) для колебательности *beta*. Алгоритмическая схема описанной функции приведена на рисунке 4.1.

Рисунок 4.1 – Алгоритмическая схема функции *defineSectorApexes*

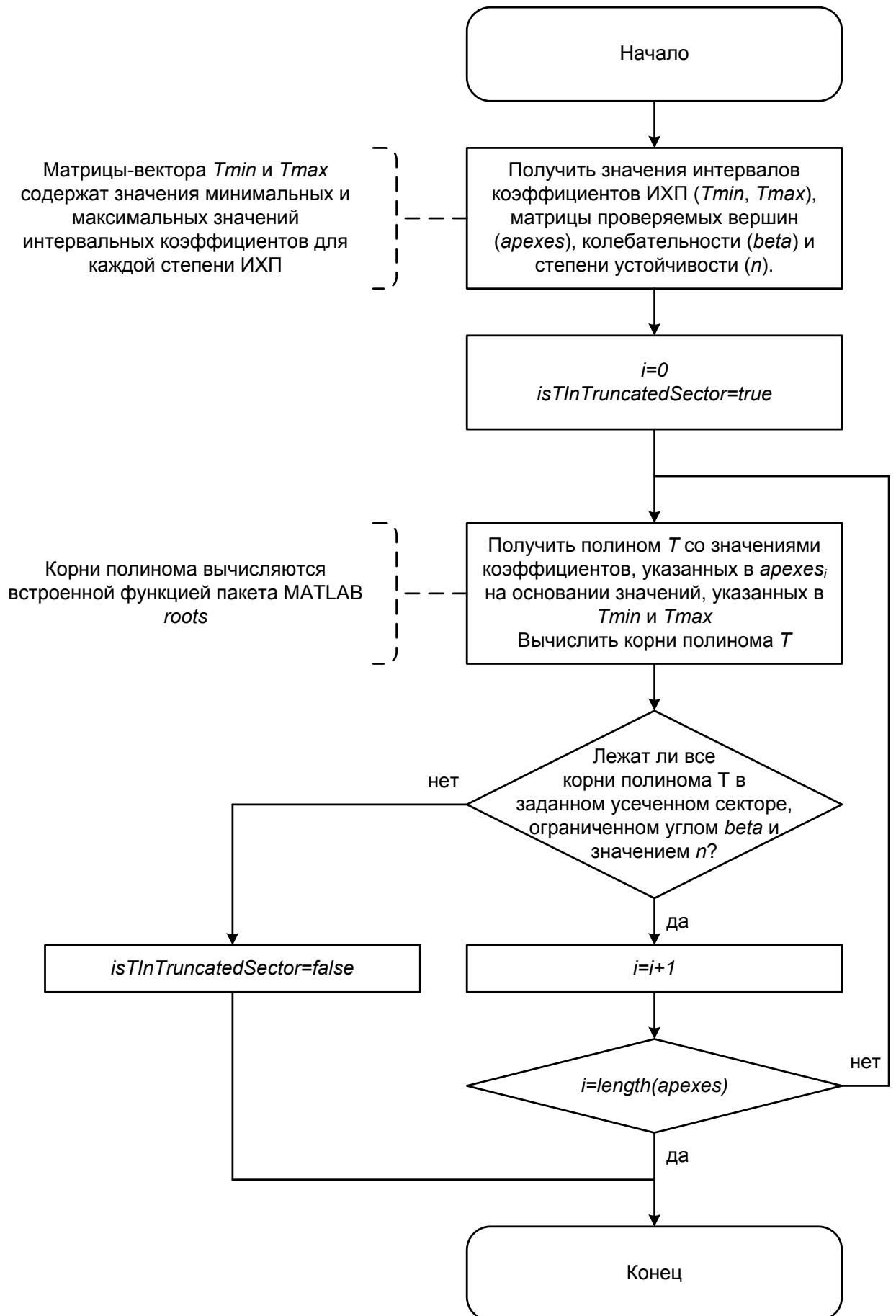
Количество строк в результирующей матрице равно количеству возможных граничных вершин в ИХП.

Функция *defineInterlacedApexes* (*power*, *firstElement*) возвращает матрицу-строку чередующихся нулей и единиц, начиная с *FirstElement*. Длина матрицы-строки равна *power*.

Функция *defineTruncatedSectorApexes* (*power*, *beta*, *alpha*) возвращает матрицу, состоящую из возможных граничных вершин для полинома с заданными в *power* степенью ИХП, колебательностью *beta* и степенью устойчивости *alpha*.

Функция *isTInTruncatedSector* (*Tmin*, *Tmax*, *apexes*, *beta*, *alpha*) проверяет, все ли вершины, указанные в *apexes*, лежат в усеченном секторе, ограниченном колебательностью *beta* и степенью устойчивости *alpha*. В результате возвращается 1, если все вершины лежат в заданной области и 0 в противном случае. *Tmin* и *Tmax* – матрицы-вектора, в которых указываются минимальные и максимальные значения интервальных коэффициентов, начиная с максимальной степени ИХП.

Блок-схема функции *isTInTruncatedSector* представлена на рисунке 4.2.

Рисунок 4.2 – Блок-схема функции $isTInTruncatedSector$

4.4. Модули ППП RASIS для анализа и синтеза регуляторов интервальных систем

Функция *defineMaxAlphaMinBeta* ($Tmin$, $Tmax$, $apexes$) возвращает максимальную колебательность и минимальную степень устойчивости ИХП со значениями интервальных коэффициентов, указанных в $Tmin$ и $Tmax$. Максимальная колебательность и минимальная степень устойчивости определяются по вершинам, указанным в $apexes$.

При построении переходных процессов системы используется встроенная в MATLAB функция *step*. Параметрами выбираются вершины ИХП с максимальной колебательностью и минимальной степенью устойчивости.

Функция *edgeTheoremBuild* ($Tmin$, $Tmax$, k , r) строит на k -ом графике все ребра многогранника P_m с r точками на каждом ребре.

Функция *findCrossWithBAndN* ($beta$, $alpha$, T , $TVar$) находит точки пересечения ветви корневого годографа, изменяющегося по варьируемой составляющей ИХП $TVar$, с границами, заданными степенью устойчивости $alpha$ и колебательностью $beta$. Неизменная часть ИХП задается в параметре T . Для реализации данной функции применяется уравнение Теодорчика-Эванса.

Функция *synthesBN* ($Tmin$, $Tmax$, $TVar$, $beta$, $alpha$) находит минимальное и максимальное значения коэффициента T_k , при котором корневой годограф ИХП входит в заданную область, ограниченную максимальной колебательностью $beta$ и степенью устойчивости $alpha$. При невозможности решения функция возвращает значение -1 .

4.5. Примеры использования ППП RASIS

Пример 1.

Пусть полином с интервальной неопределенностью имеет вид $D(s) = a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$, где $a_3 \in [0,07;0,09]$, $a_2 \in [0,45;0,49]$, $a_1 \in [1,1;1,5]$, $a_0 \in [0,1;0,7]$. Необходимо определить, является ли система робастно устойчивой.

В результате выполнения соответствующего пункта ППП RASIS по вышеописанному алгоритму определения робастной устойчивости характеристического полинома с интервальной неопределенностью по вершинам было определено, что система является робастно устойчивой.

Пример 2.

Пусть полином с интервальной неопределенностью имеет вид $D(s) = a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$, где $a_3 \in [1;1]$, $a_2 \in [6;8]$, $a_1 \in [14;18]$, $a_0 \in [9,5;10,5]$.

Необходимо определить минимальный реберный маршрут, отобразить его на корневую плоскость и вычислить корневые оценки качества (максимальную колебательность и минимальную степень устойчивости).

Выберем соответствующие действия в ППП RASIS и введем начальные данные. В результате выполнения программы получим отображение на комплексной плоскости, представленное на рисунке 4.3 (для проверки правильности нахождения минимального реберного маршрута на этом же рисунке показано отображение внутренние точки гиперпараллелепипеда методом полного его сканирования).

После выполнения программы ППП RASIS вычислила минимальное значение степени устойчивости, равное $-0,65527$ и максимальное значение колебательности, равное $44,4345$ градусам.

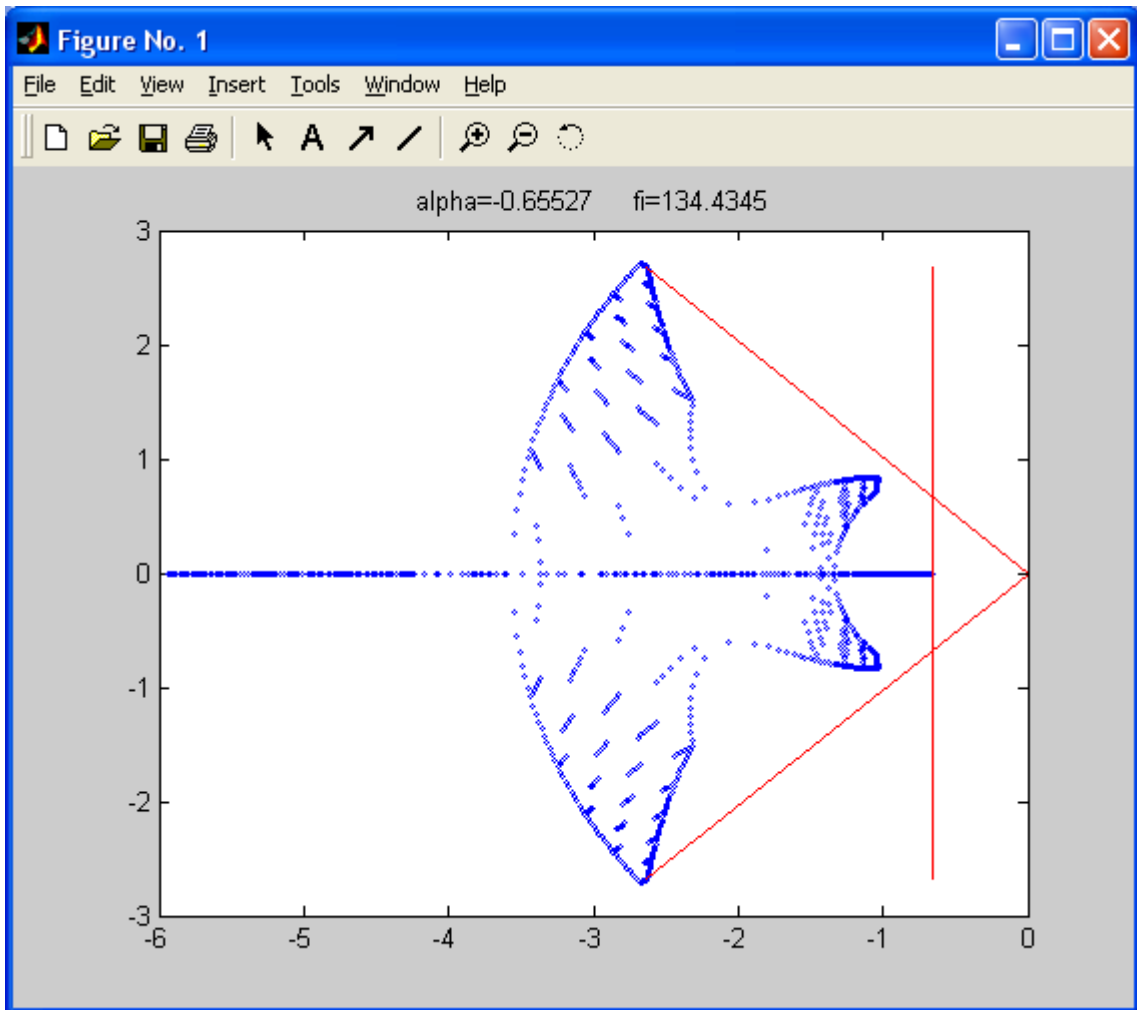


Рисунок 4.3 – Отображение характеристического полинома с интервальной неопределенностью для примера 4.1

Пусть полином с интервальной неопределенностью имеет вид $D(s) = a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$, где $a_3 \in [0,07;0,1]$, $a_2 \in [0,3;0,45]$, $a_1 \in [1,1;1,5]$, $a_0 \in [1;2]$. Необходимо определить минимальный реберный маршрут, построить корневой годограф согласно найденному маршруту и вычислить корневые оценки качества (максимальную колебательность и минимальную степень устойчивости).

