

Томский политехнический университет

На правах рукописи

Замятин Сергей Владимирович

**АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С
ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ НА ОСНОВЕ
КОРНЕВОГО ПОДХОДА**

05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка информации
(отрасль: информация и информационные системы)

Диссертация на соискание
ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель:
к.т.н., доцент Гайворонский С.А.

Томск – 2007

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
ГЛАВА I. МЕТОД КОРНЕВОГО ГОДОГРАФА В ИНТЕРВАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ	17
1.1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ МЕТОДА КОРНЕВОГО ГОДОГРАФА.....	17
1.2. МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ ИНТЕРВАЛЬНЫЙ КОРНЕВОЙ ГОДОГРАФ.....	19
1.3. ОСНОВНЫЕ ФАЗОВЫЕ СООТНОШЕНИЯ РЕБЕРНОЙ МАРШРУТИЗАЦИИ....	25
1.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАНИЧНОГО РЕБЕРНОГО МАРШРУТА.	30
1.5. ПРИМЕРЫ РЕБЕРНОЙ МАРШРУТИЗАЦИИ	32
1.6. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.....	41
ГЛАВА II. АНАЛИЗ КОРНЕВЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КАЧЕСТВА СИСТЕМ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ.....	43
2.1. КОРНЕВЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА ИНТЕРВАЛЬНЫХ СИСТЕМ	43
2.2. АНАЛИЗ ЛОКАЛИЗАЦИИ КОРНЕЙ ИНТЕРВАЛЬНОГО ПОЛИНОМА В ЗАДАННОМ СЕКТОРЕ	45
<i>2.2.1. Постановка задачи</i>	<i>45</i>
<i>2.2.2. Основные фазовые соотношения</i>	<i>47</i>
<i>2.2.3. Анализ отображения вершин</i>	<i>49</i>
<i>2.2.4. Критерии локализации корней в заданном секторе.....</i>	<i>51</i>
2.3. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ИНТЕРВАЛЬНОГО ПОЛИНОМА В ПРОИЗВОЛЬНОМ СЕКТОРЕ.....	56
2.4. УСЛОВИЯ ЛОКАЛИЗАЦИИ КОРНЕЙ ИНТЕРВАЛЬНОГО ПОЛИНОМА В СЕКТОРЕ С ОБЕСПЕЧЕНИЕМ ТРЕБУЕМОЙ СТЕПЕНИ УСТОЙЧИВОСТИ	61
<i>2.4.1. Постановка задачи.....</i>	<i>61</i>
<i>2.4.2. Анализ минимальной степени устойчивости интервального полинома.....</i>	<i>62</i>

2.4.3. Правило формирования набора граничных вершин для анализа устойчивости полинома в усеченном секторе	63
2.4.4. Условия локализации корней ИХП в заданном секторе	65
2.5. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ	67

ГЛАВА 3. СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ РОБАСТНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ИНТЕРВАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ОБЕСПЕЧЕНИЕМ ГАРАНТИРУЕМОЙ ДИНАМИКИ

3.1. СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ	69
3.2. ДОМИНАНТНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПОЛЮСОВ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ	70
3.2.1. Постановка задачи	70
3.2.2. Основные соотношения	72
3.3. РАЗМЕЩЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ ЛОКАЛИЗАЦИИ ДОМИНИРУЮЩИХ ПОЛЮСОВ ИНТЕРВАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ОБЕСПЕЧЕНИЕМ ЗАДАННЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КАЧЕСТВА	75
3.3.1. Размещение областей локализации доминирующих полюсов интервальной системы с обеспечением требуемой максимальной колебательности	75
3.3.2. Размещение областей локализации доминирующих полюсов интервальной системы с обеспечением требуемой максимальной колебательности и минимальной степени устойчивости по одному вершинному полиному.	88
3.3.3. Размещение областей локализации доминирующих полюсов интервальной системы с обеспечением требуемой максимальной колебательности и минимальной степени устойчивости по двум вершинным полиномам.	96

ГЛАВА 4. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДИКИ СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ СИСТЕМЫ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ	111
4.1. ТРЕБОВАНИЯ К СИСТЕМЕ ПОЗИЦИОНИРОВАНИЯ ДЛЯ	111
ИЗГОТОВЛЕНИЯ ЖИДКОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ МОНИТОРОВ	111
4.2. СТРУКТУРА СИСТЕМЫ ПОЗИЦИОНИРОВАНИЯ	114
4.3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ ПОЗИЦИОНИРОВАНИЯ	117
4.4. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРОВ СИСТЕМЫ ПОЗИЦИОНИРОВАНИЯ	120
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	130
ЛИТЕРАТУРА	132

ВВЕДЕНИЕ

В системах автоматического управления (САУ), как правило, не все параметры могут быть заданы точно. Они могут меняться в процессе эксплуатации системы по заранее неизвестным законам или быть в принципе недоступными для точного измерения. В тоже время в большинстве случаев известны пределы изменения таких параметров. В этих случаях нестабильные параметры можно отнести к классу интервально-неопределенных [36, 59, 66]. Системы, имеющие интервально-неопределенные параметры, получили название интервальных систем (ИС) [18].

Пусть линейная ИС описывается передаточной функцией:

$$W(s) = \frac{W_1(s, q)}{W_2(s, q)}, \quad (\text{B.1})$$

где полиномы $W_1(s, q)$ и $W_2(s, q)$ зависят от интервальных параметров, образующих вектор q . Так как $q_i \in [q_{i_{\min}}, q_{i_{\max}}]$, $i \in \overline{1, m}$, то интервальные параметры образуют многогранник P , представляющий собой прямоугольный гиперпараллелепипед с числом вершин 2^m .

Интервальность параметров q системы приводит к различным видам неопределенности ее характеристического полинома: его коэффициенты могут являться либо интервалами, либо функциями интервалов. Различают четыре вида неопределенности характеристических полиномов [36, 59, 66]:

- Интервальная неопределенность;
- Аффинная неопределенность;
- Полилинейная неопределенность;
- Полиномиальная неопределенность.

Смысл классификации характеристических полиномов по видам неопределенности покажем на примере системы второго порядка.

Интервальная неопределенность – коэффициенты полинома являются интервальными параметрами ($s^2 + q_1s + q_2$, $q_i \in [q_{i\min}, q_{i\max}]$).

Аффинная неопределенность – коэффициенты полинома образованы суммой или разностью интервальных параметров ($s^2 + (q_1 + q_2 + 2q_3)s + q_1 - 3q_2$, $q_i \in [q_{i\min}, q_{i\max}]$).

Полилинейная неопределенность – коэффициенты полинома линейно зависят от каждого параметра, если остальные параметры фиксированы ($s^2 + (q_1q_2 + 2q_3)s + 3q_1q_2$, $q_i \in [q_{i\min}, q_{i\max}]$).

Полиномиальная неопределенность – коэффициенты полинома зависят полиномиально хотя бы от одного параметра ($s^2 + (q_1q_2 + 2q_3^2)s + q_2$, $q_i \in [q_{i\min}, q_{i\max}]$).

Для интервальной и аффинной неопределенностей существуют достаточно простые методы анализа и синтеза ИС [12, 18, 19, 55, 60, 69], но если коэффициенты полинома являются более сложными функциями интервальных параметров, то анализ и синтез ИС значительно усложняется [19, 25, 61, 62, 70, 72, 75, 99].

Впервые задача о нахождении устойчивости ИС была поставлена итальянским ученым С. Фаэдо, который получил достаточные условия устойчивости. Однако наибольший интерес к данным задачам появился после того, как В.Л. Харитоновым были найдены необходимые и достаточные условия устойчивости интервальных полиномов [55]. Позднее появилось большое количество работ на основе результатов, полученных В.Л. Харитоновым [20, 57, 65, 79, 90, 98, 107]. Также Я.З. Цыпкин, Ю.И. Неймарк и их последователи развили частотный подход к исследованию устойчивости интервальных динамических систем [32, 33, 34, 35, 36, 40, 41]. Один из самых распространенных частотных подходов к анализу ИС основан

на принципе исключения нуля и теореме отображения Дезоера [105]. Этот подход позволяет работать с полиномами, имеющими не только полилинейную неопределенность, но также и полиномиальную, однако в этом случае требуется выполнения дополнительных условий [75]. Из корневых подходов к анализу ИС наиболее распространенным является подход, основанный на реберной теореме [63, 88, 89, 104]. Также существует большое количество работ, где анализ и синтез ИС основан на использовании корневого подхода [30, 42, 43, 44, 45, 46, 84] и применении свойств корневого годографа [1, 11, 53, 54, 64].

На основе правил интервальной арифметики характеристический полином любой системы управления с интервальными физическими параметрами можно привести к полиному с интервальными коэффициентами. Таким образом, на основе методов, разработанных для систем с интервальной неопределенностью характеристического полинома, можно оценивать устойчивость ИС с более сложными видами неопределенности. Но следует отметить, что следствием такого приведения коэффициентов полинома является переограничение области неопределенности, поэтому нельзя достоверно судить о неустойчивости ИС [22, 24]. Однако простота методов исследования ИС с интервальной неопределенностью компенсирует данный недостаток.

В случае интервальной неопределенности характеристический полином будет иметь вид:

$$P(s) = a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n : \underline{a}_i \leq a_i \leq \bar{a}_i, \underline{a}_n > 0, i = 0, \dots, n, \quad (\text{B.2})$$

где $\underline{a}_i = a_{i \min}$, $\bar{a}_i = a_{i \max}$. Коэффициенты полинома являются неопределенными параметрами, которые могут независимо принимать значения в своих интервалах неопределенности $[\underline{a}_i, \bar{a}_i]$. Условие $\underline{a}_n > 0$ накладывается для

того, чтобы обеспечить неизменность степени n полинома при всех $\underline{a}_n \leq a_n \leq \bar{a}_n$.

При проектировании ИС основная задача состоит в обеспечении желаемого качества ее функционирования или, в крайнем случае, устойчивости системы при любых возможных значениях интервальных параметров [2, 9, 27, 37].

В соответствии с корневым подходом [30], система является робастно устойчивой, если области локализации всех полюсов ИС располагаются в левой половине комплексной плоскости. Требуемое качество работы системы можно гарантировать, если система является относительно (регионально) робастно устойчивой, что соответствует расположению областей локализации корней в требуемых областях (регионах) комплексной плоскости. Задачи анализа региональной устойчивости рассматриваются в работах [67, 69, 101, 102, 106].

Рассмотрим некоторые существующие методы анализа робастной устойчивости.

Один из первых полиномиальных методов анализа ИС был разработан В. Харитоновым в 1978 году. Метод основан на теореме, которая позднее была названа именем автора – теорема Харитонова [55]:

Непрерывный интервальный полином является робастно устойчивым, если устойчивы четыре особым образом составленных полинома (они позднее тоже получили название по имени автора теоремы – полиномы Харитонова).

Пусть задан интервальный полином:

$$P(s) = a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n, \quad \underline{a}_i \leq a_i \leq \bar{a}_i, \quad i = 0, \dots, n, \quad \underline{a}_0 > 0, \quad \underline{a}_n > 0. \quad (\text{B.3})$$

Для анализа его робастной устойчивости необходимо вместо проверки бесконечного числа полиномов, проверить на устойчивость только четыре

полинома Харитонова, составленных из крайних значений коэффициентов, чередующихся парами (два минимальных значения – два максимальных):

$$P_1(s) = \underline{a}_0 + \underline{a}_1s + \bar{a}_2s^2 + \bar{a}_3s^3 + \dots ,$$

$$P_2(s) = \bar{a}_0 + \underline{a}_1s + \underline{a}_2s^2 + \bar{a}_3s^3 + \dots ,$$

$$P_3(s) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1s + \underline{a}_2s^2 + \underline{a}_3s^3 + \dots ,$$

$$P_4(s) = \underline{a}_0 + \bar{a}_1s + \bar{a}_2s^2 + \underline{a}_3s^3 + \dots$$

Несмотря на блестящий и плодотворный результат, теорема имеет ограничение, она позволяет оценивать робастную устойчивость полиномов только с интервальными коэффициентами. Другой недостаток состоит в наличии большого консерватизма в случае, если интервальные коэффициенты являются приведенными [24].

Позднее появился более совершенный аппарат анализа – реберная теорема, с ее понятиями вершинного и реберного полиномов [63]. Вершинам и ребрам бруса P , образованного интервальными коэффициентами (либо параметрами, но только для случая аффинной неопределенности) полинома (В.2) соответствуют вершинные и реберные полиномы. Т.е. реберный полином является ветвью корневого годографа и «соединяет» два «соседних» вершинных полинома (соответствующих соседним вершинам куба). Если l - число интервальных коэффициентов, то количество реберных полиномов будет равно $l2^{l-1}$

Реберная теорема [63]:

Полином (В.2) устойчив в любой точке многогранника параметров, если он устойчив вдоль его ребер.

Данная теорема позволяет эффективно оценивать робастную устойчивость, если число l неопределенных параметров мало. В этом случае следует проверить устойчивость всех реберных полиномов. Они представляют собой однопараметрические семейства вида

$\lambda M(s) + (1 - \lambda)N(s)$ (где $M(s)$, $N(s)$ – два соседних вершинных полинома), и в соответствии с критерием Найквиста (роль точки -1 здесь играет $-(1 - \lambda)/\lambda$) их устойчивость при $0 \leq \lambda \leq 1$ эквивалентна тому, что полиномы $M(s)$, $N(s)$ устойчивы, а годограф $G(j\omega) = M(j\omega)/N(j\omega)$ не пересекает отрицательной вещественной полуоси. Однако если l велико, то число таких проверок оказывается значительным (например, уже для $l=5$ нужно проверить $l2^{l-1} = 80$ реберных полиномов), что потребует большого объема вычислений.

Шаги вперед по снижению вычислительной сложности подхода были сделаны в работах [3, 4, 13, 14, 16], в которых проводились исследования возможности сокращения количества вычислений при анализе ИС на основе реберной теоремы. Было установлено, что не требуется проверять устойчивость всех реберных полиномов, достаточно проверять только те, которые образуют границу области локализации корней на комплексной плоскости.

Еще один из результатов проведенных исследований состоит в том, что оценивание региональной устойчивости систем с интервальной неопределенностью характеристического полинома в секторе или усеченном секторе, сводится к анализу 2^n вершинных полиномов – полиномов с постоянными коэффициентами, принимающими свои граничные значения. Также, при решении этой задачи можно использовать достаточные условия. В частности, эффективными являются условия попадания корней ИХП в сектор, заданный углом $\pi \pm \varphi^*$, основанные на достаточном критерии устойчивости Липатова – Соколова [37]. Эти условия имеют вид:

$$\frac{a_i^2}{a_{i-1}a_{i+1}} \geq \delta^*, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (\text{B.4})$$

где δ^* - действительная функция величин n и φ^* (ее значения представлены на соответствующих номограммах [37]).

На основе вышесказанного можно заметить, что максимальную колебательность и минимальную степень устойчивости ИС, а значит и качество работы ИС с интервальной неопределенностью характеристического полинома определяют корни только вершинных полиномов. С другой стороны, на основе результатов работ [4, 14, 16] можно утверждать, что для анализа относительной устойчивости ИС, нет необходимости проверять устойчивость всех вершинных полиномов.

Поэтому возникает естественное желание знать существенные вершины, устойчивость которых гарантировала бы относительную устойчивость ИС. Для их определения предлагается использовать реберную маршрутизацию и фазовые соотношения метода многопараметрического интервального корневого годографа.

Более сложной задачей, решаемой при работе с ИС, является задача синтеза. Под синтезом ИС будем понимать определение настроек линейного регулятора заданной структуры, гарантирующего желаемое робастное качество [6, 7, 58, 62, 71].

По различным данным в настоящее время около 90% регуляторов, используемых в промышленности – ПИД-регуляторы [29]. Но при стационарных подходах к их настройке нельзя гарантировать требуемое качество работы системы во всех возможных режимах ее функционирования [8, 28, 31, 56, 100]. Для устранения данного недостатка возможно и целесообразно использование робастных алгоритмов настройки регуляторов. Это позволяет, не изменяя аппаратной части САУ, гарантировать требуемое качество работы системы.

Существующие методы настройки робастных регуляторов имеют ряд недостатков:

1. Они основаны на оптимизации по различным критериям [73, 74, 76, 83, 93], соответственно, требуют больших вычислительных затрат.
2. Большинство методов не всегда позволяют строить регуляторы низких порядков, поэтому получаемые регуляторы высокого порядка приходится аппроксимировать регуляторами низкого порядка, соответственно, не всегда можно гарантировать требуемый результат [29, 82].
3. Возникает проблема отсутствия робастности получаемой системы к отклонениям параметров регулятора [77].
4. Некоторые методы позволяют проводить синтез ИС не более чем по двум параметрам [38, 59].

Более того, задача построения робастных регуляторов заданной структуры (в частности ПИД-регуляторов) не имеет универсального решения.

Многие из предлагаемых методов синтеза робастных ИС основаны на результатах Харитонова. Так, например, полиномы Харитонова используются при определении параметров линейного регулятора на основе робастного D-разбиения [38]. Данный метод позволяет выбрать две настройки регулятора из параметрической области устойчивости, что обеспечивает попадание корней ИХП в заданную односвязную область комплексной плоскости.

Известно, что динамика любой линейной системы с постоянными коэффициентами главным образом зависит от расположения ее доминирующих полюсов. Поэтому для обеспечения гарантированных динамических свойств ИС при синтезе робастного регулятора представляет интерес использование принципа доминирования [5, 108]. В соответствии с данным принципом, для получения требуемого качества функционирования системы, доминирующие полюсы необходимо расположить желаемым образом, а остальные (свободные) полюсы разместить значительно левее доминирующих. Решение задачи размещения доминирующих полюсов

стационарных систем в заданных точках комплексной плоскости рассматривается в ряде работ. В работах [49, 50, 51, 52], например, эта задача решается с помощью полиномиальных уравнений синтеза. В [47, 48] используется интерполяционный метод назначения доминирующих полюсов. В этом случае свободные полюсы системы могут располагаться на комплексной плоскости произвольно. Поэтому на заключительном этапе предусматривается дополнительная проверка выполнения условий доминирования.

Таким образом, в результате проведенного обзора существующих подходов к анализу и синтезу ИС можно сделать следующие выводы и предложения.

Анализ робастного качества ИС

Для анализа робастного качества системы с интервальной неопределенностью целесообразно применять корневой подход с использованием метода многопараметрического интервального корневого годографа и его фазовых соотношений. В основу этого подхода предлагается положить свойства отображения вершин параметрического многогранника ИС на комплексную плоскость корней. При этом целью является нахождение существенных вершин, позволяющих оценивать относительную устойчивость ИС. Задача анализа робастного качества в данном случае будет сводиться к оценке качества ИС в этих существенных вершинах.

Синтез ИС с гарантируемой динамикой

Для синтеза ИС целесообразно применение подхода, основанного на доминантном расположении полюсов ИС и анализе фазовых соотношений метода многопараметрического интервального корневого годографа. Предлагаемый подход позволяет размещать области локализации полюсов замкнутой системы в соответствии с принципом доминирования, т.е. выделять пару областей локализации полюсов ИС, которые определяют

колебательность и степень устойчивости системы, а остальные области локализации полюсов ИС размещать более удаленно от мнимой оси.

Таким образом, основной **целью работы** является разработка методик для анализа робастной относительной устойчивости ИС и параметрического синтеза линейных регуляторов, обеспечивающих гарантированную динамику в ИС. Для ее достижения в работе решены следующие задачи:

- найдены условия и сформулировано правило для формирования набора вершинных полиномов, которые могут определять максимальную колебательность ИС;

- найдены условия и сформулировано правило для формирования набора вершинных полиномов, которые могут определять максимальную колебательность и минимальную степень устойчивости ИС;

- найдены выражения, устанавливающие соответствие между углами выхода ветвей корневого годографа и расположением полюсов системы на комплексной плоскости;

- сформулированы фазовые условия формирования полиномов, корни которых определяют показатели качества синтезируемых ИС;

- разработаны методики синтеза робастного линейного регулятора на основе желаемого расположения областей локализации доминирующих и свободных полюсов системы;

Научную новизну работы определяют:

- методики анализа робастной относительной устойчивости интервальных систем на основе выбора и исследования существенных вершинных полиномов;

- постановка задачи синтеза ИС по одному полиному, определяющему наихудшие показатели качества ИС;

-аналитические выражения, устанавливающие соответствие между углами выхода ветвей корневого годографа и расположением полюсов ИС на комплексной плоскости;

-фазовые условия формирования полиномов, корни которых определяют показатели качества синтезируемых ИС;

-методика синтеза робастного линейного регулятора на основе желаемого расположения областей локализации доминирующих и свободных полюсов системы по *одному* вершинному полиному;

-методика синтеза робастного линейного регулятора на основе желаемого расположения областей локализации доминирующих и свободных полюсов ИС по *двум* вершинным полиномам.

Практическая ценность. Полученные методики анализа робастной относительной устойчивости могут применяться для исследования разрабатываемых и существующих систем, объекты управления которых имеют интервально-неопределенные параметры. Применение разработанных методик синтеза позволяет получать регуляторы пониженного порядка по выходу, которые обеспечивают не только робастную устойчивость, но и желаемые корневые оценки качества ИС. Методики настройки регуляторов являются эффективным инструментом для обеспечения гарантированного качества функционирования систем в условиях интервальной неопределенности параметров. Разработанные методики анализа и синтеза ИС являются достаточно формализованными для их программной реализации.

Апробация работы. Основные положения и результаты диссертационной работы докладывались, обсуждались и вошли в сборники трудов международного симпозиума ISSCAA 2005 (г. Харбин, Китай), XI, XII международных научно-практических конференций студентов,

аспирантов и молодых ученых «Современные техника и технологии» (г. Томск), всероссийском совещании по интервальному анализу и его приложениям «ИНТЕРВАЛ-06», 2006 г. (г. Санкт-Петербург), III, IV Всероссийских научно-практических конференций студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодежь и современные информационные технологии» (г. Томск), Четвертой международной конференции IFAC «Управление в производстве и логистика», (г. Сибиу, Румыния).

Публикации. По теме диссертационной работы опубликовано 9 работ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы, включающего 108 наименований, и приложения; содержит 147 печатных страницы основного текста, 51 рисунок и 3 таблицы.

ГЛАВА I. МЕТОД КОРНЕВОГО ГОДОГРАФА В ИНТЕРВАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

1.1. Основные положения метода корневого годографа

В этой главе рассматривается метод корневого годографа и метод многопараметрического интервального корневого годографа [13], применимый к системам с интервальными параметрами. Также рассматривается способ построения границ областей локализации корней интервального полинома методом реберной маршрутизации [13], основанным на методе многопараметрического интервального корневого годографа. Рассмотрение данного материала необходимо для введения понятий и математических выражений на основе которых получены основные результаты работы.

Корневым годографом называется совокупность траекторий, описываемых корнями характеристического уравнения системы с обратной связью в плоскости корней при изменении одного из ее параметров [53].

Пусть замкнутая система имеет вид:

$$W(s) = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)},$$

Получим характеристическое уравнение:

$$W(s) = W_1(s)W_2(s) = -1, \quad (1.1)$$

где $W(s)$ содержит множитель k – вещественное число. Так как $W_1(s)$ и $W_2(s)$ являются функциями комплексной переменной s , то уравнение (1.1) распадается на два уравнения – уравнение модулей и уравнение фаз:

$$|W(s)| = 1,$$

при $k > 0$

$$\arg W(s) = \pm(2i + 1)\pi, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

При $k < 0$

$$\arg W(s) = \pm 2i\pi, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Случай $k > 0$ соответствует отрицательной обратной связи, случай $k < 0$ - положительной обратной связи. Далее будем рассматривать только практически значимый случай $k > 0$.

Уравнение фаз (1.2) является уравнением корневых годографов, так как каждый корень s_k этого уравнения удовлетворяет также уравнению (1.1).

Пусть $W(s)$ имеет вид:

$$W(s) = \frac{k(s - N_1)(s - N_2) \dots (s - N_m)}{(s - P_1)(s - P_2) \dots (s - P_n)}, \quad (1.3)$$

где N_1, N_2, \dots, N_m - нули, P_1, P_2, \dots, P_n - полюсы передаточной функции разомкнутой системы. Каждый из множителей, $(s - P_i)$ или $(s - N_j)$ выражения (1.3), изображается в плоскости s нулей и полюсов (рис. 1.1) вектором, направленным из точки $P_i(N_j)$ в точку S (где S - произвольная точка в этой плоскости) под соответствующим углом Θ_i (Θ_j^0) к вещественной оси.

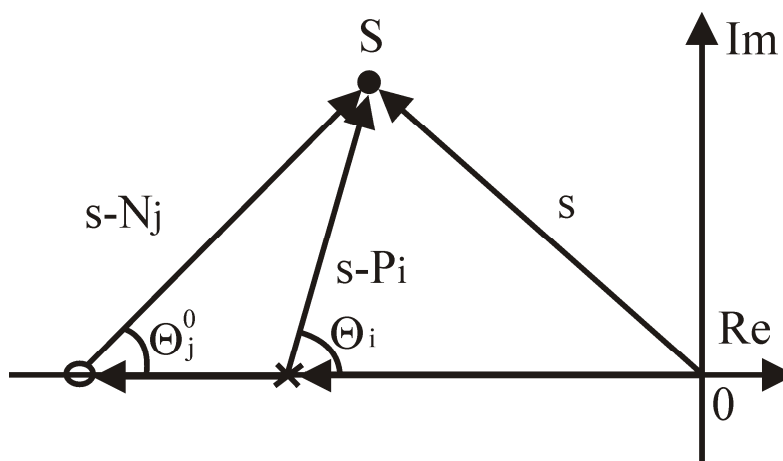


Рис. 1.1 – Векторы нулей и полюсов системы на плоскости s .

Если же точка S является одним из корней s_k ($k=1,2,\dots,n$) характеристического уравнения (1.1) системы, то комплексное число удовлетворяет уравнению (1.2), которое можно записать в развернутой форме:

$$\sum_{j=1}^m \Theta_j^0 - \sum_{i=1}^n \Theta_i = \pm(2\nu + 1)\pi, \quad \nu = 0,1,2,\dots \quad (1.4)$$

Выражение (1.4) является основным фазовым соотношением метода корневого годографа.

Пользуясь выражением (1.4) и зная расположение полюсов и нулей системы, можно определять направление движения полюсов системы при изменении коэффициента усиления системы.

1.2. Многопараметрический интервальный корневой годограф

Если одновременно изменяются несколько коэффициентов характеристического полинома, то возможно применение многопараметрического интервального корневого годографа [13, 14]. Рассмотрим данный метод.

Пусть полином имеет вид

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 \quad (1.5)$$

где $a_i \in [a_{i_{\min}}, a_{i_{\max}}]$ и образуют прямоугольный гиперпараллелепипед P с 2^m вершинами ($m \leq n+1$). Координаты любой точки P относительно вершины V_q , $q = \overline{1, 2^m}$, определяются выражениями

$$a_i = a_i^q + \Delta a_i, \quad i \in \overline{0, n}, \quad (1.6)$$

где

$$(a_{i_{\min}} - a_i^q) \leq \Delta a_i \leq (a_{i_{\max}} - a_i^q), \quad (1.7)$$

Δa_i - приращение i -го интервального коэффициента, a_i^q - его значение в вершине V_q .

Подставляя выражение (1.6) в (1.5) получим:

$$D^q(s) + \sum_i \Delta a_i s^i = 0, \quad i \in \overline{0, n} \quad (1.8)$$

где $D^q(s) = \sum_i a_i^q s^i + \sum_p a_p s^p$, $p \in \overline{0, n}$, $p \neq i$ - вершинный полином, a_p - постоянные коэффициенты полинома (1.5).

На основании (1.8) запишем уравнение отображения R_i^q на плоскость корней

$$D^q(s) + \Delta a_i s^i = 0. \quad (1.9)$$

Пусть (1.9) является характеристическим уравнением системы с единичной обратной связью. Тогда передаточная функция эквивалентной разомкнутой системы для ребра будет иметь вид

$$W_i^q(\Delta a_i, s) = \frac{\Delta a_i s^i}{D^q(s)}. \quad (1.10)$$

Анализируя (1.9) и (1.10) с позиции теории корневого годографа [53], заметим, что при изменении Δa_i в интервале (1.7) корни движутся от полюсов функции (1.10), соответствующих одному концу R_i^q , к корням (1.9) на другом конце R_i^q . При этом они образуют фрагментарные ветви корневого годографа. Назовем их реберными ветвями (обозначим RS_i^q), а их начала и концы - корневыми узлами (U_q). Тогда для $\varphi: P \rightarrow S_m$ будут справедливы выражения: $\varphi(R_i^q) = RS_i^q$, $\varphi(V_q) = U_q$. Следовательно, согласно реберной теореме [63] области локализации корней (1.5), будут ограничены реберными ветвями RS_i^q однопараметрических интервальных корневых годографов. Такой вывод позволяет рассматривать S_m как некоторый многопараметрический интервальный корневой годограф.

Область, ограниченная S_m , является областью локализации корней интервального полинома (1.5)

На основании (1.9) запишем уравнение отображения плоскости грани G_{ij}^q при снятии интервальных ограничений

$$a_i s^i + a_j s^j + \sum_k a_k^q s^k + \sum_p a_p s^p = 0. \quad (1.11)$$

Пусть один из корней уравнения (1.11) имеет вид $s_r = \alpha + j\beta, r \in \overline{1, n}$. Подставляя в (1.11) координаты s_r и выделяя вещественную и мнимую части, получаем систему двух линейных уравнений с двумя переменными a_i и a_j

$$\begin{cases} a_i \operatorname{Re}(\alpha + j\beta)^i + a_j \operatorname{Re}(\alpha + j\beta)^j + \operatorname{Re} \left[\sum_k a_k^q (\alpha + j\beta)^k + \sum_p a_p (\alpha + j\beta)^p \right] = 0; \\ a_i \operatorname{Im}(\alpha + j\beta)^i + a_j \operatorname{Im}(\alpha + j\beta)^j + \operatorname{Im} \left[\sum_k a_k^q (\alpha + j\beta)^k + \sum_p a_p (\alpha + j\beta)^p \right] = 0. \end{cases} \quad (1.12)$$

Согласно [13, 14], для уравнений системы (1.12) характерны следующие два случая:

1. Уравнения независимы и система имеет единственное решение $a_i = a_i^*, a_j = a_j^*$. Следовательно, $\varphi^{-1}(s_r) = P^*$, $P^* = (a_i^*, a_j^*)$, причем точка P^* принадлежит плоскости G_{ij}^q .

2. Уравнения отличаются постоянным множителем. Из этого следует, что в плоскости G_{ij}^q существует прямая t , описываемая любым из уравнений системы (1.12), причем $\varphi^{-1}(s_r) = t$.

Рассмотрим границы области S_r локализации корня s_r .

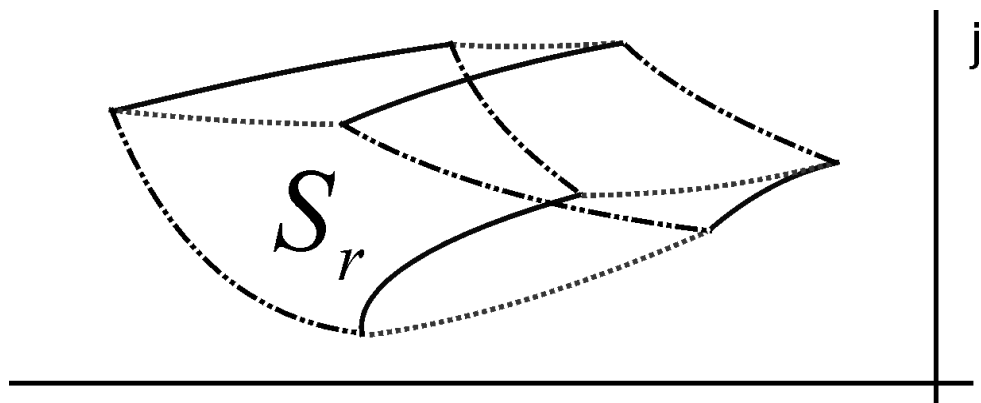
Пусть $\varphi^{-1}(s_r) = P^*$, причем $P^* \in R_i^q$. Так как координаты P^* являются единственным решением (1.12), то RS_i^q - единственная ветвь, проходящая

через S_r . Следовательно, границами S_r являются непересекающиеся образы ребер G_{ij}^q [13, 14].

Пусть $\varphi^{-1}(s_r) = t$ и $t \cap G_{ij}^q = \overline{P_1 P_2}$ (точки P_1 и P_2 принадлежат ребрам G_{ij}^q). Следовательно, $\varphi^{-1}(s_r) = \overline{P_1 P_2}$ и через S_r (назовем его особым корневым узлом и обозначим U^*) проходит множество ветвей корневых годографов по интервальным параметрам, образующим пересекаемые прямой t ребра. Угол входа каждой такой ветви в U^* равен углу выхода, поэтому все пересекающиеся в U^* ветви лежат между двумя пересекающимися там же реберными ветвями. Следовательно, в этом случае в состав границы S_r входят пересекающиеся образы двух ребер G_{ij}^q .

В соответствии с [13, 14] будем называть ребра, отображающиеся на границы корневых областей, граничными ребрами (обозначим GR_i^q), их образы - граничными реберными ветвями (GRS_i^q), а связываемые ими корневые узлы - граничными корневыми узлами (GU_q).

На рис. 1.2 приведены примеры отображения параметрического многогранника системы с тремя интервальными параметрами на комплексную плоскость корней. На рис. 1.2а показана область S_r , границами которой являются непересекающиеся образы ребер P , а на рис. 1.2б она ограничена пересекающимися образами ребер P .



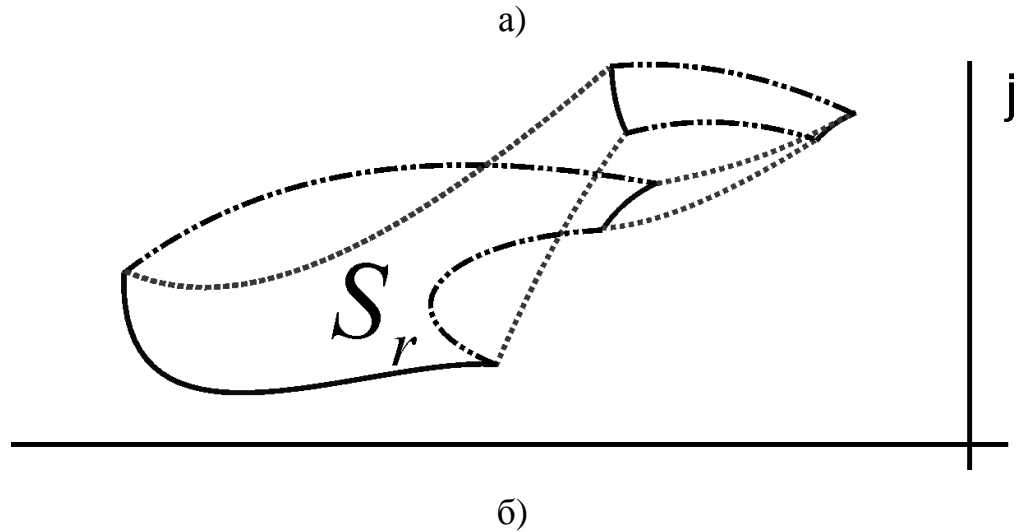


Рис.1.2. Отображение параметрического многогранника системы на комплексную плоскость корней.