Выберем соответствующие действия в ППП RASIS и введем начальные данные. В результате выполнения программы получим отображение на комплексной плоскости, представленное на рисунке 4.4 (для проверки правильности нахождения минимального реберного маршрута на этом же

рисунке показано отображение внутренние точки гиперпараллелепипеда методом полного его сканирования):

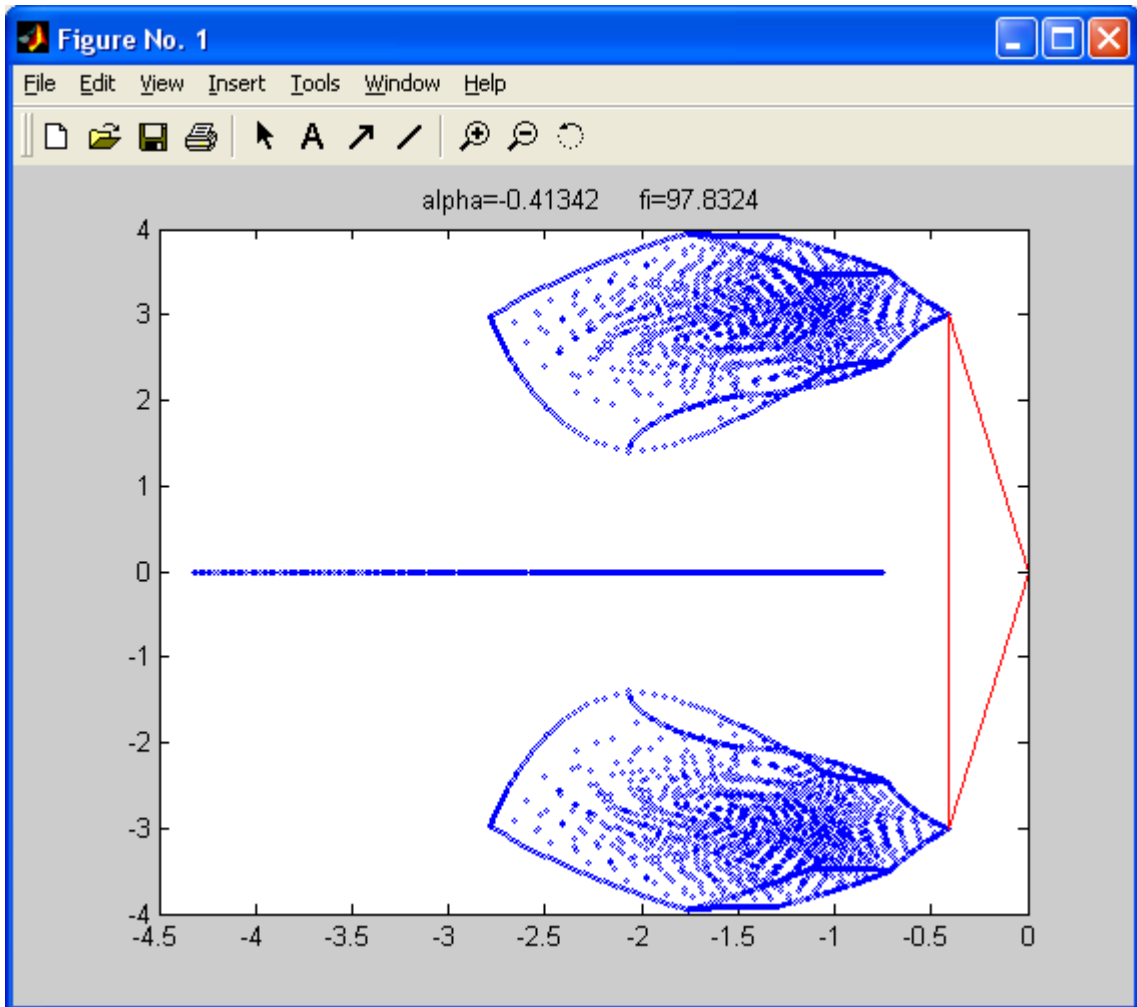


Рисунок 4.4 – Отображение характеристического полинома с интервальной неопределенностью

После выполнения программы ППП RASIS вычислила минимальное значение степени устойчивости, равное $-0,41342$ и максимальное значение колебательности, равное $7,8324$ градусам.

Граничный реберный маршрут состоит из 12 ребер, т.к. существует особый луч и необходимо проверять ребра двух граней. Из построенного рисунка видно, что существует особый корневой узел, после которого последовательность выхода из узлов меняется.

Пример 3.

Задан ИХП вида $a_2s^2 + a_1s + a_0 + K_T = 0$,

где $a_2 = [0,1;0,15]$, $a_1 = [1;1,5]$, $a_0 = [0,1;0,2]$, K_T – варьируемый коэффициент.

Необходимо определить интервал K_T , при котором все корни ИХП находятся в усеченном секторе, ограниченном углом $\varphi = \pm 45^\circ$ и минимальной степенью устойчивости $\alpha = 2$.

Запустив ППП RASIS, выберем пункт «Определение максимальных интервалов варьируемого коэффициента, обеспечивающих секторную устойчивость ИХП», введем необходимые входные данные. После проведения вычислений, ППП выдаст следующее решение: $K_T = [2,5;3,1]$.

Проверим правильность полученного решения, построив многопараметрический интервальный корневой годограф. После выбора соответствующего пункта в ППП RASIS, получим результат, представленный на рисунке 4.5.

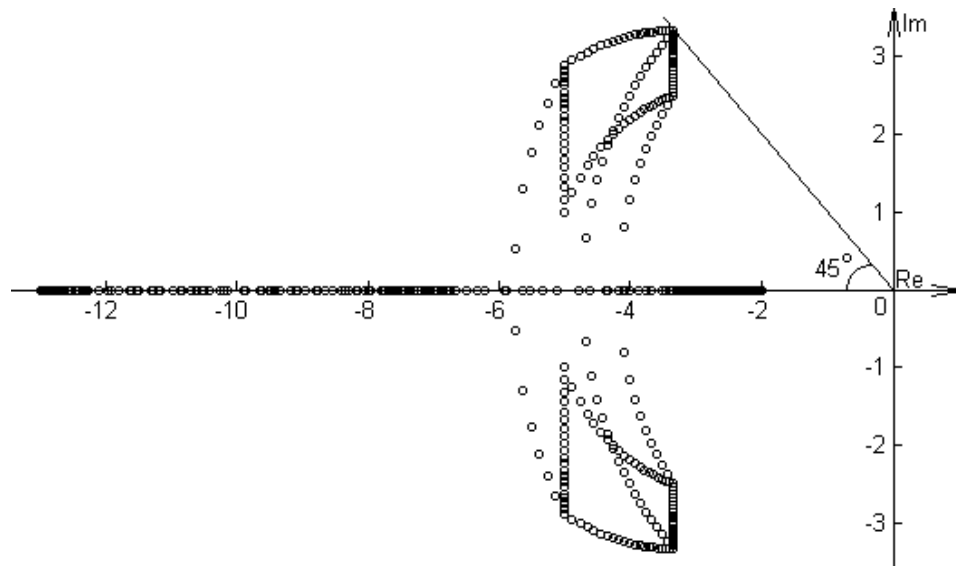


Рисунок 4.5 – Многопараметрический интервальный корневой годограф

После построения годографа ППП выдает следующие численные значения: минимальная степень устойчивости: $-2,50$ в вершине: $[0,2;1;10]$, максимальная колебательность: $0,17$ радиан ($10,00$ градусов) в вершине: $[0,1;1;41,4543]$.

Из рисунка 4.5 видно, что все корни ИХП располагаются в желаемой области при любых значениях интервальных коэффициентов.

ГЛАВА 5. Исследование котельного агрегата ДКВР-10 с использованием ППП RASIS

5.1. Описание котельного агрегата ДКВР-10

Паровой котел – устройство, обогреваемое продуктами сжигаемого в топке топлива и предназначенное для получения пара с давлением выше атмосферного, используемого вне самого устройства [80].

Газомазутный (ГМ) котельный агрегат ДКВР-10-13 ГМ (рисунок 5.1) предназначен для выработки сухого насыщенного или слабо перегретого пара на технологические нужды промышленных предприятий, систем отопления, вентиляции и горячего водоснабжения. Расход перегретого пара составляет до 10 т/ч при давлении до 2,3 МПа и температура 220°C.

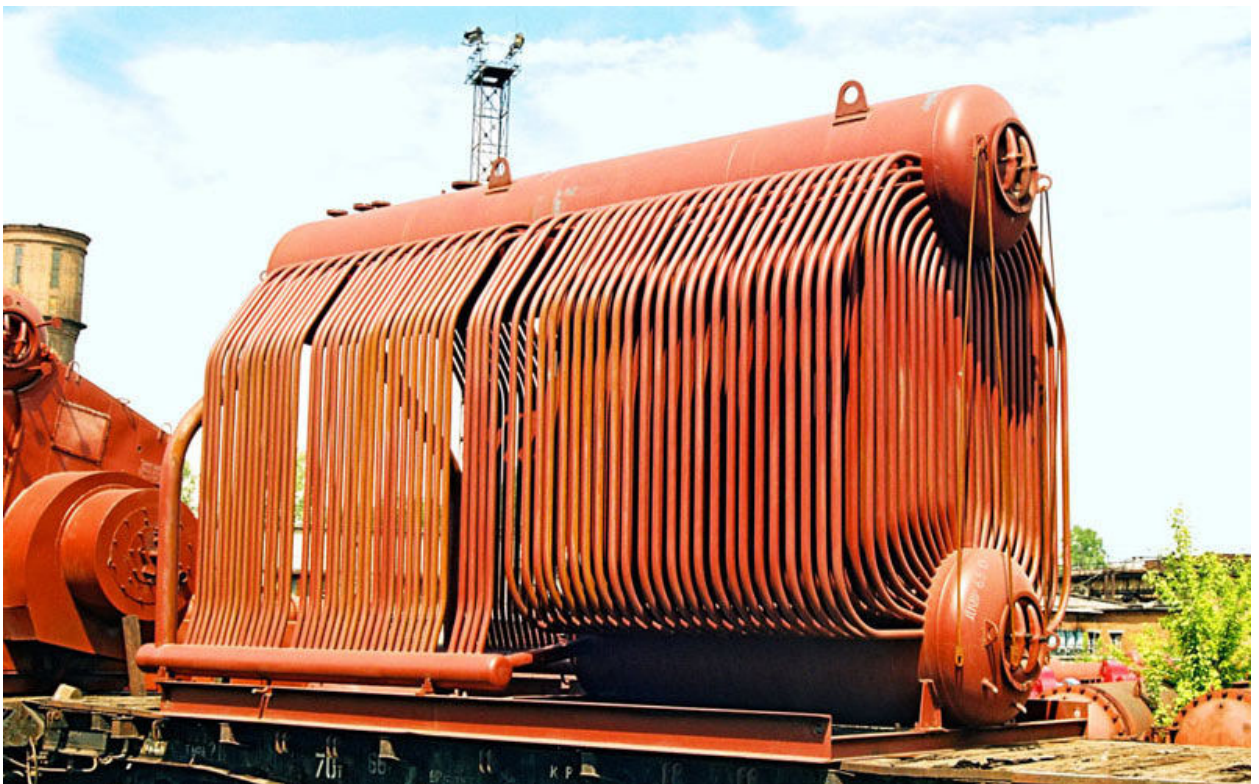


Рисунок 5.1 – Котельный агрегат ДКВР-10-13 ГМ

Принципиальная схема котельного агрегата ДКВР-10-13 ГМ представлена на рисунке 5.2, где 1, 2 – верхний и нижний барабаны;

- 3, 4 – кипяtilьные трубы первого и второго газохода;
- 5 – чугунная перегородка;
- 6 – фронтальной экран топки;
- 7, 8 – опускающие трубы и коллектор фронтальной экрана;
- 9 – задний экран;
- 10, 11 – коллектор и перепускающие трубы заднего топочного экрана;
- 12 – левый боковой экран топки;
- 13, 14 – коллектор и перепускающие трубы левого бокового экрана;
- 15 – опускающие трубы бокового топочного экрана;
- 16 – правый боковой экран топки;
- 17 – горелки;
- 18, 20 – шамотные перегородки;
- 19 – камера догорания;
- 21 – торкрет;
- 22 – обмуровка;
- 23 – питательная линия;
- 24 – паросепарационные устройства;
- 25 – паропровод;
- 26 – пароперегреватель;
- 27 – водоуказательное стекло;
- 28 – предохранительный клапан;
- 29 – термометр;
- 30 – манометр;
- 31 – трубопровод периодической продувки.