Условием существования прямой t в пространстве коэффициентов a_i и a_j и ее отображения в $U^*(\alpha; j\beta)$ является линейная зависимость уравнений системы (1.12). Эта зависимость имеет место, если существуют значения α и β , при которых выполняются равенства

$$\frac{\operatorname{Re}((\alpha + j\beta)^i)}{\operatorname{Im}((\alpha + j\beta)^i)} = \frac{\operatorname{Re}((\alpha + j\beta)^j)}{\operatorname{Im}((\alpha + j\beta)^j)} = \frac{\operatorname{Re}\left[\sum_k a_k^q (\alpha + j\beta)^k + \sum_p a_p (\alpha + j\beta)^p\right]}{\operatorname{Im}\left[\sum_k a_k^q (\alpha + j\beta)^k + \sum_p a_p (\alpha + j\beta)^p\right]}. \quad (1.13)$$

Очевидно, что такие α и β должны являться решениями полученных из (1.13) систем нелинейных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re}((\alpha + j\beta)^i) \operatorname{Im}((\alpha + j\beta)^j) - \operatorname{Re}((\alpha + j\beta)^j) \operatorname{Im}((\alpha + j\beta)^i) = 0; \\ \operatorname{Re}((\alpha + j\beta)^j) \operatorname{Im} \left[\sum_k a_k^q ((\alpha + j\beta)^k) + \sum_p a_p ((\alpha + j\beta)^p) \right] - \\ \operatorname{Im}((\alpha + j\beta)^j) \operatorname{Re} \left[\sum_k a_k^q ((\alpha + j\beta)^k) + \sum_p a_p ((\alpha + j\beta)^p) \right] = 0. \end{array} \right. \quad (1.14)$$

Согласно [13, 14], заметим, что для устойчивого полинома области локализации корней S_r располагаются в левой полуплоскости и поэтому возможные узлы U^* имеют координаты $\alpha < 0$ и $\beta \neq 0$. В результате анализа уравнений системы (1.14) установлено, что U^* существуют только в отображениях плоскостей тех граней, которые образованы коэффициентами полинома (1.14) с индексами, удовлетворяющими условию

$$|i - j| \geq 3. \quad (1.15)$$

Для доказательства этого утверждения, согласно [13, 14] сделаем в (1.14) обратную подстановку $\alpha + j\beta = s$. На основе формулы Муавра в ее тригонометрическом представлении

$$s^b = |s|^b (\cos(b\varphi) + j \sin(b\varphi))$$

преобразуем систему (1.14) к виду

$$\left\{ \begin{array}{l} |s|^{i+j} (\cos(i\varphi) \sin(j\varphi) - \cos(j\varphi) \sin(i\varphi)) = 0; \\ \sum_z a_z |s|^{j+z} (\cos(j\varphi) \sin(z\varphi) - \cos(z\varphi) \sin(j\varphi)) = 0, \end{array} \right. \quad (1.16)$$

где $z = k \cup p$. В системе (1.16) координатами U^* теперь являются угол φ и модуль s . Учитывая, что $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, а также используя теорему разности аргументов тригонометрических функций, уравнения системы (1.16) можно упростить

$$\begin{cases} \sin((j-i)\varphi) = 0; \\ \sum_z a_z |s|^{j+z} \sin((z-j)\varphi) = 0. \end{cases} \quad (1.17)$$

Очевидно, что при наложенных условиях $\alpha < 0$ и $\beta \neq 0$ решения (1.17) должны удовлетворять неравенствам $\varphi \neq 0^\circ, \varphi \neq 90^\circ$. В этом случае первое уравнение системы (1.17) будет иметь решения только при $|i-j| \geq 3$. Эти решения для верхней полуплоскости корней определяются выражением

$$\varphi = \pi - \frac{\pi}{|i-j|}, \quad |i-j| = 3, 4, 5, \dots$$

Подстановка значения φ во второе уравнение системы (1.17) позволяет найти модуль S , и, тем самым, определить координаты U^* на комплексной плоскости.

В разделе рассмотрен метод многопараметрического интервального корневого годографа. Особенностью данного метода является наличие особых корневых узлов U^* , рассмотрение которых необходимо для определения границ областей локализации корней интервального полинома. Рассмотрены условия наличия таких корневых узлов и способы их поиска.

1.3. Основные фазовые соотношения реберной маршрутизации

Рассмотрим основные фазовые соотношения реберной маршрутизации, позволяющие определять ребра многогранника параметров, отображения которых входят в состав границ областей локализации корней [13, 14].

Определим условия принадлежности U_q границе S_r (рис.1.3).

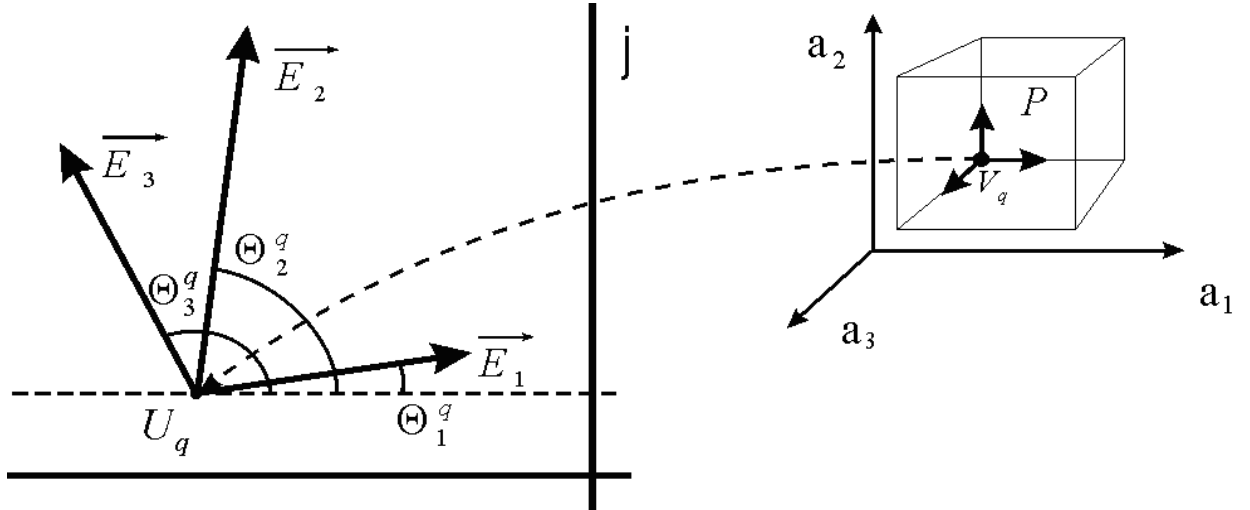


Рис.1.3. – Отображение граней параметрического многогранника P

Для этого, согласно [13, 14], введем в рассмотрение угол выхода R_i^q из комплексного U_q , являющегося полюсом функции (1.10). Обозначим этот угол Θ_i^q . Так как на функцию (1.10) распространяются все известные свойства корневых годографов, то Θ_i^q можно найти из уравнения фаз [53, 54], записанного для U_q . Если $D^q(s)$ имеет степень n , а $A_i(s)$ степень z , тогда Θ_i^q при увеличении a_i находится по формуле

$$\Theta_i^q = 180^\circ - \sum_{k=1}^n \Theta_k + \sum_{l=1}^z \Theta_l, \quad (1.18)$$

а при уменьшении a_i

$$\Theta_i^q = -\sum_{k=1}^n \Theta_k + \sum_{l=1}^z \Theta_l, \quad (1.19)$$

где Θ_k и Θ_l - углы между вещественной осью и векторами, направленными из U_q соответственно к k -ому полюсу и к l -ому нулю функции (1.10).

Проанализируем возможные направления движения s_r из U_q , рассматривая области отображения граней P с общей вершиной V_q [13, 14]

(см. рис. 1.3). В каждой из них направление движения S_r определяется вектором $\vec{E}_{ij} = \vec{E}_i + \vec{E}_j$, где \vec{E}_i и \vec{E}_j – реберные векторы, задаваемые Θ_i^q и Θ_j^q . Согласно правилам векторной алгебры, \vec{E}_{ij} выходит из U_q и лежит внутри образованного \vec{E}_i и \vec{E}_j угла Ψ_{ij} , причем $0^\circ \leq \Psi_{ij} \leq 180^\circ$.

Так как из GU_q выходят две граничные реберные ветви, то соответствующие им векторы образуют граничный угол $G\Psi_{ij}$, также лежащий в диапазоне $[0^\circ, 180^\circ]$. В этом случае все остальные углы Ψ_{ij} , и, следовательно, определяющие их реберные векторы должны принадлежать $G\Psi_{ij}$. Выразим данное условие через углы выхода реберных ветвей, отсчитываемые от положительной вещественной полуоси. Оно соответствует выполнению C_m^2 неравенств [13, 14]

$$\left| \Theta_m^{Vq} - \Theta_1^{Vq} \right| < 180^\circ. \quad (1.20)$$

Таким образом, на основании проверки (1.20) можно установить принадлежность вершины P границе области S_r локализации комплексного корня ИХП.

На рис.1.4 показаны возможные варианты расположения векторов выхода RS_i^q из граничного корневого узла GU_q (рис. 1.4а) и из узла, расположенного внутри S_r (рис. 1.4б).

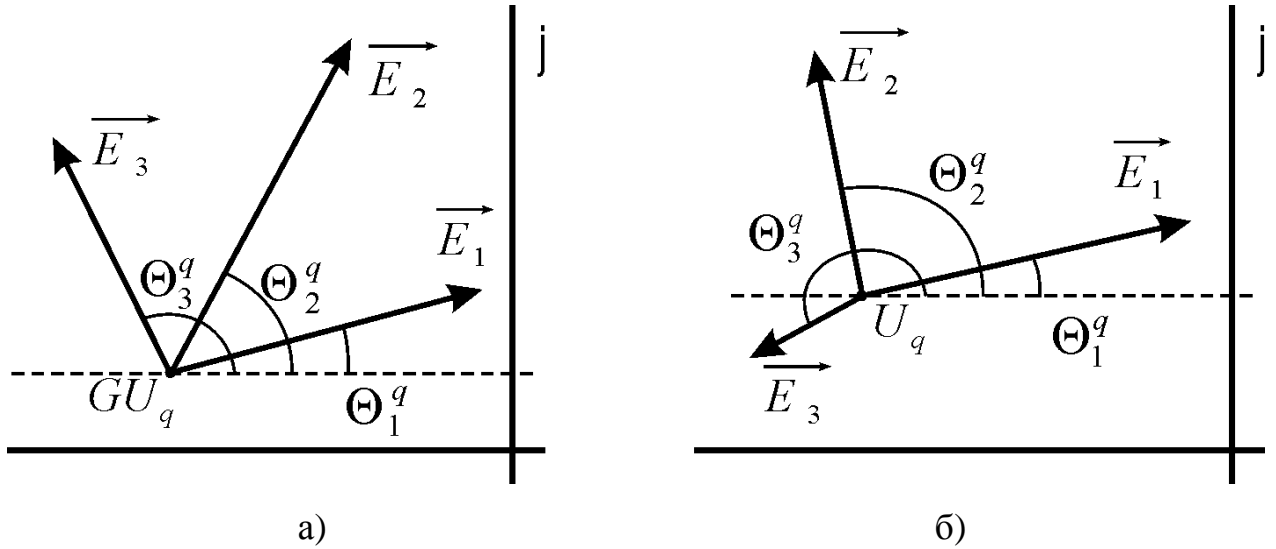
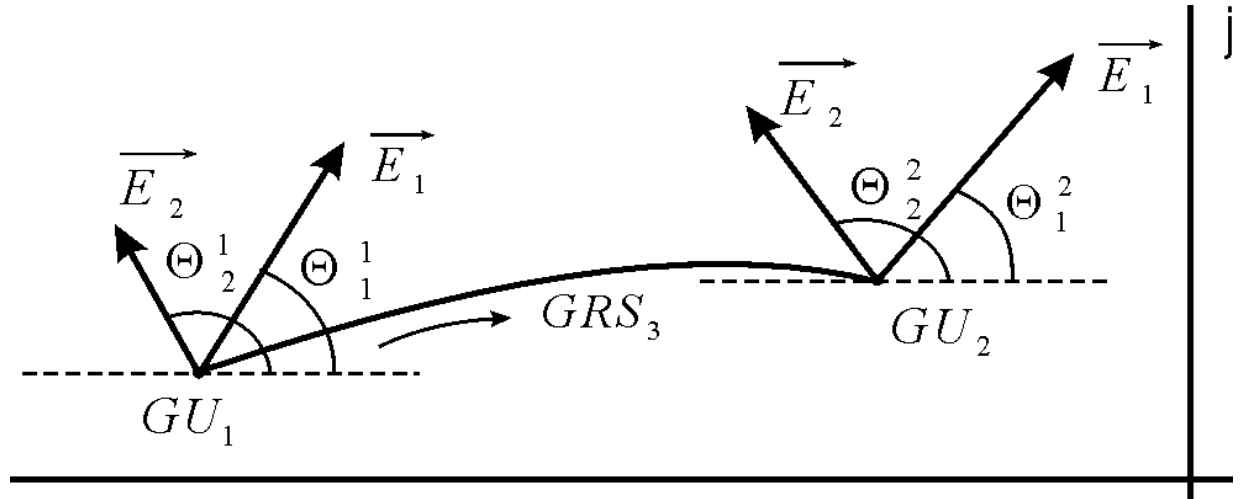


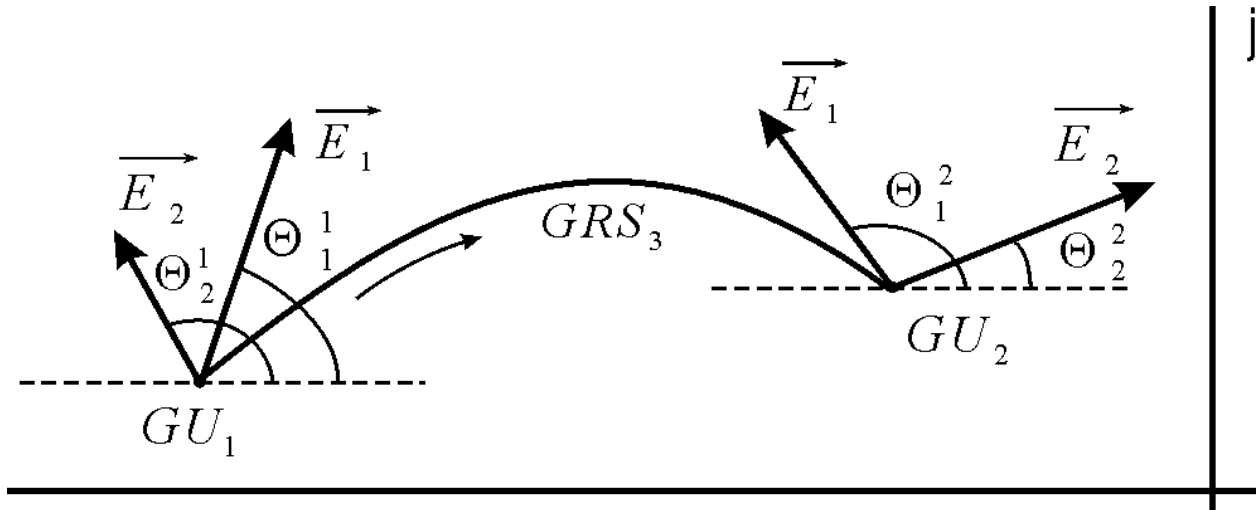
Рис.1.4. – Расположение векторов выхода RS_i^q из корневого узла

Согласно [13, 14], проанализируем возможные соотношения углов выхода двух реберных ветвей (RS_i и RS_j) из соседних граничных корневых узлов S_r , связанных одной граничной реберной ветвью GRS_k . Очевидно, что прообразы RS_i и RS_j являются ребрами одной грани P .

Пусть $U^* \notin S_r$. При изменении a_k по ребру GR_k корень S_r движется по GRS_k . При этом могут изменяться углы выхода из S_r ветвей RS_i^s и RS_j^s . Однако, так как $U^* \notin S_r$, то RS_i^s и RS_j^s не пересекаются. Поэтому при переходе S_r от одного GU_q к другому будет сохраняться последовательность величин Θ_i^s и Θ_j^s (рис. 1.5a). Обобщая этот случай на большее число рассматриваемых реберных ветвей, можно заключить, что в соседних граничных корневых узлах значения их углов выхода будут располагаться в одинаковой последовательности [13, 14].



а)



б)

Рис. 1.5. – Расположение векторов выхода RS_i^q из корневого узла при варьировании одного параметра

Пусть $U^* \in S_r$, тогда RS_i^s и RS_j^s могут пересекаться в U^* . Если при изменении a_k возникнет ситуация $s_r = U^*$, то на оставшемся участке GRS_k изменится соотношение Θ_i^s и Θ_j^s . В этом случае в соседних граничных корневых узлах не будет сохраняться последовательность углов выхода реберных ветвей (рис. 1.5б).

1.4. Определение граничного реберного маршрута.

На основе рассмотренных выше фазовых соотношений и условий возможного наличия U^* в S_r приведены правила граничной реберной маршрутизации многогранника интервальных коэффициентов P для полинома (1.1). Так как задача состоит в нахождении прообразов границ областей локализации комплексных корней полинома (1.1), то будем рассматривать $n \geq 2$.

Согласно [13, 14], если индексы любой пары из m интервальных коэффициентов полинома (1.1) не удовлетворяют условию $|i - j| \geq 3$, то при $\varphi: P_m \rightarrow S$ в левой полуплоскости не может быть U^* . В этом случае для построения граничного реберного маршрута достаточно найти один из узлов GU_q и для него определить последовательность величин углов Θ_i^q . Крайние углы в этой последовательности укажут на интервальные коэффициенты, определяющие две граничные реберные ветви. Согласно установленному [13, 14] свойству сохранения угловой очередности выхода RS_i^q из GU_q , если известна GRS_i^q , то последующей граничной реберной ветвью будет та, модуль разности между углом выхода которой и углом выхода GRS_i^q будет наименьшим (наибольшим). Установленной таким образом последовательности реберных ветвей, ограничивающих область локализации комплексного корня, однозначно соответствует последовательность GR_i^q , образующая искомым замкнутый граничный реберный маршрут. В данном случае он содержит $2m$ ребер P .

Если для индексов хотя бы одной пары интервальных коэффициентов полинома (1.1) выполняется условие (1.15), то в S_r возможно наличие U^* . В этом случае также необходимо найти GU_q , затем для него определить

последовательность Θ_i^q и соответствующую ей последовательность ребер P . Если при движении по полученному таким образом реберному маршруту очередное ребро и следующее за ним окажутся образованными интервальными коэффициентами a_i и a_j с индексами, удовлетворяющими условию (1.15), то возможно, что $U^* \in \varphi(G_{ij})$. Поэтому в граничный реберный маршрут в таком случае следует включить все ребра грани G_{ij} . При этом общее число ребер маршрута будет равно $4l + 2m$, где l – количество выполняющихся неравенств (1.15) [13, 14].

На основании проведенного анализа [13, 14] составлен алгоритм определения граничного реберного маршрута P .

1. Определение координат вершин P , соответствующих граничным значениям m коэффициентов $a_i, i \in \overline{0, n}$.

2. Нахождение для произвольной вершины V_q комплексного корня полинома (1.1), соответствующего узлу $U_q, q \in \overline{1, 2^m}$.

3. Вычисление для U_q на основании выражений (1.18) и (1.19) m углов $\Theta_i^q, i \in \overline{0, n}$.

4. Проверка условий (1.20) на принадлежность U_q границе S_r . Если хотя бы одно из условий (1.20) не выполняется, то следует выбрать другую вершину P и повторить п. 2 - 4.

5. Составление последовательности углов выхода реберных ветвей из GU_q и соответствующего ей упорядоченного набора интервальных коэффициентов.

6. Формирование реберного маршрута P в соответствии с полученной в п. 5 последовательностью изменения интервальных коэффициентов и с учетом выполнения условий (1.15).

Следует заметить, что при изменении параметров возможен переход каких-либо двух комплексно-сопряженных корней в кратные с дальнейшим движением в разные стороны по вещественной отрицательной полуоси. В результате некоторые граничные реберные ветви будут целиком или частично лежать на вещественной оси.

Данный случай не противоречит изложенным соображениям и отличается только тем, что при проверке выбранного корневого узла на принадлежность границе области локализации по п. 4, он может оказаться кратным корнем на вещественной оси и на его основе невозможно будет провести анализ углов выхода реберных ветвей (все углы выхода будут равны 0 или 180 градусов). В этом случае следует выбрать другую вершину P , соответствующую комплексному корневному узлу, и повторить процедуру определения граничных реберных ветвей.

1.5. Примеры реберной маршрутизации

Пример 1

Проиллюстрируем методику нахождения реберного маршрута на примере системы с тремя интервальными параметрами. Пусть характеристический полином имеет вид:

$$a_3 \cdot s^3 + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0 = 0,$$

где $a_0 \in [10;28]$,

$a_1 \in [11;21]$,

$a_2 \in [3;5]$,

$a_3 = 1$.

В данном случае параметрический многогранник системы содержит 8 вершин: $V_1(10,11,3)$, $V_2(28,11,3)$, $V_3(28,21,3)$, $V_4(10,21,3)$, $V_5(10,21,5)$,

$V_6(10,11,5)$, $V_7(28,11,5)$, $V_8(28,21,5)$, где первая координата - a_0 , вторая - a_1 , третья - a_2 .

Проверим систему на наличие в отображениях параметрического многогранника особых корневых узлов U^* . Для этого необходимо решить систему уравнений (1.14) для трех граней параметрического многогранника в одной из вершин, например в $V_1(10, 11, 3)$.

В результате установлено, что в плоскости грани изменения параметров a_0 и a_2 проходит особая прямая, которая может отобразиться в особый корневой узел $U^*(\alpha, j\beta)$ на границе S_r . Таким образом, ветви граничных корневых годографов этих параметров могут пересекаться и, при построении границы области локализации корней, необходимо отобразить все ребра грани G_{02}^1 параметров a_0 и a_2 .

На следующем этапе необходимо определить граничный комплексный узел области локализации корней.

В выбранной вершине $V_1(10,11,3)$ углы выхода ветвей реберного конечного годографа RS_i из соответствующего корневого узла U_1 равны следующим величинам:

$$\Theta_0^1 = 338^\circ,$$

$$\Theta_1^1 = 221^\circ,$$

$$\Theta_2^1 = 154^\circ.$$

Проверим выполнение условия (1.20):

$$|\Theta_1^1 - \Theta_0^1| = 117^\circ < 180^\circ,$$

$$|\Theta_2^1 - \Theta_1^1| = 67^\circ < 180^\circ,$$

$$|\Theta_2^1 - \Theta_0^1| = 184^\circ > 180^\circ.$$

Условие (1.20) не выполняется, следовательно, узел U_1 не является граничным. Поэтому следует проверить другую вершину параметрического многогранника $V_2(28, 11, 3)$, отличающуюся значением a_0 .

Для вершины $V_2(28, 11, 3)$ получено

$$\Theta_0^2 = 203^\circ,$$

$$\Theta_1^2 = 127^\circ,$$

$$\Theta_2^2 = 226^\circ.$$

При этом выполняются все условия (1.20):

$$|\Theta_1^2 - \Theta_0^2| = 76^\circ < 180^\circ,$$

$$|\Theta_2^2 - \Theta_1^2| = 99^\circ < 180^\circ,$$

$$|\Theta_2^2 - \Theta_0^2| = 23^\circ < 180^\circ.$$

Следовательно, узел U_2 является граничным и обход реберного граничного маршрута будем начинать с вершины $V_2(28, 11, 3)$.

Зная последовательность изменения углов выхода реберных корневых ветвей из узла U_2 :

$$\Theta_1^2 < \Theta_0^2 < \Theta_2^2,$$

можно определить последовательность изменения интервальных параметров системы при обходе параметрического многогранника:

$$a_1 \rightarrow (a_0, a_2) \rightarrow (a_2, a_0) \rightarrow a_1 \rightarrow (a_0, a_2) \rightarrow (a_2, a_0) \rightarrow a_1.$$

Такая очередность соответствует граничному реберному маршруту параметрического многогранника по следующим его вершинам:

$$V_2 \rightarrow V_3 \rightarrow (V_4, V_8) \rightarrow V_5 \rightarrow V_6 \rightarrow (V_1, V_7) \rightarrow V_2.$$

Отображение реберного маршрута на верхнюю полуплоскость корней представлено на рис. 1.6.

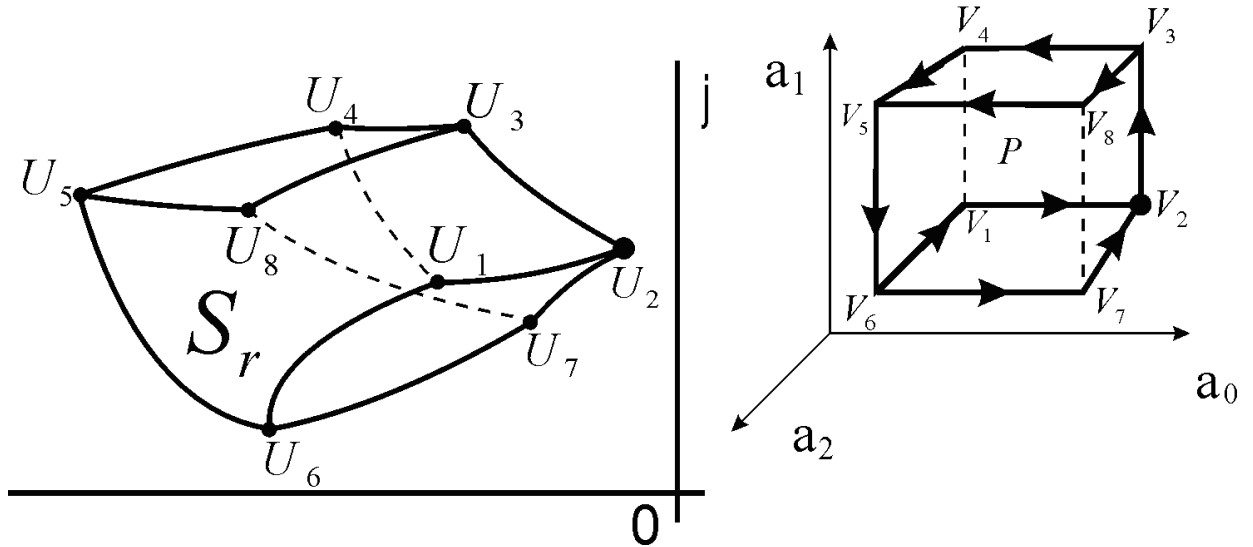


Рис.1.6. – Отображение реберного маршрута при $a_0 \in [10;28]$, $a_2 \in [3;5]$

Как видно из рис. 1.6, граничные реберные ветви не пересекаются. Однако при увеличении интервалов изменения ($a_0 \in [1;28]$, $a_2 \in [1;5]$) область локализации корней системы изменит свои границы. На рис. 1.7 представлено отображение того же самого маршрута при увеличенных интервалах параметров a_0 и a_2 .

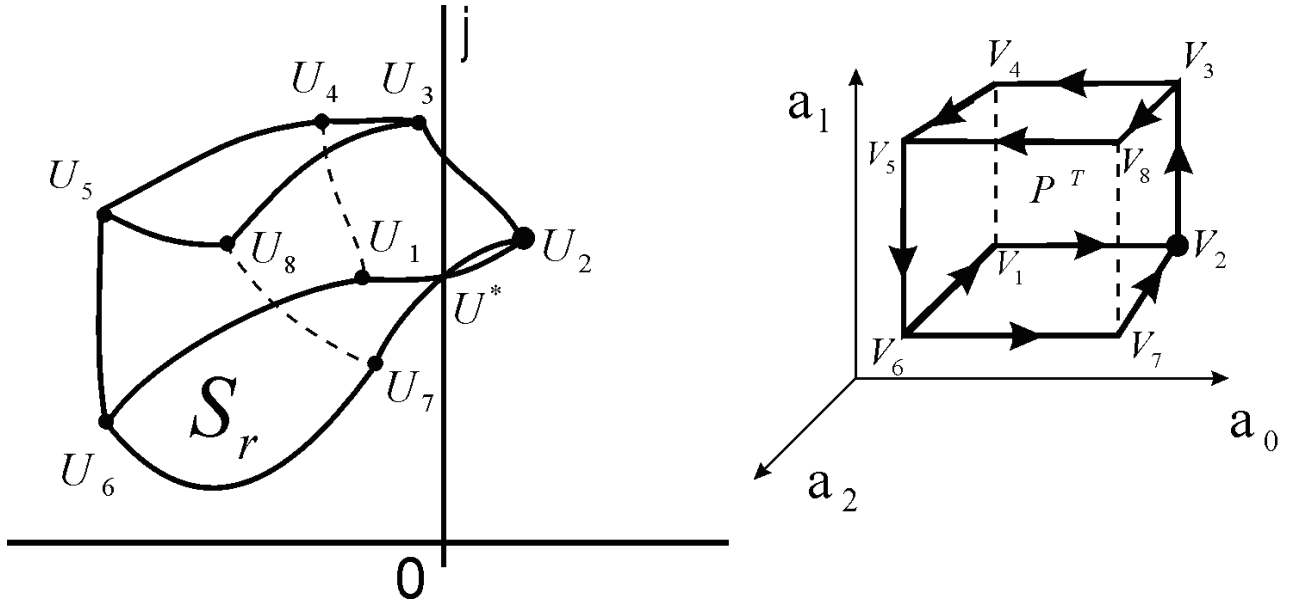


Рис. 1.7. – Отображение реберного маршрута при $a_0 \in [1;28]$, $a_2 \in [1;5]$

Отображение реберного маршрута на рис. 1.7 подтверждает необходимость проверки реберного маршрута на наличие особых корневых узлов.

При дальнейшем увеличении диапазона изменения параметров ($a_0 \in [0.1;28]$, $a_2 \in [0.5;5]$) особый корневой узел появляется при пересечении других граничных реберных ветвей, соответствующих ребрам P , по которым изменяются параметры a_0 и a_2 (рис. 1.8).

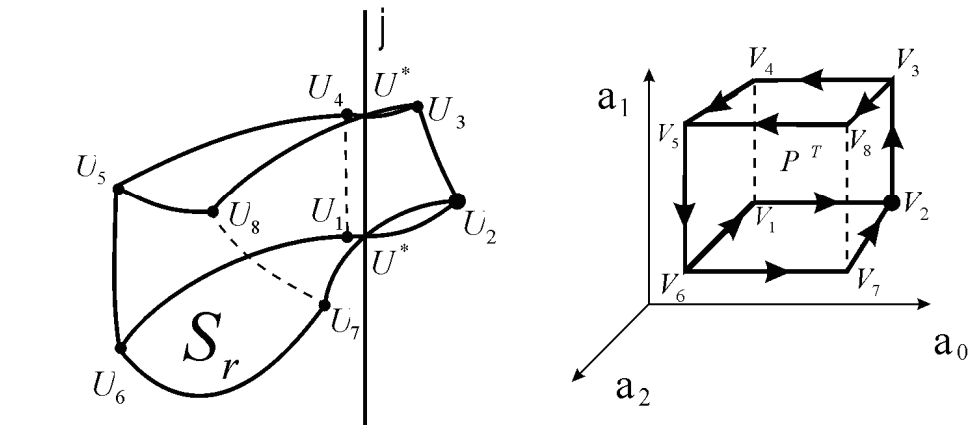


Рис.1.8. – Отображение реберного маршрута при $a_0 \in [0.1;28]$, $a_2 \in [0.5;5]$.

Отображение реберного маршрута на рис.1.8 свидетельствует о том, что при построении границы области локализации корней, необходимо отобразить не только все ребра грани G_{02}^1 параметров a_0 и a_2 , но и все ребра грани G_{02}^4 тех же параметров.

Пример 2

Пусть система имеет три интервальных параметра. Характеристический полином системы имеет вид:

$$a_4 \cdot s^4 + a_3 \cdot s^3 + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0 = 0$$

где $a_0 \in [1;2.5]$,

$a_1 \in [1;1.5]$,

$a_2 \in [0.3;0.8]$,

$a_3 = 0.01$,

$a_4 = 0.25$.

Параметрический многогранник системы образован тремя интервальными параметрами и содержит 8 вершин: $V_1(1,1,0.3)$, $V_2(2.5,1,0.3)$, $V_3(2.5,1.5,0.3)$, $V_4(1,1.5,0.3)$, $V_5(1,1.5,0.8)$, $V_6(1,1,0.8)$, $V_7(2.5,1,0.8)$, $V_8(2.5,1.5,0.8)$, где первая координата - a_0 , вторая - a_1 , третья - a_2 .

Необходимо проверить систему на наличие особых корневых узлов U^* . Для этого необходимо решить систему уравнений (1.14) для трех граней параметрического многогранника в одной из вершин $V_1(1,1,0.3)$.

Решение показало, что в плоскости грани изменения параметров a_0 и a_2 проходит особая прямая, которая может отобразиться в особый корневой узел $U^*(\alpha, j\beta)$ на границе S_r . Таким образом, ветви граничных корневых годографов этих параметров могут пересекаться. Поэтому при построении

границы области локализации корней, необходимо отобразить все ребра грани G_{02}^1 параметров a_0 и a_2 . Решение показало, что ветви будут пересекаться только на мнимой оси комплексной плоскости, так как решение системы (1.14) возможно только при значении $\alpha = 0$. Таким образом, корневой узел U^* будет иметь координаты $(0, j\beta)$.

На следующем этапе необходимо определить граничный комплексный узел области локализации корней.

Поскольку характеристический полином системы имеет четвертый порядок, то интервальный корневой годограф может быть представлен на комплексной плоскости корней в виде четырех областей S_r локализации корней s_r . Для определения граничного комплексного узла будем анализировать углы выхода ветви корневого годографа корня s_1 .

Так как условие (1.20) выполняется, то узел U_1 является граничным и обход реберного граничного маршрута следует начинать с вершины $V_1(1; 1; 0,3)$. Данный вывод проиллюстрирован на рис. 1.9.

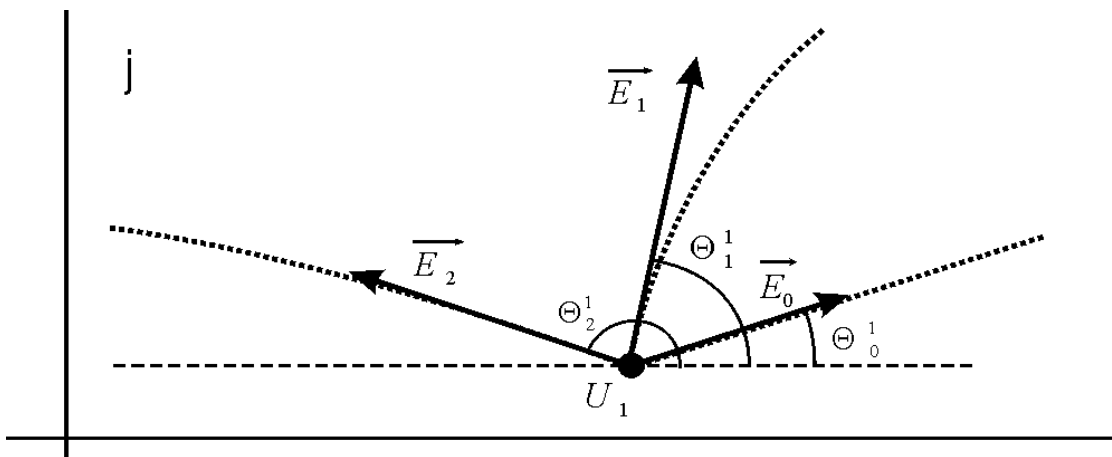


Рис.1.9. – Определение граничного комплексного узла

Зная последовательность изменения углов выхода реберных корневых ветвей из узла U_1 :

$$\Theta_0^1 < \Theta_1^1 < \Theta_2^1,$$

можно определить последовательность изменения интервальных параметров системы при обходе ребер параметрического многогранника:

$$(a_2, a_0) \rightarrow a_1 \rightarrow (a_0, a_2) \rightarrow (a_2, a_0) \rightarrow a_1 \rightarrow (a_0, a_2).$$

Такая очередность соответствует граничному реберному маршруту параметрического многогранника по следующим его вершинам:

$$(V_1, V_7) \rightarrow V_2 \rightarrow V_3 \rightarrow (V_4, V_8) \rightarrow V_5 \rightarrow V_6 \rightarrow V_2 \rightarrow (V_1, V_7).$$

На рис.1.10 представлены области локализации корней характеристического полинома системы, построенный путем обхода найденного граничного реберного маршрута.

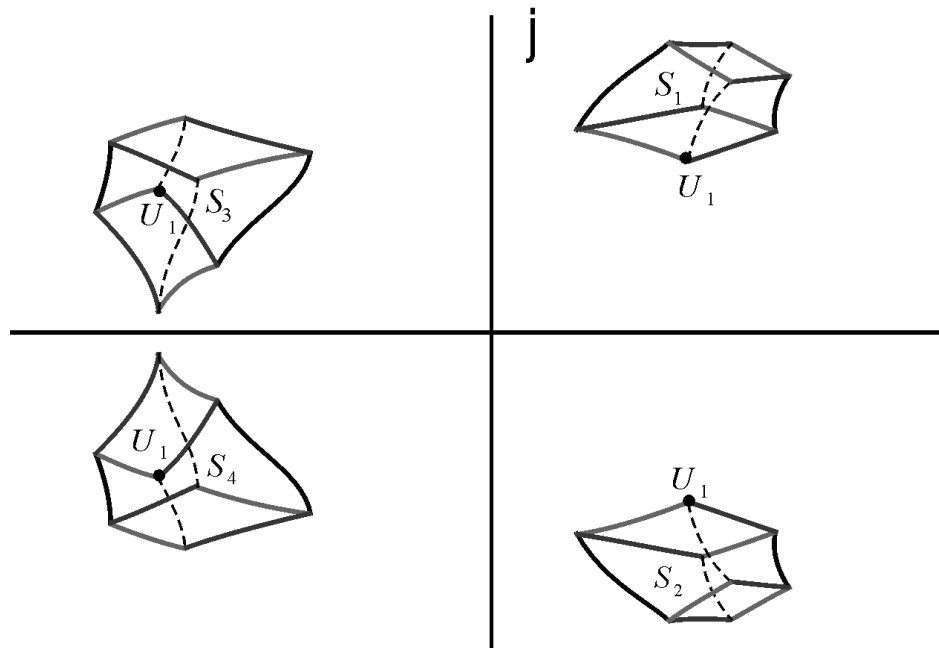


Рис.1.10. – Области локализации корней

Как видно из рис. 1.10, корневой узел U_1 является граничным только для областей отображения сопряженных корней s_1 и s_2 . Для областей S_3 и S_4 корневой узел U_1 – внутренний. Это обусловлено наличием особого

корневого узла $U^*(\alpha, j\beta)$, $\alpha = 0$. То есть при переходе через мнимую ось очередность углов выхода ветвей корневого годографа изменяется. Таким образом, могут изменяться и граничные корневые узлы.

Поэтому, во избежание неточностей, необходимо отобразить все ребра грани G_{02}^1 параметров a_0 и a_2 .

Рассмотренный пример подтверждает правильность утверждения о том, что граничный реберный маршрут является единственным при построении всех областей локализации корней характеристического полинома.

1.6. Основные результаты

Целью данной главы являлось рассмотрение основных положений метода многопараметрического корневого годографа, используемых для работы с интервальными системами.

Для этого были показаны основные свойства отображения параметрического многогранника коэффициентов интервального полинома на комплексную плоскость корней. На их основе сделан вывод о том, что для определения границ локализации корней необязательно строить отображения всех ребер параметрического многогранника, а достаточно найти и отобразить только граничные ребра. Их отображениями будут являться граничные реберные ветви интервального корневого годографа.

Показано, что реберные ветви могут входить в состав границ как полностью, так и частично, причем в последнем случае они пересекаются в особых корневых узлах U^* . Данное свойство необходимо учитывать при граничной маршрутизации многогранника коэффициентов P , в связи с чем, представляется целесообразным заранее знать о возможности наличия U^* в областях локализации корней S_r . Об этом свидетельствует существование особых прямых (по аналогии с D-разбиением), пересекающих ребра многогранника коэффициентов P .

Показано, что для нахождения граничного реберного маршрута необходимо определить углы выхода всех реберных ветвей корневого годографа из граничного корневого узла. В случае отсутствия U^* последовательность ребер в реберном маршруте определяется последовательностью (убывающей или возрастающей) углов выхода реберных ветвей. В связи с этим получено условие принадлежности корневого узла границе области локализации корня. Оно заключается в принадлежности всех реберных векторов \vec{E}_i , $i = \overline{0, n}$, углу, меньшему 180° .

Реберный маршрут может содержать как последовательно соединенные ребра (если нет особых корневых узлов), так и последовательно-параллельно соединенные (при наличии особых корневых узлов). В последнем случае необходимо полностью отображать границы грани параметрического многогранника, в плоскости которой существует особая прямая, и границы параллельной ей грани.

Показано, что реберный маршрут является единственным для построения всех областей локализации корней интервальной системы.

В сравнении с известной реберной теоремы полученные алгоритмы нахождения реберных маршрутов позволяют упростить задачу анализа и синтеза робастных систем. Приведены примеры, иллюстрирующие определение реберного маршрута для параметрического многогранника интервальных систем.

ГЛАВА II. АНАЛИЗ КОРНЕВЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КАЧЕСТВА СИСТЕМ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

2.1. Корневые показатели качества интервальных систем

В этой главе рассматривается проблема анализа относительной устойчивости ИС. Рассматриваются корневые показатели качества ИС, определяющие наихудшие режимы ее работы. Предлагаются подходы для анализа относительной робастной устойчивости ИС на основе анализа только некоторых вершинных полиномов системы. На основе предложенных подходов разрабатываются методики, работоспособность которых подтверждается примерами.

Одной из основных проблем современной теории робастного управления является исследование динамических свойств ИС, коэффициенты характеристических полиномов которых лежат в заданных пределах. Интерес к этой проблеме вызван естественным желанием вооружить проектировщика систем управления эффективным инструментом для оценки гарантированных показателей качества ИС.

В [9] данная задача сформулирована как анализ робастной относительной устойчивости. Здесь понятие относительной устойчивости предусматривает разнообразные варианты локализации корней интервального характеристического полинома (ИХП). Очевидно, что их принадлежность определенной области обуславливает тот или иной уровень робастного качества управления в системе.

Для анализа робастной относительной устойчивости широко применяются алгебраические и частотные подходы [23, 35, 62, 71]. При этом значительно меньше внимания уделяется использованию корневых методов. Однако, согласно [11, 43, 44, 45, 46], робастное расширение корневого подхода, основанное на свойствах интервальных корневых годографов,

может быть достаточно эффективным, а в некоторых случаях и наилучшим, для решения указанной задачи.

В настоящее время существуют достаточно простые методы анализа систем с интервальной неопределенностью характеристического полинома, но если коэффициенты полинома являются функциями интервальных параметров, то процедура анализа системы заметно усложняется. Например, если при интервальной и аффинной неопределенности возможно применение реберной теоремы, то при полилинейной и полиномиальной неопределенности результаты ее применения не всегда являются корректными [58].

Определение корневых оценок качества САУ является одним из наиболее желательных результатов анализа, так как полученные количественные характеристики, позволяют оценить не только ее устойчивость, но и динамические свойства системы [10]. В случае с интервальными системами необходимо оценить работу системы в наихудших режимах: найти наименьшую степень устойчивости и наибольшую колебательность. Поиск корней интервального полинома требует большого количества вычислений, хотя для анализа системы требуются не все корни, а только те, которые определяют максимальную колебательность и минимальную степень устойчивости. На рис. 2.1. изображен пример расположения областей локализации корней интервального характеристического полинома на комплексной плоскости. Где $tg(\varphi_{l \max})$ и $tg(\varphi_{l \min})$, соответственно, наименьшая и наибольшая колебательность, d – минимальная степень устойчивости системы.

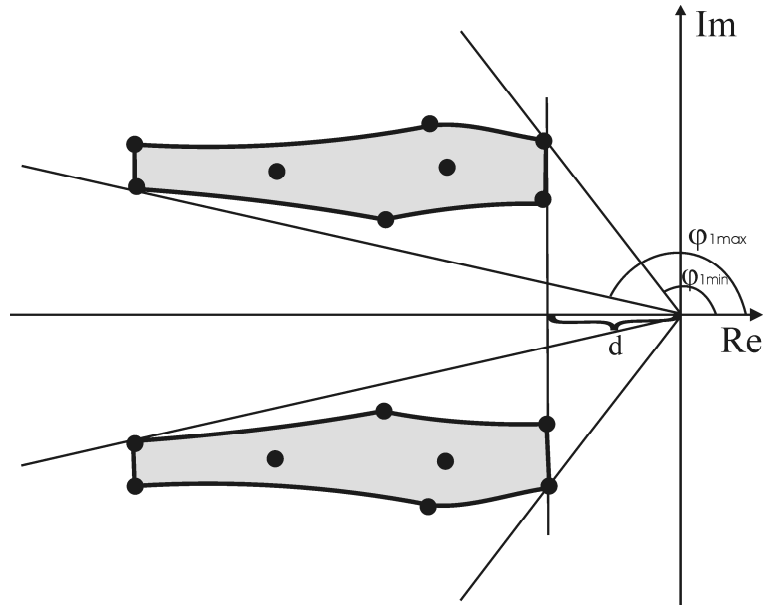


Рис. 2.1. – Области локализации корней полинома

В данном случае максимальная колебательность и минимальная степень устойчивости ИС определяется корнями одного вершинного полинома. В общем случае их может быть два, один из которых определяет максимальную колебательность, другой – минимальную степень устойчивости ИС.

2.2. Анализ локализации корней интервального полинома в заданном секторе

2.2.1. Постановка задачи

Рассмотрим полином

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0, \quad (2.1)$$

где все или только часть коэффициентов, имеющих непрерывную последовательность индексов, являются интервальными. Пусть число таких коэффициентов равно m . В этом случае последовательность интервальных коэффициентов может быть записана в виде $[a_i]_j^{j+m-1}$, $j \in \{0, 1, 2, \dots, n-m+1\}$.

Образуемый интервальными коэффициентами многогранник P представляет собой прямоугольный гиперпараллелепипед с вершинами V_q , $q = \overline{1, 2^m}$. Ребра P обозначим R_i^q , где i – индекс интервального коэффициента, q – индекс вершины, из которой по ребру изменяется a_i . Заметим, что при $m = 2$ многогранник P является прямоугольником, все ребра которого отображаются на границы областей локализации корней ИХП. Поэтому зададим $3 \leq m \leq n + 1$.

В главе 1 показано, что если P образован коэффициентами $[a_i]_j^{j+m-1}$, $j \in \{0, 1, 2, \dots, n - m + 1\}$, $3 \leq m \leq n + 1$, и область S_r , $r \in \overline{1, n}$ локализации комплексного корня ИХП лежит в секторе Γ (рис. 2.2) с углом $\pi \pm \frac{\pi}{m-1}$, то границами S_r являются непересекающиеся образы ребер P .

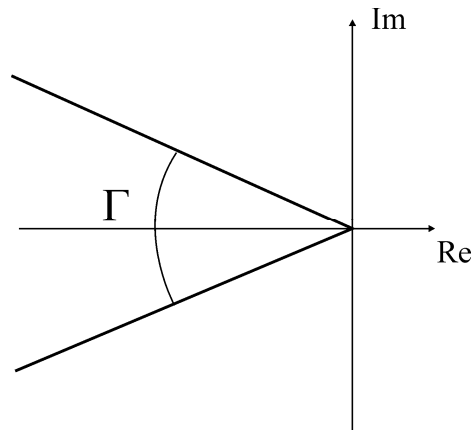


Рис. 2.2 – Сектор Γ .

Ставится задача: для ИХП порядка n , интервальные коэффициенты которого образуют последовательность $[a_i]_j^{j+m-1}$, $j \in \{0, 1, 2, \dots, n - m + 1\}$, $3 \leq m \leq n + 1$, на основании анализа отображения ребер и вершин P в сектор Γ с углом $\pi \pm \gamma$ разработать критерий локализации корней ИХП в секторе Γ по корням вершинных полиномов.

2.2.2. Основные фазовые соотношения

Отображение R_i^q образует реберную ветвь RS_i^q корневого годографа с узлами U_q на концах. При этом угол выхода RS_i^q из комплексного узла U_q при увеличении a_i находится по формуле

$$\Theta_i^q = 180^\circ - \sum_{g=1}^n \Theta_g + i\Theta_0, \quad (2.2)$$

а при уменьшении a_i

$$\Theta_i^q = -\sum_{g=1}^n \Theta_g + i\Theta_0, \quad (2.3)$$

где Θ_g и Θ_0 - углы между вещественной осью и векторами, направленными из U_q , соответственно, к g -му полюсу и к i -ым нулям, имеющим одинаковые координаты $(0; j0)$.

На основании (2.2) и (2.3) доказано следующее ниже утверждение, определяющее основное фазовое соотношение для последовательности интервальных коэффициентов.

Утверждение 1. Если последовательность интервальных коэффициентов $[a_i]_j^{j+m-1}$, $j \in \{0, 1, 2, \dots, n-m+1\}$, $3 \leq m \leq n+1$, задана чередующимися пределами, то углы выхода RS_i^q из U_q образуют последовательность $[\Theta_i^q]_j^{j+m-1}$, где $\Theta_i^q > \Theta_{i+1}^q$, $j \leq i \leq j+m-2$.

Доказательство. Пусть дана последовательность $\overline{a_j}, \overline{a_{j+1}}, \overline{a_{j+2}}, \overline{a_{j+3}}, \dots$. При изменении коэффициентов, имеющих минимальные значения в V_q , углы выхода из U_q соответствующих реберных ветвей на основании (2.2) определяются формулой

$$\Theta_{j+k}^q = \pi + (j+k)\Theta_0 - \sum_{g=1}^n \Theta_g + 2\pi l, \quad (2.4)$$

где $(j+k)$ – индекс интервального коэффициента, $k = 0, 2, 4, \dots$, $l = 0, 1, 2, 3, \dots$
 Для коэффициентов с индексами $(j+k+1)$, имеющих максимальные значения в V_q , в соответствии с (2.2) имеем

$$\Theta_{j+k+1}^q = (j+k+1)\Theta_0 - \sum_{g=1}^n \Theta_g + 2\pi l, \quad (2.5)$$

Предположим, что выполняется неравенство

$$\Theta_j^q > \Theta_{j+1}^q > \Theta_{j+2}^q > \Theta_{j+3}^q > \dots > \Theta_{j+m-1}^q. \quad (2.6)$$

Учитывая, что изменение угла на 2π не меняет расположение образующего этот угол луча, на основании (2.4), (2.5) представим (2.6) парами неравенств

$$(j+k)\Theta_0 - \sum_{g=1}^n \Theta_g + \pi > (j+k+1)\Theta_0 - \sum_{g=1}^n \Theta_g, \quad (2.7)$$

$$2\pi + (j+k+1)\Theta_0 - \sum_{g=1}^n \Theta_g > (j+k+2)\Theta_0 - \sum_{g=1}^n \Theta_g + \pi, \quad (2.8)$$

где $k = 0, 2, 4, \dots$. Из (2.7) и (2.8) после преобразований получаем условие: $\Theta_0 < \pi$, при выполнении которого справедливо соотношение углов (2.6).

Пусть для противоположных пределов ограничений интервальных коэффициентов также имеет место соотношение (2.6). Аналогично оно может быть представлено парами неравенств

$$(j+k)\Theta_0 - \sum_{g=1}^n \Theta_g + 2\pi > (j+k+1)\Theta_0 - \sum_{g=1}^n \Theta_g + \pi;$$

$$\pi + (j+k+1)\Theta_0 - \sum_{g=1}^n \Theta_g > (j+k+2)\Theta_0 - \sum_{g=1}^n \Theta_g.$$

В этом случае из каждого неравенства также получаем $\Theta_0 < \pi$. Так как расположение комплексных корней ИХП в верхней полуплоскости

соответствует условию $\Theta_0 < \pi$, то для любого из них будет выполняться соотношение углов (2.6). Выражение (2.6) назовем основным фазовым соотношением.

2.2.3. Анализ отображения вершин

Для U_q по формулам (2.2), (2.3) можно определить m значений углов Θ_i^q , $i \in \overline{0, n}$, и расположить их в порядке возрастания: $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_{m-1}, \Theta_m$. Тогда U_q будет принадлежать границе S_r при выполнении условия:

$$\Theta_m - \Theta_1 < 180^\circ, \quad (2.9)$$

На основании условия (2.9) доказано следующее ниже утверждение, определяющее прообразы граничных корневых узлов областей локализации корней ИХП.

Утверждение 2. Если последовательность заданных предельными значениями интервальных коэффициентов $[a_i]_j^{j+m-1}$, $j \in \{0, 1, 2, \dots, n-m+1\}$, $3 \leq m \leq n+1$, можно разделить на две последовательности: $[a_i]_j^{j+r-1}$ и $[a_i]_{j+r}^{j+m-1}$, $r \in \{1, 2, \dots, m-1\}$, в которых четные и нечетные коэффициенты имеют противоположные пределы, то комплексный корень ИХП в секторе $\pi \pm \frac{\pi}{m-1}$ является граничным корневым узлом области локализации соответствующего корня.

Доказательство. Разделить последовательность $a_j, a_{j+1}, \dots, a_{j+m-1}$ указанным образом возможно в двух случаях:

- 1) если коэффициенты ИХП заданы строго чередующимися пределами;
- 2) если только два рядом стоящих коэффициента ИХП заданы однотипными пределами.

Для первого случая ИХП на основании утверждения 2 и выражений (2.2), (2.3) углы Θ_{\max} и Θ_{\min} при $\Theta_0 < \pi$ и минимальном значении a_j находятся по формулам

$$\Theta_{\max} = \pi + j\Theta_0 - \sum_{g=1}^n \Theta_g + 2\pi l, \quad (2.10)$$

$$\Theta_{\min} = (j + m - 1)\Theta_0 - (m - 2)\pi - \sum_{g=1}^n \Theta_g + 2\pi l, \quad (2.11)$$

а при максимальном значении a_j

$$\Theta_{\max} = j\Theta_0 - \sum_{g=1}^n \Theta_g + 2\pi l, \quad (2.12)$$

$$\Theta_{\min} = (j + m - 1)\Theta_0 - (m - 1)\pi - \sum_{g=1}^n \Theta_g + 2\pi l, \quad (2.13)$$

При (2.10) и (2.11) условие граничности (2.9) принимает вид

$$\pi + j\Theta_0 - (j + m - 1)\Theta_0 + \pi(m - 2) < \pi, \quad (2.14)$$

а при (2.12) и (2.13)

$$j\Theta_0 - (j + m - 1)\Theta_0 + \pi(m - 1) < \pi. \quad (2.15)$$

После преобразований (2.14) и (2.15) получаем $\Theta_0 > (\pi - \frac{\pi}{m-1})$. Таким образом, $(\pi - \frac{\pi}{m-1}) < \Theta_0 < \pi$, что соответствует для первого случая ИХП выполнению (2.9) в заданном секторе.

Пусть для второго случая ИХП одностипные пределы ограничения имеют коэффициенты a_{j+r-1} и a_{j+r} , $r \in \{1, 2, \dots, m-1\}$, и между ними проходит граница разделения последовательности $a_j, a_{j+1}, \dots, a_{j+m-1}$ на две последовательности коэффициентов. Им соответствуют последовательности углов:

$\Theta_j^q, \Theta_{j+1}^q, \dots, \Theta_{j+r-1}^q$ и $\Theta_{j+r}^q, \Theta_{j+r+1}^q, \dots, \Theta_{j+m-1}^q$. Поскольку коэффициенты $a_j, a_{j+1}, \dots, a_{j+r-1}$ заданы чередующимися пределами, то при $\Theta_0 < \pi$ выполняется неравенство $\Theta_j^q > \Theta_{j+1}^q > \dots > \Theta_{j+r-1}^q$. Аналогично для второй последовательности имеем $\Theta_{j+r}^q > \Theta_{j+r+1}^q > \dots > \Theta_{j+m-1}^q$.

Пусть $\Theta_{j+m-1}^q > \Theta_j^q$. Определим диапазон Θ_0 , при котором выполняется неравенство

$$\Theta_{j+m-1}^q - \Theta_j^q > 0. \quad (2.16)$$

Совпадение или противоположность пределов ограничений a_{j+m-1} и a_j определяется четностью m . В (2.16) это может быть учтено слагаемым $(m-2)\pi$. В результате преобразования (2.16) получаем неравенство $(j+m-1)\Theta_0 - j\Theta_0 + \pi(m-2) > 0$, решением которого является $\Theta_0 > (\pi - \frac{\pi}{m-1})$.

Таким образом, при $(\pi - \frac{\pi}{m-1}) < \Theta_0 < \pi$ имеет место соотношение углов:

$$\Theta_{j+r}^q > \Theta_{j+r+1}^q > \dots > \Theta_{j+m-1}^q > \Theta_j^q > \dots > \Theta_{j+r-1}^q, r \in \{1, 2, \dots, m-1\}. \quad (2.17)$$

Крайние углы (2.17) соответствуют двум рядом стоящим в ИХП интервальным коэффициентам с однотипными пределами. Разность этих углов равна Θ_0 . Так как $\Theta_0 < \pi$, следовательно, корневой узел и для второго случая ИХП является граничным в секторе $\pi \pm \frac{\pi}{m-1}$.

2.2.4. Критерии локализации корней в заданном секторе

Из всех вершин P выделим существенные вершины, соответствующие приведенному в утверждении 2 требованию к последовательности их координат. Для этого составим таблицу вершин, строками которой будут их

координаты в порядке возрастания индексов. Правило составления таблицы существенных вершин следующее. В первой строке записываются строго чередующиеся пределы коэффициентов, начиная с любого предела a_j . В каждой следующей строке по сравнению с предыдущей изменяется предел только одного коэффициента (по очереди, начиная с первого). После получения в $m+1$ строке пределов, противоположных первой строке, изменение пределов повторяется в том же порядке.

В качестве примера в таблице 1 приведены существенные вершины для ИХП третьего порядка, все коэффициенты которого являются интервальными.

Таблица 1 – таблица существенных вершин

1	$\underline{a_0}$	$\overline{a_1}$	$\underline{a_2}$	$\overline{a_3}$
2	$\overline{a_0}$	$\overline{a_1}$	$\underline{a_2}$	$\overline{a_3}$
3	$\overline{a_0}$	$\underline{a_1}$	$\underline{a_2}$	$\overline{a_3}$
4	$\overline{a_0}$	$\underline{a_1}$	$\overline{a_2}$	$\overline{a_3}$
5	$\overline{a_0}$	$\underline{a_1}$	$\overline{a_2}$	$\underline{a_3}$
6	$\underline{a_0}$	$\underline{a_1}$	$\overline{a_2}$	$\underline{a_3}$
7	$\underline{a_0}$	$\overline{a_1}$	$\overline{a_2}$	$\underline{a_3}$
8	$\underline{a_0}$	$\overline{a_1}$	$\underline{a_2}$	$\underline{a_3}$

Так как в двух соседних строках таблицы записываются координаты вершин одного ребра P , то можно заключить, что данная таблица задает замкнутый реберный маршрут из $2m$ ребер, связывающих $2m$ вершин P . Очевидно, что анализ отображения всех табличных ребер позволяет оценить робастную секторную устойчивость ИХП. Однако установлено [12], что сделать это можно с меньшими вычислительными затратами путем

рассмотрения только существенных табличных вершин P . Основанием для такого вывода служит следующее утверждение.

Утверждение 3. При отображении $\varphi: G_{df}^q \rightarrow S$ реберные ветви могут пересекаться с особым лучом, выходящим из начала координат под углом $\varphi = \pi - \frac{\pi}{|f-d|}$, только в одной точке.

Доказательство. Пусть реберная ветвь пересекается с особым лучом в двух точках: $s_1 = \alpha + j\beta$, $s_2 = \eta + j\rho$. Это означает, что соответствующее ребро грани G_{df}^q пересекают две параллельные особые прямые, отображающиеся в s_1 и s_2 . Пусть указанные прямые описываются уравнениями

$$a_d \operatorname{Re} s_1^d + a_f \operatorname{Re} s_1^f + \operatorname{Re} \left[\sum_k a_k^q s_1^k + \sum_p a_p s_1^p \right] = 0,$$

$$a_d \operatorname{Re} s_2^d + a_f \operatorname{Re} s_2^f + \operatorname{Re} \left[\sum_k a_k^q s_2^k + \sum_p a_p s_2^p \right] = 0,$$

для которых выполняется условие параллельности

$$\operatorname{Re} s_1^f / \operatorname{Re} s_2^f = \operatorname{Re} s_1^d / \operatorname{Re} s_2^d. \quad (2.18)$$

Принадлежность s_1 и s_2 особому лучу определяется условием

$$\eta / \alpha = \rho / \beta. \quad (2.19)$$

На основании (2.19) можно записать: $s_1 = \beta((\alpha/\beta) + j)$, $s_2 = \rho((\alpha/\beta) + j)$.

Тогда соотношение (2.18) примет вид:

$$\frac{\operatorname{Re}(\beta^j ((\alpha/\beta) + j)^j)}{\operatorname{Re}(\rho^j ((\alpha/\beta) + j)^j)} = \frac{\operatorname{Re}(\beta^i ((\alpha/\beta) + j)^i)}{\operatorname{Re}(\rho^i ((\alpha/\beta) + j)^i)}. \quad (2.20)$$

После преобразований (2.20) получаем

$$(\beta/\rho)^f = (\beta/\rho)^d. \quad (2.21)$$

Равенство (2.21) при $d \neq f$ справедливо только при $\beta = \rho$. Тогда, согласно (2.19), $\alpha = \eta$, из чего следует $s_1 = s_2$.

Таким образом, реберная ветвь может пересекать особый луч в одной точке, и тогда ее граничные корневые узлы будут лежать по разные стороны от луча. Из этого следует, что если все граничные корневые узлы, соответствующие существенным вершинам P , принадлежат сектору Γ , то граничные реберные ветви не пересекают особого луча и вся область локализации комплексного корня принадлежит заданному сектору.

Попадание образов существенных вершин P вида $s_i = -\alpha_i + j\beta_i$, $i \in \overline{1, n}$, в заданный сектор Γ будем оценивать по углам $\gamma_i = \text{arctg}(\beta_i / \alpha_i)$. Введем в рассмотрение угол γ_0 , определяемый на комплексной плоскости особым лучом и имеющий величину $\gamma_0 = \frac{\pi}{m-1}$. В зависимости от соотношения углов γ и γ_0 справедливы следующие условия робастной секторной устойчивости.

Необходимые и достаточные условия робастной секторной устойчивости. Если интервальные коэффициенты ИХП n -го порядка образуют последовательность $[a_i]_j^{j+m-1}$, $j \in \{0, 1, 2, \dots, n-m+1\}$, $3 \leq m \leq n+1$, то для локализации корней ИХП в секторе $\pi \pm \gamma$, $0 < \gamma \leq \gamma_0$, необходимо и достаточно, чтобы существенные вершины P отображались в левую полуплоскость и для их образов вида $s_i = -\alpha_i + j\beta_i$, $i \in \overline{1, n}$, выполнялись неравенства $\gamma_i \leq \gamma$.

Достаточные условия робастной секторной устойчивости. Если интервальные коэффициенты ИХП n -го порядка образуют последовательность $[a_i]_j^{j+m-1}$, $j \in \{0, 1, 2, \dots, n-m+1\}$, $3 \leq m \leq n+1$, то для

локализации корней ИХП в секторе $\pi \pm \gamma$, $\gamma_0 < \gamma < 90^\circ$, достаточно, чтобы существенные вершины P отображались в левую полуплоскость и для их образов вида $s_i = -\alpha_i + j\beta_i$, $i \in \overline{1, n}$, выполнялись неравенства $\gamma_i \leq \gamma_0$.

Пример.

Пусть задан ИХП: $D(s) = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$,

где $a_3 \in [0.07, 0.09]$,

$a_2 \in [0.45, 0.49]$,

$a_1 \in [1.1, 1.5]$,

$a_0 \in [0.1, 0.7]$.

Необходимо оценить его робастную устойчивость в секторе Γ с углом $\gamma = 70^\circ$. Так как $\gamma > \gamma_0$ (при четырех интервальных коэффициентах $\gamma_0 = 60^\circ$), то следует использовать достаточные условия. В каждой из существенных вершин определены корни заданного полинома:

$$s_{1,2}^1 = -2.47 \pm j3.20, s_3^1 = -0.071, s_{1,2}^2 = -2.23 \pm j3.05, s_3^2 = -0.55,$$

$$s_{1,2}^3 = -2.04 \pm j2.08, s_3^3 = -0.92, s_{1,2}^4 = -2.2 \pm j1.69, s_3^4 = -1.00,$$

$$s_{1,2}^5 = -2.97 \pm j0.77, s_3^5 = -1.06, s_{1,2}^6 = -3.45 \pm j1.77, s_3^6 = -0.10,$$

$$s_{1,2}^7 = -3.47 \pm j2.99, s_3^7 = -0.07, s_{1,2}^8 = -3.18 \pm j3.30, s_3^8 = -0.07.$$

Все найденные корни лежат в левой половине комплексной плоскости, но для обеспечения относительной устойчивости выполняются не все неравенства $\arctg(\beta_i / \alpha_i) < \gamma_0$, поэтому сделать вывод о робастной устойчивости ИХП в заданном секторе Γ невозможно. Для наглядного представления результатов анализа, на рис. 2.3 приведена комплексная плоскость, где изображены корни всех существенных вершин, а также заданный сектор Γ и особый луч (пунктирная линия).

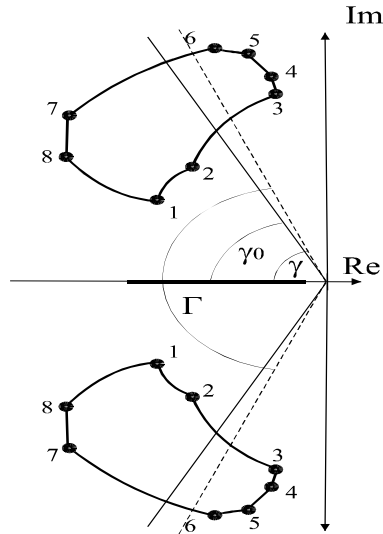


Рис.2.3. – Образы существенных вершин реберного маршрута.

Для подтверждения сделанного вывода о робастной секторной устойчивости на рис. 2.3 также приведены образы реберного маршрута P , определяющие границы областей локализации корней ИХП.

Недостатком данного подхода является невозможность оценки робастной устойчивости полинома в случае, когда $\gamma < \gamma_0$ и невозможность проверки устойчивости в других областях (усеченном секторе, трапеции). Достоинством подхода является простота формирования набора вершинных полиномов, необходимого для анализа секторной устойчивости.

2.3. Анализ устойчивости интервального полинома в произвольном секторе

Для определения граничных вершин P в произвольном секторе нас интересуют не значения углов выхода, а только взаимное расположение векторов выхода реберных ветвей по всем интервальным коэффициентам. Такой вывод можно сделать исходя из основных фазовых соотношений корневого годографа

$$\Theta_i^q = 180^\circ - \sum_{g=1}^n \Theta_g + i\Theta_0, \quad (2.22)$$

$$\Theta_i^q = -\sum_{g=1}^n \Theta_g + i\Theta_0. \quad (2.23)$$

Из (2.22), (2.23) видно, что составляющая $\sum_{g=1}^n \Theta_g$, одинакова для всех углов выхода. Таким образом, для определения граничных вершин P в произвольном секторе следует построить единичные векторы в полярной системе координат под углами

$$\Theta_i^q = 180^\circ + i\Theta_0, \quad (2.24)$$

$$\Theta_i^q = i\Theta_0. \quad (2.25)$$

В работе ранее установлено, что для граничности узла U_q , необходимо, чтобы разность между максимальным и минимальным углами выхода ветвей многопараметрического интервального корневого годографа была меньше π . Это легко проверяется графическим способом на построенной круговой диаграмме, при заданном значении угла сектора Θ_0 и известном (верхнем или нижнем) пределе соответствующего интервального коэффициента. На рис. 2.4 показан пример возможного расположения углов выхода реберных ветвей по четырем интервальным коэффициентам ИХП. Символом $\overline{a_i}$ обозначен верхний предел коэффициента a_i , символом $\underline{a_i}$ - его нижний предел. Заметим, что изменение предела любого коэффициента позволяет повернуть соответствующий угол на 180 градусов. Задавая минимальный (максимальный) угол, таким образом можно сформировать пределы коэффициентов, которые обеспечат граничность соответствующего корневого узла. Изменяя минимальный (максимальный) угол, легко получить набор из $2m$ возможных граничных вершин при заданном значении Θ_0 .

Таким образом, если для каждого из m коэффициентов ИХП на круговой диаграмме построить два противоположных вектора, то любые m последовательно расположенные лучи будут лежать в угле, меньшем π , и, следовательно, определять координаты граничной вершины P .

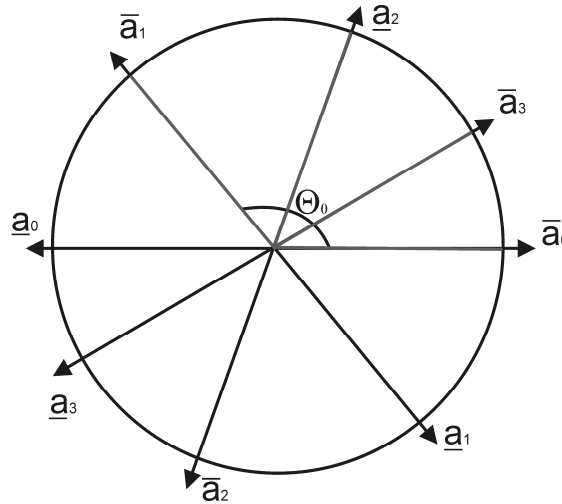


Рис. 2.4. – Взаимное расположение углов выхода реберных ветвей

Исходя из проведенного анализа разработано следующее правило формирования набора граничных вершин P .

1. Задать значение угла Θ_0 .
2. На круговой диаграмме построить лучи, выходящие из начала координат под углами $\Theta_{i+} = \Theta_0 \cdot i$; $\Theta_{i-} = \pi + \Theta_0 \cdot i$, где Θ_{i+} и Θ_{i-} соответственно углы при максимальном и минимальном значениях i -го коэффициента ИХП.
3. Начиная с любого луча, определить m лучей, следующих последовательно один за другим при движении в положительном направлении (против часовой стрелки). Соответствующие этим лучам пределы коэффициентов ИХП определяют координаты одной из граничных вершин.

4. Последовательно изменяя начальные лучи, повторять процедуру п.3 и в результате получить координаты $2m$ граничных вершин для сектора с заданным Θ_0 .

Для анализа робастной относительной устойчивости ИС в произвольном секторе доказано следующее утверждение.