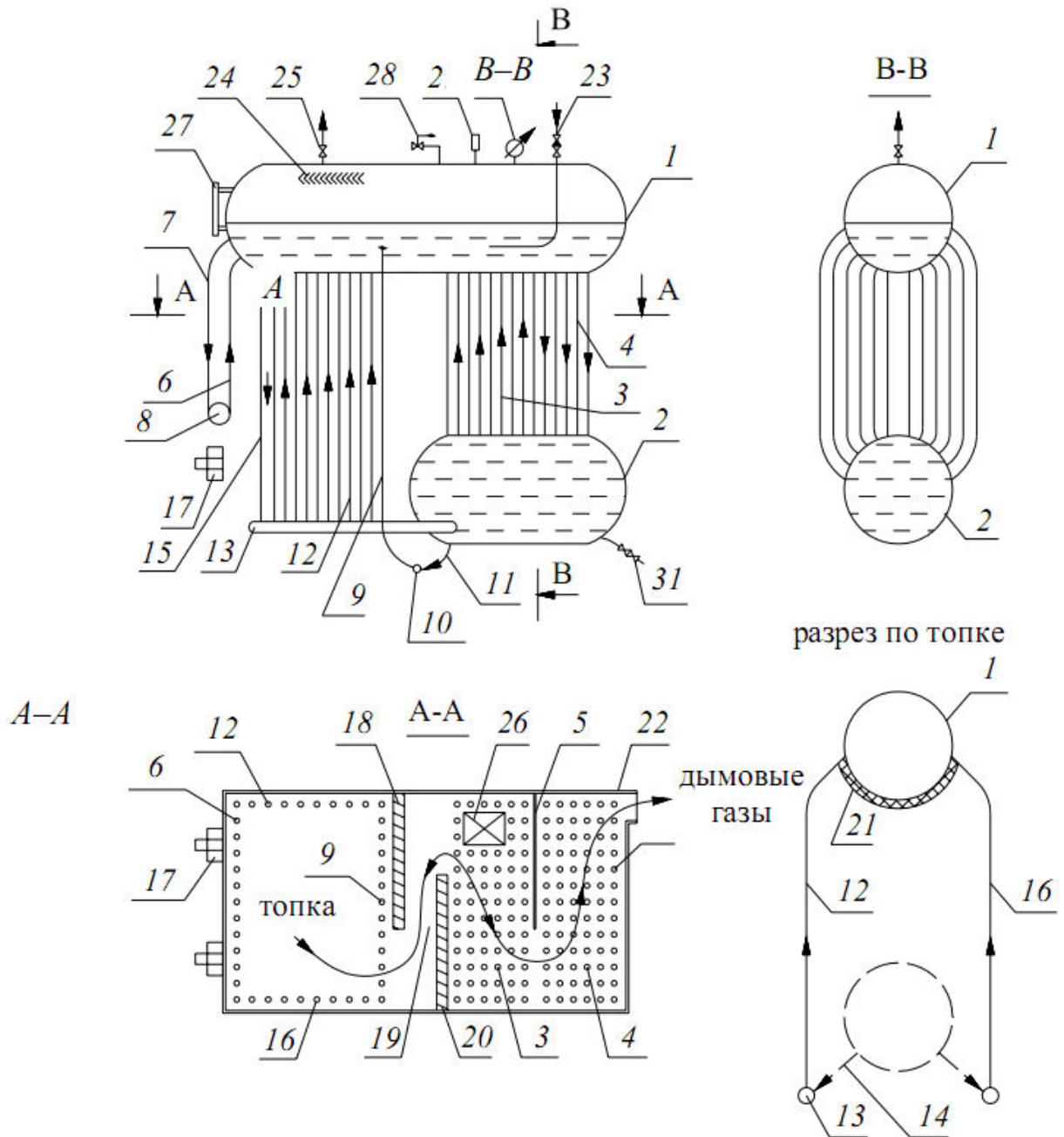


Рисунок 5.2 – Принципиальная схема котлоагрегата

Котельный агрегат ДКВР-10-13 ГМ состоит из верхнего 1 (длинного) и нижнего 2 (укороченного) барабанов, которые соединены между собой изогнутыми кипящими трубами в количестве 594 шт., и образуют соответственно первый 3 и второй 4 газоходы конвективной поверхности нагрева. Газоходы разделены между собой чугунной перегородкой 5 по всей высоте газохода котла с окном (от фронта котла) справа.

Передняя часть нижнего барабана крепится неподвижно, а остальные части котла имеют скользящие опоры, а также реперы, которые контролируют удлинения элементов при температурном расширении.

Топка сформирована 118-ю экранными трубами, которые образуют соответственно: 6 – передний или фронтальной экран; 12 – левый боковой экран; 16 – правый боковой экран (аналогично левому); 9 – задний экран топки. Все трубы радиационной и конвективной поверхности нагрева имеют наружный диаметр $51 \times 2,5$ мм, чем достигается лучшая естественная циркуляция в контурах котла.

Все экранные трубы топки своими верхними концами развальцованы в верхнем барабане 1, а нижними концами приварены к четырем нижним коллекторам: фронтальному – 8, левому боковому – 13 (аналогично и правому) и заднему топчному – 10. Кроме того, фронтальной коллектор 8 соединен с верхним барабаном четырьмя опускными трубами 7, расположенными снаружи обмуровки, а нижний коллектор левого бокового топчного экрана 13 (аналогично, как и правого) соединен с верхним барабаном одной опускной трубой 15, проложенной в обмуровке. Нижний коллектор 10 заднего топчного экрана соединен с нижним барабаном перепускными трубами 11. Поперечный фронтальной коллектор 8 расположен над горелками 17. Обмуровка 22 – тяжелая, из красного кирпича, а футеровка – из шамотного кирпича. Верхний барабан в топке закрыт торкретом 21 во избежание перегрева металла верхнего барабана. Оператор перед приемом смены визуально должен проверить состояние торкрета. Кроме того, в верхнем барабане над топкой установлены две легкоплавкие вставки (смесь олова и свинца), которые плавятся при температуре около $300\text{ }^{\circ}\text{C}$, что приводит к выпуску воды в топку, прекращению горения топлива и предохранению барабана от перегрева.

Камера догорания 19 предназначена для снижения потерь теплоты от химической неполноты сгорания топлива (химического недожога) и отделена от топки кирпичной перегородкой 18 (с окном справа, для прохода топчных

газов), а от первого газохода 4 – кирпичной перегородкой – 20 (с окном слева).

Подача питательной воды производится по линии 23, с установкой на ней обратного клапана и вентиля. В верхнем барабане 1 котла установлены паросепарационные устройства 24. Отбор пара производится по паропроводу 25. Для получения перегретого пара используют пароперегреватель 26, который устанавливают обычно за одним или двумя рядами кипяtilьных труб первого газохода котла.

На верхнем барабане установлена арматура: водоуказательные приборы 27, предохранительные клапаны 28, термометр 29, манометр 30. На всех котлах ДКВР над топкой и газоходом установлены взрывные предохранительные клапаны. Обдувка внешних поверхностей нагрева кипяtilьного пучка труб в газоходах производится паром, с использованием обдувочных аппаратов.

Топливо и воздух подаются в горелки 17, а в топке образуется факел горения. Теплота от топочных газов в топке, за счет радиационного и конвективного теплообмена, передается всем экранным трубам (радиационным поверхностям нагрева), где эта теплота за счет теплопроводности металлической стенки и конвективного теплообмена от внутренней поверхности труб передается воде, циркулирующей по экранам.

Затем топочные газы с температурой 900...1050 °С выходят из топки и через окно справа в кирпичной перегородке 18 переходят в камеру догорания 19, огибают кирпичную перегородку 20 с левой стороны и входят в первый газоход 3, где передают теплоту конвективному пучку труб. С температурой около 600 °С топочные дымовые газы, огибая чугунную перегородку 5 с правой стороны, входят во второй газоход 4 кипяtilьного пучка труб и с температурой около 200...250 °С, с левой стороны, выходят из котла и направляются в водяной экономайзер.

Питательная вода после умягчения и деаэрации (из деаэратора и водяного экономайзера) по двум трубопроводам питательной линии 23

подается в водный объем верхнего барабана 1, где смешивается с котловой водой. В котле имеется пять контуров естественной циркуляции.

- 1-й контур (по кипятильным трубам). Котловая вода из верхнего барабана 1 опускается в нижний барабан 2 по кипятильным трубам 4 конвективного пучка, расположенным во втором газоходе – в области более низких температур топочных газов. Образующаяся пароводяная смесь (ПВС) поднимается в верхний барабан по кипятильным трубам 3, расположенным в первом газоходе – в области более высоких температур топочных газов.

- 2-й контур (по фронтovому экрану) – котловая вода из верхнего барабана 1 по четырем опускным трубам 7 подводится к фронтovому коллектору 8, распределяется по нему, а образующаяся ПВС по экранным трубам 6, установленным в топке, поднимается в верхний барабан.

- 3-й контур (по заднему экрану топки) – котловая вода из нижнего барабана 2 по перепускным трубам 11 подводится к нижнему коллектору 10, распределяется по нему, а образующаяся ПВС по экранным трубам 9, расположенным в топке, поднимается в верхний барабан.

- 4-й контур (по левому боковому топочному экрану) – котловая вода из верхнего барабана 1 по опускной трубе 15 (находится внутри обмуровки или снаружи) подводится к нижнему коллектору 13 левого бокового экрана; к коллектору 13 также подводится вода и из нижнего барабана 2, по перепускным трубам 14, после чего вода распределяется по коллектору, а образующаяся ПВС по трубам 12 левого бокового экрана, расположенным в топке, поднимается в верхний барабан.

- 5-й контур (по правому боковому экрану топки 16) – осуществляется аналогично левому боковому топочному экрану.

Вода и пароводяная смесь (ПВС) из всех контуров циркуляции поднимается в верхний барабан, где в паросепарационных устройствах 24 отделяется пар, а вода смешивается с котловой водой и процесс циркуляций повторяется. После паросепарационных устройств полученный сухой

насыщенный пар идет к потребителю по паропроводу 25 или направляется в пароперегреватель 26 для получения перегретого пара.

Непрерывная продувка производится из верхнего барабана в расширитель (сепаратор) непрерывной продувки и регулируется вентилем. Периодическая продувка производится из пяти точек котла: четырех нижних коллекторов и нижнего барабана. В нижнем барабане над продувочной линией установлен паропровод, который используется для нагрева воды паром от соседних котлов во время растопки котла.

Котел снабжен двумя предохранительными клапанами 28 и соответствующей арматурой: термометр 29, манометр 30, водоуказательное стекло 27. На задней стенке котла установлен обдувочный аппарат, а на обмуровке, в верхней части топки и газоведа – взрывные предохранительные клапаны.

Расход пара может изменяться в широком диапазоне, а давление и температура поддерживаются в сравнительно узких пределах допустимых отклонений, что обуславливается требованиями заданного режима работы турбины или иного потребителя теплоты.