Утверждение: Если корни граничных полиномов, сформированных по приведенному выше правилу, лежат в секторе $\pi \pm \Theta_0$, то все корни ИХП лежат в данном секторе.

Доказательство: Из проведенного анализа установлено, что быть граничными корневыми узлами и при этом принадлежать границе сектора (лучу) могут только образы вершин, формируемых по описываемому выше правилу. Тогда при движении по комплексной плоскости границу сектора в первую очередь будут пересекать корни только граничных полиномов. Следовательно, если корни граничных полиномов, сформированных для данного сектора, лежат в секторе, то соответственно, и все другие корни ИХП лежат в этом секторе.

Пример.

Рассмотрим полином: $D(s) = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$,

где $a_3 = 1$,

$a_2 = [6; 8]$,

$a_1 = [14; 18]$,

$a_0 = [8,5; 11,5]$.

Требуется определить, лежат ли корни данного полинома в секторе Γ с углом 180 ± 45 градусов. Согласно разработанному правилу сформируем набор граничных полиномов для этого сектора:

$$\overline{a_3}, \overline{a_2}, \overline{a_1}, \overline{a_0};$$

$$\underline{a_3}, \underline{a_2}, \underline{a_1}, \underline{a_0};$$

$$\overline{a_3}, \overline{a_2}, \overline{a_1}, \underline{a_0};$$

$$\underline{a_3}, \underline{a_2}, \underline{a_1}, \underline{a_0};$$

$$\overline{a_3}, \overline{a_2}, \underline{a_1}, \underline{a_0};$$

$$\underline{a_3}, \underline{a_2}, \overline{a_1}, \overline{a_0};$$

$$\overline{a_3}, \underline{a_2}, \overline{a_1}, \underline{a_0};$$

$$\underline{a_3}, \overline{a_2}, \underline{a_1}, \overline{a_0};$$

$$\overline{a_3}, \overline{a_2}, \underline{a_1}, \underline{a_0}.$$

Отообразим корни найденных полиномов на комплексную плоскость (рис. 2.5). Из рисунка видно, что не все корни найденных вершинных полиномов лежат в заданном секторе, соответственно, не все корни заданного ИХП лежат в заданном секторе.

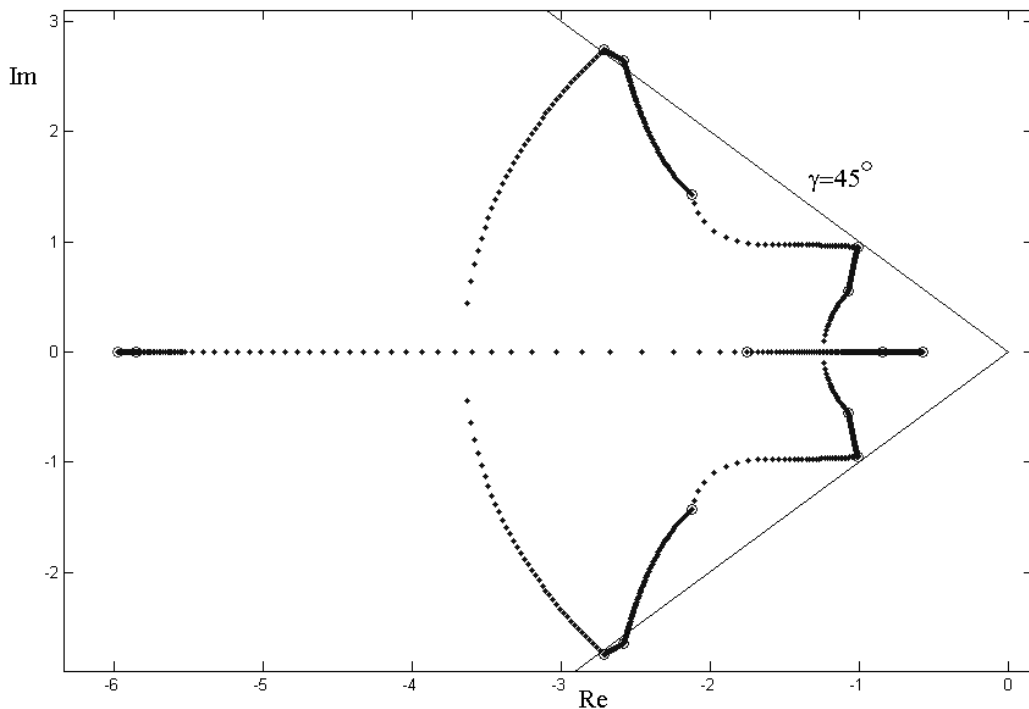


Рис. 2.5. – Границы области локализации комплексных корней;

○ – корни сформированных вершинных полиномов.

Для подтверждения сделанного вывода на рис. 2.5 также приведены образы реберного маршрута P , определяющие границы областей локализации корней ИХП.

2.4. Условия локализации корней интервального полинома в секторе с обеспечением требуемой степени устойчивости

2.4.1. Постановка задачи

Рассмотрим в левой полуплоскости открытый усеченный сектор $ABCD$ с углом $\pi \pm \gamma$ (рис.2.6).

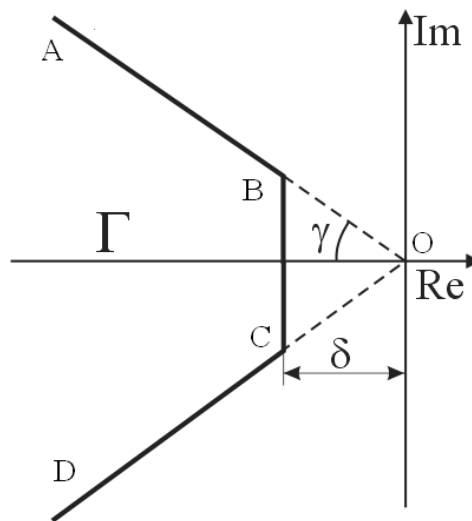


Рис. 2.6. – Открытый усеченный сектор Γ

Пусть он задает допустимые колебательность и степень устойчивости интервальной системы. ИХП системы имеет вид:

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0.$$

Ставится задача: разработать методику определения набора вершинных полиномов, позволяющих анализировать локализацию корней ИХП в секторе $ABCD$.

2.4.2. Анализ минимальной степени устойчивости интервального полинома

Известно [18], что при отображении P на плоскость корней именно образы вершин P определяют максимально возможную колебательность ИХП. Покажем, что и минимальную степень устойчивости ИХП определяют корни вершинных полиномов.

Рассмотрим реберный полином:

$$D^q(s) + \Delta a_i s^i = 0. \quad (2.26)$$

Утверждение. Минимальная степень устойчивости реберного полинома (2.20) определяется одной из вершин ребра.

Доказательство. Допустим, что реберный полином (2.26) устойчив и при отображении ребра на плоскость корней ближайший к мнимой оси корень S не принадлежит корневым узлам, соответствующим вершинам ребра. Пусть при этом одному из корневых узлов соответствует устойчивый полином $f_1(s)$, а другому – устойчивый полином $f_2(s)$.

Сдвинем мнимую ось комплексной плоскости корней на величину h так, чтобы корневые узлы остались в левой полуплоскости, а корень S оказался в правой. В этом случае ИХП будет иметь вид

$$D(s+h) = a_n (s+h)^n + a_{n-1} (s+h)^{n-1} + \dots + a_0$$

Далее определим разность $f_1(s+h) - f_2(s+h) = (\overline{a_i} - \underline{a_i})(s+h)^i = g(s+h)$,

где $\overline{a_i}$ и $\underline{a_i}$ - соответственно максимальное и минимальное значение интервального коэффициента ИХП.

Согласно [20], если $g(s+h)$ представляет собой только четные или нечетные степени переменной $(s+h)$, то из устойчивости $f_1(s+h)$ и $f_2(s+h)$ следует устойчивость всего множества полиномов, соответствующего рассматриваемому ребру. Однако этому утверждению противоречит

нахождение корня S в правой полуплоскости. Следовательно, ближайшим к мнимой оси не может быть корень, не являющийся корневым узлом. А это означает, что минимальная степень устойчивости реберного полинома (2.26) определяется одной из вершин ребра.

Согласно реберной теореме, границы областей локализации корней ИХП состоят из образов ребер P . Поэтому по корням вершинных полиномов можно оценить максимальную колебательность и минимальную степень устойчивости ИХП, а, следовательно, и попадание областей локализации его корней в сектор $ABCD$. В связи с этим актуальна задача определения всех вершин P , образы которых могут принадлежать границам областей локализации корней ИХП.

2.4.3. Правило формирования набора граничных вершин для анализа устойчивости полинома в усеченном секторе

Для определения граничных вершин P воспользуемся способом, предложенным в разделе 2.3, с учетом свойства многопараметрического интервального корневого годографа, установленного в главе 1. Оно заключается в том, что при отображении P на корневую плоскость возможен переход внутренних вершин P в граничные и наоборот. Причиной этого является переход корней ИХП через особые лучи, выходящие из начала

координат под углами $\varphi = \pi - \frac{r\pi}{m-k}$, $k = 1, 2, \dots, m-2$, r – число целых π ,

которое содержит угол $n \cdot \Theta_0$, n – порядок полинома. Для учета этого свойства, согласно [17], следует формировать набор граничных вершин указанным выше способом при значениях $\Theta_0 < \gamma$ из образованных особыми

лучами секторов $\pi \leq \varphi \leq \pi - \frac{r\pi}{m-1}$, и $\pi - \frac{r\pi}{m-k} \leq \varphi \leq \pi - \frac{r\pi}{m-k+1}$.

Исходя из проведенного анализа разработано следующее правило формирования набора граничных вершин P .

1. Для заданных угла γ и числа m интервальных коэффициентов ИХП определить количество особых лучей, лежащих в секторе AOD.
2. Задать значение угла Θ_0 из сектора $\pi < \Theta_0 < \pi - \frac{r\pi}{m-1}$
3. На круговой диаграмме построить лучи, выходящие из начала координат под углами $\Theta_{i+} = \Theta_0 \cdot i$; $\Theta_{i-} = \pi + \Theta_0 \cdot i$, где Θ_{i+} и Θ_{i-} соответственно углы при максимальном и минимальном значениях i -го коэффициента ИХП.
4. Начиная с любого луча, определить m лучей, следующих последовательно один за другим при движении в положительном направлении (против часовой стрелки). Соответствующие этим лучам пределы коэффициентов ИХП определяют координаты одной из граничных вершин.
5. Последовательно изменяя начальные лучи, повторять процедуру п.4 и в результате получить координаты $2m$ граничных вершин для сектора с заданным Θ_0 .
6. Если $\pi - r\pi/(m-1) > \pi - \gamma$, то необходимо повторить действия п. 3, 4, 5 при любом значении угла Θ_0 из каждого сектора $\pi - \frac{r\pi}{m-k} \leq \Theta_0 \leq \pi - \frac{r\pi}{m-k+1}$, $k = 1, 2, \dots, m-2$, r – число целых π , которое содержит угол $n \cdot \Theta_0$, n – порядок полинома.
7. При каждом последующем Θ_0 необходимо из получающихся наборов граничных вершин выделять новые и добавлять их к найденным ранее.

2.4.4. Условия локализации корней ИХП в заданном секторе

Для того, чтобы корни полинома ИХП располагались в усеченном секторе ABCD, необходимо и достаточно, чтобы в этом секторе располагались корни полиномов с коэффициентами, сформированными по приведенному выше правилу.

Пример.

Рассмотрим полином: $D(s) = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$,

где $a_3 = [1; 1,2]$,

$a_2 = [1\ 2; 12,2]$,

$a_1 = [22; 23,2]$,

$a_0 = [20; 25,5]$.

Требуется определить, лежат ли корни данного полинома в секторе Γ с углом 180 ± 55 градусов и определить степень робастной устойчивости. Согласно разработанному правилу сформируем набор граничных полиномов:

$$\overline{a_3}, \overline{a_2}, \overline{a_1}, \overline{a_0};$$

$$a_3, a_2, \underline{a_1}, a_0;$$

$$\overline{a_3}, \overline{a_2}, \underline{a_1}, \underline{a_0};$$

$$a_3, \underline{a_2}, \underline{a_1}, a_0;$$

$$\overline{a_3}, \overline{a_2}, \underline{a_1}, \underline{a_0};$$

$$a_3, \underline{a_2}, \underline{a_1}, \underline{a_0};$$

$$\overline{a_3}, \overline{a_2}, \underline{a_1}, \underline{a_0};$$

$$a_3, \underline{a_2}, \underline{a_1}, \underline{a_0}.$$

Найдем корни данных полиномов и отобразим их на комплексную плоскость (рис. 2.7). Все построенные корни лежат в заданном секторе,

следовательно, и все области локализации корней заданного ИХП лежат в требуемом секторе.

Следует отметить, что если бы требовалось оценить только секторную устойчивость, то полиномы $\overline{a_3, a_2, a_1, a_0}$; $\overline{a_3, a_2, a_1, a_0}$ не вошли бы в формируемый набор. Из рис. 2.7 видно, что для данного ИХП корни именно этих полиномов определяют минимальную степень устойчивости.

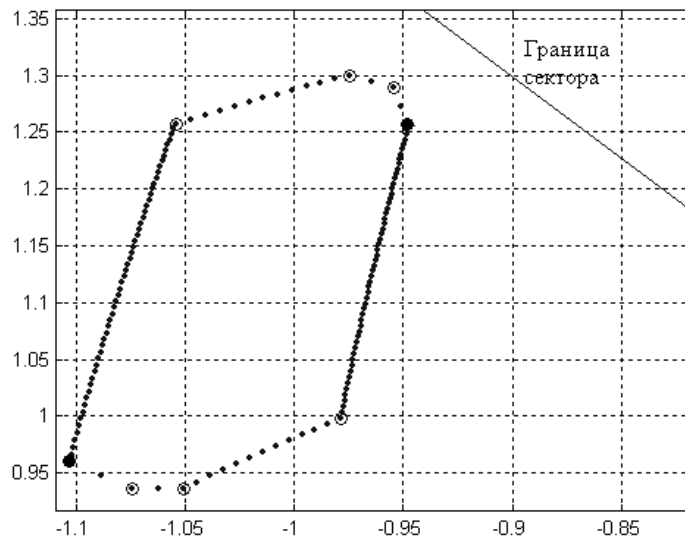


Рис. 2.7. – Область локализации одного комплексного корня

● – корни полиномов $\overline{a_3, a_2, a_1, a_0}$; $\overline{a_3, a_2, a_1, a_0}$; ○ – корни остальных полиномов набора.

2.5. Основные результаты

Для анализа гарантированной колебательности системы, характеристический полином которой имеет интервальные коэффициенты, разработаны условия робастной секторной устойчивости. Они основаны на оценке попадания областей локализации корней ИХП в заданный сектор комплексной плоскости. Показано, что для такого анализа нет необходимости проверять границы указанных областей с использованием реберной маршрутизации, а достаточно найти только корни некоторых характеристических вершинных полиномов.

Установлено, что для оценки устойчивости ИС в секторе с углом большим $\varphi = \pi - \frac{\pi}{|f-d|}$, необходимо и достаточно проверить устойчивость в этом секторе $2m$, особым образом составленных полинома (m – число интервальных коэффициентов). Проверка этих же вершинных полиномов является только достаточным условием робастной секторной устойчивости, если угол сектора меньше φ .

Если требуется проверить устойчивость ИС в произвольном секторе, то необходимо и достаточно проверить устойчивость в этом секторе $2m$ полиномов, составленных на основе построения круговой диаграммы векторов выхода реберных ветвей многопараметрического интервального корневого годографа по всем интервальным коэффициентам.

Для оценки не только максимальной колебательности ИС, но и ее минимальной степени устойчивости, разработана процедура определения всех возможных граничных вершин P . Она основана на применении условий формирования реберного маршрута и построении круговой диаграммы векторов по интервальным коэффициентам. Устойчивость полного набора

граничных вершинных полиномов в заданном усеченном секторе гарантирует допустимые корневые показатели качества ИС.

ГЛАВА 3. СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ РОБАСТНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ИНТЕРВАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ОБЕСПЕЧЕНИЕМ ГАРАНТИРУЕМОЙ ДИНАМИКИ

3.1. Состояние проблемы

Данная глава посвящена проблемам синтеза робастных регуляторов заданной структуры. В настоящее время существует достаточно большое количество работ посвященных проблеме синтеза регуляторов для систем с интервально-неопределенными параметрами, например [58, 68, 78, 81, 91]. Также большой интерес вызывают задачи настройки регуляторов [29, 38, 76, 94]. Большинство методов синтеза робастных регуляторов, предложенных в последнее время, основаны на оптимизации по различным критериям [29, 81, 83, 93, 95], но имеют ряд недостатков:

- требуют большого количества вычислений;
- в результате могут получаться регуляторы высокого порядка;
- не гарантируют робастности получаемой системы к отклонениям параметров регулятора.

В связи с этим задача определения настроек регулятора для систем с интервальными параметрами и возможностью оценки робастности системы к отклонениям параметров регулятора является весьма актуальной.

Для линейных стационарных объектов существует достаточно много работ, посвященных синтезу регуляторов на основе принципа доминирования [5, 49, 50, 51, 52]. Известно, что динамические свойства таких систем определяются двумя-тремя доминирующими полюсами, так как влияние остальных полюсов оказывается незначительным из-за их удаленности от мнимой оси. В случае интервальных систем, поскольку коэффициенты характеристического полинома имеют фиксированные пределы изменения, полюсы системы оказываются локализованными в

некоторых замкнутых областях, и их также можно размещать желаемым образом. Желаемое размещение доминирующих и свободных полюсов предполагает, что области их локализации не должны выходить за допустимые границы при любых значениях интервальных параметров. С точки зрения классической теории управления данный подход имеет существенный недостаток – не учитываются нули передаточной функции. Это объясняется тем, что нули передаточной функции, при изменении параметров системы, также образуют некоторые области локализации. В этом случае, при одновременном движении полюсов и нулей системы, определение их взаимного влияния является очень сложной задачей.

3.2. Доминантное расположение полюсов стационарной системы

3.2.1. Постановка задачи

Задача размещения полюсов стационарной системы требуемым образом рассматривается в нескольких работах [5, 31, 49, 56]. Методы размещения полюсов стационарной системы, рассмотренные в работах [31, 56] не предусматривают выполнения принципа доминирования необходимого нам. Метод рассмотренный в работе [49] позволяет выделить и расположить требуемым образом несколько полюсов, но не позволяет гарантировать или оценить расположение остальных полюсов. Метод, предложенный в работе [5], позволяет не только размещать доминирующие полюса стационарной системы, но и локализовывать остальные (свободные) полюса в заданной области комплексной плоскости. Это будет необходимо для гарантированного размещения областей локализации доминирующих полюсов ИС. Рассмотрим метод доминантного расположения полюсов стационарной системы, предложенный в работе [5], подробнее.

Пусть характеристическое уравнение линейной непрерывной системы управления приведено к виду

$$\sum_{i=1}^r k_i A_i(p) + B(p) = 0, \quad (3.1)$$

где $k_i, j = 1, 2, \dots, r$ – параметры, значения которых необходимо выбрать так, чтобы обеспечить требуемое качество управления, $A_i(p), j = 1, 2, \dots, r, B(p)$ – полиномы.

Для того чтобы l доминирующих полюсов системы приняли предписанные значения, необходимо не менее l изменяемых параметров. Если $r > l$, то можно не только обеспечить заданное положение доминирующих полюсов, но и задать дополнительные условия на размещение остальных (свободных) полюсов. В частности, можно потребовать, чтобы эти полюса располагались в заданной области левой полуплоскости, в соответствии с условием доминирования. На рис. 3.1 представлены некоторые возможные варианты задания областей расположения свободных полюсов.

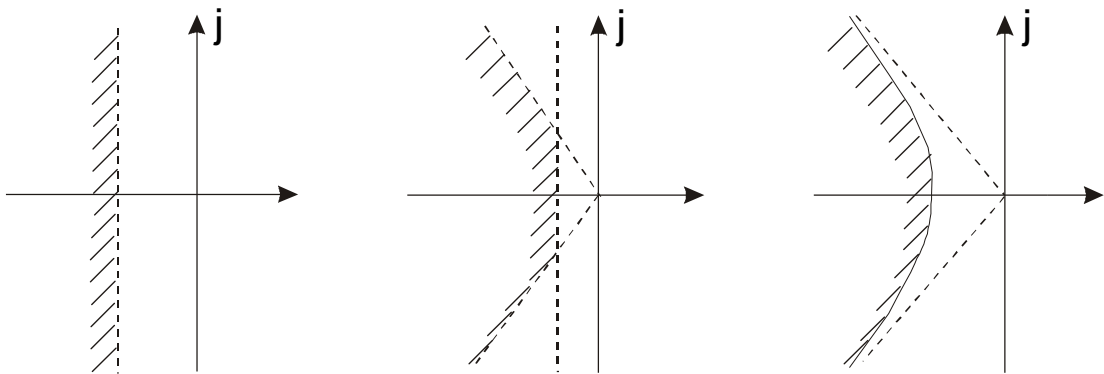


Рис. 3.1. – Некоторые возможные варианты задания областей расположения свободных полюсов

Граница области описывается выражением:

$$X(j\omega) = -\delta(\omega) + j\omega, \quad -\infty < \omega < \infty. \quad (3.2)$$

Поэтому полагаем, что число r варьируемых параметров в (3.1) превышает число l заданных доминирующих полюсов. Варьируемые параметры k_1, k_2, \dots, k_r разобьем на две группы. В первую включим параметры, которые назовем свободными. С их помощью будем обеспечивать размещение свободных полюсов в желаемой области, используя метод D-разбиения. Так как названный метод наиболее эффективен для выбора одного или двух параметров, то число c свободных параметров предлагается задавать не более двух. При помощи метода D-разбиения граница желаемой области свободных полюсов, описываемая выражением (3.2), отображается в пространство свободных параметров и на ее основе формируется параметрическая область, внутри которой выбираются значения свободных параметров.

Ко второй группе варьируемых параметров отнесем l параметров и назовем их зависимыми, поскольку их значения будут рассчитываться после выбора свободных параметров из условия, чтобы l доминирующих полюсов системы приняли предписанные значения. Таким образом, вектор $\bar{g} = (k_1, \dots, k_r)^T$ варьируемых параметров оказывается разбитым на два вектора: вектор $\bar{g}_1 = (k_1, \dots, k_c)^T$ свободных параметров размерностью c и вектор $\bar{g}_2 = (k_{c+1}, \dots, k_r)^T$ зависимых параметров размерностью $l = r - c$.

3.2.2. Основные соотношения

С учетом сказанного характеристическое уравнение (3.1) системы преобразуем к виду

$$\sum_{i=1}^c k_i \cdot A_i(p) + \sum_{i=c+1}^r k_i \cdot A_i(p) + B(p) = 0. \quad (3.3)$$

Задачу доминантного расположения полюсов стационарной системы можно сформулировать следующим образом. Задано характеристическое

уравнение системы вида (3.1), имеющее степень n . Необходимо найти значения c свободных и l зависимых варьируемых параметров, при которых l заданных доминирующих полюсов системы принимают предписанные значения $\lambda_i, i=1, \dots, l$, а остальные $n-l$ свободных полюсов лежат слева от заданной на комплексной плоскости границы (3.2).

Для случая $c = r - l = 1$ характеристическое уравнение (3.3) запишем в виде

$$k_1 \cdot A_1(p) + \sum_{i=2}^r k_i \cdot A_i(p) + B(p) = 0, \quad (3.4)$$

где k_1 – свободный варьируемый параметр, k_2, \dots, k_r – зависимые параметры.

Подстановка $p = \lambda_j, j=1, \dots, l$ в (3.1) дает l уравнений

$$k_1 \cdot A_1(\lambda_j) + \sum_{i=2}^r k_i \cdot A_i(\lambda_j) + B(\lambda_j) = 0, j=1, \dots, l. \quad (3.5)$$

Эти уравнения связывают варьируемые параметры $k_i, i=1, \dots, r$ с задаваемыми доминирующими полюсами $\lambda_j, j=1, \dots, l$.

Представим систему уравнений (3.5) в матричной форме

$$\mathbf{Q}_{11}(\boldsymbol{\lambda}) \cdot \mathbf{k}_1 + \mathbf{Q}_{12}(\boldsymbol{\lambda}) \cdot \bar{\mathbf{g}}_2 = \mathbf{R}_1(\boldsymbol{\lambda}), \quad (3.6)$$

где

$$\mathbf{Q}_{11}(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} A_1(\lambda_1) \\ \dots \\ A_1(\lambda_l) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q}_{12}(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} A_2(\lambda_1) & \dots & A_r(\lambda_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ A_2(\lambda_l) & \dots & A_r(\lambda_l) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{g}_2 = \begin{bmatrix} k_2 \\ \dots \\ k_r \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}_1(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} -B(\lambda_1) \\ \dots \\ -B(\lambda_l) \end{bmatrix}.$$

Для размещения свободных полюсов системы левее линии, заданной формулой (3.2), в случае одного свободного параметра k_1 воспользуемся известным методом D -разбиения на плоскости одного параметра. С этой целью в (3.4) сделаем подстановку $p = -\delta(\omega) + j\omega$. В результате получим

$$k_1 \cdot A_1(-\delta(\omega) + j\omega) + \sum_{i=2}^r k_i \cdot A_i(-\delta(\omega) + j\omega) + B(-\delta(\omega) + j\omega) = 0. \quad (3.7)$$

В матричной форме (3.7) имеет вид

$$\mathbf{Q}_{21}(\omega) \cdot k_1 + \mathbf{Q}_{22}(\omega) \mathbf{g}_2 = \mathbf{R}_2(\omega), \quad (3.8)$$

где

$$\mathbf{Q}_{21}(\omega) = A_1(-\delta(\omega) + j\omega);$$

$$\mathbf{Q}_{22}(\omega) = [A_2(-\delta(\omega) + j\omega) \quad \dots \quad A_r(-\delta(\omega) + j\omega)];$$

$$\mathbf{R}_2(\omega) = -B(-\delta(\omega) + j\omega).$$

Для определения уравнения границы D -разбиения объединим (3.6) и (3.8) в одну систему уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_{11}(\lambda) \cdot k_1 + \mathbf{Q}_{12}(\lambda) \cdot \mathbf{g}_2 = \mathbf{R}_1(\lambda), \\ \mathbf{Q}_{21}(\omega) \cdot k_1 + \mathbf{Q}_{22}(\omega) \mathbf{g}_2 = \mathbf{R}_2(\omega). \end{cases} \quad (3.9)$$

Из первого уравнения системы (3.9) имеем

$$\mathbf{g}_2 = \mathbf{Q}_{12}^{-1}(\lambda) \cdot \mathbf{R}_1(\lambda) - \mathbf{Q}_{12}^{-1}(\lambda) \cdot \mathbf{Q}_{11}(\lambda) \cdot k_1. \quad (3.10)$$

После подстановки полученного выражения (3.10) для вектора \mathbf{g}_2 зависимых варьируемых параметров во второе уравнение системы (3.9), получим искомое уравнение границы D -разбиения

$$k_1(\omega) = \frac{\mathbf{R}_2(\omega) - \mathbf{Q}_{22}(\omega) \cdot \mathbf{Q}_{12}^{-1}(\lambda) \cdot \mathbf{R}_1(\lambda)}{\mathbf{Q}_{21}(\omega) - \mathbf{Q}_{22}(\omega) \cdot \mathbf{Q}_{12}^{-1}(\lambda) \cdot \mathbf{Q}_{11}(\lambda)} = \alpha(\omega) + j\beta(\omega). \quad (3.11)$$

Далее задаваясь значениями ω в пределах от $-\infty$ до ∞ , строим границу D -разбиения на комплексной плоскости. Она разделяет плоскость параметра k_1 на ряд областей, среди которых необходимо выделить (если она имеется) область, которой соответствует требуемое расположение свободных полюсов системы. Для выделения указанной области используются стандартные правила штриховки границы D -разбиения. Значения k_1 , гарантирующие требуемое размещение полюсов системы, располагаются на отрезке действительной оси внутри найденной области.

Следует заметить, что по величине найденного отрезка действительной, можно оценить в каких пределах может изменяться данный параметр, чтобы свободные полюса найденной стационарной системы располагались в заданной области, при требуемом расположении доминирующих полюсов.

После выбора значения k_1 из найденной области при помощи выражения (3.10) рассчитываются значения зависимых варьируемых параметров k_2, \dots, k_r , являющихся составляющими вектора \mathbf{g}_2 .

3.3. Размещение областей локализации доминирующих полюсов интервальной системы с обеспечением заданных показателей качества

3.3.1. Размещение областей локализации доминирующих полюсов интервальной системы с обеспечением требуемой максимальной колебательности.

Существующие методы размещения областей локализации полюсов ИС основаны на численном поиске настроек регулятора при условии обеспечения степени устойчивости и колебательности ИС [93], либо на получении полинома с желаемым расположением корней и .

Пусть характеристический полином ИС представлен в виде:

$$R(p) = \sum_{i=0}^n a_i(\bar{k})p^i, \quad (3.12)$$

$$a_{i_{\min}}(\bar{k}) \leq a_i(\bar{k}) \leq a_{i_{\max}}(\bar{k}), \quad (3.13)$$

где \bar{k} – вектор настраиваемых параметров регулятора, линейно входящих в коэффициенты полинома (3.12), $a_i(\bar{k})$ – интервальные коэффициенты полинома (3.12).

Ставится задача: найти такие значения параметров $k_i, i = 1, 2, \dots, r$, чтобы при возможных вариациях интервальных коэффициентов полинома (3.12) в диапазонах (3.13), области доминирующих полюсов располагались в заданном секторе, а свободные полюсы были локализованы в заданной области (рис. 3.2).

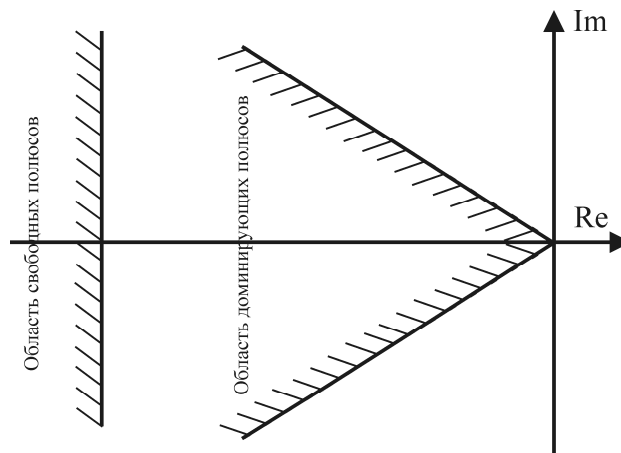


Рис. 3.2. – Заданные области расположения полюсов

Так как в выражение (3.12) входят интервальные коэффициенты, то оно соответствует семейству полиномов. По корням каждого из этих полиномов можно определить колебательность соответствующей стационарной системы. Наибольшая колебательность будет определять максимальную колебательность ИС. Для ее нахождения желательно не рассматривать все семейство полиномов, а выделить из них только один, который будет определять максимальную колебательность. При этом этот полином должен быть вершинным, т.е. задаваться набором предельных значений интервальных коэффициентов. Обозначим вершинный полином через $R^v(p)$, где v - номер вершины многогранника.

Для решения поставленной задачи, согласно [27], предлагается разделить ее на две:

1. Выделение из заданного семейства граничных полиномов $R^v(p)$ одного полинома $R_b^v(p)$, который будет гарантированно определять максимальную колебательность ИС.
2. Определение настроек регулятора для размещения корней найденного полинома желаемым образом в соответствии с методикой [5], (с соблюдением принципа доминирования).

Формирование вершинного полинома.

Пусть у полинома (3.12) $m = n - 2$ корней $p_g, g = \overline{1, m}$, лежат левее доминирующего корня p_0 . Обозначим через Θ_g угол между вещественной осью и вектором, направленным к полюсу p_0 от полюса p_g .

Для $m = 2$ расположение полюсов и соответствующие углы показаны на рис. 3.3.

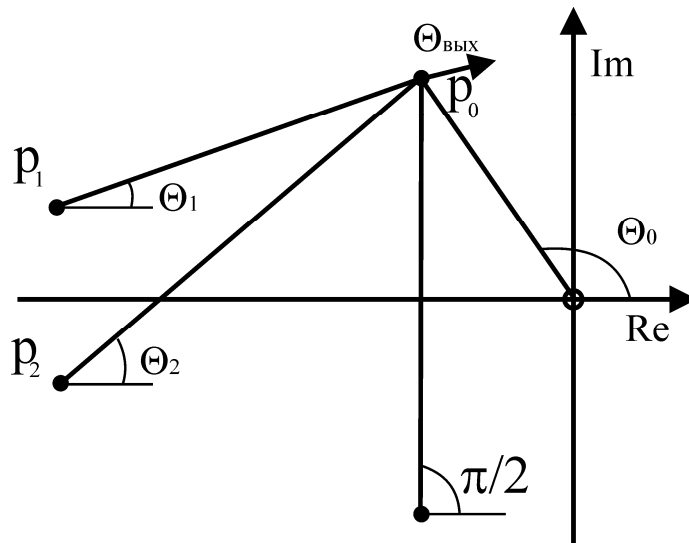


Рис. 3.3. – Расположение полюсов и нулей

Для нахождения вершинного полинома $R_b^v(p)$, корни которого определяют максимальную колебательность ИС, будем рассматривать углы выхода ветвей корневого годографа. Уравнение фаз, из которого они могут быть получены, имеет вид:

$$i\Theta_0 - \sum_{j=1}^n \Theta_j = \pm(2\nu + 1)\pi, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.14)$$

где Θ_j и Θ_0 – углы между вещественной осью и векторами, направленными к некоторому корню от j -го полюса и от i -ых нулей с координатами $(0; j0)$, соответственно. Представим в (3.14) $\sum_{j=1}^n \Theta_j$ как $\left(\sum_{g=1}^m \Theta_g + \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда уравнение

(3.14) примет вид:

$$\Theta_i^q = \pi - \left(\sum_{g=1}^m \Theta_g + \frac{\pi}{2}\right) + i\Theta_0; \quad (3.15)$$

при увеличении интервального коэффициента a_i

$$\Theta_i^q = -\left(\sum_{g=1}^m \Theta_g + \frac{\pi}{2}\right) + i\Theta_0; \quad (3.16)$$

при уменьшении интервального коэффициента a_i , где Θ_i^q – угол выхода ветви корневого годографа из вершины q , при изменении i -го коэффициента.

Заметим, что в уравнениях фаз (3.15), (3.16) величина $\frac{\pi}{2}$ добавлена в связи с необходимостью учета корня, комплексно-сопряженного p_0 .

Пусть допустимая колебательность μ определяется неравенством: $\mu \leq tg(\pi - \Theta_0)$. Для того, чтобы корень полинома (3.12) определял максимальную колебательность ИС, необходимо, чтобы векторы, задающие углы выхода данного корня из вершины q по всем a_i , $i = \overline{0, n}$, были направлены внутрь сектора $\Gamma = \pm\Theta_0$. Это требование соответствует выполнению условия: $\Theta_0 < \Theta_i^q < \Theta_0 + \pi$. Используя (3.15), (3.16), представим данное неравенство в виде:

$$\Theta_0 < i\Theta_0 - \left(\sum_{g=1}^m \Theta_g + \frac{\pi}{2}\right) + \Omega < \Theta_0 + \pi, \quad (3.17)$$

где $\Omega = 0$ или $\Omega = \pi$ в зависимости от того, увеличивается или уменьшается интервальный параметр. Из уравнения (3.17) видно, что при заданном Θ_0 , на

величину угла выхода по i -му коэффициенту будет влиять только составляющая $\sum_{g=1}^m \Theta_g$.