На основании проведенного анализа процесса производства пара как объекта управления можно сформулировать следующие задачи автоматизации:

- необходимо обеспечить стабилизацию давления пара на выходе из котлоагрегата за счет изменения расхода топлива;
- необходимо обеспечить стабилизацию уровня воды в барабане котлоагрегата изменением расхода питающей воды;
- необходимо обеспечить регулирование соотношения расходов топлива и воздуха с целью полного сжигания топлива;
- необходимо обеспечить технологический контроль расходов топлива, питающей воды, пара, температуры и давления потребляемого пара;

- необходимо обеспечить технологическую сигнализацию максимального давления пара в барабане КА, минимальный и максимальный уровень воды в барабане.

Автоматическая система регулирования питания предназначена для поддержания материального соответствия между расходами питательной воды в котел и нагрузке котла по пару. Показателем этого соответствия служит уровень воды в барабане котла [80].

Уровень в барабане изменяется из-за увеличения или уменьшения расхода пара или поступления воды в котел, изменения тепловой нагрузки топки и давления в барабане.

Повышение уровня за верхний допустимый предел (перепитка котла) может привести к постепенному заносу солями пароперегревателя и выбросу влаги из котла, что может явиться причиной повреждения турбины. Снижение уровня за нижний предел (упуск воды из барабана) приводит к нарушению циркуляции в топочных экранах и пережогу труб. Этим объясняется, что к надежности регулирования питания предъявляются повышенные требования [82].

Таким образом, зона работы автоматической системы регулирования питания ограничена установкой защиты от понижения уровня в барабане котла, с одной стороны, и установкой открытия аварийного слива, с другой. Эти пределы определяют безопасность работы котла, превышение их вызывает аварийную ситуацию.

Автоматическая система регулирования питания барабанного котла должна обеспечить удержание уровня в допустимых пределах:

- 1) при отсутствии резких возмущений по нагрузке максимально допустимые отклонения по уровню не должны превышать ± 20 мм;
- 2) при скачкообразном возмущении по нагрузке на 10% максимально допустимые отклонения по уровню не должны превышать ± 50 мм;
- 3) при нормальном стационарном режиме работы котла число включений регулятора не должно превышать шести в минуту [80].

На уровень в барабане котла оказывают влияние много возмущений. Основные из них: изменение расхода питательной воды, изменение нагрузки потребителя, изменение расхода топлива, изменение температуры питательной воды.

При возмущении расходом пара проявляется явно выраженное «набухание» уровня, т.е. изменение его в начальные моменты времени в сторону, не соответствующую знаку возмущающего воздействия. Явление «набухания» можно объяснить следующим образом: при изменении расхода пара, например увеличении, давление в котле уменьшается, происходит дополнительное вскипание воды, увеличение уровня. В дальнейшем уровень начинает падать из-за несоответствия расходов питательной воды и пара.

Настройка регулятора по имевшейся ранее методике не обеспечивала требуемого удержания уровня воды в барабане, поскольку она не учитывала изменения интервальных параметров, а использовала их фиксированные значения. В связи с этим была поставлена задача параметрического синтеза ПИД-регулятора по разработанной автором методике.

Типовую математическую модель двухимпульсной автоматической системы управления уровнем воды в барабане котлоагрегата можно представить в виде, указанном на рисунке 5.3, где нелинейные характеристики накладывают ограничение на скорость и величину открытия клапана, $\frac{1}{T_m s + 1}$ характеризует передаточную функцию трубопровода, $\frac{K_\kappa}{T_\kappa s}$ характеризует равномерное наполнение котла водой при ее постоянном поступлении, $\frac{-K_n}{T_n s + 1}$ характеризует явление «набухания» уровня воды при изменении расхода пара, $\frac{K_\delta}{T_\delta s + 1}$ представляет собой передаточную функцию датчика расхода пара. Датчик расхода пара частично компенсирует явление «набухания». Выходом объекта управления является уровень воды в барабане котлоагрегата и нормальным является нулевой уровень.

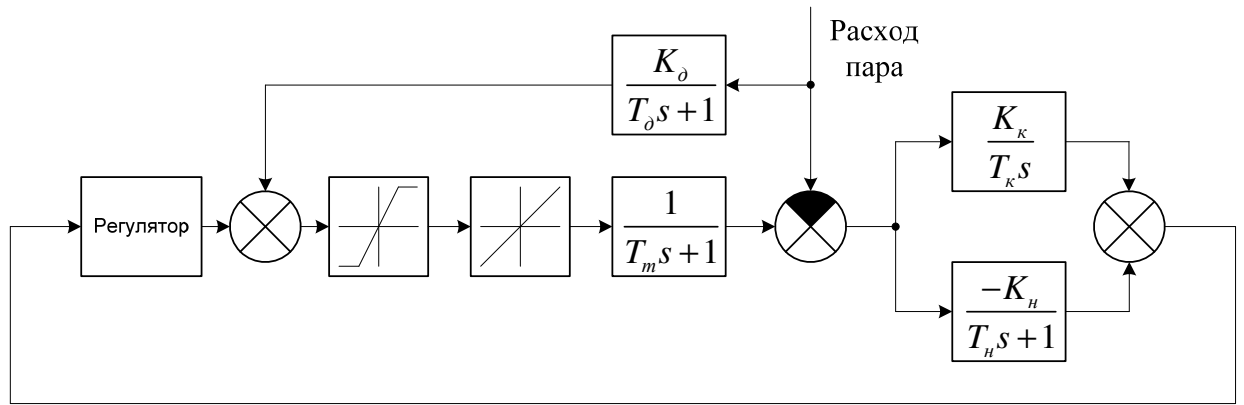


Рисунок 5.3 – Математическая модель системы автоматического управления уровнем воды в барабане котлоагрегата

Зная характеристики элементов котлоагрегата, можно составить математическую модель системы автоматического управления уровнем воды в барабане котлоагрегата (рисунок 5.4).

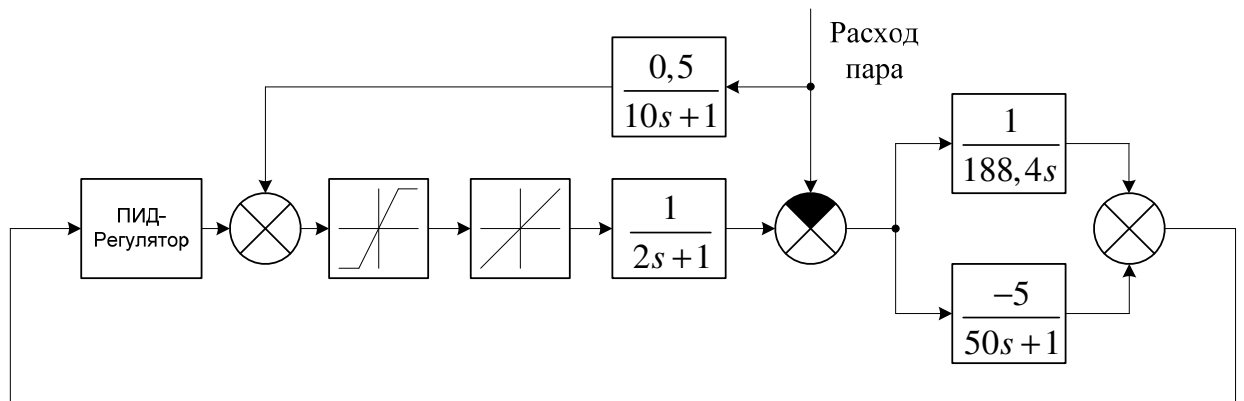


Рисунок 5.4 – Математическая модель системы автоматического управления уровнем воды в барабане котлоагрегата

Реакция объекта управления на единичное воздействие показана на рисунке 5.5.

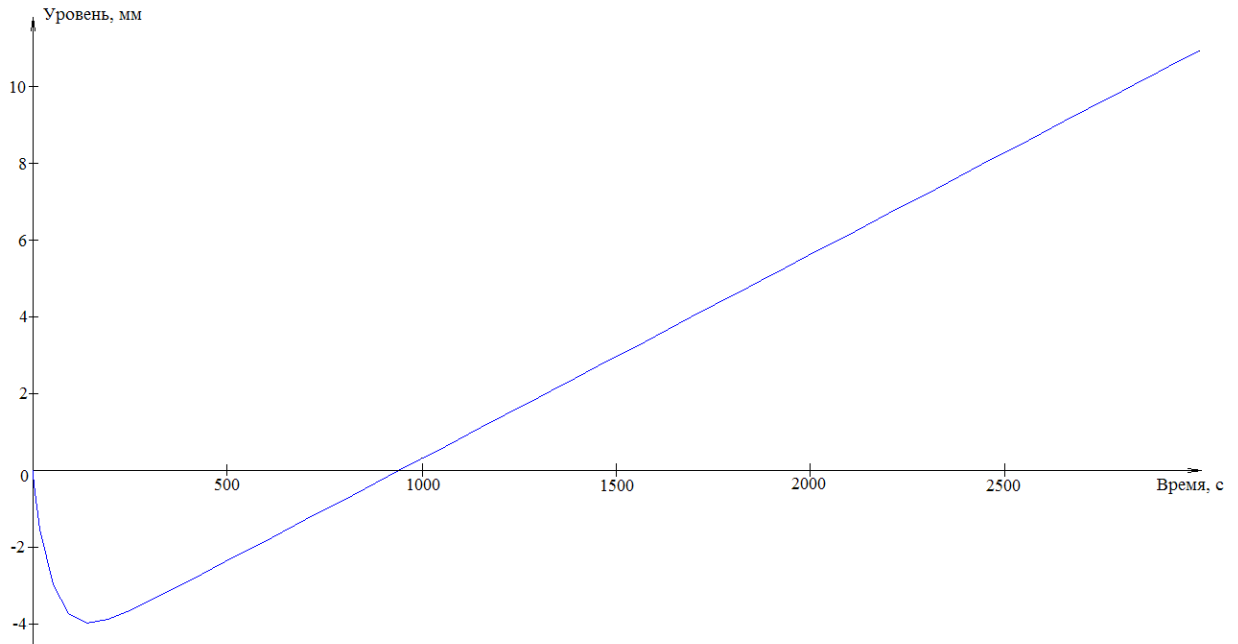


Рисунок 5.5 – Реакция объекта управления на единичное воздействие

5.2. Синтез ПИД-регулятора системы автоматического управления котлоагрегата ДКВР-10

Преобразовав передаточные функции объекта управления (барaban котлоагрегата и трубопровод), получим передаточную функцию вида:

$$\frac{-892s + 1}{18840s^3 + 9796,8s^2 + 188,4s}$$

Допустим, что параметры объекта имеют интервальные параметры, а именно:

- T_k – постоянная времени барабана котлоагрегата (может увеличиться на 1% из-за появления накипи и нагара на стенках барабана котлоагрегата);
- K_n, T_n – соответственно скорость «набухания» и постоянная времени «набухания» (может изменяться на 20%);
- T_m – постоянная времени трубопровода (может увеличиться на 5%).

Следовательно, интервальная система автоматического управления уровнем воды в барабане котлоагрегата примет вид, показанный на рисунке 5.6, где $a_3 = [15072; 23975,78]$, $a_2 = [7912,8; 11816,64]$, $a_1 = [188,4; 190,28]$.

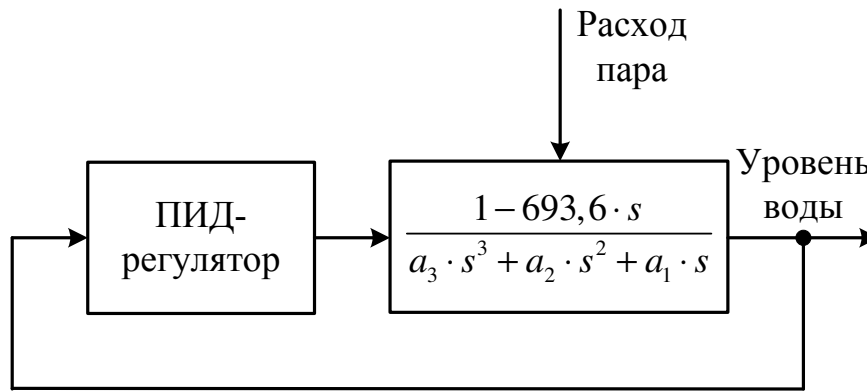


Рисунок 5.6 – Структурная схема интервальной системы автоматического управления уровнем воды в барабане котлоагрегата

Воспользуемся ППП RASIS для синтеза ПИД-регулятора для заданной интервальной САУ со следующими гарантированными параметрами:

- переходный процесс системы должен иметь апериодический вид;
- максимальная колебательность должна быть не ниже 45° ;
- минимальная степень устойчивости должна быть не ниже $-0,001$.