Пусть для вершины q угол выхода Θ_i^q по каждому i -му коэффициенту задает границу сектора Γ , т.е. $\Theta_i^q = \Theta_0$. В этом случае каждому Θ_i^q будет соответствовать некоторое значение $\sum_{g=1}^m \Theta_g$, зависящее от расположения свободных полюсов. Обозначим $\sum_{g=1}^m \Theta_g$ для i -го коэффициента через C_i .

Из условия (3.17) следует, что $\Theta_i^q = \Theta_0$ при $\max C_i$. Тогда из (3.15), (3.16) получим

$$\Theta_0 = i\Theta_0 - \left(\max C_i + \frac{\pi}{2} \right) + \Omega,$$

откуда

$$\max C_i = \Theta_0(i-1) - \frac{\pi}{2} + \Omega. \quad (3.18)$$

Рассмотрим зависимость значения $\sum_{g=1}^m \Theta_g$ от расположения свободных полюсов на корневой плоскости. Пусть $p_{1,2} = -\alpha_1 \pm j\beta_1$, $p_0 = -\alpha_2 + j\beta_2$, (рис. 3.3). Тогда $\text{ctg}(\Theta_1) = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_2 - \beta_1}$, $\text{ctg}(\Theta_2) = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_2 + \beta_1}$. Используя соотношения тригонометрических функций котангенса, получим:

$$\text{ctg}(\Theta_1 + \Theta_2) = \left(\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 - (\beta_2^2 - \beta_1^2)}{2\beta_2(\alpha_1 - \alpha_2)} \right).$$

Тогда

$$\sum_{g=1}^m \Theta_g = \text{arcctg} \left(\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 - (\beta_2^2 - \beta_1^2)}{2\beta_2(\alpha_1 - \alpha_2)} \right). \quad (3.19)$$

На основании (3.19) на плоскости корней построена диаграмма линий равных значений $\sum_{g=1}^m \Theta_g$ (рис. 3.4).

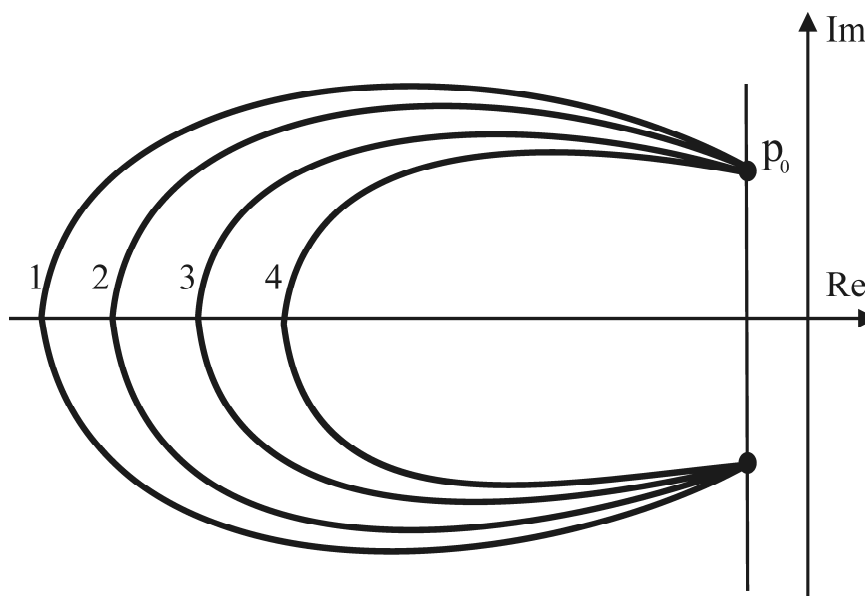


Рис. 3.4. – Линии равных значений $\sum_{g=1}^m \Theta_g$

$$\left(\sum_{g=1}^m \Theta_g^1 < \sum_{g=1}^m \Theta_g^2 < \sum_{g=1}^m \Theta_g^3 < \sum_{g=1}^m \Theta_g^4 \right).$$

В таблицах 2, 3 представлены зависимости наборов пределов коэффициентов ИХП и соответствующие им $\sum_{g=1}^m \Theta_g$ для некоторых Θ_0 .

Таблица 2. Зависимость набора коэффициентов полинома (3.12) и соответствующие им $\sum_{g=1}^m \Theta_g$ для некоторых Θ_0 для полинома 3-й степени ($m=1$).

$\Theta_0 = \frac{1}{2}\pi$	$\Theta_0 = \frac{2}{3}\pi$	$\Theta_0 = \frac{3}{4}\pi$
$\sum_{g=1}^m \Theta_g \in [0; \frac{\pi}{2}]$	$\sum_{g=1}^m \Theta_g \in [0; \frac{\pi}{6}]$	$\sum_{g=1}^m \Theta_g \in [0; \frac{\pi}{4}]$
$\overline{a_0 a_1 a_2 a_3}$	$\overline{a_0 a_1 a_2 a_3}$	$\overline{a_0 a_1 a_2 a_3}$
–	$\sum_{g=1}^m \Theta_g \in [\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}]$	$\sum_{g=1}^m \Theta_g \in [\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$
–	$\overline{a_0 a_1 a_2 a_3}$	$\overline{a_0 a_1 a_2 a_3}$

Таблица 3. Зависимость набора коэффициентов полинома (3.12) исоответствующие им $\sum_{g=1}^n \Theta_g$ для некоторых Θ_0 для полинома 4-й степени $(m=2)$.

$\Theta_0 = \frac{1}{2}\pi$		$\Theta_0 = \frac{2}{3}\pi$		$\Theta_0 = \frac{3}{4}\pi$	
$\sum_{g=1}^m \Theta_g \in [0; \frac{\pi}{2}]$	$\overline{a_0 a_1 a_2 a_3 a_4}$	$\sum_{g=1}^m \Theta_g \in [0; \frac{\pi}{6}]$	$\overline{a_0 a_1 a_2 a_3 a_4}$	$\sum_{g=1}^m \Theta_g \in [0; \frac{\pi}{4}]$	$\overline{a_0 a_1 a_2 a_3 a_4}$
$\sum_{g=1}^m \Theta_g \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$	$\overline{a_0 a_1 a_2 a_3 a_4}$	$\sum_{g=1}^m \Theta_g \in [\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}]$	$\overline{a_0 a_1 a_2 a_3 a_4}$	$\sum_{g=1}^m \Theta_g \in [\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$	$\overline{a_0 a_1 a_2 a_3 a_4}$
—	—	$\sum_{g=1}^m \Theta_g \in [\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}]$	$\overline{a_0 a_1 a_2 a_3 a_4}$	$\sum_{g=1}^m \Theta_g \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}]$	$\overline{a_0 a_1 a_2 a_3 a_4}$
—	—	$\sum_{g=1}^m \Theta_g \in [\frac{5\pi}{6}; \pi]$	$\overline{a_0 a_1 a_2 a_3 a_4}$	$\sum_{g=1}^m \Theta_g \in [\frac{3\pi}{4}; \pi]$	$\overline{a_0 a_1 a_2 a_3 a_4}$

Из рис. 3.4 видно, что для каждой кривой при фиксированном значении $\sum_{g=1}^m \Theta_g$ корни лежат на вещественной оси при $\beta_1 = 0$ и максимальном значении α_1 . Введем в рассмотрение прямую d , параллельную мнимой оси и проходящую через точку, соответствующую кратным корням с координатами $(\max \alpha_1, j0)$, (рис.3.5).

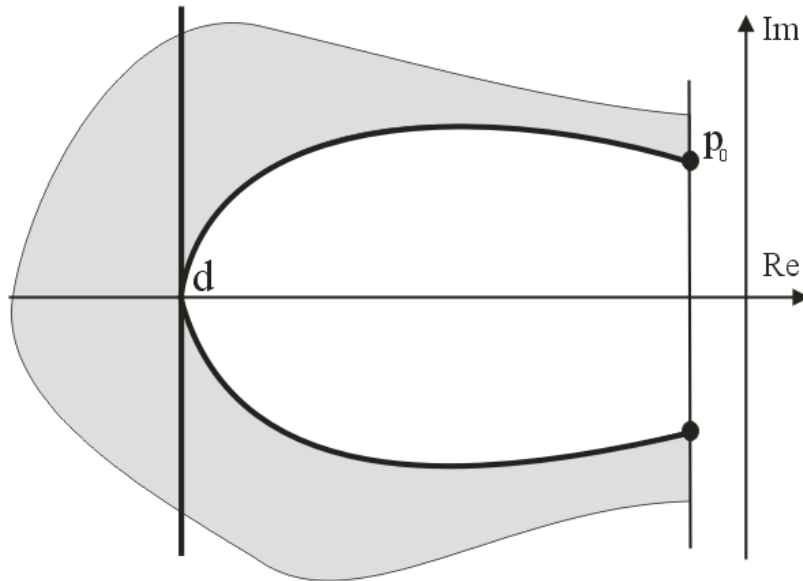


Рис. 3.5. – Область расположения свободных полюсов

Тогда $\sum_{g=1}^2 \Theta_g = 2 \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{\beta_2}{d - \alpha_2} \right)$. Выражая d , получим:

$$d = \frac{\beta_2}{\operatorname{tg} \left(\left(\sum_{g=1}^2 \Theta_g \right) / 2 \right)} + \alpha_2.$$

Очевидно, что для свободных корней, располагающихся левее прямой d , значения $\sum_{g=1}^m \Theta_g$, будут меньше значения $\sum_{g=1}^m \Theta_g$, соответствующего данной прямой d .

Если количество свободных полюсов равно m , то уравнение прямой d примет вид:

$$d = \frac{\beta_2}{\operatorname{tg} \left(\left(\sum_{g=1}^m \Theta_g \right) / m \right)} + \alpha_2.$$

Для того чтобы обеспечить максимальное удаление свободных полюсов от доминирующих, необходимо рассматривать такие наборы коэффициентов полинома (3.12), при которых $\min \sum_{g=1}^m \Theta_g = 0$ (это значение соответствует бесконечному удалению свободных полюсов). Область на

плоскости корней, соответствующую интервалу значений $\sum_{g=1}^m \Theta_g$ с границей

$\min \sum_{g=1}^m \Theta_g = 0$ обозначим S_0 . Левее прямой d_0 располагается только данная

область. Прямая d_0 определяется по формуле:

$$d_0 = \frac{\beta_2}{\operatorname{tg}\left(\frac{\max \sum_{g=1}^m \Theta_g}{m}\right)} + \alpha_2,$$

где $\max \sum_{g=1}^m \Theta_g$ является максимальным значением интервала $\sum_{g=1}^m \Theta_g$,

соответствующего этой области. Для того чтобы свободные полюсы располагались в S_0 необходимо, чтобы $\min C_i = 0$. Из (3.18) видно, что

$\max C_i$ может отличаться от $\min C_i$ не больше, чем на $\Omega = \pi$, тогда

$\max C_i \in [0; \pi]$. На основании этого, получим **фазовые условия 1**

формирования полинома $R_b^v(p)$:

Если $\Theta_0(i-1) \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, то $\max C_i = \Theta_0(i-1) - \frac{\pi}{2}$ при $\Omega = 0$. $\Omega = 0$

соответствует значению коэффициента $a_i = a_{i_{\max}} = \overline{a_i}$.

Если $\Theta_0(i-1) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то $\max C_i = \Theta_0(i-1) + \frac{\pi}{2}$ при $\Omega = \pi$. $\Omega = \pi$

соответствует значению коэффициента $a_i = a_{i_{\min}} = \underline{a_i}$.

Таким образом, для определения искомого набора коэффициентов полинома $R_b^v(p)$ и нахождения прямой d_0 , задающей область S_0 , требуется определить значения Ω и наименьшее значение $\max C_i$ для каждого $i = \overline{0, n}$.

Далее, размещая полюса найденной стационарной системы в соответствии с [5] найдем настройки регулятора.

Пример.

Рассмотрим пример поиска настроек регулятора для размещения доминирующих полюсов в заданном секторе.

Пусть для объекта с передаточной функцией:

$$W_0(p) = \frac{1}{p^3 + a_3 p^2 + b_2 p + b_1}; \quad (3.20)$$

необходимо выбрать параметры регулятора:

$$W_p(p) = \frac{k_3 p^2 + k_2 p + k_1}{p}. \quad (3.21)$$

На основании (3.20) и (3.21) получим характеристическое уравнение системы:

$$p^4 + a_3 p^3 + (b_2 + k_3) p^2 + (b_1 + k_2) p + k_1 = 0,$$

где $a_2 = b_2 + k_3$,

$$a_1 = b_1 + k_2,$$

$$a_0 = k_1,$$

$$a_3 = [17; 20],$$

$$b_2 = [192; 200],$$

$$b_1 = 1024.$$

Требуется обеспечить расположение областей локализации двух доминирующих полюсов в секторе $\Theta_0 = \pm \frac{3}{4} \pi$, а свободные полюсы расположить в соответствии с принципом доминирования.

Пусть корни вершинных полиномов, определяющие максимальную колебательность ИС, располагаются в точках: $\lambda_1 = -1 + j1$ и $\lambda_2 = -1 - j1$. Из

условий формирования полинома $R_b^v(p)$ определим пределы коэффициентов полинома, соответствующих сектору $\Theta_0 = \pm \frac{3}{4}\pi$.

При $i = 0$,

$$\Theta_0(i-1) = \frac{3}{4}\pi(-1) = -\frac{3}{4}\pi = \frac{5}{4}\pi \in \left(\frac{1}{2}\pi; \frac{3}{2}\pi \right],$$

$$\max C_0 = \frac{3}{4}\pi(0-1) - \frac{1}{2}\pi = \frac{3}{4}\pi, \quad a_0 = \overline{a_0}.$$

При $i = 1$,

$$\Theta_0(i-1) = \frac{3}{4}\pi(1-1) = 0 \in \left(-\frac{1}{2}\pi; \frac{1}{2}\pi \right],$$

$$\max C_1 = \frac{3}{4}\pi(1-1) + \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}\pi, \quad a_0 = \underline{a_0}.$$

При $i = 2$,

$$\Theta_0(i-1) = \frac{3}{4}\pi(2-1) = \frac{3}{4}\pi \in \left(\frac{1}{2}\pi; \frac{3}{2}\pi \right],$$

$$\max C_2 = \frac{3}{4}\pi(2-1) - \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{4}\pi, \quad a_0 = \overline{a_0}.$$

При $i = 3$,

$$\Theta_0(i-1) = \frac{3}{4}\pi(3-1) = \frac{3}{2}\pi \in \left(\frac{1}{2}\pi; \frac{3}{2}\pi \right],$$

$$\max C_3 = \frac{3}{4}\pi(3-1) - \frac{1}{2}\pi = \pi, \quad a_0 = \overline{a_0}.$$

При $i = 4$,

$$\Theta_0(i-1) = \frac{3}{4}\pi(4-1) = \frac{9}{4}\pi = 2\frac{1}{4}\pi \in \left(-\frac{1}{2}\pi; \frac{1}{2}\pi \right],$$

$$\max C_4 = \frac{3}{4}\pi(4-1) + \frac{1}{2}\pi = \frac{3}{4}\pi, \quad a_0 = \underline{a}_0.$$

$$\text{Наименьшее значение } \max C_i = \max C_2 = \frac{1}{4}\pi$$

Таким образом получим полином с пределами: $\overline{a}_0 \overline{a}_1 \overline{a}_2 \overline{a}_3 \overline{a}_4$, где $\underline{a}_4 = 1, \overline{a}_3 = 20, \overline{a}_2 = 200 + k_3, \underline{a}_1 = 1024 + k_2$. Найдем прямую d_0 .

$$d_0 = \frac{\beta_2}{\text{tg}((\max C_i)/m)} + \alpha_2 = \frac{1}{\text{tg}((0.25\pi)/2)} + 1 = 3,4.$$

Для того чтобы колебательность области локализации доминирующих полюсов определял только один набор коэффициентов, требуется, чтобы область расположения свободных полюсов лежала левее d_0 . С учетом принципа доминирования зададим границу свободных полюсов $X(j\beta) = -7, \quad -\infty < \beta < \infty$.

Варьируемые параметры регулятора разделены на свободный k_1 и зависимые k_2 и k_3 . После формирования необходимых матриц и векторов проведено D -разбиение по k_1 (Рис. 3.6).

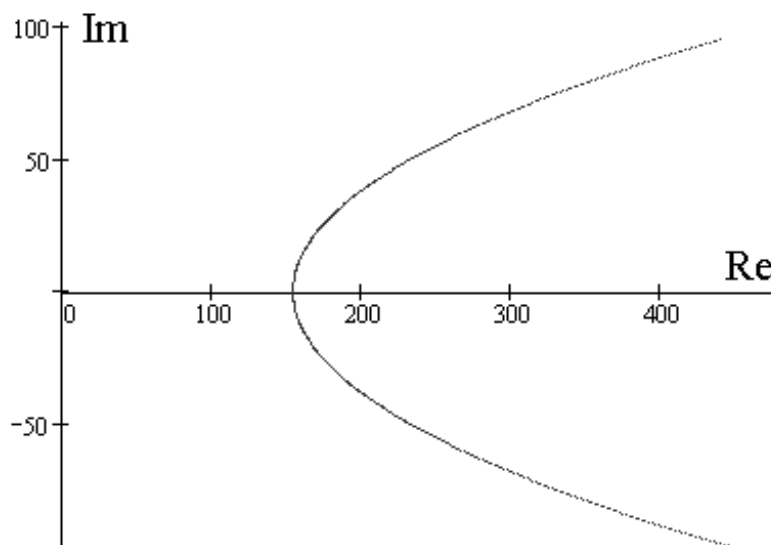


Рис. 3.6. – D -разбиение по k_1

Для выбранного $k_1 = 190$ получены значения зависимых параметров $k_2 = -798$ и $k_3 = -67$. На рис. 3.7, 3.8 представлены области локализации полюсов ИС, соответствующие найденным настройкам регулятора.



Рис. 3.7. – Области локализации доминирующего и свободного полюса

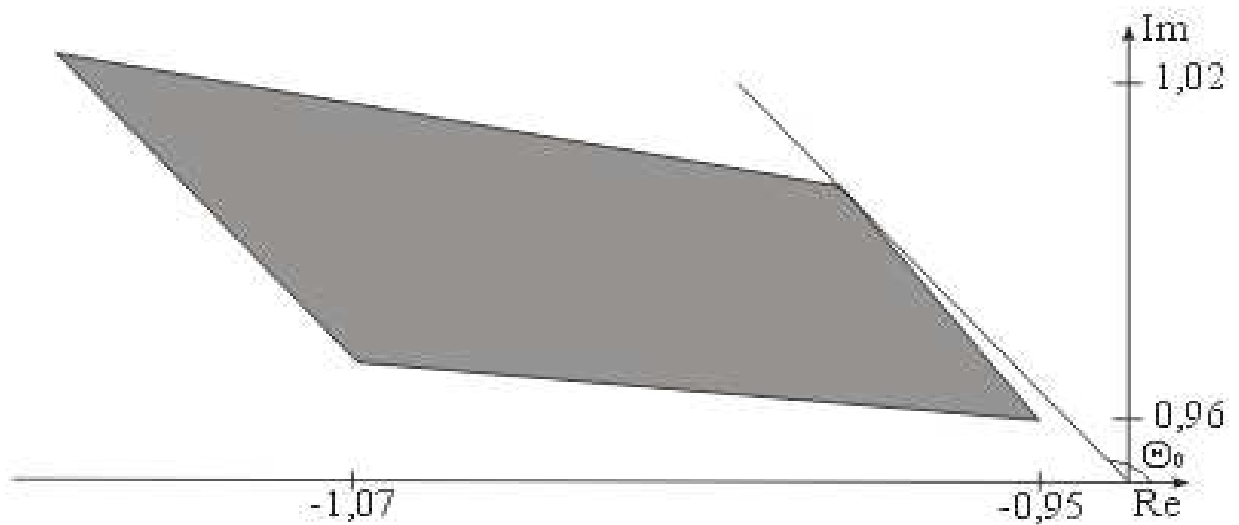


Рис. 3.8. – Область локализации доминирующего полюса

Расположение полученных областей локализации полюсов ИС при найденных значениях варьируемых параметров регулятора удовлетворяют заданным требованиям.

3.3.2. Размещение областей локализации доминирующих полюсов интервальной системы с обеспечением требуемой максимальной колебательности и минимальной степени устойчивости по одному вершинному полиному.

Рассмотрим случай, когда требуется обеспечить сразу два показателя качества: степень устойчивости и колебательность. Тогда области желаемого размещения полюсов будут иметь вид (рис. 3.9)

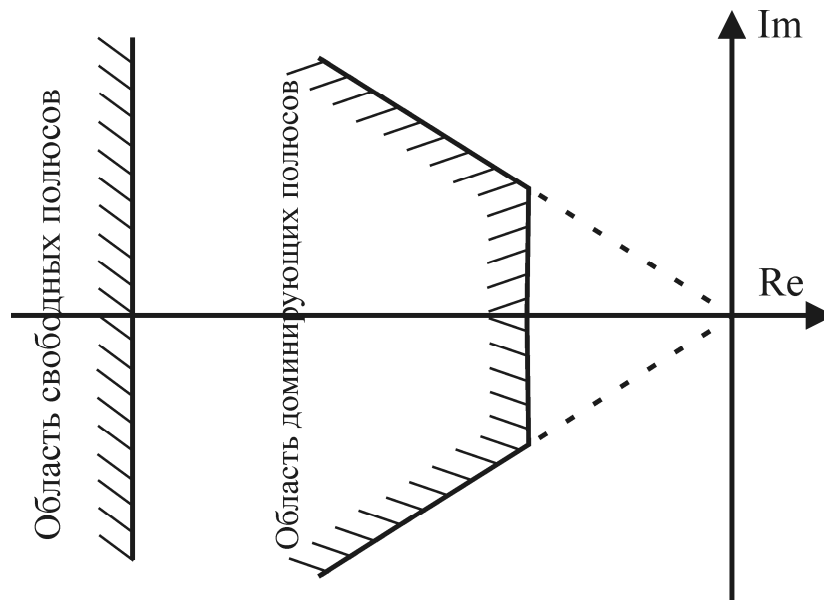


Рис. 3.9. – Области желаемого расположения полюсов.

Согласно [21], для того чтобы корень, соответствующий некоторому вершинному полиному, определял **максимальную колебательность и минимальную степень устойчивости** соответствующей ИС, необходимо, чтобы векторы, задающие углы выхода данного корня по всем $a_i, i = \overline{0, n}$, были направлены внутрь сектора $\Gamma \in \left[\Theta_0, \frac{3\pi}{2} \right]$ рис. 3.10, т. е. выполнялось условие:

$$\Theta_0 < i\Theta_0 - \left(C_i + \frac{\pi}{2} \right) + \Omega < \frac{3\pi}{2}, \quad (3.22)$$

где $\Omega = 0, \pi$ в зависимости от того, увеличивается или уменьшается интервальный параметр.

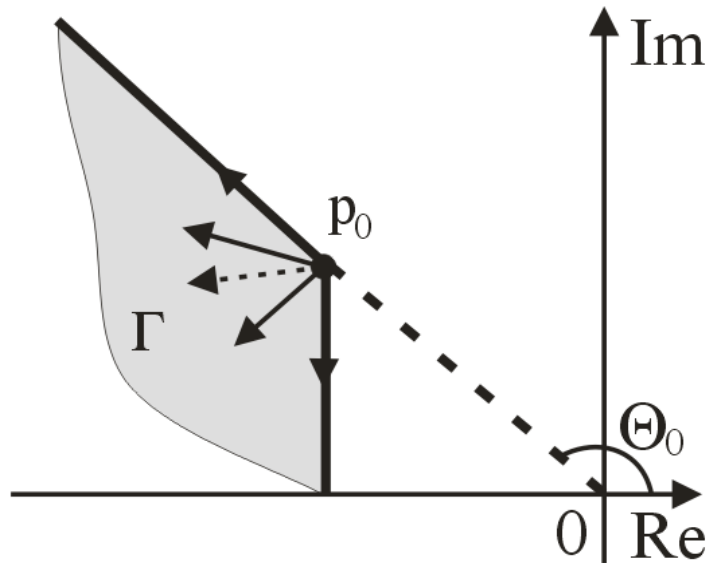


Рис.3.10. – Направление векторов углов выхода

Из уравнения (3.22) видно, что при заданном Θ_0 , на расположение угла выхода по i -му параметру будет влиять только C_i , причем при ее увеличении, угол выхода Θ_i^q будет уменьшаться. Условие (3.22) выполняется для $\Theta_i^q = \Theta_0$ только при $C_i = \max C_i$, тогда из (3.15), (3.16) получим

$$\Theta_0 = i\Theta_0 - \left(\max C_i + \frac{\pi}{2} \right) + \Omega,$$

тогда

$$\max C_i = \Theta_0(i-1) - \frac{\pi}{2} + \Omega. \quad (3.23)$$

Условие (3.22) выполняется при $\Theta_i^q = \frac{3\pi}{2}$ только для $C_i = \min C_i$, тогда получим

$$\min C_i = i\Theta_0 + \Omega. \quad (3.24)$$

Для того чтобы свободные полюсы располагались в S_0 , необходимо, чтобы $\min C_i = 0$. Из (3.23) и (3.24) видно, что $\max C_i$ может отличаться от

$\min C_i$ не больше, чем на $\frac{3\pi}{2} - \Theta_0$, тогда $\max C_i \in [0; \frac{3\pi}{2} - \Theta_0]$. Получим

фазовые условия 2 формирования полинома $R_b^v(p)$:

Если $\Theta_0(i-1) \in \left(\frac{\pi}{2}; -\Theta_0\right]$, то $\max C_i = \Theta_0(i-1) - \frac{\pi}{2}$, $\Omega = 0$ и значение коэффициента $a_i = \overline{a_i}$.

Если $\Theta_0(i-1) \in \left(-\frac{\pi}{2}; \pi - \Theta_0\right]$, то $\max C_i = \Theta_0(i-1) + \frac{\pi}{2}$, $\Omega = \pi$ и значение коэффициента $a_i = \underline{a_i}$.

Тогда для определения области S_0 и набора коэффициентов полинома требуется определить наименьшее значение $\max C_i$ при всех $i = \overline{0, n}$ и пределы соответствующих коэффициентов.

Следует отметить, что если

$$\Theta_0(i-1) \notin \left(\frac{\pi}{2}; -\Theta_0\right] \cap \left(-\frac{\pi}{2}; \pi - \Theta_0\right], \quad (3.25)$$

то, при выполнении принципа доминирования, области локализации доминирующих корней не могут быть локализованы в заданном секторе. В этом случае нужно изменить угол Θ_0 , задающий допустимую колебательность ИС.

Методика размещения полюсов по одному вершинному полиному

На основании проведенных исследований разработана следующая методика размещения полюсов ИС в заданном усеченном секторе.

1. Задаются желаемые координаты доминирующих полюсов ИС, определяющие ее максимальную колебательность и минимальную степень устойчивости.
2. Из фазовых условий 1 (2) формирования полинома $R_b^v(p)$ определяется минимальное значение $\max C_i$ (соответствующее Θ_0 ,

координатам доминирующих полюсов и степени полинома) и соответствующий набор пределов коэффициентов полинома $R_b^v(p)$.

3. Определяется уравнение прямой d_0 , левее которой гарантированно располагается S_0 .
4. Интервальный полином приводится к виду:

$$\sum_{i=1}^r k_i A_i(p) + B(p) = 0.$$

5. Согласно методике [5] определяются настраиваемые параметры, обеспечивающие желаемое расположение корней полинома $R_b^v(p)$.
6. Проверяется расположение областей локализации доминирующих и свободных полюсов интервальной системы с найденными настройками. В случае выхода областей за заданные границы следует увеличить число настраиваемых параметров либо изменить требования к системе.

Пример.

Рассмотрим пример поиска настроек регулятора для размещения доминирующих полюсов в заданном усеченном секторе (с обеспечением требуемой максимальной колебательности и минимальной степени устойчивости по одному вершинному полиному).

Пусть для объекта с передаточной функцией:

$$W_0(p) = \frac{1}{p^3 + a_3 p^2 + b_2 p + b_1}; \quad (3.26)$$

необходимо выбрать параметры регулятора:

$$W_p(p) = \frac{k_3 p^2 + k_2 p + k_1}{p}. \quad (3.27)$$

На основании (3.26) и (3.27) получим характеристическое уравнение системы:

$$p^4 + a_3 p^3 + (b_2 + k_3) p^2 + (b_1 + k_2) p + k_1 = 0,$$

где $a_2 = b_2 + k_3$,

$$a_1 = b_1 + k_2,$$

$$a_0 = k_1,$$

$$a_3 = [17; 20],$$

$$b_2 = [192; 200],$$

$$b_1 = 1024.$$

Требуется обеспечить расположение областей локализации двух доминирующих полюсов в секторе $\Theta_0 = \pm \frac{2}{3} \pi$, а свободные полюсы расположить в соответствии с принципом доминирования.

Пусть корни вершинных полиномов, определяющие максимальную колебательность ИС и минимальную степень устойчивости располагаются в точках: $\lambda_1 = -1 + j1,732$ и $\lambda_2 = -1 - j1,732$. Из **условий 2 формирования полинома** $R_b^v(p)$ определим пределы коэффициентов полинома, соответствующих сектору $\Theta_0 = \pm \frac{2}{3} \pi$.

При $i = 0$,

$$\Theta_0(i-1) = \frac{2}{3} \pi(-1) = -\frac{2}{3} \pi \in \left(\frac{1}{2} \pi; -\frac{2}{3} \pi \right],$$

$$\max C_0 = \frac{2}{3} \pi(0-1) - \frac{1}{2} \pi = \frac{5}{6} \pi, \quad a_0 = \overline{a_0}.$$

При $i = 1$,

$$\Theta_0(i-1) = \frac{2}{3} \pi(1-1) = 0 \in \left(-\frac{1}{2} \pi; \frac{1}{3} \pi \right],$$

$$\max C_1 = \frac{2}{3}\pi(1-1) + \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}\pi, \quad a_1 = \underline{a}_1.$$

При $i = 2$,

$$\Theta_0(i-1) = \frac{2}{3}\pi(2-1) = \frac{2}{3}\pi \in \left(\frac{1}{2}\pi; -\frac{2}{3}\pi \right],$$

$$\max C_2 = \frac{2}{3}\pi(2-1) - \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{6}\pi, \quad a_2 = \overline{a}_2.$$

При $i = 3$,

$$\Theta_0(i-1) = \frac{2}{3}\pi(3-1) = \frac{4}{3}\pi \in \left(\frac{1}{2}\pi; -\frac{2}{3}\pi \right],$$

$$\max C_3 = \frac{2}{3}\pi(3-1) - \frac{1}{2}\pi = \frac{5}{6}\pi, \quad a_3 = \overline{a}_3.$$

При $i = 4$,

$$\Theta_0(i-1) = \frac{2}{3}\pi(4-1) = 2\pi \in \left(-\frac{1}{2}\pi; \frac{1}{3}\pi \right],$$

$$\max C_4 = \frac{2}{3}\pi(4-1) + \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}\pi, \quad a_4 = \underline{a}_4.$$

Наименьшее значение $\max C_i = \max C_2 = \frac{1}{6}\pi$.

Таким образом, получим полином с пределами: $\overline{a}_0 \underline{a}_1 \overline{a}_2 \overline{a}_3 \underline{a}_4$, где $\underline{a}_4 = 1, \overline{a}_3 = 20, \overline{a}_2 = 200 + k_3, \underline{a}_1 = 1024 + k_2$. Найдем прямую d_0 .

$$d_0 = \frac{\beta_2}{\operatorname{tg}((\max C_i)/m)} + \alpha_2 = \frac{1,732}{\operatorname{tg}((1/6\pi)/2)} + 1 = 7,464.$$

Для того чтобы колебательность области локализации доминирующих полюсов определял только один набор коэффициентов, требуется, чтобы область расположения свободных полюсов лежала левее d_0 . С учетом

принципа доминирования зададим границу свободных полюсов $X(j\beta) = -8$, $-\infty < \beta < \infty$.

Варьируемые параметры регулятора разделены на свободный k_1 и зависимые k_2 и k_3 . После формирования необходимых матриц и векторов проведено D -разбиение по k_1 (Рис. 3.11).

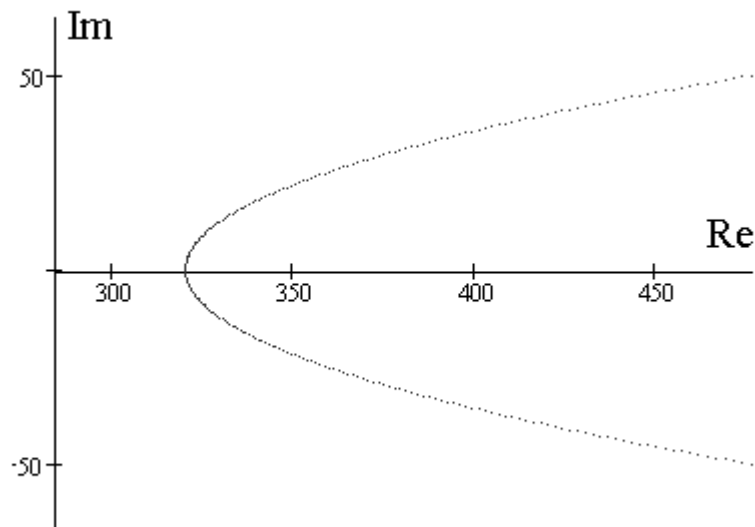


Рис. 3.11. – D -разбиение по k_1

Для выбранного $k_1 = 400$ получены значения зависимых параметров $k_2 = -752$ и $k_3 = -60$. На рис. 3.12, 3.13 представлены области локализации полюсов ИС, соответствующие найденным настройкам регулятора.