В результате синтеза параметров ПИД-регулятора были получены следующие варианты настроек:

$$K_{II} = 0,175, \quad T_{II} = 0,0001, \quad T_D = 5,87; \quad (0.73)$$

$$K_{II} = 0,177, \quad T_{II} = 0,0001, \quad T_D = 6,61; \quad (0.74)$$

$$K_{II} = 0,178, \quad T_{II} = 0,0001, \quad T_D = 7,34. \quad (0.75)$$

5.3. Анализ качества системы автоматического управления котлоагрегата ДКВР-10

Многопараметрические корневые годографы, согласно реберной теореме, для САУ с полученными настройками для синтезированных вариантов коэффициентов регулятора (0.73) и (0.75) представлены на рисунках (5.7), (5.8), (5.9) и (5.10).

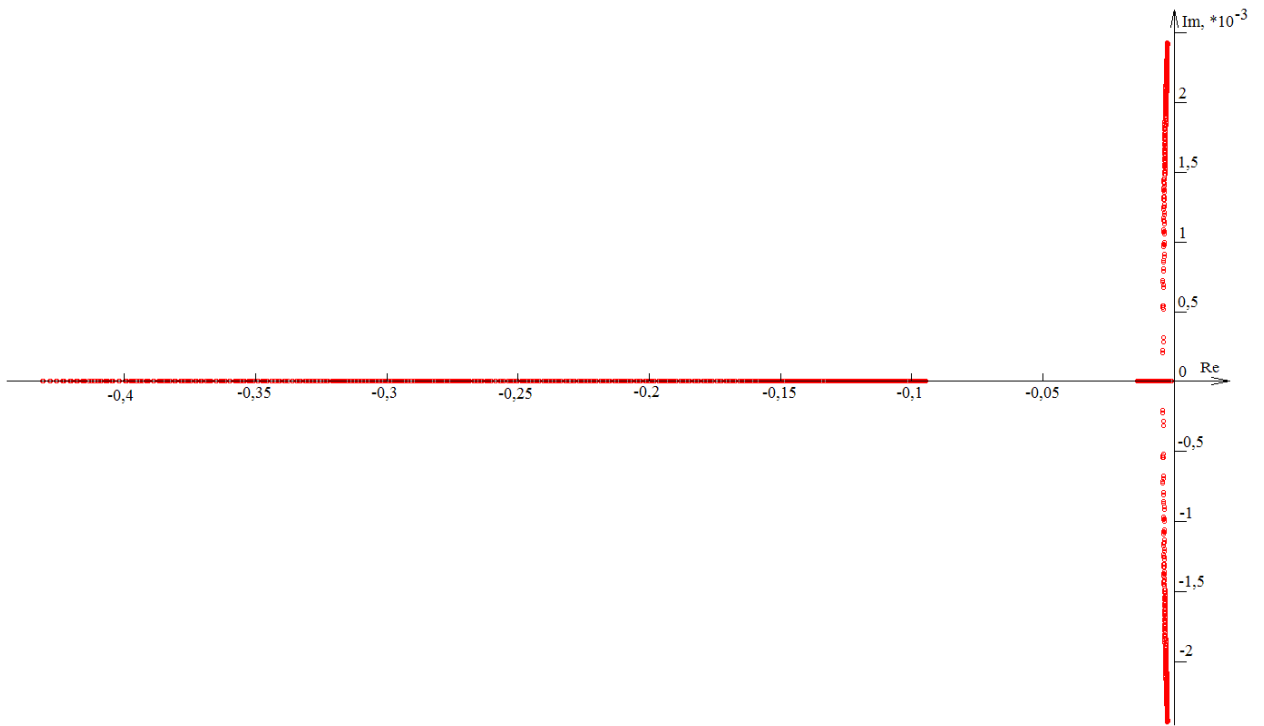


Рисунок 5.7 – Многопараметрический корневой годограф для регулятора с настройками ПИД-регулятора (0.73)

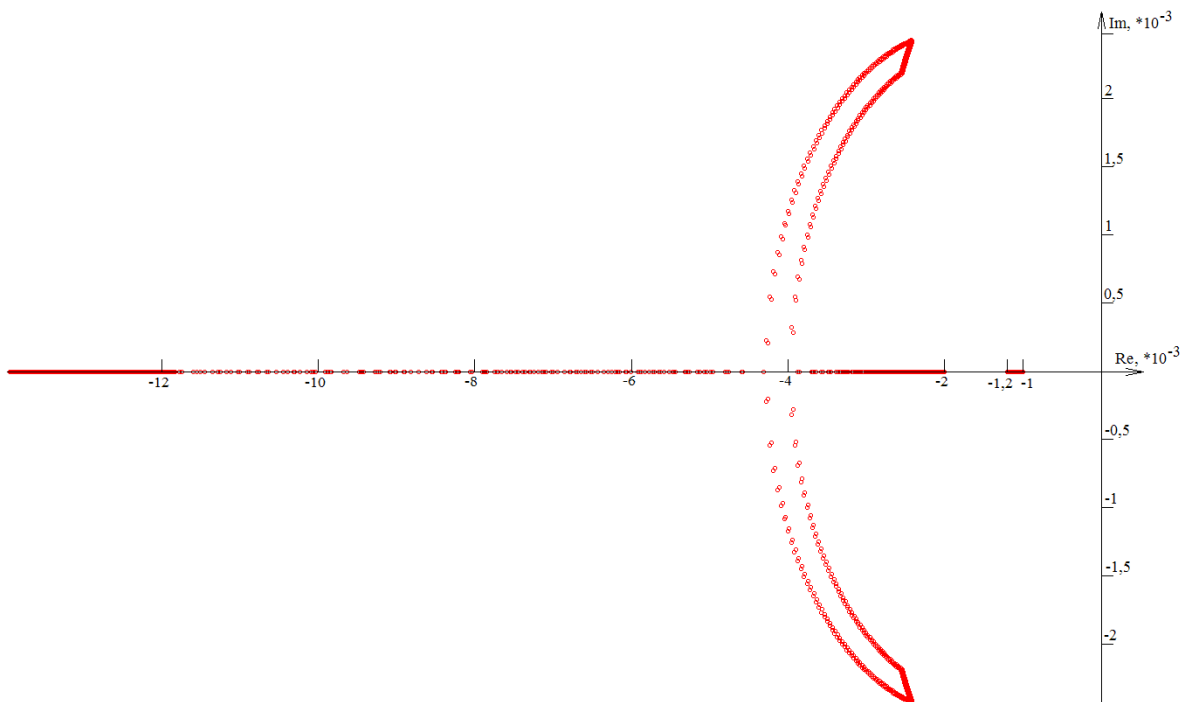


Рисунок 5.8 – Многопараметрический корневой годограф для регулятора с настройками ПИД-регулятора (0.73)

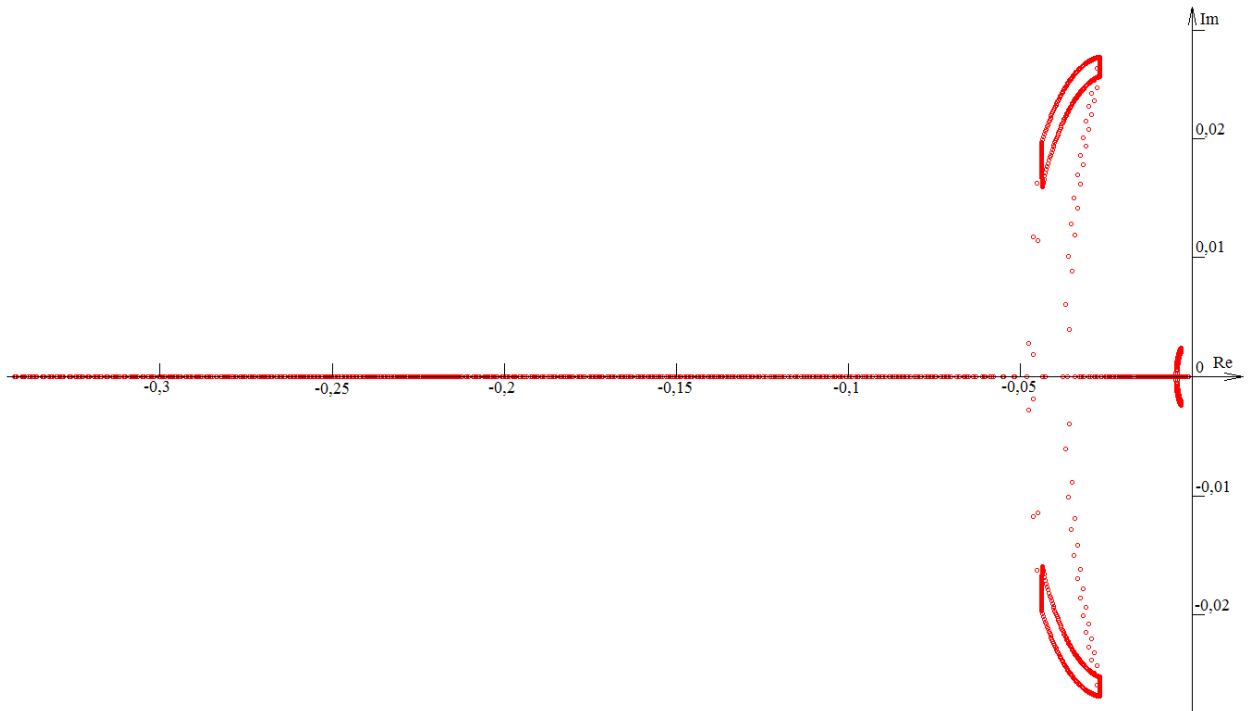


Рисунок 5.9 – Многопараметрический корневой годограф для регулятора с настройками ПИД-регулятора (0.75)

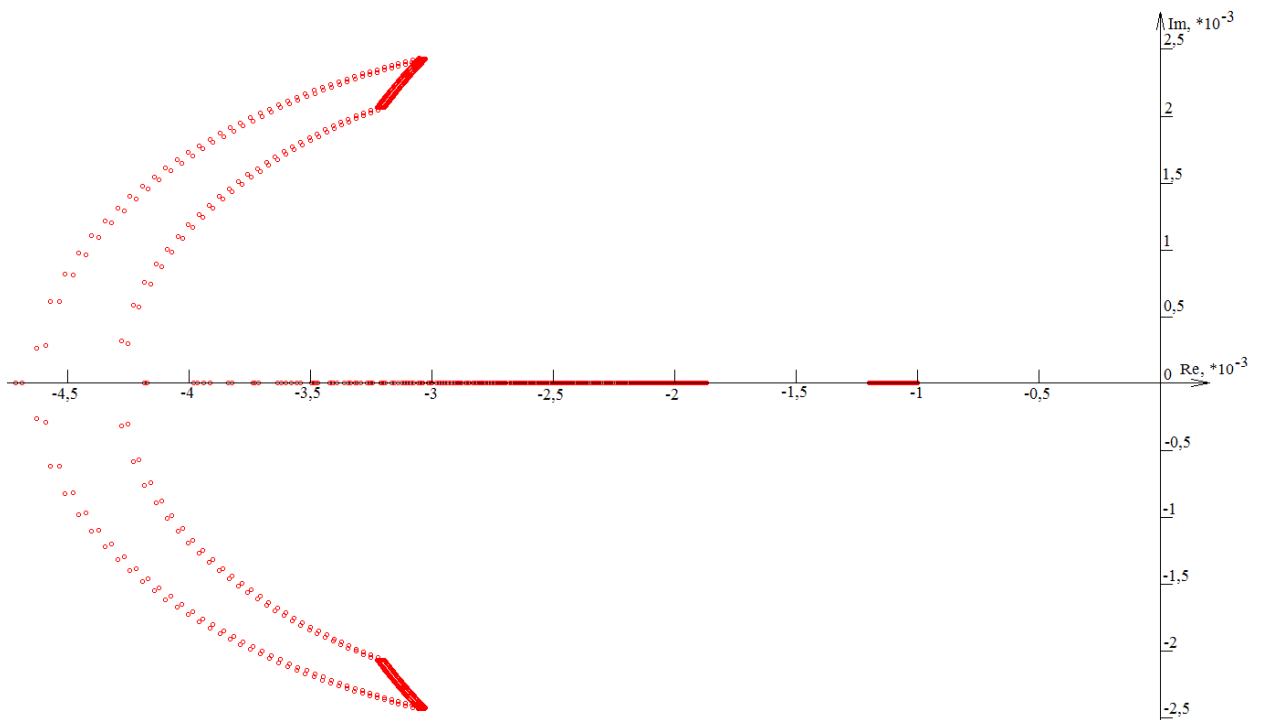


Рисунок 5.10 – Многопараметрический корневой годограф для регулятора с настройками ПИД-регулятора (0.75)

Максимальная колебательность для каждой из интервальной систем составляет 45° , а минимальная степень устойчивости равна $-0,001$.

Для различных наборов полученных настроек регулятора на рисунках 5.11, 5.12 показана реакция системы на единичное воздействие в граничных вершинах параметрического многогранника.

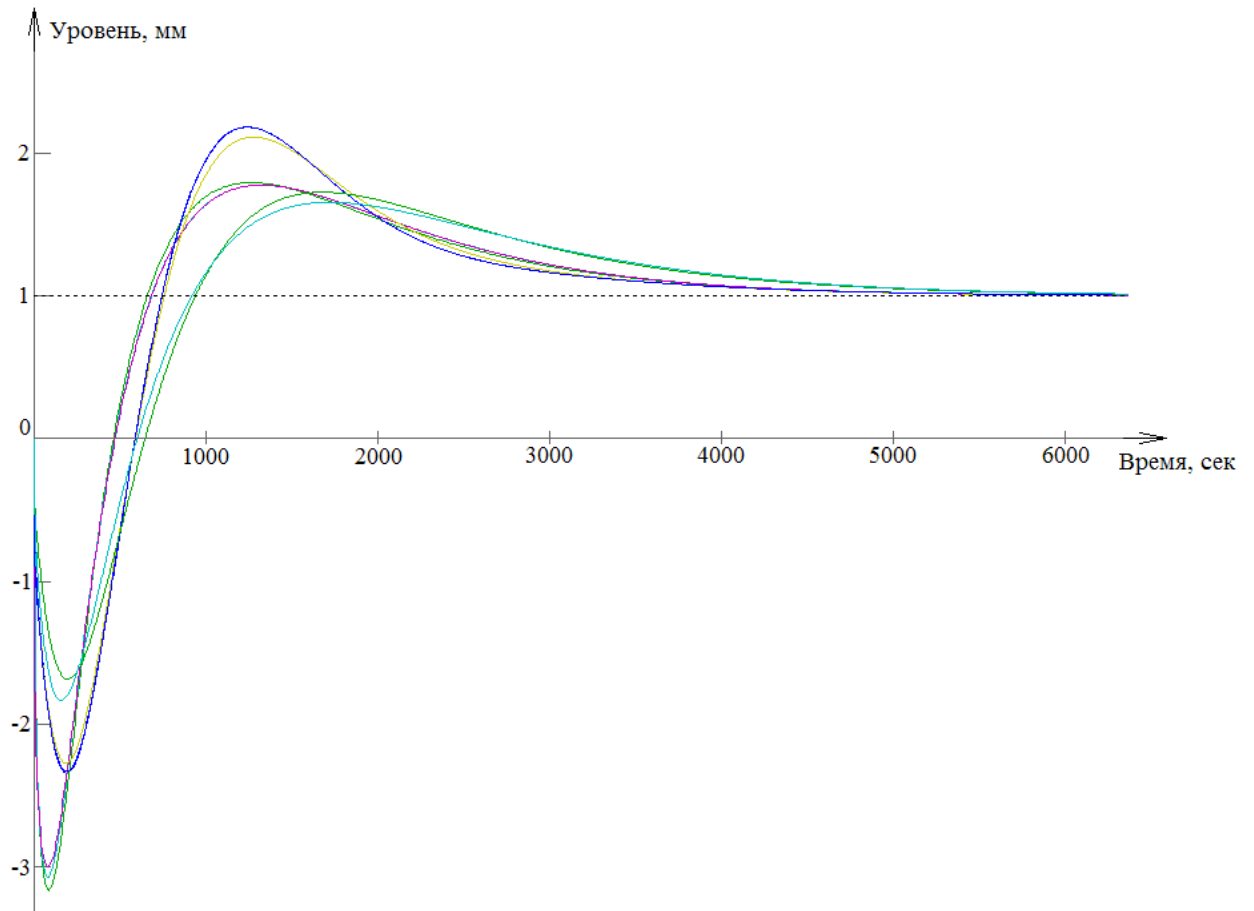


Рисунок 5.11 – Переходные процессы с настройками регулятора (0.73)

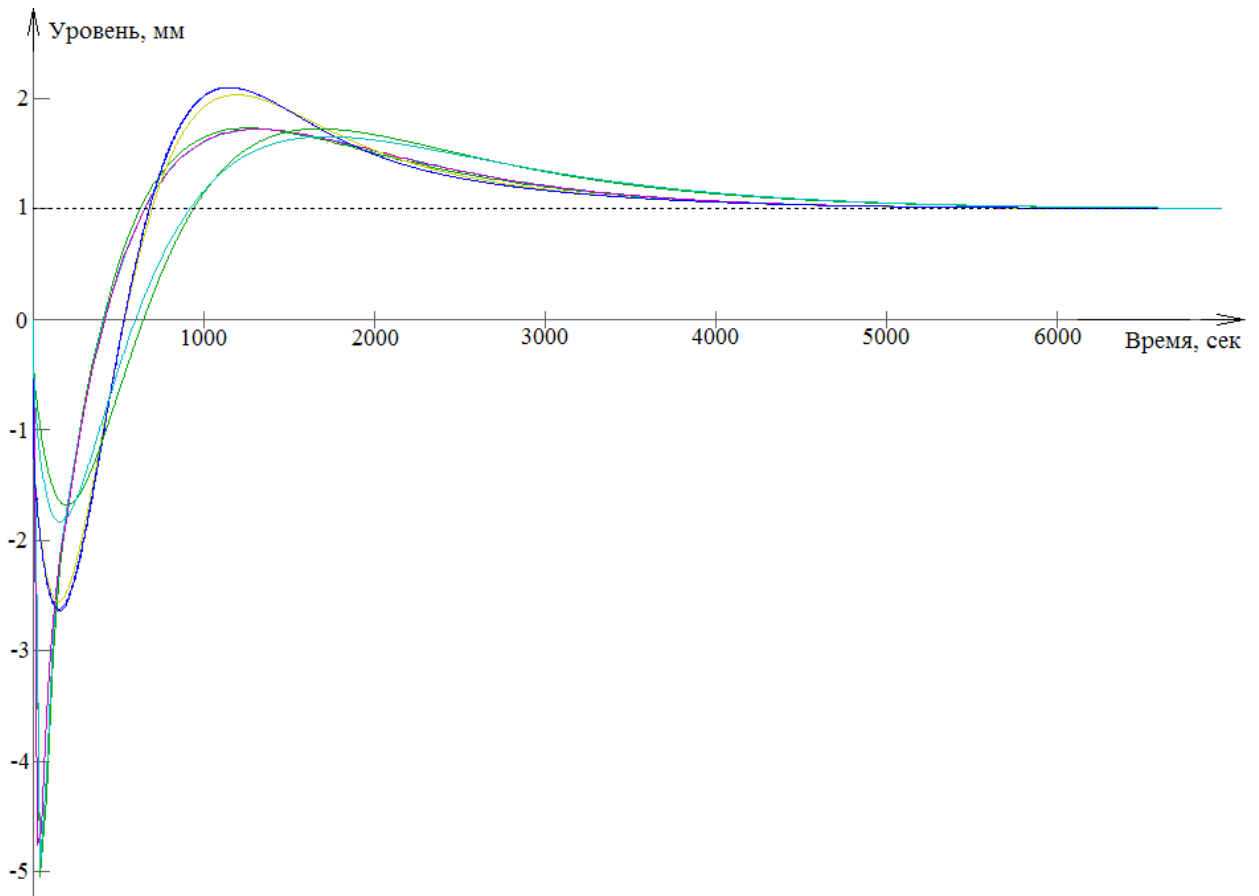


Рисунок 5.12 – Переходные процессы с настройками регулятора (0.75)

В результате параметрического синтеза ПИД-регулятора интервальной САУ котлоагрегата ДКВР-10 получены настройки, при которых области локализации корней интервального характеристического полинома расположены в желаемой области, а переходный процесс имеет апериодический вид при любых значениях интервальных параметров.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленная диссертационная работа описывает результаты исследований, направленных на разработку методов анализа и синтеза систем с интервальной и аффинной неопределенностями и их программную реализацию. В основе разработанных методик в работе используются робастное расширение метода корневого годографа, фазовые соотношения, алгоритмы реберной маршрутизации и уравнение Теодорчика-Эванса. Основными результатами диссертационной работы являются:

1. Разработана методика формирования набора вершинных полиномов для анализа секторной устойчивости системы с интервальной неопределенностью.
2. Разработана методика формирования граничных вершин параметрического многогранника для анализа региональной устойчивости систем с интервальной неопределенностью.
3. Разработана методика формирования граничного реберного маршрута интервального характеристического полинома для определения областей локализации системы с аффинной неопределенностью.
4. Разработана методика интервально-параметрического синтеза линейных П- и ПИ- регуляторов с гарантированными минимальной степенью устойчивости и максимальной колебательностью для систем автоматического управления с интервальной неопределенностью.
5. Разработана методика интервально-параметрического синтеза ПИД-регуляторов, гарантирующего апериодический переходный процесс интервальной системы на основе доминантного расположения корней характеристического уравнения.
6. Разработана методика коррекции желаемой области локализации полюсов интервальной системы на основе областей расположения ее нулей с учетом желаемых прямых показателей качества САУ.

7. Разработан специализированный пакет прикладных программ RASIS в среде MatLab для анализа и синтеза систем автоматического управления с интервальной и аффинной неопределенностями.

Результаты диссертационной работы применены при синтезе промышленных регуляторов, что подтверждается соответствующими актами о внедрении.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ackermann, J.** Parameter space design of robust control systems / J. Ackermann // IEEE Trans. On Autom. Control. 1980. Vol. 25. N 6. – P. 1058-1072.
2. **Ackermann, J.** Robust control: systems with uncertain physical parameters / J. Ackermann – London: Springer-Verlag, 1993, – 406 p.
3. **An, S.** Robust stability of polynomials with nonlinear dependent coefficient perturbations / S. An , W. Liu // Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control Orlando – Florida USA, 2001 – P 1551-1556.
4. **Arzelier, D.** Robust D-stabilization of a polytope of matrices / D. Arzelier, D. Henrion, D. Peaucelle // International Journal of Control, 2002, Vol. 75, N 10, – P. 744-752.
5. **Barlett, A.C.** Root location of an entire polytope of polynomials: it suffices to check the edges / A.C. Barlett, C.V. Hollot, H. Lin // Math. Contr., Signals. Syst., 1987, Vol. 1, №1. – P. 61-71.
6. **Barmish, B.R.** The robust root locus / B.R. Barmish, R. Tempo // Automatica, 1990. Vol. 26, №2. – P. 283-292.
7. **Barmish, B.R.** A generalization of Kharitonov's four polynomial concept for robust stability problems with linearly dependent coefficients perturbations / B.R. Barmish // IEEE Trans. Automat. Control. 1989. Vol. 34. № 2, – P. 157-165.
8. **Bhattacharyya, S.P.** Robust control: the parametric approach / S.P. Bhattacharyya, H. Chapellat , L.H. Keel – Prentice Hall, 1995.
9. **Chang Y. H.** Robust gamma stability of highly perturbed systems / Y.H. Chang, G.L. Wise // IEEE Proc. Control Theory Appl. N 2, 1998. – P. 165-175.
10. **Chu E.K.** Pole assignment for second-order systems / E.K. Chu // Mechanical systems and signal processing, 2002, N 1, – P. 39–59.