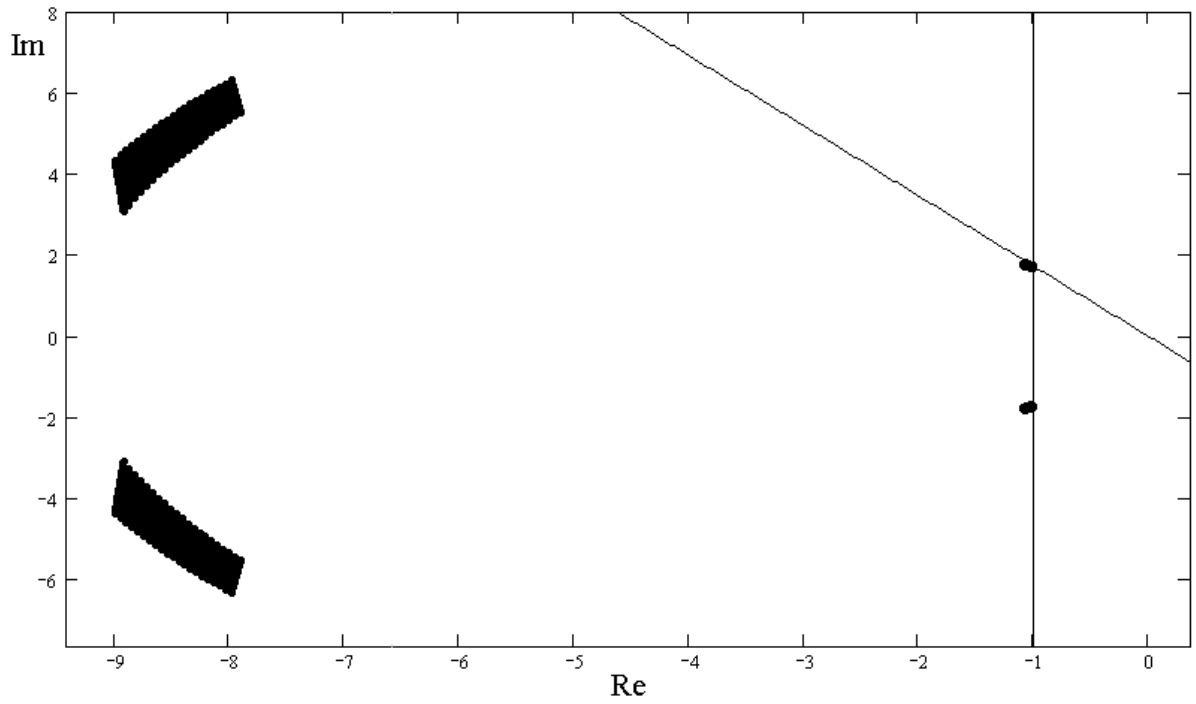


Рис. 3.12. – Области локализации доминирующих и свободных полюсов

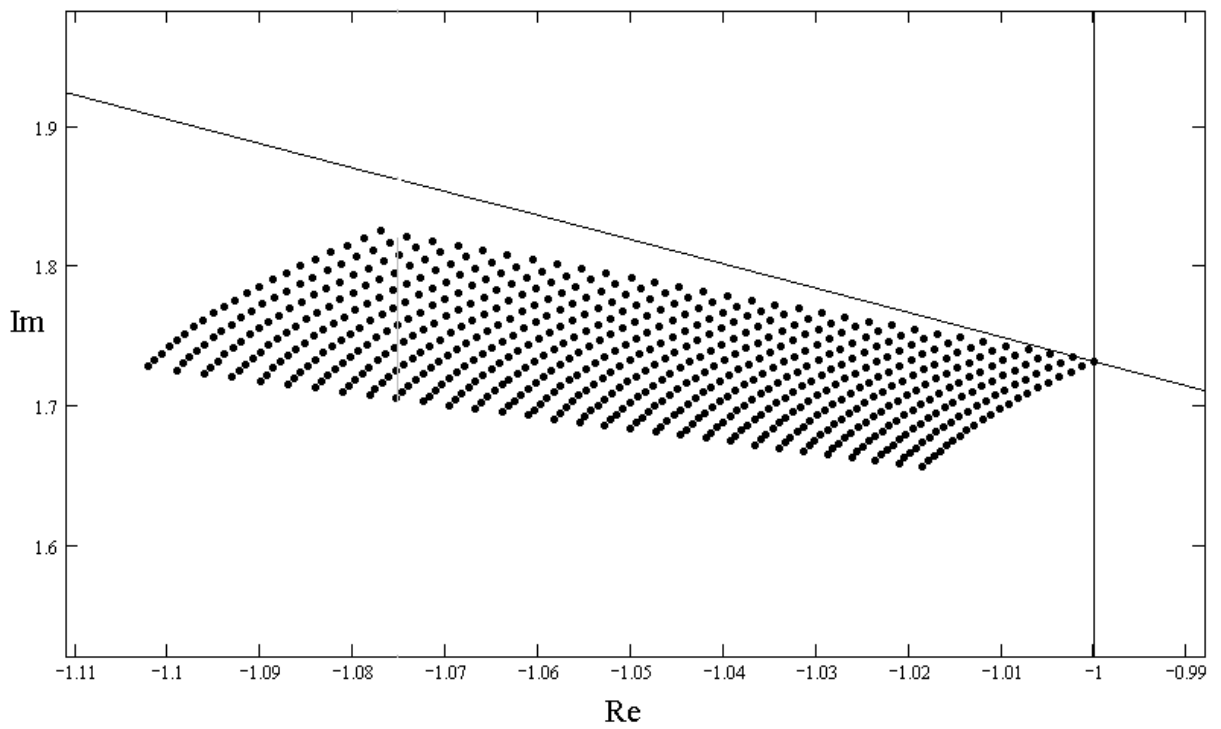


Рис. 3.13. – Область локализации доминирующего полюса

Расположение полученных областей локализации полюсов ИС при найденных значениях варьируемых параметрах регулятора удовлетворяют заданным требованиям.

3.3.3. Размещение областей локализации доминирующих полюсов интервальной системы с обеспечением требуемой максимальной колебательности и минимальной степени устойчивости по двум вершинным полиномам.

Если выполняется условие (3.25), то определять колебательность и степень устойчивости системы по одному вершинному полиному невозможно. В данном случае требуется рассматривать два вершинных полинома. Один из них будет определять колебательность, второй – степень устойчивости.

В данном случае требуется одновременное выполнение двух условий:

$$\Theta_0 < \Theta_i^q < \Theta_0 + \pi, \quad 3.28$$

для корня p_0 и

$$\frac{\pi}{2} < \Theta_i^w < \frac{3\pi}{2}, \quad 3.29$$

для корня p'_0 (рис 3.14).

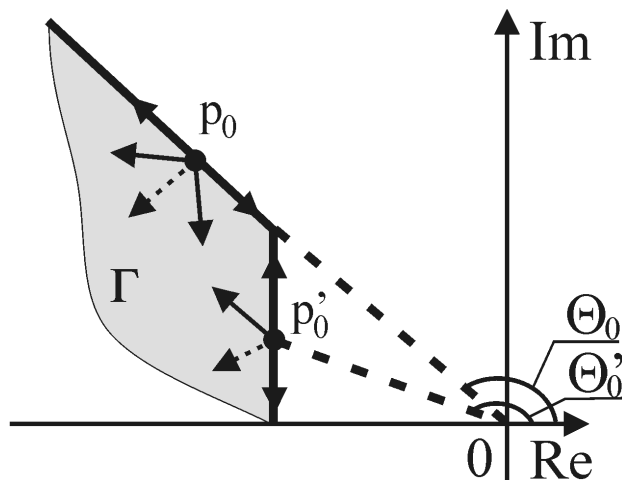


Рис. 3.14. – Векторы углов выхода из двух корней

Тогда **фазовые условия 3 формирования полиномов $R_{b_1}^v(p)$ и $R_{b_2}^v(p)$ примут вид:**

Для полинома $R_{b_1}^v(p)$:

Если $\Theta_0(i-1) \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, то $\max C_i = \Theta_0(i-1) - \frac{\pi}{2}$ при $\Omega = 0$. $\Omega = 0$

соответствует значению коэффициента $a_i = a_{i_{\max}} = \overline{a_i}$.

Если $\Theta_0(i-1) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\max C_i = \Theta_0(i-1) + \frac{\pi}{2}$ при $\Omega = \pi$. $\Omega = \pi$

соответствует значению коэффициента $a_i = a_{i_{\min}} = \underline{a_i}$.

Для полинома $R_{b_2}^v(p)$:

Если $i\Theta'_0 \in (\pi; 2\pi]$, то $\max C_i = i\Theta'_0 - \pi$ при $\Omega = 0$. $\Omega = 0$ соответствует значению коэффициента $a_i = a_{i_{\max}} = \overline{a_i}$.

Если $i\Theta'_0 \in (0; \pi]$, то $\max C_i = i\Theta'_0$ при $\Omega = \pi$. $\Omega = \pi$ соответствует значению коэффициента $a_i = a_{i_{\min}} = \underline{a_i}$.

Так как величина Θ'_0 неизвестна, то условиями для формирования полинома $R_{b_2}^v(p)$ воспользоваться нельзя. Так как полиномы $R_{b_1}^v(p)$ и $R_{b_2}^v(p)$ являются вершинными полиномами одной реберной ветви, поэтому могут отличаться пределом только одного коэффициента. Тогда для определения полинома $R_{b_2}^v(p)$ необходимо найти, предел какого коэффициента полинома $R_{b_1}^v(p)$ изменится при изменении Θ_0 до Θ'_0 , и изменении условия направления векторов выхода реберных ветвей. Для этого, после формирования полинома $R_{b_1}^v(p)$, в соответствии с пределами коэффициентов a_i , полученных при каждом i , из соответствующего условия ($i\Theta'_0 \in (\pi; 2\pi)$ при $\overline{a_i}$ или $i\Theta'_0 \in (0; \pi)$ при $\underline{a_i}$) определяются Θ'_0 . Если при коэффициенте с индексом i не выполняется условие $\Theta_0 < \Theta'_0 < \pi$, то $R_{b_2}^v(p)$ будет отличаться от $R_{b_1}^v(p)$ пределом этого коэффициента.

Рассмотрим способ выбора параметров регулятора при двух определяющих вершинных полиномах.

Пусть характеристическое уравнение линейной непрерывной системы управления приведено к виду

$$\sum_{i=1}^r k_i A_i(p) + B(p) = 0, \quad (3.30)$$

где $k_i, j = 1, 2, \dots, r$ – параметры, значения которых необходимо выбрать так, чтобы обеспечить требуемое качество управления, $A_i(p), j = 1, 2, \dots, r, B(p)$ – полиномы.

Рассмотрим корень $p_0 = \lambda_j$. Вместо конкретного значения корня λ_j зададим значение прямой, которой должен будет принадлежать данный корень: $\lambda_j(\alpha) = -\alpha + j\beta$, где $\beta = \alpha \cdot \operatorname{tg}(\pi - \Theta_0)$, тогда $\lambda_j(\alpha) = -\alpha + j\alpha \cdot \operatorname{tg}(\pi - \Theta_0)$. Таким образом, при различных значениях α , получаемые корни $\lambda_j(\alpha)$ будут располагаться на луче определяющем максимальную колебательность ИС.

Подстановка $p_j(\alpha) = \lambda_j(\alpha) = -\alpha + j\beta = -\alpha + j\alpha \cdot \operatorname{tg}(\pi - \Theta_0), j = 1, \dots, l$ в (3.30) дает l уравнений

$$k_1 \cdot A_1(\lambda_j(\alpha)) + \sum_{i=2}^r k_i \cdot A_i(\lambda_j(\alpha)) + B(\lambda_j(\alpha)) = 0, j = 1, \dots, l. \quad (3.31)$$

Эти уравнения связывают варьируемые параметры $k_i, i = 1, \dots, r$ с корнями $\lambda_j(\alpha), j = 1, \dots, l$.

Представим систему уравнений (3.27) в матричной форме

$$\mathbf{Q}_{11}(\alpha) \cdot \mathbf{k}_1 + \mathbf{Q}_{12}(\alpha) \cdot \bar{\mathbf{g}}_2 = \mathbf{R}_1(\alpha), \quad (3.32)$$

где

$$\mathbf{Q}_{11}(\lambda) = \begin{bmatrix} A_1(\lambda_1(\alpha)) \\ \dots \\ A_1(\lambda_l(\alpha)) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q}_{12}(\lambda) = \begin{bmatrix} A_2(\lambda_1(\alpha)) & \dots & A_r(\lambda_1(\alpha)) \\ \dots & \dots & \dots \\ A_2(\lambda_l(\alpha)) & \dots & A_r(\lambda_l(\alpha)) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{g}_2 = \begin{bmatrix} k_2 \\ \dots \\ k_r \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}_1(\lambda) = \begin{bmatrix} -B(\lambda_1(\alpha)) \\ \dots \\ -B(\lambda_r(\alpha)) \end{bmatrix}.$$

Для размещения свободных полюсов в заданной области сделаем подстановку $p = -\delta(\omega) + j\omega$ в (3.30). В результате получим:

$$k_1 \cdot A_1(-\delta(\omega) + j\omega) + \sum_{i=2}^r k_i \cdot A_i(-\delta(\omega) + j\omega) + B(-\delta(\omega) + j\omega) = 0. \quad (3.33)$$

В матричной форме (3.23) имеет вид

$$\mathbf{Q}_{21}(\omega) \cdot k_1 + \mathbf{Q}_{22}(\omega) \mathbf{g}_2 = \mathbf{R}_2(\omega), \quad (3.34)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{21}(\omega) &= A_1(-\delta(\omega) + j\omega); \\ \mathbf{Q}_{22}(\omega) &= [A_2(-\delta(\omega) + j\omega) \quad \dots \quad A_r(-\delta(\omega) + j\omega)]; \\ \mathbf{R}_2(\omega) &= -B(-\delta(\omega) + j\omega). \end{aligned}$$

Для определения уравнения границы D -разбиения объединим (3.32) и (3.33) в одну систему уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_{11}(\alpha) \cdot k_1 + \mathbf{Q}_{12}(\alpha) \cdot \mathbf{g}_2 = \mathbf{R}_1(\alpha), \\ \mathbf{Q}_{21}(\omega) \cdot k_1 + \mathbf{Q}_{22}(\omega) \mathbf{g}_2 = \mathbf{R}_2(\omega). \end{cases} \quad (3.35)$$

Из первого уравнения системы (3.35) имеем

$$\mathbf{g}_2 = \mathbf{Q}_{12}^{-1}(\alpha) \cdot \mathbf{R}_1(\alpha) - \mathbf{Q}_{12}^{-1}(\alpha) \cdot \mathbf{Q}_{11}(\alpha) \cdot k_1. \quad (3.36)$$

После подстановки полученного выражения (3.36) для вектора \mathbf{g}_2 зависимых варьируемых параметров во второе уравнение системы (3.35), получим искомое уравнение границы D -разбиения

$$k_1(\omega) = \frac{\mathbf{R}_2(\omega) - \mathbf{Q}_{22}(\omega) \cdot \mathbf{Q}_{12}^{-1}(\alpha) \cdot \mathbf{R}_1(\alpha)}{\mathbf{Q}_{21}(\omega) - \mathbf{Q}_{22}(\omega) \cdot \mathbf{Q}_{12}^{-1}(\alpha) \cdot \mathbf{Q}_{11}(\alpha)}. \quad (3.37)$$

Далее задаваясь значениями ω в пределах от $-\infty$ до ∞ , и вероятными значениями α строим границы D -разбиения на комплексной плоскости. Они разделяют плоскость параметра k_1 на ряд областей, среди которых

необходимо выделить (если она имеется) область, которой соответствует требуемое расположение свободных полюсов системы.

После выбора значения k_1 из найденной области при помощи выражения (3.36) рассчитываются функции значений зависимых варьируемых параметров $k_2(\alpha), \dots, k_r(\alpha)$, являющихся составляющими вектора \mathbf{g}_2 .

Рассмотрим второй корень $p'_0 = \lambda'_j$. Здесь также вместо конкретного значения корня λ'_j зададим значение прямой, параллельной мнимой оси, которой будет принадлежать данный корень: $\lambda'_j(\beta') = -\alpha' + j\beta'$. Таким образом, при различных значениях β' , получаемые корни $\lambda'_j(\beta')$ будут располагаться на линии, определяющей минимальную степень устойчивости ИС.

Подстановка $p_j(\beta') = \lambda'_j(\beta') = -\alpha' + j\beta'$, $j = 1, \dots, l$ в (3.30) дает l уравнений

$$k_1 \cdot A_1(\lambda'_j(\beta')) + \sum_{i=2}^r k_i \cdot A_i(\lambda'_j(\beta')) + B(\lambda'_j(\beta')) = 0, j = 1, \dots, l. \quad (3.38)$$

Эти уравнения связывают варьируемые параметры $k_i, i = 1, \dots, r$ с $\lambda'_j(\beta'), j = 1, \dots, l$.

Представим систему уравнений (3.38) в матричной форме

$$\mathbf{Q}_{11}(\beta') \cdot k_1 + \mathbf{Q}_{12}(\beta') \cdot \bar{\mathbf{g}}_2 = \mathbf{R}_1(\beta'), \quad (3.39)$$

где

$$\mathbf{Q}_{11}(\lambda) = \begin{bmatrix} A_1(\lambda'_1(\beta')) \\ \dots \\ A_1(\lambda'_l(\beta')) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q}_{12}(\lambda) = \begin{bmatrix} A_2(\lambda'_1(\beta')) & \dots & A_r(\lambda'_1(\beta')) \\ \dots & \dots & \dots \\ A_2(\lambda'_l(\beta')) & \dots & A_r(\lambda'_l(\beta')) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{g}_2 = \begin{bmatrix} k_2 \\ \dots \\ k_r \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}_1(\lambda) = \begin{bmatrix} -B(\lambda'_1(\beta')) \\ \dots \\ -B(\lambda'_l(\beta')) \end{bmatrix}.$$

Для определения уравнения границы D -разбиения объединим (3.34) и (3.39) в одну систему уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_{11}(\beta') \cdot k_1 + \mathbf{Q}_{12}(\beta') \cdot \mathbf{g}_2 = \mathbf{R}_1(\beta'), \\ \mathbf{Q}_{21}(\omega) \cdot k_1 + \mathbf{Q}_{22}(\omega) \mathbf{g}_2 = \mathbf{R}_2(\omega). \end{cases} \quad (3.40)$$

Из первого уравнения системы (3.40) имеем:

$$\mathbf{g}_2 = \mathbf{Q}_{12}^{-1}(\beta') \cdot \mathbf{R}_1(\beta') - \mathbf{Q}_{12}^{-1}(\beta') \cdot \mathbf{Q}_{11}(\beta') \cdot k_1. \quad (3.41)$$

После подстановки полученного выражения (3.41) для вектора \mathbf{g}_2 зависимых варьируемых параметров во второе уравнение системы (3.40), получим искомое уравнение границы D -разбиения:

$$k_1(\omega) = \frac{\mathbf{R}_2(\omega) - \mathbf{Q}_{22}(\omega) \cdot \mathbf{Q}_{12}^{-1}(\beta') \cdot \mathbf{R}_1(\beta')}{\mathbf{Q}_{21}(\omega) - \mathbf{Q}_{22}(\omega) \cdot \mathbf{Q}_{12}^{-1}(\beta') \cdot \mathbf{Q}_{11}(\beta')}. \quad (3.42)$$

Далее задаваясь значениями ω в пределах от $-\infty$ до ∞ , и вероятными значениями β' строим границы D -разбиения на комплексной плоскости. Они также разделяют плоскость параметра k_1 на ряд областей, среди которых необходимо выделить область, которой соответствует требуемое расположение свободных полюсов системы. После выбора значения k_1 из найденной области при помощи выражения (3.41) рассчитываются функции значений зависимых варьируемых параметров $k_2(\beta'), \dots, k_r(\beta')$, являющимися составляющими вектора \mathbf{g}_2 .

Решая систему из $r-1$ уравнений $k_i(\alpha) = k_i(\beta')$, $i = \overline{2, r}$, найдем α и β' . Подставляя найденные значения α и β' в (3.41) получим значения настроек регулятора.

Методика размещения полюсов по двум вершинным полиномам.

На основании проведенных исследований разработана следующая методика размещения полюсов ИС в заданном усеченном секторе по двум вершинным полиномам.

1. Задаются желаемые показатели качества ИС: максимальная колебательность и минимальную степень устойчивости.
2. Из фазового условия **3 формирования полинома** $R_{b_1}^v(p)$ определяется минимальное значение $\max C_i$ и соответствующий набор пределов коэффициентов полинома $R_{b_1}^v(p)$.
3. В соответствии с пределами коэффициентов a_i полинома $R_{b_1}^v(p)$, из соответствующего условия ($i\Theta'_0 \in (\pi; 2\pi]$ при $a_i = \overline{a_i}$ или $i\Theta'_0 \in (0; \pi]$ при $a_i = \underline{a_i}$) определяются Θ'_0 . Если при некотором коэффициенте не выполняется условие $\Theta_0 < \Theta'_0 < \pi$, то $R_{b_2}^v(p)$ будет отличаться от $R_{b_1}^v(p)$ пределом этого коэффициента.
4. Определяется уравнение прямой d_0 , левее которой гарантированно располагается S_0 .
5. Задается местоположение корня вершинного полинома, определяющего колебательность ИС: $p_j(\alpha) = -\alpha + j\alpha \cdot \operatorname{tg}(\pi - \Theta_0)$.
6. Далее задаваясь значениями ω в пределах от $-\infty$ до ∞ , и вероятными значениями α строятся границы D -разбиения на комплексной плоскости.
7. Задается местоположение корня вершинного полинома, определяющего минимальную степень устойчивости ИС: $\lambda'_j(\beta') = -\alpha' + j\beta'$.
8. Далее задаваясь значениями ω в пределах от $-\infty$ до ∞ , и вероятными значениями β' строятся границы D -разбиения на комплексной плоскости. С учетом D -разбиения, полученного в п. 6, выбирается общее значение k_1 и рассчитываются функции значений зависимых варьируемых параметров $k_2(\alpha), \dots, k_r(\alpha)$ и $k_2(\beta'), \dots, k_r(\beta')$.

9. Решая систему из $r - 1$ уравнений $k_i(\alpha) = k_i(\beta')$, $i = \overline{2, r}$, находятся α и β' . Подставляя найденные значения α и β' в (3.41), определяются значения настроек регулятора.
10. Проверяется расположение областей локализации доминирующих и свободных полюсов интервальной системы с найденными настройками. В случае выхода областей за заданные границы следует увеличить число настраиваемых параметров либо изменить требования к системе.

Пример.

Рассмотрим пример поиска настроек регулятора для размещения доминирующих полюсов в заданном усеченном секторе (с обеспечением требуемой максимальной колебательности и минимальной степени устойчивости по двум вершинным полиномам.).

Пусть для объекта с передаточной функцией:

$$W_0(p) = \frac{1}{a_4 p^3 + a_3 p^2 + b_2 p + b_1}; \quad (3.43)$$

необходимо выбрать параметры регулятора:

$$W_p(p) = \frac{k_3 p^2 + k_2 p + k_1}{p}. \quad (3.44)$$

На основании (3.43) и (3.44) получим характеристическое уравнение системы:

$$a_4 p^4 + a_3 p^3 + (b_2 + k_3) p^2 + (b_1 + k_2) p + k_1 = 0,$$

где $a_2 = b_2 + k_3$,

$$a_1 = b_1 + k_2,$$

$$a_0 = k_1,$$

$$a_4 = [0,7;0,8],$$

$$a_3 = [17;19],$$

$$b_2 = [198;200],$$

$$b_1 = [1025;1026].$$

Требуется обеспечить расположение областей локализации двух доминирующих полюсов в секторе $\Theta_0 = \pm \frac{7}{9}\pi$, а свободные полюсы расположить в соответствии с принципом доминирования.

Пусть максимальную колебательность ИС определяют границы сектора, а минимальная степень устойчивости $\delta=1$. Из **условий 3 формирования полинома** $R_b^v(p)$ определим пределы коэффициентов полинома, соответствующих сектору $\Theta_0 = \pm \frac{7}{9}\pi$.

При $i=0$,

$$\Theta_0(i-1) = \frac{7}{9}\pi(-1) = -\frac{7}{9}\pi \in \left(\frac{1}{2}\pi; \frac{3}{2}\pi \right],$$

$$\max C_0 = \frac{7}{9}\pi(0-1) - \frac{1}{2}\pi = 1\frac{13}{18}\pi, \quad a_0 = \overline{a_0}.$$

При $i=1$,

$$\Theta_0(i-1) = \frac{7}{9}\pi(1-1) = 0 \in \left(-\frac{1}{2}\pi; \frac{1}{2}\pi \right],$$

$$\max C_1 = \frac{7}{9}\pi(1-1) + \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}\pi, \quad a_1 = \underline{a_1}.$$

При $i=2$,

$$\Theta_0(i-1) = \frac{7}{9}\pi(2-1) = \frac{7}{9}\pi \in \left(\frac{1}{2}\pi; \frac{3}{2}\pi \right],$$

$$\max C_2 = \frac{7}{9}\pi(2-1) - \frac{1}{2}\pi = \frac{5}{18}\pi, \quad a_2 = \overline{a_2}.$$

При $i=3$,

$$\Theta_0(i-1) = \frac{7}{9}\pi(3-1) = 1\frac{5}{9}\pi \in \left(-\frac{1}{2}\pi; \frac{1}{2}\pi\right],$$

$$\max C_3 = \frac{7}{9}\pi(3-1) - \frac{1}{2}\pi = 1\frac{1}{18}\pi, \quad a_3 = \underline{a_3}.$$

При $i=4$,

$$\Theta_0(i-1) = \frac{7}{9}\pi(4-1) = 2\frac{2}{9}\pi \in \left(-\frac{1}{2}\pi; \frac{1}{2}\pi\right],$$

$$\max C_4 = \frac{7}{9}\pi(4-1) + \frac{1}{2}\pi = \frac{5}{6}\pi, \quad a_4 = \underline{a_4}.$$

Наименьшее значение $\max C_i = \max C_2 = \frac{5}{18}\pi$.

Таким образом, получим полином с пределами: $\overline{a_0} \underline{a_1} \overline{a_2} \underline{a_3} \underline{a_4}$, где $\underline{a_4} = 0,7$, $\underline{a_3} = 17$, $\overline{a_2} = 200 + k_3$, $\underline{a_1} = 1025 + k_2$.

Определим набор пределов коэффициентов вершинного полинома определяющего степень устойчивости.

Зная, что $\Theta_0 < \Theta'_0 < \pi$, получим выражения:

$$i=0, \quad i\Theta'_0 = 0 \in (\pi; 2\pi], \quad a_0 = \overline{a_0}.$$

$$i=1, \quad i\Theta'_0 = \Theta'_0 \in (0; \pi], \quad a_1 = \underline{a_1}.$$

$$i=2, \quad i\Theta'_0 = 2\Theta'_0 \in (\pi; 2\pi], \quad a_2 = \overline{a_2}.$$

$$i=3, \quad i\Theta'_0 = 3\Theta'_0 \in \left(\frac{1}{3}\pi; \pi\right) \in (0; \pi], \quad a_3 = \underline{a_3}.$$

$$i = 4, \quad i\Theta'_0 = 4\Theta'_0 \in \left(1\frac{1}{9}\pi; 2\pi\right) \in (\pi; 2\pi], \quad a_4 = \overline{a_4}.$$

Таким образом, получим полином с пределами: $\overline{a_0} \overline{a_1} \overline{a_2} \overline{a_3} \overline{a_4}$. Зададим границы размещения вершин, определяющих максимальную колебательность и минимальную степень устойчивости:

$$p_j(\alpha) = -\alpha + j\alpha \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{2}{9}\pi\right), \quad \lambda'_j(\beta') = -1 + j\beta'.$$

Найдем прямую d_0 . Так как значения α_2 и β_2 точно неизвестны, зададим некоторые предполагаемые максимальные значения.

$$d_0 = \frac{\beta_2}{\operatorname{tg}((\max C_i)/m)} + \alpha_2 = \frac{1.1}{\operatorname{tg}((5/18\pi)/2)} + 1.2 = 3,5.$$

С учетом принципа доминирования зададим границу свободных полюсов $X(j\beta) = -8, \quad -\infty < \beta < \infty$.

Далее задавая значениями ω , в пределах от $-\infty$ до ∞ , вероятными значениями $\alpha \in (1; 1,15)$ и вероятными значениями $\beta' \in (0; 0,84)$, на комплексной плоскости строятся границы D -разбиения (рис. 3.15, 3.16).

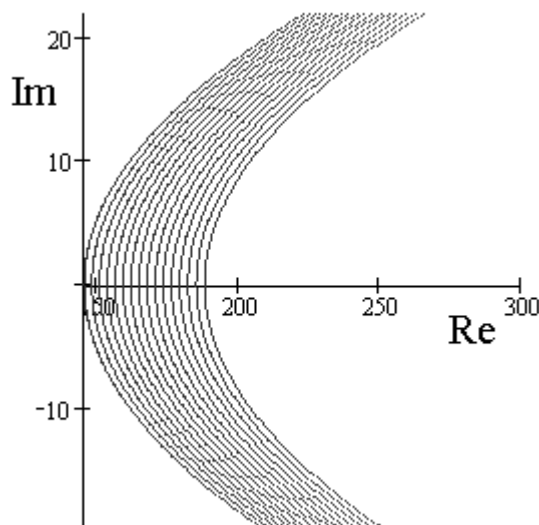


Рис. 3.15. – D -разбиение по $k_1(\alpha)$

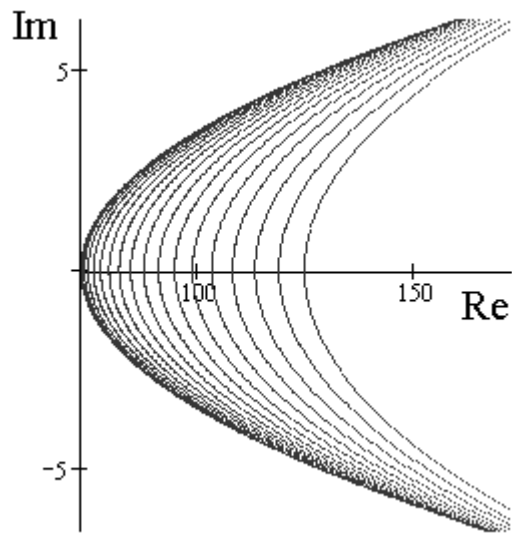


Рис. 3.16. – D-разбиение по $k_1(\beta')$

Для выбранного $k_1 = 200$ получаем значения зависимых параметров $k_2 = -762,6$ и $k_3 = -49,7$. На рис. 3.17, 3.18 представлены области локализации полюсов ИС, соответствующие найденным настройкам регулятора.

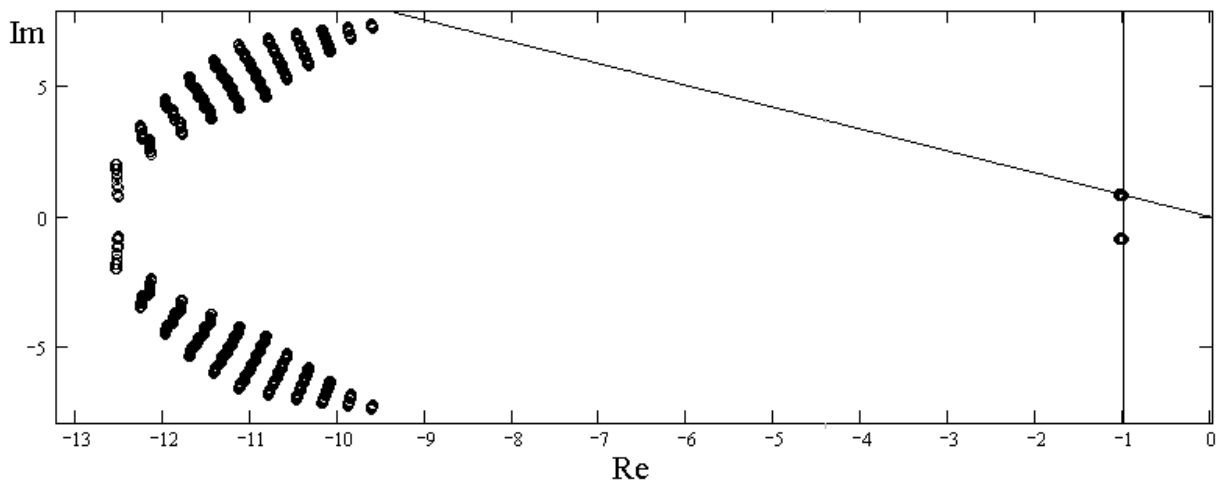


Рис. 3.17. – Области локализации доминирующих и свободных полюсов

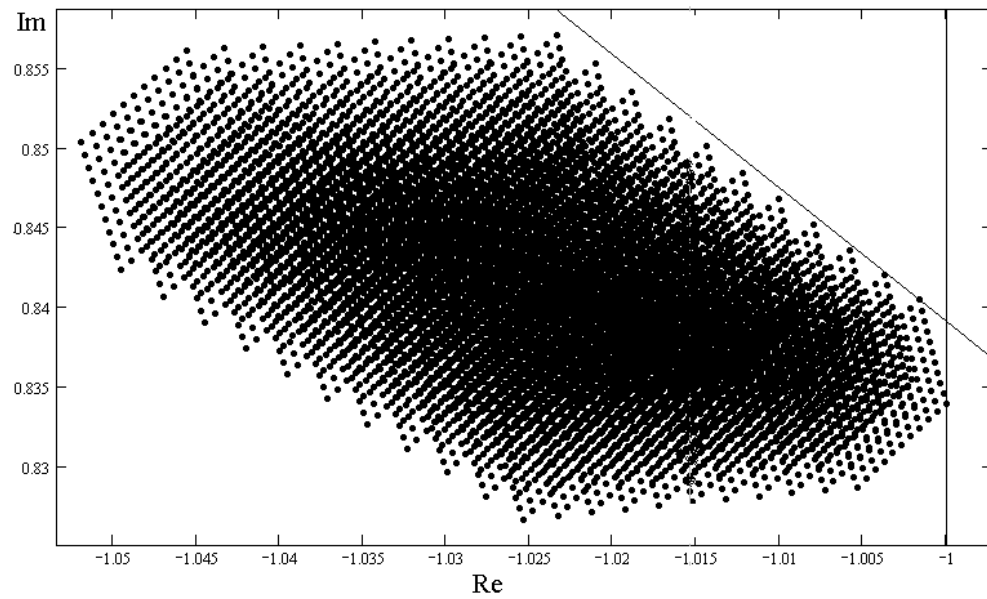


Рис. 3.18. – Область локализации доминирующего полюса

Расположение полученных областей локализации полюсов ИС при найденных значениях варьируемых параметров регулятора удовлетворяет заданным требованиям.

3.4. Основные результаты

В главе предлагаются подходы для синтеза систем с интервальными параметрами.

Рассматривается подход для размещения областей локализации доминирующих полюсов ИС с обеспечением гарантированных показателей качества, основанный на выделении одного вершинного полинома ИС, корни которого определяют показатели качества синтезируемой ИС. Возможность выделения данного полинома основана на установлении соответствия между направлениями векторов выхода ветвей многопараметрического интервального корневого годографа и расположением корней полинома на комплексной плоскости. Для требуемого расположения корней найденного полинома применяется метод размещения полюсов стационарной системы с обеспечением принципа доминирования, основанный на применении метода D-разбиения.

Методики для синтеза ИС, разработанные на основе данного подхода, позволяют также размещать области локализации свободных полюсов системы в соответствии с принципом доминирования с учетом выполнения введенных фазовых ограничений. Процедура поиска настроек регулятора ИС также основана на применении метода D-разбиения, что позволяет оценивать робастность синтезируемой системы к получаемым параметрам регулятора.

Также найдено фазовое условие применимости подхода, основанного на выделении одного вершинного полинома ИС. Для случая, когда применение данного подхода невозможно, разработана методика синтеза ИС на основе двух вершинных полиномах. Один из которых определяет максимальную колебательность синтезируемой ИС, второй – ее минимальную степень устойчивости. Методика размещения корней одного полинома адаптирована для ее применения к размещению корней двух полиномов.

Возможность выделения из семейства только одного или двух полиномов, определяющих динамику ИС, позволяет применять методы, разработанные для стационарных систем.

ГЛАВА 4. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДИКИ СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ СИСТЕМЫ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

4.1. Требования к системе позиционирования для изготовления жидкокристаллических мониторов

В этой главе рассматривается применение одной из разработанных методик параметрического синтеза регулятора при проектировании системы позиционирования, используемой для изготовления жидкокристаллических мониторов. Для этого приводится описание основных этапов изготовления жидкокристаллических мониторов и структура проектируемой системы позиционирования. На основе составленной математической модели системы проводится параметрический синтез регулятора. Выполнение обеспечения заданных требований к системе проверяется на основе моделирования.