11. **Foo, Y.K.** Root clustering of interval polynomials in the left sector / Y.K. Foo, Y.C. Soh // Syst. Control Letters. 1989. Vol. 13, – P. 239-245.
12. **Henrion, D.** An LMI condition for robust stability of polynomial matrix polytopes / D. Henrion, D. Arzelier, D. Peaucelle, M. Sebek // IFAC Automatica, 2001, Vol. 37, – P. 461-468.
13. **Henrion, D.** D-Stability of Polynomial Matrices / D. Henrion, O. Bachelier, M. Sebek // International Journal of Control, 2001, Vol. 74, N. 8, – P. 845-856.
14. **Henrion, D.** Ellipsoidal approximation of the stability domain of a polynomial / D. Henrion, D. Peaucelle, D. Arzelier, M. Sebek // IEEE Transactions on Automatic Control, 2003, Vol. 48, N 12, – P. 2255-2259.
15. **Henrion, D.** Positive polynomials and robust stabilization with fixed-order controllers / D. Henrion, M. Sebek, V. Kucera // IEEE Transactions on Automatic Control, 2003 Vol. 48, No. 7, – P. 1178-1186.
16. **Henrion, D.** Robust pole placement for second-order systems: An LMI approach / D. Henrion, M. Sebek, V. Kucera // Kybernetika, 2005, Vol. 41,N 1, – P. 1-14
17. **Kawamura, T.** Robust stability analysis of characteristic polynomials whose coefficients are polynomials of interval parameters / T. Kawamura, M. Shima // Journal of Mathematical System, Estimation and Control, № 4, 1996. – P. 1-12.
18. **Keel, L.H.** Robust stability and performance with fixed-order controllers / L.H. Keel, S.P. Bhattacharyya // Automatica 1999 N 35, – P. 1717–1724.
19. **Keel, L.H.** Robust, fragile or optimal? / L.H. Keel, S.P. Bhattacharyya // IEEE transactions on automatic control, Vol. 42, N. 8, 1997, – P. 1098-1105.
20. **Maamri, N.** Pole placement in a union of regions with prespecified subregion allocation / N. Maamri, O. Bachelier, D. Mehdi // Mathematics and Computers in Simulation, 2006, N 72 – P. 38–46.

21. **Markus, A. H.** The Kharitonov theorem and its applications in symbolic mathematical computation / A.H. Markus, E. Kaltofen // Journal symbolic computation, 1997 – P. 1-13.
22. **Melnikov, U.S.** Stabilization of undersea object situation, connected with ship by the rope / U.S. Melnikov, S.A. Gaivoronsky, S.V. Novokshonov // KORUS'99 III Russian-Korean international Symposium.– Novosibirsk, Russia, 1999. – P. 68-70.
23. **Nesenchuk, A.A.** Root locus fields technique in the uncertain control systems synthesis / A.A. Nesenchuk // Proceedings of the 5th World Multiconference on Systems, Cybernetics and Informatics. –Orlando, FL, USA. 2001. –P. 298-303.
24. **Pare, T.** Algorithm for reduced order robust H_∞ control design / T. Pare, J. How. // Proceedings of the 38-th conference on decision and control, – Arizona, 1999 – P. 1863-1868.
25. **Rao, P.** Robust tuning of power system stabilizers using QFT / P. Rao, I. Sen // IEEE transactions on control systems technology, 1999, Vol. 7, N. 4. – P. 478-486.
26. **Rimsky, G.V.** Root locus methods for robust control systems quality and stability investigations / G.V. Rimsky, A.A. Nesenchuk // Proceedings IFAC 13th Triennial World Congress. – San Francisco, USA, 1996. – P. 469-474.
27. **Sienel, W.** Design and analysis of robust control systems in PARADISE / W. Sienel, J. Ackermann, T. Bunte // Proc. IFAC Symposium on Robust Control Design, – Budapest, Hungary, 1997.
28. **Sienel, W.** Robust control goes PARADISE. / W. Sienel, J. Ackermann, D. Kaesbauer, T. Bunte // In Proc. EURACO Workshop on Control of Nonlinear System: Theory and Applications, – Algarve, Portugal, 1996. – P. 129-138.
29. **Soh, C.B.** On the stability properties of polynomials with perturbed coefficients / C.B. Soh, C.S. Berger, K.P. Dabke // IEEE Trans. On Autom. Control. 1985. Vol 30. № 10. – P. 1033-1036.

30. **Soh, Y.C.** Generalized edge theorem / Y.C. Soh, Y.K. Foo // Systems & Control Letters, 1989, Vol. 12, N 3, – P. 219-224.
31. **Soh, Y.C.** A note on the edge theorem / Y.C. Soh, Y.K. Foo // Systems & Control Letters 1990, Vol. 15, N 1, – P. 41-43.
32. **Soh, Y.C.** Generalization of strong Kharitonov theorems to the left sector / Y.C. Soh, Y.K. Foo // IEEE Trans. On Automatic Control, 1990, Vol. 35. – P. 1378-1382.
33. **Solyom, S.** A synthesis method for robust PID controllers for a class of uncertain systems / S. Solyom, A. Ingimundarson // Asian Journal of Control, Vol. 4, N 4, – P. 381-387.
34. **Soylemez, M.T.** Fast calculation of stabilizing PID controllers / M.T. Soylemez, N. Munro, H. Baki // Automatica 39, 2003, – P. 121–126.
35. **Tagami, T.** Design of robust pole assignment based on Pareto-optimal solutions / T. Tagami, K. Ikeda // Asian Journal of Control, 2003, Vol. 5, N 2, – P. 195-205.
36. **Tan, N.** Computation of stabilizing PI and PID controllers using the stability boundary locus / N. Tan, I. Kaya, C. Yeroglu, P. Derek // Energy Conversion and Management, 2006, N 47 –P. 3045–3058.
37. The basic definitions: the steam boiler. Retrieved 2007, from the Web site of the Boiler – Wikipedia, the free encyclopedia: <http://en.wikipedia.org/wiki/Boiler>.
38. **Varga, A.A.** numerically reliable approach to robust pole assignment for descriptor systems / A.A. Varga // Future Generation Computer Systems, 2003, N 19, – P.1221–1230.
39. **Vicieno, A.** Robustness of pole location in perturbed systems / A. Vicieno // Automatica, 1989, Vol. 25. N 3. –P. 109-113.
40. **Wang L.** Robust strong stabilizability of interval plants: it suffices to check two vertices. / L. Wang // System and control letters, 1995, Vol. 26. – P. 133-136.

41. **Wang, L.** Kharitonov-like theorems for robust performance of interval systems / L. Wang // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2003, Vol. 279, N 2, – P. 430-441.
42. **Wang, L.** Robust stability of a class of polynomial families under nonlinearly correlated perturbations / L. Wang // Systems and Control Letters, Vol. 30, N 1, 1997, – P. 25-30.
43. **Wang, Y.** PID and PID-like controller design by pole assignment within D-stable regions / Y. Wang, M. Schinkel, K.J. Hunt // Asian Journal of Control, Vol 4, N 4, – P. 423-432.
44. **Wang, Y.** The calculation of stability radius with D stability region and nonlinear coefficients / Y. Wang, K.J. Hunt // Proceedings of 3rd IFAC Symposium on Robust Control Design, Czech Republic, 2000, –P. 240-246.
45. **Wang, Z.** Determinative vertices of interval family with Ω -stability / Z. Wang, L. Wang, W. Yu // Journal of Mathematical Analysis and Applications Vol.266, N 2, 2002, – P. 321-332
46. **Wang, Z.** Improved results on robust stability of multivariable interval control systems / Z. Wang, L. Wang, W. Yu // Proceedings of American Control Conference, – Denver, Colorado, USA, 2001, – P. 4463–4468.
47. **Xiao, Y.** Edge test for domain stability of polytopes of two-dimensional (2-D) polynomials / Y. Xiao // Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control, 2000, P. 4215-4220.
48. **Zadeh, L.A.** Linear system theory / L.A. Zadeh, C.A. Desoer – McGraw-Hill, 1963.
49. **Zamyatin, S.V.** The robust sector stability analysis of an interval polynomial / S.V. Zamyatin, S.A. Gayvoronskiy // 1st International Symposium on Systems and Control in Aerospace and Astronautics, – Harbin, China, 2005, – P. 112-115.
50. **Zhabko, A.P.** Necessary and sufficient conditions for the stability of a linear family of polynomials. / A.P. Zhabko, V.L. Kharitonov // Automation and Remote Control, 1994, Vol. 55, №10, – P. 1496-1503.

51. **Zhan, Y.** Dominant pole placement for multi-loop control systems / Y. Zhan, Q. Wang, K.J. Astrom // Proceedings of the American control conference – Chicago, 2000, – P. 1965-1969.
52. **Андриевский, Б.Р.** Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке matlab. / Б.Р. Андриевский, А.Л. Фрадков – М.: Наука, 2000, – 475с.
53. **Бендрикова, Г.А.** Траектории корней линейных автоматических систем / Г.А. Бендрикова, К.Ф. Теодорчик – М.: Наука, 1964, –160с.
54. **Бесекерский, В.А.** Робастные системы автоматического управления / В.А. Бесекерский, А.В. Небылов – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983, – 240с.
55. **Вадутов, О.С.** Определение границ областей локализации нулей и полюсов системы с интервальными параметрами / О.С. Вадутов, С.А. Гайворонский // Известия томского политехнического университета. 2003. Т.306. №1.– С.64-68.
56. **Вадутов, О.С.** Применение реберной маршрутизации для анализа устойчивости интервальных полиномов / О.С. Вадутов, С.А. Гайворонский // Изв. АН. ТиСУ. 2003. №6. –С. 7-12.
57. **Вадутов, О.С.** Решение задачи размещения полюсов системы методом D-разбиения / О.С. Вадутов, С.А. Гайворонский // Изв. РАН. ТиСУ. 2004. № 5. С. 23–27.
58. **Вадутов, О.С.** Синтез динамических регуляторов интервальных автоматических систем стенда имитации невесомости / О.С. Вадутов, Ю.С. Мельников, С.А. Гайворонский, С.В. Новокшенов // Информационные системы и технологии. Докл. междунардн. конф.– Новосибирск, 2000. – С 371-377.

59. **Вадутов, О.С.** Синтез устойчивой линейной системы при параметрических возмущениях объекта / О.С. Вадутов, С.А. Гайворонский // Машинные методы оптимизации, моделирования и планирования эксперимента: Межвуз. сб. науч. тр. Новосиб. электротехн. ин-т. – Новосибирск, 1988. – С. 112-118.
60. **Веремей, Е.И.** Анализ в среде Matlab робастных свойств систем стабилизации плазмы. / Е.И. Веремей // Exponenta Pro. Математика в приложениях: научн. практ. журнал. – М, 2003, №3.
61. **Волков, А.Н.** Метод синтеза систем автоматического управления с максимальной степенью устойчивости и заданной колебательностью / А.Н. Волков, Ю.В. Загашвили // Изв. АН. ТиСУ. 1997, №1, –С. 35-41.
62. **Воронов, А.А** Теория автоматического управления, ч.1 / А.А. Воронов // – М.: Высш. шк., 1986, 367 с.
63. **Вукосавич, С.Н.** Достаточные условия робастной относительной устойчивости линейных непрерывных систем / С.Н. Вукосавич, М.Р. Стоич // АиТ. 1996. №11. – С.84-90.
64. **Веремей Е.И.** Обеспечение заданной степени устойчивости регуляторами с неполной информацией / Е.И. Веремей // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика 1986, № 4 – С.123–130
65. **Гайворонский, С.А.** Анализ качества электроэнергетических систем с интервальными параметрами корневым методом/ С.А. Гайворонский, С.В. Новокшенов // VII Межд. Научно-технич. конфер. Радиоэлектроника, электротехника и энергетика. – Москва: Издательство МЭИ, 2001. – С. 347-348.
66. **Гайворонский, С.А.** Анализ локализации корней интервального полинома в заданном секторе / С.А. Гайворонский, С.В. Замятин // Изв. Томского политех. ун-та. –2004. Т. 307. № 4. – С. 14-18.
67. **Гайворонский, С.А.** Анализ региональной робастной устойчивости системы методом интервального корневого годографа / С.А. Гайворонский, О.С. Вадутов, С.В. Новокшенов // Тез. докл. рег. науч.

- конфер. Наука, Техника, Инновации. – Новосибирск: Издат. НГТУ, 2001.
68. **Гайворонский, С.А.** Анализ робастной относительной устойчивости на основе многопараметрического интервального корневого годографа / С.А. Гайворонский, С.В. Новокшенов // Тез.докл. X междунаrod. Научн.-технич. Конф. Состояние и перспективы развития электротехнологии. – Иваново: Издат. ИГЭУ, 2001.
69. **Гайворонский, С.А.** Параметрический синтез линейного регулятора электромеханической системы при интервальной неопределенности объекта управления / С.А. Гайворонский // Изв. ВУЗов. Электромеханика, 1990. №5. –С. 69-72.
70. **Гайворонский, С.А.** Построение границ корневых областей систем с интервальными параметрами / С.А. Гайворонский, С.В. Новокшенов // Современные техника и технологии. Тез.докл. VII междунаrod. научн.-практич. конф. – Томск: изд.ТПУ, 2001. – С 260-263.
71. **Гайворонский, С.А.** Условия локализации корней интервального полинома в заданном секторе / С.А. Гайворонский, С.В. Замятин // Всероссийское (с междунаrodным участием) совещание по интервальному анализу и его приложениям «ИНТЕРВАЛ-06» г. Санкт-Петербург, 2006. – С. 38–41
72. **Гусев, Ю.М.** Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем (состояние проблемы). Анализ с использованием интервальных характеристических полиномов / Ю.М. Гусев, В.Н. Ефанов, В.Г. Крымский // Техн. кибернетика. 1991. №1. – С. 3-30.
73. **Жабко, А.П.** Необходимые и достаточные условия устойчивости линейного семейства полиномов/ А.П. Жабко, В.Л. Харитонов // АиТ. 1994. № 10. – С. 125-134.
74. **Замятин С.В.** Размещение областей локализации доминирующих полюсов интервальной системы с обеспечением заданных показателей

- качества / С.В. Замятин // Изв. Томского политех. ун-та, №7, Том 309 2006. – С. 10-14.
75. **Замятин, С.В.** Исследование интервальных полиномов на основе свойств критерия Рауса / С.В. Замятин, М.С. Суходоев, С.В. Ефимов // Современные техника и технологии: Труды XII Международной научно-практической конференции студентов и молодых учёных. Томск-2006. – С. 61–63.
76. **Замятин, С.В.** Решение задачи размещения полюсов линейной интервальной динамической системы в заданном секторе / С.В. Замятин, С.А. Гайворонский // Известия томского политехнического ун-та №5, Том 309, 2006. – С. 16-20.
77. **Захаров, А.В.** Синтез систем управления при интервальной неопределенности параметров их математических моделей / А.В. Захаров, Ю.И. Шокин // ДАН СССР. 1988. Т. 299, №2. – С. 292-295.
78. **Ким, Д.П.** Условие граничной устойчивости и синтез систем управления максимальной степени устойчивости / Д.П. Ким // Изв. АН. ТиСУ. 2003. №4, – С. 5-8.
79. **Киселев, О.Н.** Синтез регуляторов низкого порядка по критерию H_∞ и по критерию максимальной робастности / О.Н. Киселев, Б.Т. Поляк // Автоматика и телемеханика, 1999. N 3, – С. 119-130.
80. **Клюев А.С.** Наладка систем автоматического регулирования котлоагрегатов. / А.С. Клюев, А.Г. Товарнов //– М.: Энергия, 1970. – 280 с.
81. **Римский Г.В.** Корневые методы исследования интервальных систем / Г.В. Римский. – Минск: Институт технической кибернетики НАН Беларуси, 1999. – 186 с.
82. **Кузьменко Д.Я.** Регулирование и автоматизация паровых котлов. / Д.Я. Кузьменко. Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Энергия, 1978. – 160 с.

83. **Литвинов, Р.Д.** Метод расположения корней характеристического полинома, обеспечивающий заданные степень устойчивости и колебательность системы / Н.Л. Литвинов // *АиТ*. 1995. №4. – С. 53-61.
84. **Неймарк Ю.И.** Динамические системы и управляемые процессы / Ю.И. Неймарк – М.: Наука, 1978. – 336с.
85. **Неймарк, Ю.И.** Мера робастной устойчивости и модальности линейных систем / Ю.И. Неймарк // *ДАН*. 1992. Т.325, № 2. –С.247-250.
86. **Неймарк, Ю.И.** Мера робастной устойчивости линейных систем / Ю.И. Неймарк // *АиТ*. 1993. № 1. –С.107-110.
87. **Неймарк, Ю.И.** Область робастной устойчивости и робастность по нелинейным параметрам / Ю.И. Неймарк // *ДАН*. 1992. Т.325, № 3. – С.438-440.
88. **Неймарк, Ю.И.** Робастная устойчивость линейных систем / Ю.И. Неймарк // *ДАН*. 1991. Т. 319. № 3. –С.578-580.
89. **Петров, Б.Н.** Системы автоматического управления объектами с переменными параметрами / Б.Н. Петров // *Инженерные методы анализа и синтеза* – М.: Машиностроение, 1986. – 256с.
90. **Петров, Н.П.** Робастное D-разбиение / Н.П. Петров, Б.Т. Поляк // *АиТ*. 1991. №11. – С. 41-53.
91. **Поляк, Б.Т.** Робастная устойчивость и управление / Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков – М.: Наука, 2002. – 303 с.
92. **Поляк, Б.Т.** Робастный критерий Найквиста / Б.Т. Поляк, Я.З. Цыпкин // *АиТ*. 1992. №7. – С.25-31.
93. **Поляк, Б.Т.** Частотные критерии робастной устойчивости и апериодичности линейных систем / Б.Т. Поляк, Я.З. Цыпкин // *АиТ*. 1990. №9. –С. 45-54.
94. **Римский, Г. В.** Корневые методы исследования интервальных систем / Г.В. Римский – Минск: Ин-т техн. кибернетики НАН Беларуси. 1999. – 186с.

95. **Римский, Г.В.** Корневой метод исследования условий устойчивости линейных интервальных динамических систем / Г.В. Римский, Е.Г. Мазуренко // Вести НАН Беларуси. Серия физико-технических наук. – 1996. №2. – С.61-64.
96. **Римский, Г.В.** Корневой метод решения задач устойчивости интервальных систем / Г.В. Римский // Вести АН Беларуси. Серия физико-технических наук. 1994. №4. – С. 80-85.
97. **Римский, Г.В.** Корневой метод синтеза полиномов / Г.В. Римский // Вести АН Беларуси. Серия физико-технических наук. – 1995. №3. – С.107-114.
98. **Римский, Г.В.** Основы общей теории корневых траекторий систем автоматического управления / Г.В. Римский – Минск: Наука и техника, 1972. – 328с.
99. **Сиразетдинов, Р.Т.** К построению гарантированной области расположения корней характеристического уравнения замкнутой системы / Р.Т. Сиразетдинов // Изв. ВУЗов. Авиационная техника. 1984. № 4. – С. 72-76.
100. **Сиразетдинов, Р.Т.** Построение гарантированной области расположения нулей и полюсов передаточных функций динамических систем / Р.Т. Сиразетдинов // АиТ, 1988. №7. – С. 51-58.
101. **Скворцов, Л.М.** Интерполяционный метод решения задачи назначения доминирующих полюсов при синтезе одномерных регуляторов / Л.М. Скворцов // Изв. АН. ТиСУ. 1994. №4. – С. 10-13.
102. **Скворцов, Л.М.** Интерполяционный метод решения задачи назначения доминирующих полюсов при синтезе многомерных регуляторов / Л.М. Скворцов // Изв. АН.ТиСУ. 1997. № 1. – С. 31-34.
103. **Скворцов, Л.М.** Синтез закона управления по заданным полюсам и нулям передаточной функции / Л.М. Скворцов // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1987. № 6. – С. 149-153.

104. **Скворцов, Л.М.** Синтез линейных систем методом полиномиальных уравнений / Л.М. Скворцов // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1991. № 6. – С. 54-59.
105. **Суходоев, М.С.** Анализ и синтез робастных систем автоматического управления в среде Matlab // М.С. Суходоев, С.А. Гайворонский, С.В. Замятин // Известия Томского политехнического университета, 2008. - т.312 - № 5. – С. 61-65.
106. **Суходоев, М.С.** Интервально-параметрический синтез робастной системы с гарантированными корневыми показателями качества. / М.С. Суходоев, С.А. Гайворонский // Молодежь и современные информационные технологии: Сборник трудов V Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. Томск, 2007. – С. 447-449.
107. **Суходоев, М.С.** Определение желаемой области расположения доминирующих полюсов замкнутой системы с учетом ее нулей / М.С. Суходоев, С.В. Ефимов, С.В. Замятин, С.А. Гайворонский // Известия Томского политехнического университета, 2008. - т.312 - № 5. – С. 57-61.
108. **Суходоев, М.С.** Параметрический синтез линейного регулятора интервальной системы с гарантированными корневыми показателями качества / М.С. Суходоев, С.А. Гайворонский, С.В. Замятин // Известия Томского политехнического университета, 2007. - т.311 - № 5.
109. **Суходоев М.С.** Размещение областей локализации доминирующих полюсов интервальной системы автоматического управления в заданном усеченном секторе / М.С. Суходоев, С.А. Гайворонский, С.В. Замятин // Известия Томского политехнического университета, 2007. - т.311 - № 5.
110. **Суходоев, М.С.** Условия робастной секторной устойчивости интервального полинома. / М.С. Суходоев, С.А. Гайворонский // «Молодежь и современные информационные технологии» III

- Всероссийская научно-практическая конференция студентов. 2005. С. 216-217.
111. **Суходоев, М.С.** Условия робастной устойчивости полинома с аффинной неопределенностью. / М.С. Суходоев, С.А. Гайворонский // Современные техника и технологии: Труды XI Международной научно-практической конференции студентов и молодых учёных. В 2 т. - Т. 2 - г. Томск, ТПУ, 28 марта - 1 апреля 2005 г.
 112. **Удерман, Э.Г.** Метод корневого годографа в теории автоматических систем / Э.Г. Удерман – М.: «Наука», 1972. – 448 с.
 113. **Удерман, Э.Г.** Метод корневого годографа в теории автоматического управления / Э.Г. Удерман – М.: Госэнергоиздат, 1963. – 112 с.
 114. **Харитонов В.Л.** Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений / В.Л. Харитонов // Дифференц. уравнения, 1978. №11. С. 2086-2088.
 115. **Харитонов, В.Л.** Задача распределения корней характеристического полинома автономной системы / В.Л. Харитонов // АиТ. 1981. №5. – С. 53-57.
 116. **Харитонов, В.Л.** О выпуклых направлениях для устойчивых полиномов / В.Л. Харитонов, Д. Хинричсен // АиТ. 1997. №3. – С. 81-92.
 117. **Хлебалин, Н.А.** Моделирование систем автоматического управления с интервальной неопределенностью параметров / Н.А. Хлебалин, Д.С. Пятых // Интервальная математика и распространение ограничений. 2004 – С. 258-266.
 118. **Хлебалин, Н.А.** Построение интервальных полиномов с заданной областью расположения корней / Н.А. Хлебалин // Аналитические методы синтеза регуляторов. – Саратов: Изд. Саратовского политех. ин-та, 1982. – С. 92-98.

ПРИЛОЖЕНИЕ А.

АКТЫ ВНЕДРЕНИЯ
РЕЗУЛЬТАТОВ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