Основными этапами изготовления жидкокристаллических мониторов являются следующие:

- нанесение на ровную стеклянную подложку полупрозрачных электродов из пленки окислов индия и олова, формирующих пиксели изображения;
- размещение полимерной пленки с микробороздками, ориентирующими молекулы жидких кристаллов, составляющих следующий слой;
- склеивание полученного набора слоев с таким же набором, компоненты которого расположены в обратном порядке;
- вырезание из полученной панели экрана требуемого размера;
- расположение системы подсветки – мощных флюоресцентных ламп в виде трубок и специальных материалов или световодов, способствующих

более равномерному распределению освещения по плоскости экрана (рис.4.1);

- соединение полученного экрана с электронными узлами управления и помещение его в корпус.

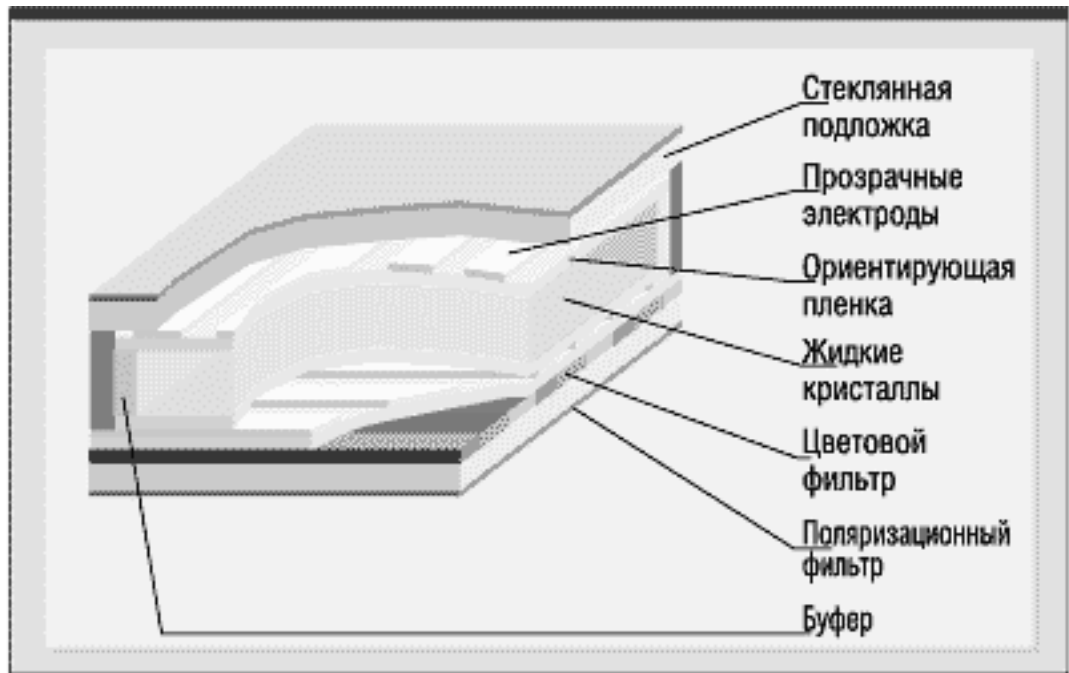


Рис. 4.1. – Составляющие экрана жидкокристаллического монитора

При производстве экранов жидкокристаллических мониторов для позиционирования и установки микросхем, нанесения жидких кристаллов и нанесения клея используют исполнительные механизмы на основе линейных двигателей постоянного тока. Их задача – перемещать и устанавливать микросхемы либо наносить равномерную клеевую дорожку для склеивания стеклянных подложек. Задача позиционирования микросхем заключается в установке микросхемы в требуемом месте. При этом переходный процесс в системе позиционирования не должен иметь перерегулирования, так как иначе микросхема и поверхность могут быть повреждены. Кроме того, это свойство должно сохраняться при изменении нагрузки, если, например, требуется установить микросхему другого типа. Та же задача возникает и

при нанесении клея на стеклянную поверхность. Изменение нагрузки в этом случае вызывается уменьшением количества клея.

В связи с особенностью описанного выше технологического процесса к системе управления исполнительным механизмом предъявляются следующие требования:

- а) высокое быстродействие;
- б) апериодический переходный процесс;
- в) сохранение апериодичности переходного процесса при увеличении нагрузки на 20%.

4.2. Структура системы позиционирования

Для реализации системы позиционирования, используемой для нанесения клея и размещения микросхем при изготовлении жидкокристаллических мониторов, в качестве исполнительного механизма используется линейный электродвигатель постоянного тока, а в качестве устройства управления – контроллер, основанный на процессоре (digital signal processor) TMS320F28 фирмы Texas Instruments.

Линейный электродвигатель постоянного тока представляет собой простейший магнитоэлектрический преобразователь, в котором подвижная часть не вращается (как в традиционных двигателях), а линейно перемещается вдоль неподвижной части – магнитопровода произвольной длины (рис. 4.3).



Рис. 4.3. – Принцип построения линейного двигателя

Данный тип двигателей широко применяется в системах высокоточного позиционирования микросхем для их последующей пайки и в системах позиционирования в накопителях на жестких дисках. Более мощные линейные двигатели применяют при производстве шлифовальных и металлообрабатывающих станков.

Рассматриваемый вариант электродвигателя имеет следующие параметры:

- мощность около 100 Вт;
- максимальное перемещение подвижной части 50 мм.

Двигатель конструктивно выполнен в одном корпусе с датчиком положения (фотоэлектрического преобразователя) (Рис. 4.4). Точность измерения положения составляет ± 5 мкм.

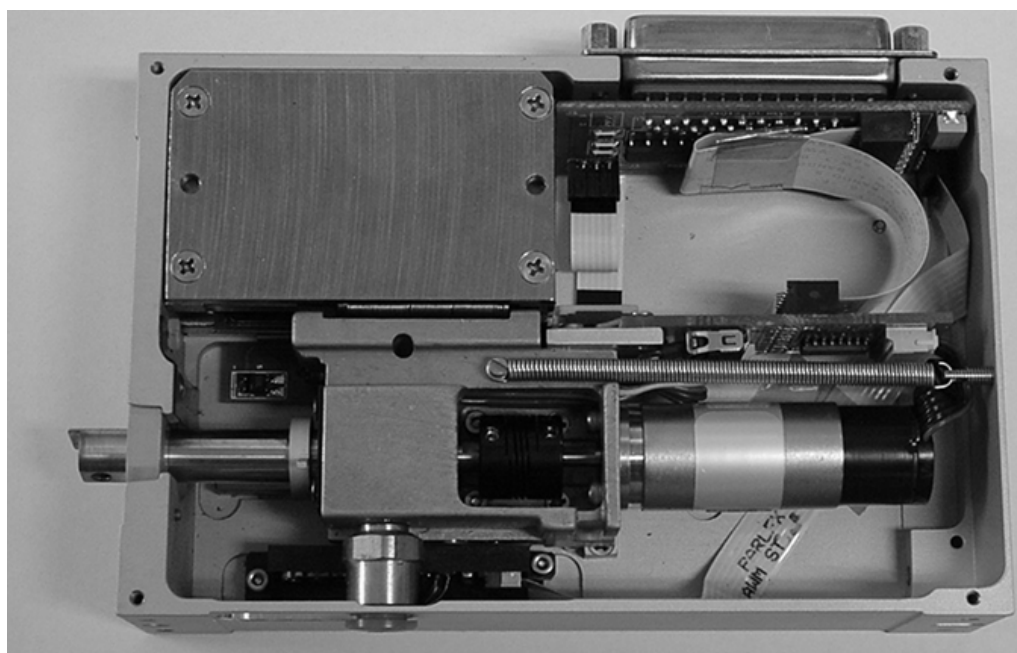


Рис. 4.4. – Применяемый линейный двигатель

Используемый в системе контроллер работает с тактовой частотой 150 МГц. Архитектура современных сигнальных процессоров в совокупности с высокой тактовой частотой обеспечивают контроллеру достаточное быстродействие.

Контроллер исполнен на одной плате с блоком выходных транзисторов, которые управляют средним значением выходного напряжения, поступающего на обмотку линейного электродвигателя. Используемые транзисторы рассчитаны на рабочее напряжение 25 В и ток 10 А.

В контроллере аппаратно реализована широтно-импульсная модуляция, максимальная частота которой составляет 60 КГц. Тем не менее, производительности контроллера достаточно для расчета управляющего воздействия каждые 16 мкс.

Контроллер содержит блоки ЦАП и АЦП. Предусмотрена также его связь с различными модулями, поддерживающими стандарт Ethernet и передачу данных по протоколу TCP/IP.

Программирование контроллера осуществляется через USB интерфейс с использованием программного продукта Code Composer Studio, разработанного фирмой Texas Instruments.

Функциональная схема системы позиционирования представлена на рис. 4.5.

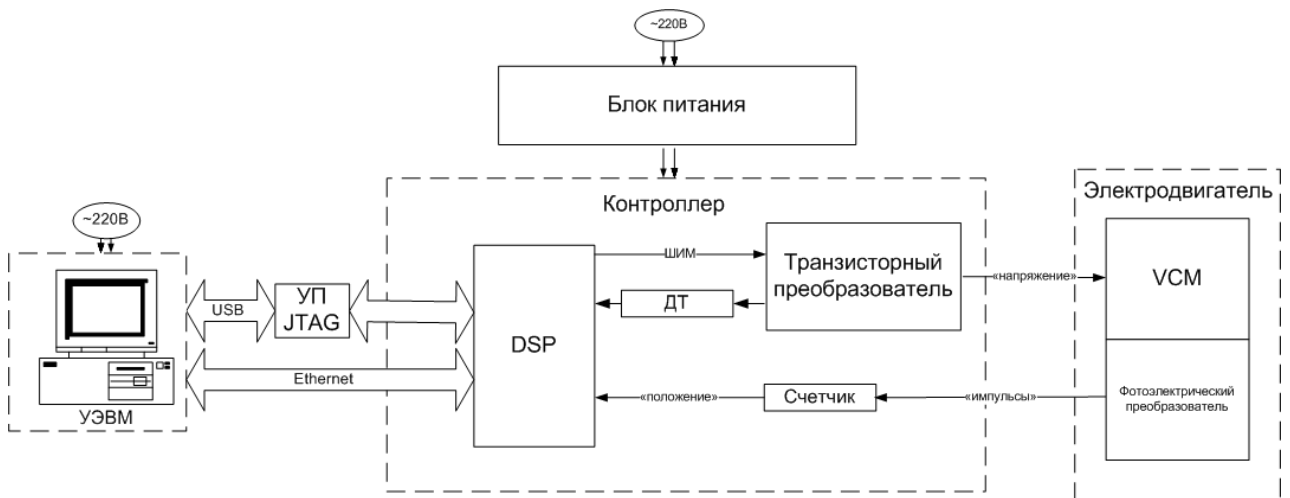


Рис. 4.5. – Функциональная схема системы позиционирования

4.3. Математическая модель системы позиционирования

В данном разделе определяется структурная схема и параметры системы позиционирования и находится математическая модель объекта управления – замкнутого контура тока со звеном контура скорости.

Заметим, что рассматриваемая система позиционирования реализована по принципу подчиненного управления. Она является трехконтурной системой и включает в себя контуры тока, скорости и положения. При этом каждый контур содержит свой регулятор. Структурная схема системы представлена на рис. 4.6.

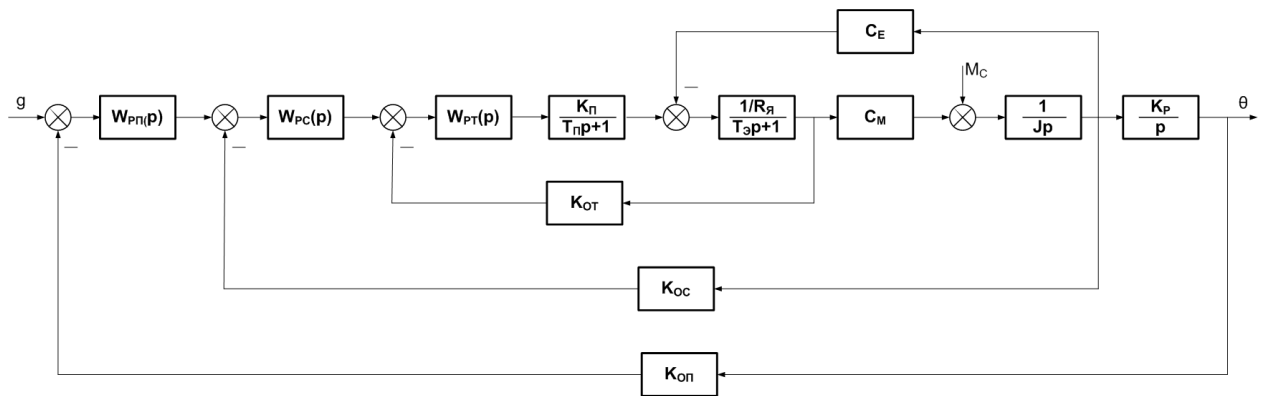


Рис. 4.6. – Структурная схема системы управления линейным двигателем

где $R_я$ - сопротивление якорной цепи,

$T_э$ - электромагнитная постоянная времени двигателя,

J - момент инерции движущихся масс двигателя,

$K_п, T_п(p)$ – коэффициент передачи и постоянная времени преобразователя,

$K_р$ – коэффициент передачи редуктора,

$K_{от}(p), K_{ос}(p), K_{оп}(p)$ - коэффициенты обратной связи по току, скорости и положению,

$W_{рт}(p)$ - передаточная функция регулятора тока,

$W_{рс}(p)$ - передаточная функция регулятора скорости,

$W_{РП}(p)$ - передаточная функция регулятора положения.

Величина C_e характеризует противоЭДС и имеет относительно небольшую величину, которой можно пренебречь. Коэффициенты обратной связи по току, скорости и положению равны единице. В результате этих условий упрощенная структурная схема системы управления линейным двигателем будет иметь вид, показанный на рис. 4.7.

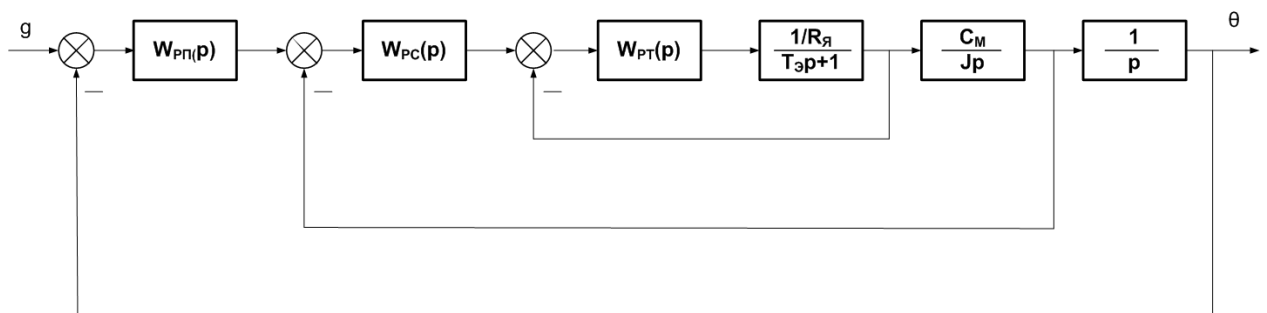


Рис. 4.7. – Упрощенная структурная схема системы управления линейным двигателем

В рассматриваемой системе необходимо реализовать робастную настройку регулятора только одного контура – контура скорости, т.к. только изменение момента инерции движущихся масс носит существенный характер.

Для регулирования скорости перемещения штока двигателя будем применять идеальный ПИД-регулятор с передаточной функцией

$$W_{pc}(p) = \frac{k_3 p^2 + k_2 p + k_1}{p}.$$

В результате моделирования объекта управления в контуре скорости автором была получена его переходная характеристика, по которой путем подбора коэффициентов определена передаточная функция:

$$W_0(p) = \frac{a_0}{p(pb_1 + b_0)},$$

где $b_0 = 763200$, $b_1 = 2300$, $a_0 = [1,139 \cdot 10^3; 1,3668 \cdot 10^3]$ - коэффициент, зависящий от момента инерции движущихся масс. Изменение данного коэффициента в заданных пределах соответствует 20-ти процентному изменению нагрузки.

Тогда передаточная функция замкнутого контура скорости, приведенного на рис. 4.8, будет иметь вид:

$$W(p) = \frac{(k_3 p^2 + k_2 p + k_1) a_0}{b_1 p^3 + (k_3 a_0 + b_0) p^2 + k_2 a_0 p + k_1 a_0}.$$

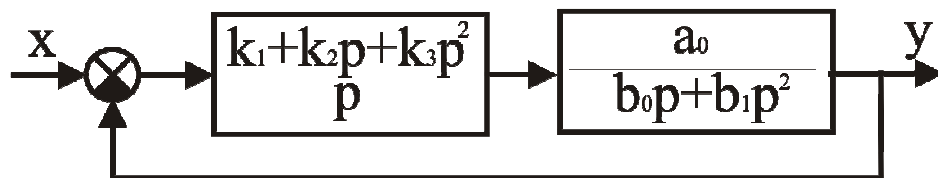


Рис.4.8. – Структурная схема контура скорости

Для контура скорости необходимо найти такие настройки регулятора k_1, k_2, k_3 , которые обеспечат время переходного процесса $t_p < 0,001c$ и перерегулирование в контуре скорости не более $\sigma < 10\%$.

4.4. Параметрический синтез регуляторов системы позиционирования

Проведем расчеты настроек ПИД-регулятора контура скорости с применением разработанных методик, а также расчеты настроек ПИД-регулятора контура положения на основе одного из классических методов. Для оценки качества системы позиционирования с синтезированными регуляторами построим переходные процессы системы при различных значениях нагрузки.

Характеристический полином контура скорости имеет вид

$$R(p) = b_1 p^3 + (k_3 a_0 + b_0) p^2 + k_2 a_0 p + k_1 a_0.$$

Так как интервальный коэффициент a_0 входит в три коэффициента характеристического полинома $R(p)$, то для применения разработанной методики будем рассматривать данные коэффициенты как независимые, что в теории робастного управления соответствует переходу к более простому виду неопределенности. Таким образом, получим интервальный полином, содержащий исходное семейство характеристических полиномов ИС.

$$R(p) = b_1 p^3 + (k_3 a_{01} + b_0) p^2 + k_2 a_{02} p + k_1 a_{03},$$

где a_{01}, a_{02}, a_{03} независимы и равны a_0 .

Для определения требований, накладываемых на корни характеристического интервального полинома, обеспечивающие требуемое время регулирования переходного процесса, рассмотрим выражение:

$$\delta \approx \frac{3}{t_p} = 3000,$$

где δ - степень устойчивости.

Для определения колебательности системы, соответствующей заданному перерегулированию, необходима информация о точном расположении нулей передаточной функции. Так как эта информация неизвестна, колебательность зададим произвольно $\mu = 1$.

Таким образом, задача определения настроек регулятора для обеспечения указанных выше показателей качества переходного процесса заключается в следующем: необходимо найти такие k_1, k_2, k_3 , чтобы колебательность во всех возможных режимах работы контура скорости не превышала $\mu = \operatorname{tg}(\pi - \Theta_0) = \operatorname{tg}\left(\pi - \frac{3\pi}{4}\right) = 1$ и степень устойчивости была не меньше $\delta = 3000$.

Используя условия формирования коэффициентов интервального характеристического полинома, найдем их пределы.

При $i = 0$,

$$\Theta_0(i-1) = \frac{3}{4}\pi(-1) = -\frac{3}{4}\pi = \frac{5}{4}\pi \in \left(\frac{1}{2}\pi; \frac{3}{2}\pi\right],$$

$$\max C_0 = \frac{3}{4}\pi(0-1) - \frac{1}{2}\pi = \frac{3}{4}\pi, \quad a_0 = \overline{a_0}.$$

При $i = 1$,

$$\Theta_0(i-1) = \frac{3}{4}\pi(1-1) = 0 \in \left(-\frac{1}{2}\pi; \frac{1}{2}\pi\right],$$

$$\max C_1 = \frac{3}{4}\pi(1-1) + \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}\pi, \quad a_0 = \underline{a_0}.$$

При $i = 2$,

$$\Theta_0(i-1) = \frac{3}{4}\pi(2-1) = \frac{3}{4}\pi \in \left(\frac{1}{2}\pi; \frac{3}{2}\pi\right],$$

$$\max C_2 = \frac{3}{4}\pi(2-1) - \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{4}\pi, \quad a_0 = \overline{a_0}.$$

При $i = 3$,

$$\Theta_0(i-1) = \frac{3}{4}\pi(3-1) = \frac{3}{2}\pi \in \left(\frac{1}{2}\pi; \frac{3}{2}\pi\right],$$

$$\max C_3 = \frac{3}{4}\pi(3-1) - \frac{1}{2}\pi = \pi, \quad a_0 = \overline{a_0}.$$

$$\text{Наименьшее значение } \max C_i = \max C_2 = \frac{1}{4}\pi.$$

Таким образом, получим полином с пределами: $\overline{a_0 a_1 a_2 a_3}$, где $a_i, i = \overline{0,3}$ - коэффициенты полинома.

Далее в соответствии с методикой найдем уравнение прямой d_0 , определяющей область расположения свободного полюса,

$$d_0 = \frac{\beta_2}{\text{tg}((\max C_i)/m)} + \alpha_2 = \frac{3000}{\text{tg}((1/4)\pi)} + 3000 = 6000,$$

где α, β координаты корня, определяющего наихудшее качество ИС.

С учетом принципа доминирования зададим границу свободного полюса $X(j\beta) = -20000, \quad -\infty < \beta < \infty$.

Далее, задаваясь значениями ω , в пределах от $-\infty$ до ∞ , на комплексной плоскости строятся границы D -разбиения и выбирается значение k_1 (Рис. 4.9).

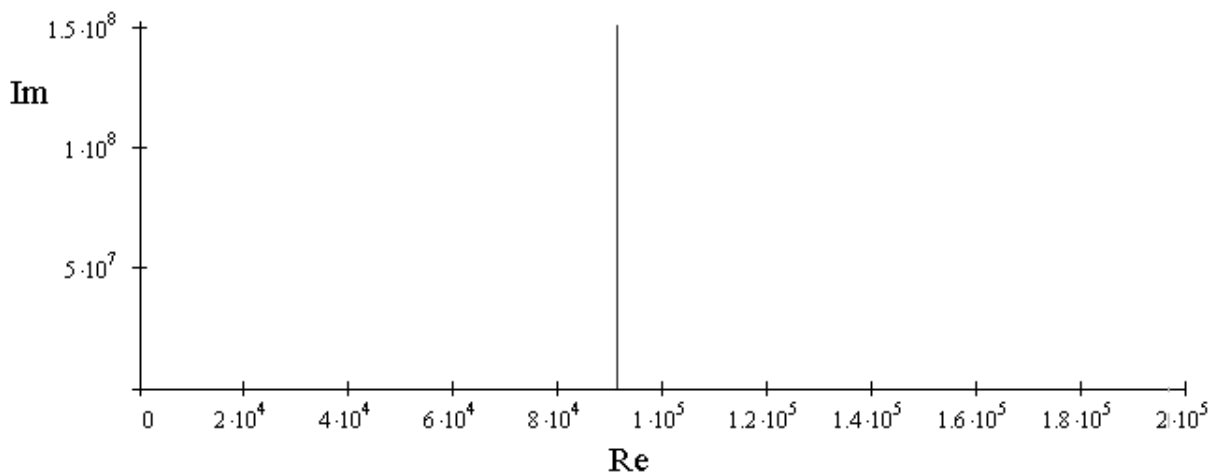


Рис. 4.9 – D -разбиение по k_1

При выбранном $k_1 = 300000$ получаем значения зависимых параметров $k_2 = 123,63$ и $k_3 = 0,018$.

Для проверки расположения областей локализации корней характеристического полинома контура скорости построим области локализации полюсов ИС, соответствующие найденным настройкам регулятора (рис. 4.10, 4.11).

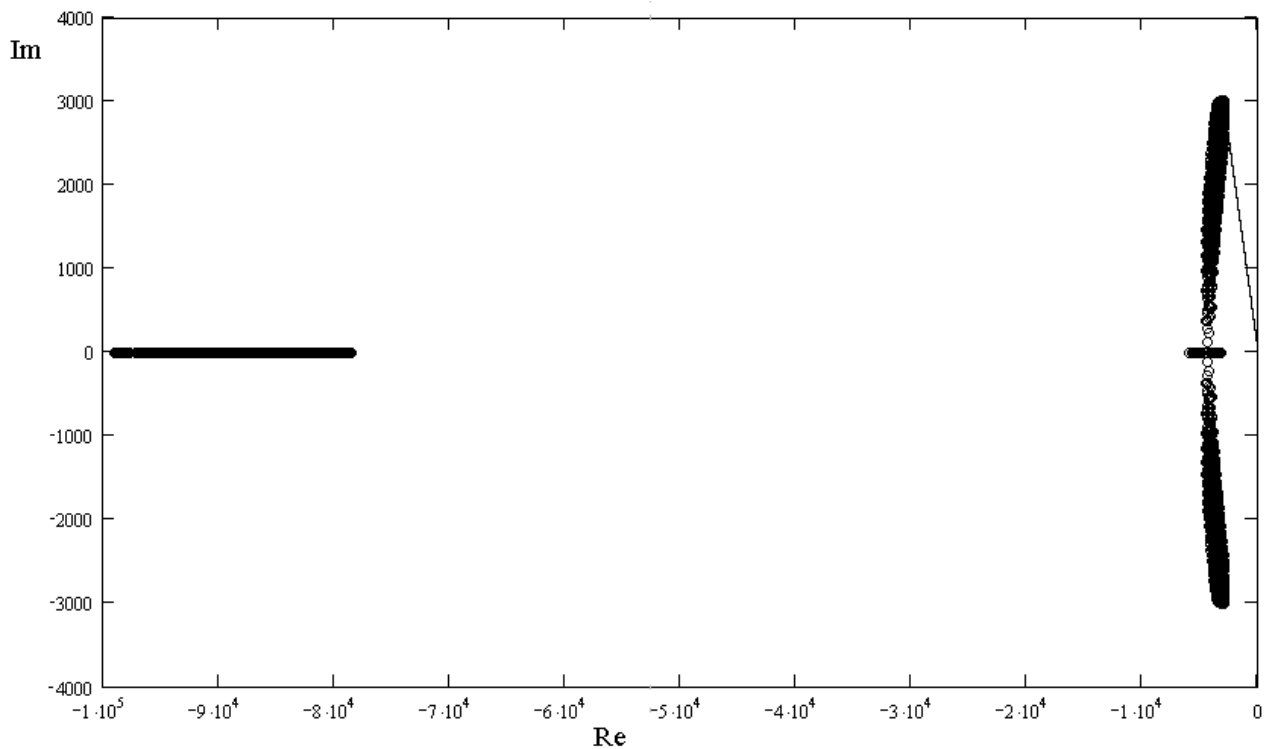


Рис. 4.10. – Области локализации доминирующих и свободных полюсов

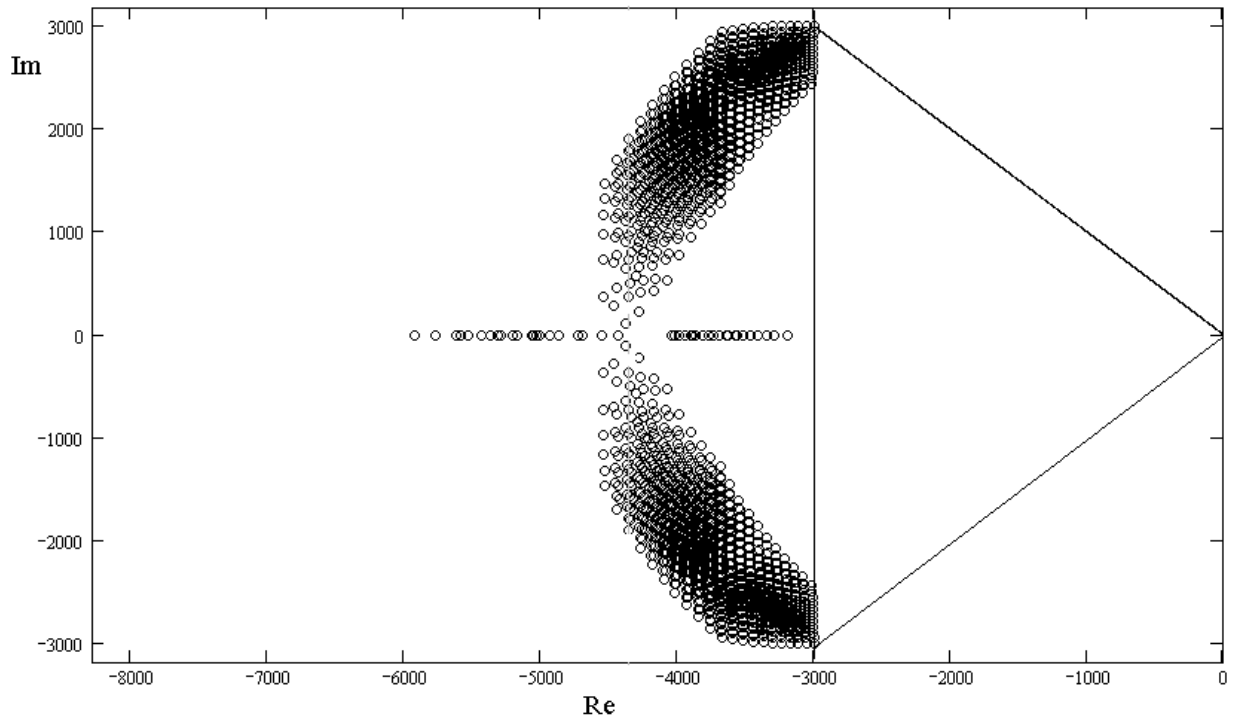


Рис. 4.11. – Область локализации доминирующих полюсов

Из рис. 4.10, 4.11 можно заключить, что расположение полученных областей локализации полюсов ИС при найденных значениях варьируемых параметрах регулятора удовлетворяет заданным требованиям.

Далее представляет интерес оценка обеспечения синтезированным регулятором контура скорости желаемого качества функционирования исходной системы (с коэффициентами характеристического полинома, зависящими от интервального параметра). Для этого построим области локализации корней исходной системы (рис. 4.12)

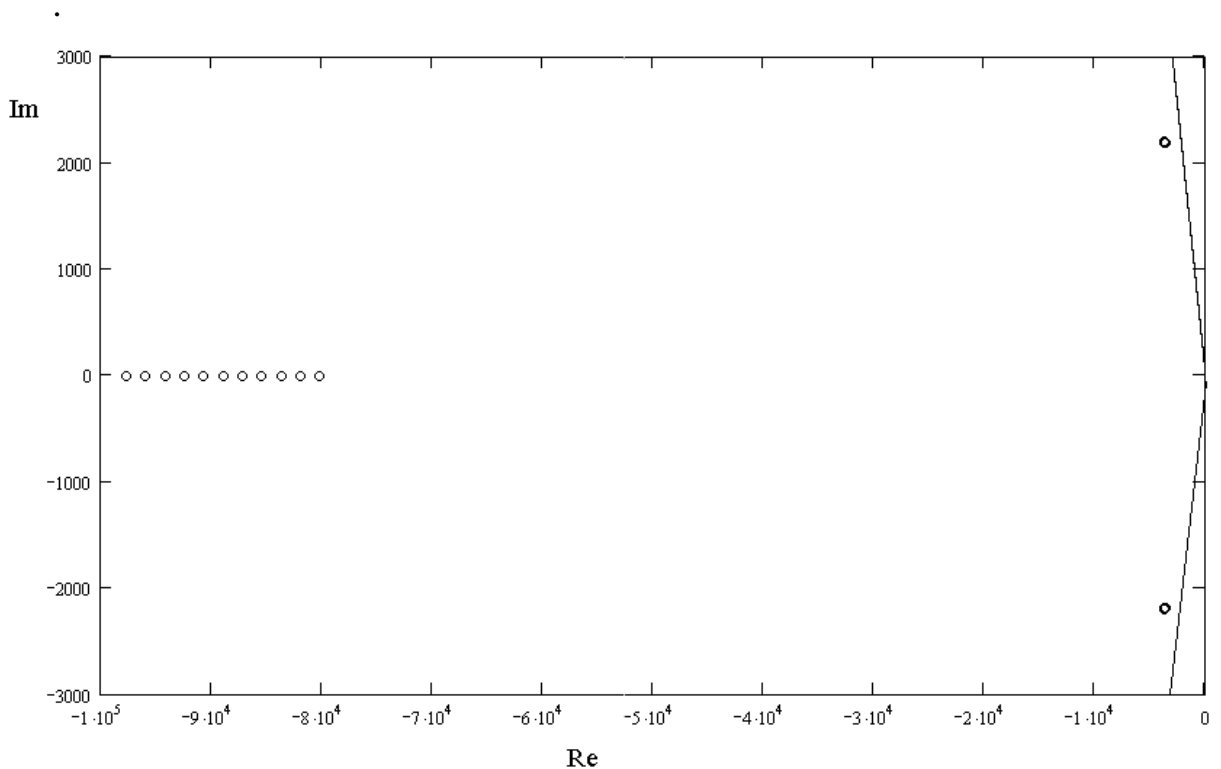


Рис. 4.12. – Области локализации корней исходной системы

Из рисунка 4.12. видно, что корни характеристического полинома исходной ИС также располагаются в заданных областях. Отметим, что площадь областей локализации корней исходной системы меньше, чем у системы с независимыми интервальными коэффициентами характеристического полинома. Следовательно, реальная система будет удовлетворять заданным требованиям при большем диапазоне изменения нагрузки.

Построим множество переходных характеристик контура скорости с независимыми коэффициентами характеристического полинома, соответствующее области изменения интервальных коэффициентов (рис. 4.13).

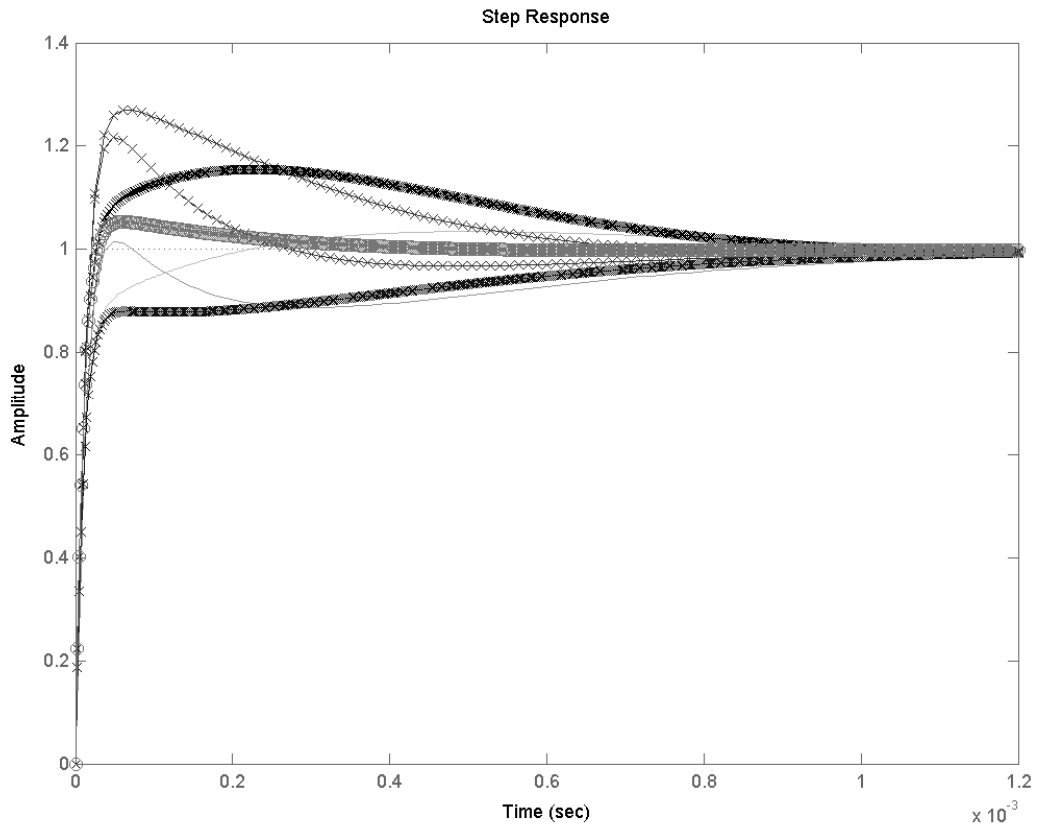


Рис. 4.13. – Переходные характеристики системы с интервальными коэффициентами

Из полученных переходных характеристик видно, что максимальное время регулирования меньше заданного $t_p < 0,001c$, однако максимальное перерегулирование системы с интервальными коэффициентами превышает требуемые 10%.

Построим переходные характеристики контура скорости с исходной передаточной функцией при возможных заданных значениях a_0 (рис. 4.14). Это необходимо для проверки условия, наложенного на перерегулирование данного контура $\sigma < 10\%$.

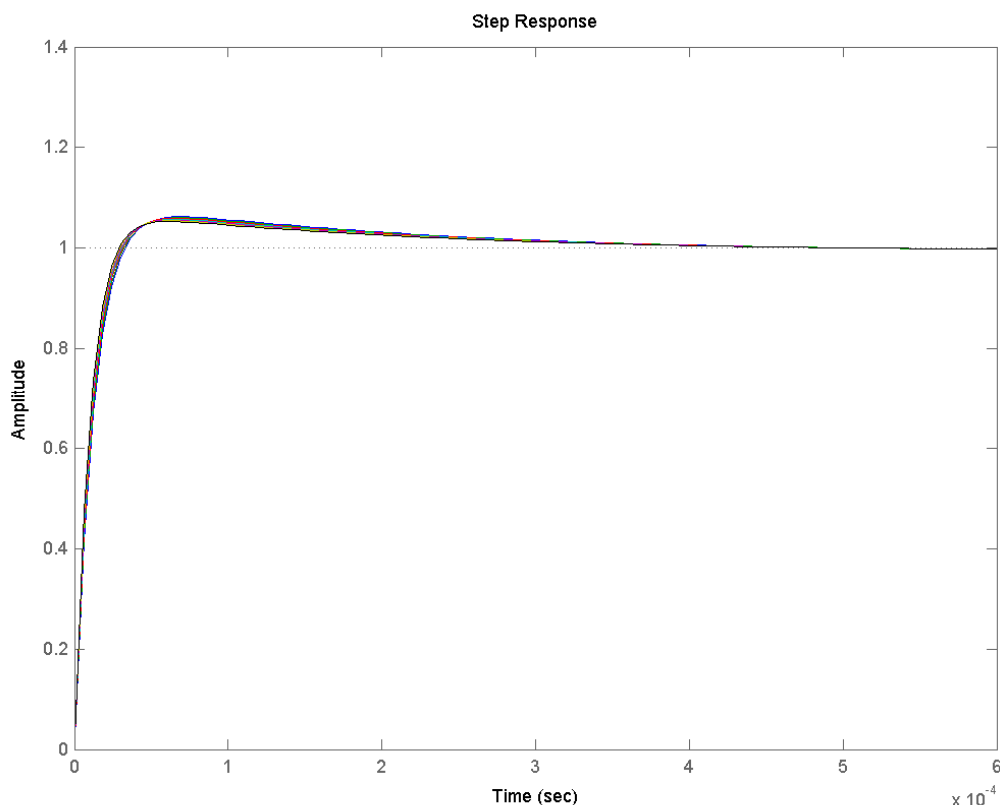


Рис. 4.14. – Переходная характеристика контура скорости

В результате построения переходных характеристик получены следующие показатели качества:

- максимальное время регулирования контура - 0,000268 с;
- наибольшее перерегулирование – 6,23%.

Переходные характеристики контура скорости, полученные при изменении момента инерции движущихся масс, с найденными настройками ПИД-регулятора полностью удовлетворяют предъявленным требованиям. Так, полученное время регулирования меньше заданного ($0,000268\text{с} < 0,001\text{с}$). и полученное перерегулирование также меньше заданного ($6,23\% < 10\%$).

С учетом полученной передаточной функции контура скорости при помощи ППП MatLab найдены настройки регулятора контура положения,

обеспечивающие системе позиционирования $t_p < 0.1$ с. и перерегулирование $\sigma = 0$. При этом передаточная функция регулятора положения имеет вид:

$$W_p(p) = \frac{0,0125p^2 + 80p + 0.001}{p}.$$

На рис. 4.15 построено семейство переходных характеристик контура положения при 20%-ом изменении момента инерции движущихся масс

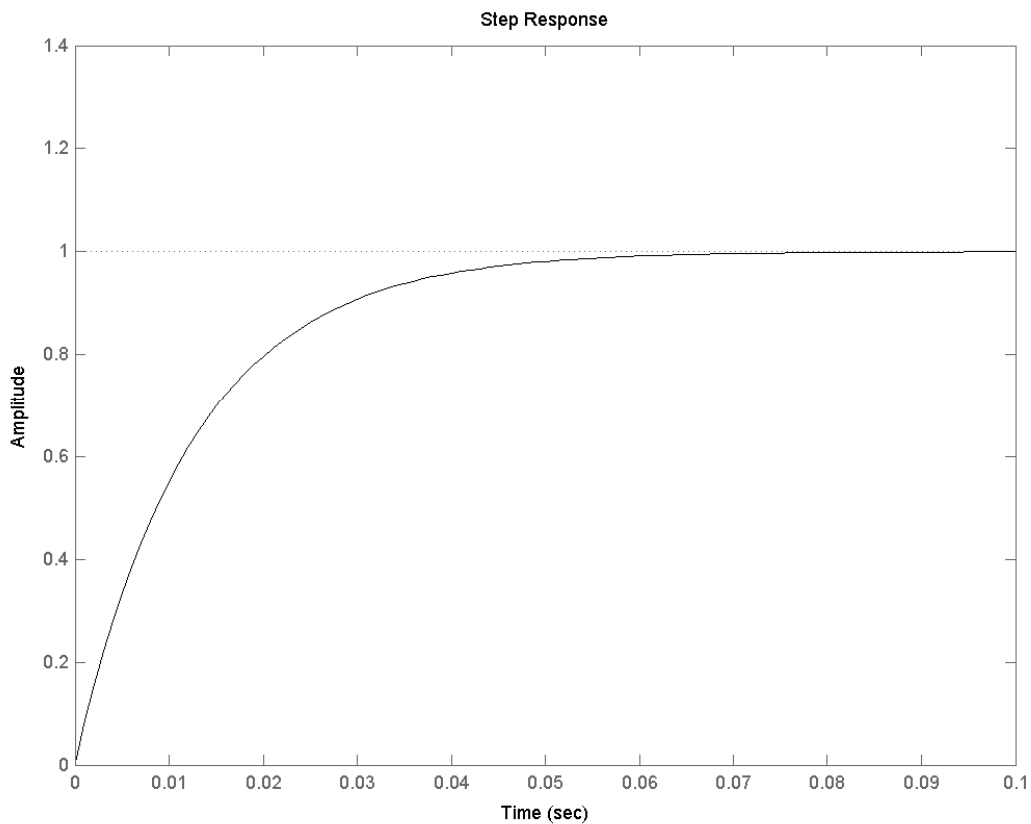


Рис. 4.15 – Переходные характеристики контура положения

На рисунке 4.15 все построенные кривые практически совпадают в одну, из чего можно сделать вывод, что заданное изменение момента инерции движущихся масс двигателя при найденных настройках регулятора контура скорости и регулятора контура положения мало влияет на переходные характеристики всей системы.

Для оценки робастности полученной системы к изменению нагрузки найдем пределы изменения коэффициента a_0 , зависящего от момента инерции движущихся масс, при которых полученная система будет удовлетворять заданным требованиям.

В результате анализа переходных процессов установлено, что система сохраняет требуемое качество при изменении a_0 в пределах $a_0 \in [2,9614 \cdot 10^3; a_{0\max}]$. Верхняя граница незначительно влияет на переходный процесс системы, а при значениях коэффициента $a_0 < 2,9614 \cdot 10^3$ система теряет апериодичность переходных процессов.

На рис. 4.16 построены переходные процессы системы при $a_0 = 1,139 \cdot 10^4$ и $a_0 = 2,8475 \cdot 10^3$.

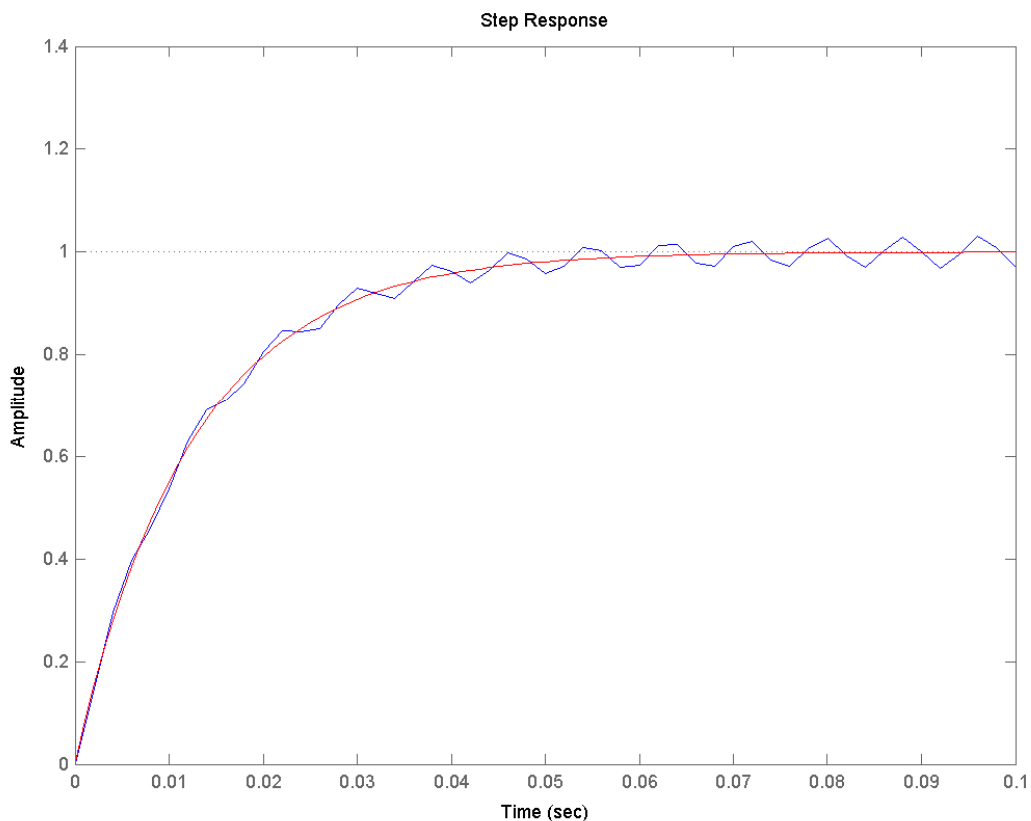


Рис. 4.16 – Переходные процессы системы при $a_0 = 1,139 \cdot 10^4$, и $a_0 = 2,8475 \cdot 10^3$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленная диссертационная работа описывает результаты исследований, направленных на разработку методов и алгоритмов анализа и синтеза систем управления с интервальными параметрами. Сформулируем основные результаты диссертации.

1. На основе свойств многопараметрического интервального корневого годографа и алгоритма реберной маршрутизации разработаны:

- методика анализа ИС с гарантированной *колебательностью* на основе выбора и анализа существенных вершинных полиномов в секторе, ограниченным числом интервальных параметров;

- методика анализа ИС с гарантированной *колебательностью* на основе выбора и анализа существенных вершинных полиномов в произвольном секторе;

- методика анализа ИС с гарантированной *колебательностью и степенью устойчивости* на основе выбора и анализа существенных вершинных полиномов в произвольном секторе;

Данные методики позволяют значительно сократить вычислительные затраты при анализе ИС.

2. Предложены соотношения, устанавливающие соответствие между углами выхода ветвей корневого годографа и расположением полюсов системы на комплексной плоскости.

3. Предложены фазовые условия формирования полиномов, определяющих показатели качества синтезируемых ИС.

4. Для линейных объектов управления, имеющих в задании параметров интервальную неопределенность, предложен метод синтеза регуляторов пониженного порядка. Метод основан на выделении из всего множества вершинных полиномов одного или двух полиномов, которые будут определять наихудшее качество ИС. Гарантированное качество работы

системы обеспечивается требуемым расположением полюсов полученных полиномов. Использование данного принципа при построении робастных регуляторов позволяет уменьшить миграцию доминирующих полюсов при изменении параметров системы. Также к достоинствам данного метода можно отнести простоту реализации и возможность оценки робастности получаемой системы к параметрам регулятора.

5. Результаты диссертационного исследования использованы для синтеза промышленных систем, что подтверждено актами о внедрении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бендрикова, Г.А. Траектории корней линейных автоматических систем / Бендрикова Г.А., Теодорчик К.Ф. – М.: Наука, 1964, –160с.
2. Бесекерский, В.А. Робастные системы автоматического управления / Бесекерский В.А. Небылов А.В. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983, –240с.
3. Вадутов, О.С. Определение границ областей локализации нулей и полюсов системы с интервальными параметрами / Вадутов О.С., Гайворонский С.А. // Изв. Томского политех. ун-та. 2003. Т.306. №1.– С.64-68.
4. Вадутов, О.С. Применение реберной маршрутизации для анализа устойчивости интервальных полиномов / Вадутов О.С., Гайворонский С.А. // Изв. АН. ТиСУ. 2003. №6. –С. 7-12.
5. Вадутов, О.С. Решение задачи размещения полюсов системы методом D-разбиения / Вадутов О.С., Гайворонский // Изв. РАН. ТиСУ. 2004. № 5. С. 23–27.
6. Вадутов, О.С. Синтез динамических регуляторов интервальных автоматических систем стенда имитации невесомости / Вадутов О.С., Мельников Ю.С., Гайворонский С.А., Новокшенов С.В. // Информационные системы и технологии. Докл. международн. конф.– Новосибирск, 2000. – С 371-377.
7. Вадутов, О.С. Синтез устойчивой линейной системы при параметрических возмущениях объекта / Вадутов О.С., Гайворонский С.А. // Машинные методы оптимизации, моделирования и планирования эксперимента: Межвуз. сб. науч. тр. Новосиб. электротехн. ин-т. – Новосибирск, 1988. – С. 112-118.

8. Волков, А.Н. Метод синтеза систем автоматического управления с максимальной степенью устойчивости и заданной колебательностью / Волков А.Н., Загашвили Ю.В. // Изв. АН. ТиСУ. 1997, №1, –С. 35-41.
9. Вукосавич, С.Н. Достаточные условия робастной относительной устойчивости линейных непрерывных систем / Вукосавич С.Н., Стоич М.Р. // АиТ. 1996. №11. – С.84-90.
10. Веремей Е.И. Обеспечение заданной степени устойчивости регуляторами с неполной информацией/ Веремей Е.И. // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика 1986, № 4 – С.123–130
11. Гайворонский, С.А. Анализ качества электроэнергетических систем с интервальными параметрами корневым методом/ Гайворонский С.А., Новокшенов С.В. // VII Межд. Научно-технич. конфер. Радиоэлектроника, электротехника и энергетика. – Москва: Издательство МЭИ, 2001. – С. 347-348.
12. Гайворонский, С.А. Анализ локализации корней интервального полинома в заданном секторе / Гайворонский С.А., Замятин С.В. // Изв. Томского политех. ун-та. –2004. Т. 307. № 4. – С. 14-18.
13. Гайворонский, С.А. Анализ региональной робастной устойчивости системы методом интервального корневого годографа / Гайворонский С.А., Вадутов О.С., Новокшенов С.В. // Тез. докл. рег. науч. конфер. Наука, Техника, Инновации. – Новосибирск: Издат. НГТУ, 2001.
14. Гайворонский, С.А. Анализ робастной относительной устойчивости на основе многопараметрического интервального корневого годографа / Гайворонский С.А., Новокшенов С.В. // Тез. докл. X международ. Научн.-технич. Конф. Состояние и перспективы развития электротехнологии. – Иваново: Издат. ИГЭУ, 2001.
15. Гайворонский, С.А. Параметрический синтез линейного регулятора электромеханической системы при интервальной неопределенности

- объекта управления / Гайворонский С.А. // Изв. ВУЗов. Электромеханика, 1990. №5. –С. 69-72.
16. Гайворонский, С.А. Построение границ корневых областей систем с интервальными параметрами / Гайворонский С.А., Новокшенов С.В. // Современные техника и технологии. Тез. докл. VII международ. научн.-практич. конф. –Томск: изд. ТПУ, 2001. – С 260-263.
17. Гайворонский, С.А. Условия локализации корней интервального полинома в заданном секторе / Гайворонский С.А., Замятин С.В. // Всероссийское (с международным участием) совещание по интервальному анализу и его приложениям «ИНТЕРВАЛ-06» г. Санкт-Петербург, 2006. – С. 38–41
18. Гусев, Ю. М. Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем (состояние проблемы). Анализ с использованием интервальных характеристических полиномов / Гусев Ю.М., Ефанов В.Н., Крымский В.Г. // Техн. кибернетика. 1991. №1. –С. 3-23.
19. Гусев, Ю. М., Ефанов В. Н., Крымский В. Г., Рутковский В.Ю. Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем (состояние проблемы). Анализ устойчивости интервальных матриц и синтез робастных регуляторов / Гусев Ю. М., Ефанов В. Н., Крымский В. Г. // Техн. кибернетика. 1991. №2. –С. 3-30.
20. Жабко, А.П. Необходимые и достаточные условия устойчивости линейного семейства полиномов/ Жабко А.П., Харитонов В.Л.// АиТ. 1994. № 10. –С. 125-134.
21. Замятин С.В. Размещение областей локализации доминирующих полюсов интервальной системы с обеспечением заданных показателей качества / Замятин С.В. // Изв. Томского политех. ун-та, №7, Том 309 2006. – С. 10-14.
22. Замятин С.В. Условие применимости реберной теоремы при полиномиальной неопределенности характеристического полинома /

- Замятин С.В, Гайворонский С.А // Молодежь и современные информационные технологии. Сборник трудов III Всероссийской научно-практической конференции студентов, – Томск: Изд-во ТПУ, 2005. – С. 199-200.
- 23.Замятин, С.В Исследование интервальных полиномов на основе свойств критерия Рауса // Замятин С.В. Суходоев М.С., Ефимов С.В. / Современные техника и технологии: Труды XII Международной научно-практической конференции студентов и молодых учёных. Томск-2006. –С. 61–63.
- 24.Замятин, С.В. К анализу робастной устойчивости полиномов с полилинейной и полиномиальной неопределенностью/ Замятин С.В, Гайворонский С.А. //Современные техника и технологии: Труды XI Международной научно-практической конференции студентов и молодых учёных, т. 2. –Томск: Изд. ТПУ, 2005. – С. 153-154
- 25.Замятин, С.В. Решение задачи размещения корней интервального полинома с полилинейной неопределенностью / Замятин С.В., Ефимов С.В., Аникин А.С. // Молодежь и современные информационные технологии. Сборник трудов IV Всероссийской научно-практической конференции студентов. – Томск: Изд-во ТПУ, 2006. –С. 248-249
26. Замятин, С.В. Решение задачи размещения полюсов линейной интервальной динамической системы в заданном секторе / Замятин С.В, Гайворонский С.А. // Известия Томского политех. ун-та №5, Том 309, 2006. – С. 16-20.
- 27.Захаров, А.В. Синтез систем управления при интервальной неопределенности параметров их математических моделей / Захаров А. В., Шокин Ю. И. // ДАН СССР. 1988. Т. 299, №2. – С. 292-295.
- 28.Ким, Д.П. Условие граничной устойчивости и синтез систем управления максимальной степени устойчивости / Ким Д.П. // Изв. АН. ТиСУ. 2003. №4, – С. 5-8.

29. Киселев, О.Н. Синтез регуляторов низкого порядка по критерию H_∞ и по критерию максимальной робастности / Киселев О.Н., Поляк Б.Т. // Автоматика и телемеханика, 1999. № 3, – С. 119-130.
30. Корневые методы исследования интервальных систем / Под ред. Г. В. Римского. – Минск: Институт технической кибернетики НАН Беларуси, 1999. – 186 с.
31. Литвинов, Р.Д. Метод расположения корней характеристического полинома, обеспечивающий заданную степень устойчивости и колебательность системы / Литвинов Н.Л. // АиТ. 1995. №4. – С. 53-61.
32. Неймарк Ю.И. Динамические системы и управляемые процессы / Неймарк Ю.И. – М.: Наука, 1978. – 336с.
33. Неймарк, Ю.И. Мера робастной устойчивости и модальности линейных систем / Неймарк Ю.И. // ДАН. 1992. Т.325, № 2. –С.247-250.
34. Неймарк, Ю.И. Мера робастной устойчивости линейных систем / Неймарк Ю.И. // АиТ. 1993. № 1. –С.107-110.
35. Неймарк, Ю.И. Область робастной устойчивости и робастность по нелинейным параметрам / Неймарк Ю.И. // ДАН. 1992. Т.325, № 3. –С.438-440.
36. Неймарк, Ю.И. Робастная устойчивость линейных систем / Неймарк Ю.И. // ДАН. 1991. Т. 319. № 3. –С.578-580.
37. Петров, Б.Н. Системы автоматического управления объектами с переменными параметрами / Петров Б.Н. [и др.]// Инженерные методы анализа и синтеза – М.: Машиностроение, 1986. – 256с.
38. Петров, Н. П. Робастное D-разбиение / Петров Н.П., Поляк Б.Т. // АиТ. 1991. №11. – С. 41-53.
39. Поляк, Б.Т. Робастная устойчивость и управление / Поляк Б.Т., Щербаков П.С. – М.: Наука, 2002. – 303 с.
40. Поляк, Б.Т. Робастный критерий Найквиста / Поляк Б.Т. Цыпкин Я.З. // АиТ. 1992. №7. – С.25-31.

41. Поляк, Б.Т. Частотные критерии робастной устойчивости и апериодичности линейных систем / Поляк Б.Т. Цыпкин Я.З. // *АиТ*. 1990. №9. – С. 45-54.
42. Римский, Г. В. Корневые методы исследования интервальных систем / Римский Г. В. [и др.] – Минск: Ин-т техн. кибернетики НАН Беларуси. 1999. – 186с.
43. Римский, Г.В. Корневой метод исследования условий устойчивости линейных интервальных динамических систем / Римский Г.В., Мазуренко Е.Г. // *Вести НАН Беларуси. Серия физико-технических наук*. – 1996. №2. – С.61-64.
44. Римский, Г.В. Корневой метод решения задач устойчивости интервальных систем / Римский Г.В. // *Вести АН Беларуси. Серия физико-технических наук*. 1994. №4. – С. 80-85.
45. Римский, Г.В. Корневой метод синтеза полиномов / Римский Г.В. // *Вести АН Беларуси. Серия физико-технических наук*. – 1995. №3. – С.107-114.
46. Римский, Г.В. Основы общей теории корневых траекторий систем автоматического управления / Римский Г.В. – Минск: Наука и техника, 1972. – 328с.
47. Сиразетдинов, Р.Т. К построению гарантированной области расположения корней характеристического уравнения замкнутой системы / Сиразетдинов Р.Т. // *Изв. ВУЗов. Авиац. техника*. 1984. № 4. – С. 72-76.
48. Сиразетдинов, Р.Т. Построение гарантированной области расположения нулей и полюсов передаточных функций динамических систем / Сиразетдинов Р.Т. // *АиТ*, 1988. №7. – С. 51-58.
49. Скворцов, Л.М. Интерполяционный метод решения задачи назначения доминирующих полюсов при синтезе одномерных регуляторов / Скворцов Л.М. // *Изв. АН. ТиСУ*. 1994. №4. – С. 10-13.

- 50.Скворцов, Л.М. Интерполяционный метод решения задачи назначения доминирующих полюсов при синтезе многомерных регуляторов / Скворцов Л.М. // Изв. АН.ТиСУ. 1997. № 1. – С. 31-34.
- 51.Скворцов, Л.М. Синтез закона управления по заданным полюсам и нулям передаточной функции / Скворцов Л.М. // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1987. № 6. – С. 149-153.
- 52.Скворцов, Л.М. Синтез линейных систем методом полиномиальных уравнений / Скворцов Л.М. // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1991. № 6. – С. 54-59.
- 53.Удерман, Э.Г. Метод корневого годографа в теории автоматических систем / Удерман Э.Г. – М.: «Наука», 1972. – 448 с.
- 54.Удерман, Э.Г. Метод корневого годографа в теории автоматического управления / Удерман Э.Г. – М.: Госэнергоиздат, 1963. – 112 с.
- 55.Харитонов В.Л. Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. Уравнения, 1978. №11. С. 2086-2088.
- 56.Харитонов, В.Л. Задача распределения корней характеристического полинома автономной системы / Харитонов В.Л. // АиТ. 1981. №5. – С. 53-57.
- 57.Харитонов, В.Л., Хинричсен Д. О выпуклых направлениях для устойчивых полиномов / Харитонов В.Л. // АиТ. 1997. №3. – С. 81-92.
- 58.Хлебалин, Н.А. Построение интервальных полиномов с заданной областью расположения корней / Хлебалин Н.А. // Аналитические методы синтеза регуляторов. – Саратов: Изд. Саратовского политех. ин-та, 1982. – С. 92-98.
- 59.Ackermann J. Parameter space design of robust control systems / Ackermann J. // IEEE Trans. On Autom. Control. 1980. Vol. 25. N 6. – P. 1058-1072.
60. Ackermann J. Robust control: systems with uncertain physical parameters / Ackermann J. – London: Springer-Verlag, 1993, – 406 p.

61. An, S. Robust stability of polynomials with nonlinear dependent coefficient perturbations / An S., Liu W. // Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control Orlando – Florida USA, 2001 – P 1551-1556.
62. Arzelier, D. Robust D-stabilization of a polytope of matrices / Arzelier D., Henrion D., Peaucelle D. // International Journal of Control, 2002, Vol. 75, N 10, – P. 744-752.
63. Barlett, A.C. Root location of an entire polytope of polynomials: it suffices to check the edges / Barlett A.C., Hollot C.V., Lin H. // Math. Contr., Signals. Syst., 1987, Vol. 1, №1. – P. 61-71.
64. Barmish, B. R. The robust root locus / Barmish B. R., Tempo R. // Automatica, 1990. Vol. 26, №2. – P. 283-292.
65. Barmish, B.R. A generalization of Kharitonov's four polynomial concept for robust stability problems with linearly dependent coefficients perturbations / Barmish B.R. // IEEE Trans. Automat. Control. 1989. Vol. 34. № 2, – P. 157-165.
66. Bhattacharyya, S.P. Robust control: the parametric approach / Bhattacharyya S.P., Chapellat H., Keel L.H. – Prentice Hall, 1995.
67. Chang Y. H. Robust gamma stability of highly perturbed systems / Chang Y. H., Wise G. L. // IEEE Proc. Control Theory Appl. N 2, 1998. – P. 165-175.
68. Chu E. K. Pole assignment for second-order systems / Chu E. K. // Mechanical systems and signal processing, 2002, N 1, – P. 39–59.
69. Foo, Y. K. Root clustering of interval polynomials in the left sector / Foo Y. K., Soh Y. C. // Syst. Control Letters. 1989. Vol. 13, – P. 239-245.
70. Henrion, D. An LMI condition for robust stability of polynomial matrix polytopes / Henrion D., Arzelier D., Peaucelle D., Sebek M. // IFAC Automatica, 2001, Vol. 37, – P. 461-468.
71. Henrion, D. D-Stability of Polynomial Matrices / Henrion D., Bachelier O., Sebek M. // International Journal of Control, 2001, Vol. 74, N. 8, – P. 845-856.

72. Henrion, D. Ellipsoidal approximation of the stability domain of a polynomial / Henrion D., Peaucelle D., Arzelier D., Sebek M. // IEEE Transactions on Automatic Control, 2003, Vol. 48, N 12, – P. 2255-2259.
73. Henrion, D. Positive polynomials and robust stabilization with fixed-order controllers / Henrion D., Sebek M., Kucera V. // IEEE Transactions on Automatic Control, 2003 Vol. 48, No. 7, – P. 1178-1186.
74. Henrion, D. Robust pole placement for second-order systems: An LMI approach / Henrion D.; Sebek M.; Kucera V // Kybernetika, 2005, Vol. 41, N 1, – P. 1-14
75. Kawamura, T. Robust stability analysis of characteristic polynomials whose coefficients are polynomials of interval parameters / Kawamura T., Shima M. // Journal of Mathematical System, Estimation and Control, № 4, 1996. – P. 1-12.
76. Keel, L.H. Robust stability and performance with fixed-order controllers / Keel L.H. Bhattacharyya S.P. // Automatica 1999 N 35, – P. 1717–1724.
77. Keel, L.H. Robust, fragile or optimal? / Keel L.H., Bhattacharyya S.P. // IEEE transactions on automatic control, Vol. 42, N. 8, 1997, – P. 1098-1105.
78. Maamri, N. Pole placement in a union of regions with prespecified subregion allocation / Maamri N., Bachelier O., Mehdi D. // Mathematics and Computers in Simulation, 2006, N 72 – P. 38–46.
79. Markus, A. H. The Kharitonov theorem and its applications in symbolic mathematical computation / Markus A. H., Kaltofen E. // Journal symbolic computation, 1997 – P. 1-13.
80. Melnikov, U.S. Stabilization of undersea object situation, connected with ship by the rope / Melnikov U.S., Gaivoronsky S. A., Novokshonov S.V. // KORUS'99 III Russian-Korean international Symposium.– Novosibirsk, Russia, 1999. –P. 68-70.
81. Nesenchuk, A.A. Root locus fields technique in the uncertain control systems synthesis / Nesenchuk A.A. // Proceedings of the 5th World Multiconference on Systems, Cybernetics and Informatics. –Orlando, FL, USA. 2001. –P. 298-303.

82. Pare, T. Algorithm for reduced order robust H_∞ control design / Pare T., How. J. // Proceedings of the 38-th conference on decision and control, –Arizona, 1999 – P. 1863-1868.
83. Rao, P. Robust tuning of power system stabilizers using QFT / Rao P., Sen I. // IEEE transactions on control systems technology, 1999, Vol. 7, N. 4. – P. 478-486.
84. Rimsky, G.V. Root locus methods for robust control systems quality and stability investigations / Rimsky G.V., Nesenchuk A.A. // Proceedings IFAC 13th Triennial World Congress. – San Francisco, USA, 1996. – P. 469-474.
85. Sienel, W. Design and analysis of robust control systems in PARADISE / Sienel W., Ackermann J., Bunte T. // Proc. IFAC Symposium on Robust Control Design, – Budapest, Hungary, 1997.
86. Sienel, W. Robust control goes PARADISE. / Sienel W., Ackermann J., Kaesbauer D., Bunte T. // In Proc. EURACO Workshop on Control of Nonlinear System: Theory and Applications, – Algarve, Portugal, 1996. – P. 129-138.
87. Soh, C.B. On the stability properties of polynomials with perturbed coefficients / Soh C.B., Berger C.S., Dabke K.P. // IEEE Trans. On Autom. Control. 1985. Vol 30. № 10. – P. 1033-1036.
88. Soh, Y. C Generalized edge theorem / Soh Y. C., Foo Y. K. // Systems & Control Letters, 1989, Vol. 12, N 3, – P. 219-224.
89. Soh, Y. C. A note on the edge theorem / Soh Y. C., Foo Y. K. // Systems & Control Letters 1990, Vol. 15, N 1, – P. 41-43.
90. Soh, Y.C. Generalization of strong Kharitonov theorems to the left sector / Soh Y. C., Foo Y. K. // IEEE Trans. On Automatic Control, 1990, Vol. 35. – P. 1378-1382.
91. Solyom, S. A synthesis method for robust PID controllers for a class of uncertain systems / Solyom S., Ingimundarson A. // Asian Journal of Control, Vol. 4, N 4, – P. 381-387.

92. Soylemez, M.T. Fast calculation of stabilizing PID controllers / Soylemez M.T., Munro N., Baki H. // *Automatica* 39, 2003, – P. 121–126.
93. Tagami, T. Design of robust pole assignment based on Pareto-optimal solutions / Tagami T., Ikeda K. // *Asian Journal of Control*, 2003, Vol. 5, N 2, – P. 195-205.
94. Tan, N. Computation of stabilizing PI and PID controllers using the stability boundary locus / Tan N., Kaya I., Yeroglu C., Derek P. // *Energy Conversion and Management*, 2006, N 47 –P. 3045–3058.
95. Varga, A. A numerically reliable approach to robust pole assignment for descriptor systems / Varga A. // *Future Generation Computer Systems*, 2003, N 19, – P.1221–1230.
96. Vicieno, A. Robustness of pole location in perturbed systems / Vicieno A. // *Automatica*, 1989, Vol. 25. N 3. –P. 109-113.
97. Wang L. Robust strong stabilizability of interval plants: it suffices to check two vertices. / Wang L. // *System and control letters*, 1995, Vol. 26. –P. 133-136.
98. Wang, L. Kharitonov-like theorems for robust performance of interval systems / Wang L. // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2003, Vol. 279, N 2, – P. 430-441.
99. Wang, L. Robust stability of a class of polynomial families under nonlinearly correlated perturbations / Wang L. // *Systems and Control Letters*, Vol. 30, N 1, 1997, – P. 25-30.
100. Wang, Y. PID and PID-like controller design by pole assignment within D-stable regions / Wang Y, Schinkel M, Hunt K. J. // *Asian Journal of Control*, Vol 4, N 4, – P. 423-432.
101. Wang, Y. The calculation of stability radius with D stability region and non-linear coefficients / Wang Y., Hunt K. J. // *Proceedings of 3rd IFAC Symposium on Robust Control Design, Czech Republic, 2000, –P. 240-246.*

102. Wang, Z. Determinative vertices of interval family with Ω -stability / Wang Z., Wang L., Yu W. // Journal of Mathematical Analysis and Applications Vol.266, N 2, 2002, – P. 321-332
103. Wang, Z. Improved results on robust stability of multivariable interval control systems / Wang Z., Wang L., Yu W. // Proceedings of American Control Conference, – Denver, Colorado, USA, 2001, – P. 4463–4468.
104. Xiao, Y. Edge test for domain stability of polytopes of two-dimensional (2-D) polynomials / Xiao Y. // Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control, 2000, P. 4215-4220.
105. Zadeh, L.A. Linear system theory / Zadeh L.A., Desoer C.A. – McGraw-Hill, 1963.
106. Zamyatin, S.V. The robust sector stability analysis of an interval polynomial / Zamyatin S.V., Gayvoronskiy S.A. //1st International Symposium on Systems and Control in Aerospace and Astronautics, – Harbin, China, 2005, – P. 112-115.
107. Zhabko, A.P. Necessary and sufficient conditions for the stability of a linear family of polynomials. / Zhabko A.P., Kharitonov V.L. // Automation and Remote Control, 1994, Vol. 55, №10, – P. 1496-1503.
108. Zhan, Y. Dominant pole placement for multi-loop control systems / Zhan Y., Wang Q., Astrom K. J. // Proceedings of the American control conference – Chicago, 2000, – P. 1965-1969.