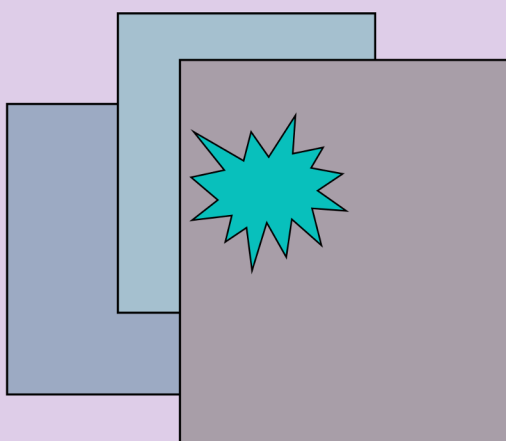


С.П. Шарый

# КОНЕЧНОМЕРНЫЙ ИНТЕРВАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ



# КОНЕЧНОМЕРНЫЙ ИНТЕРВАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

С.П. ШАРЫЙ

Новосибирский государственный университет  
Институт вычислительных технологий СО РАН

Издательство «XYZ»  
Новосибирск – 2024

*Ирине Шарой (1962–2015) —  
любимой жене, коллеге и другу*

Монография по интервальным алгебраическим задачам и их численному решению, отражающая как классические результаты в этой области, так и плоды новейших исследований. Текущая версия книги находится на веб-сайте <http://www.nsc.ru/interval/>.

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>9</b>
<b>Обозначения</b>	<b>14</b>
<b>Глава 1. Интервальные арифметики</b>	<b>18</b>
1.1 Мотивации интервального анализа . . . . .	18
1.2 Классическая интервальная арифметика . . . . .	25
1.3 Независимые и связанные интервальные величины . . . . .	29
1.4 Основная теорема интервальной арифметики . . . . .	34
1.5 Характеристики интервалов и их свойства . . . . .	35
1.5а Абсолютные характеристики . . . . .	35
1.5б Относительные характеристики . . . . .	41
1.6 Алгебраические свойства интервальных операций . . . . .	45
1.7 Полная интервальная арифметика . . . . .	48
1.7а Неформальное обсуждение . . . . .	48
1.7б Описание полной интервальной арифметики . . . . .	50
1.7в Дальнейшие свойства полной интервальной арифметики . . . . .	56
1.7г Минимаксный характер полной арифметики . . . . .	59
1.8 Комплексные интервальные арифметики . . . . .	62
1.9 Метрика и топология на множествах интервалов . . . . .	66
1.10 Твины и твинная арифметика . . . . .	71
1.11 Другие интервальные арифметики . . . . .	72
1.11а Интервальная арифметика Кэхэна . . . . .	72
1.11б Мультиинтервальная арифметика . . . . .	73
1.11в Сегментные арифметики . . . . .	74
1.11г Дистрибутивные интервальные арифметики . . . . .	77
1.12 Интервалы и другие способы описания неопределённости . . . . .	77
1.13 Компьютерные реализации интервальных арифметик . . . . .	80
Комментарий к Главе 1 . . . . .	82
Литература к Главе 1 . . . . .	86
<b>Глава 2. Интервальные векторы и матрицы</b>	<b>92</b>
2.1 Основные определения и факты . . . . .	92
2.2 Алгебраические и порядковые свойства . . . . .	99
2.3 Нормы интервальных векторов и матриц . . . . .	103

2.4	Метрика и топология в интервальных пространствах . . . . .	108
2.5	Неособенные интервальные матрицы . . . . .	112
2.6	Сильно неособенные интервальные матрицы . . . . .	120
2.7	Обратные интервальные матрицы . . . . .	124
2.8	Интервальные $M$ -матрицы . . . . .	127
2.9	Интервальные $H$ -матрицы . . . . .	133
	Комментарий к Главе 2 . . . . .	139
	Литература к Главе 2 . . . . .	141

### Глава 3. Интервальное оценивание

	<b>областей значений функций</b>	<b>144</b>
3.1	Интервальное расширение функций и его простейшие формы . . . . .	145
3.2	Условие Липшица для интервальных функций . . . . .	151
3.3	Центрированные формы интервального расширения . . . . .	157
3.4	Алгоритмическое дифференцирование и вычисление наклонов . . . . .	166
3.5	Бицентрированные формы . . . . .	172
3.6	Интервальные методы глобальной оптимизации . . . . .	175
	3.6а Основная идея . . . . .	176
	3.6б Общая схема методов . . . . .	177
	3.6в Исследование сходимости . . . . .	180
	3.6г Модификации . . . . .	182
	3.6д Способы обработки списка . . . . .	184
	3.6е Способ дробления . . . . .	185
3.7	Интервальные методы дробления графика . . . . .	185
	3.7а Оптимизация функций одной переменной . . . . .	186
	3.7б Оптимизация функций нескольких переменных . . . . .	189
	3.7в Градиентные тесты . . . . .	195
3.8	Рандомизированные алгоритмы в интервальной оптимизации . . . . .	196
	3.8а Стохастические методы оптимизации . . . . .	198
	3.8б Стохастические интервальные методы . . . . .	200
	Комментарий к Главе 3 . . . . .	204
	Литература к Главе 3 . . . . .	206

### Глава 4. Постановки интервальных задач

	<b>211</b>	
4.1	Анализ интервально заданных систем . . . . .	211
	4.1а Описание практической ситуации . . . . .	211
	4.1б Предварительная постановка задачи . . . . .	215
4.2	Множества решений интервальных уравнений . . . . .	217
	4.2а Кванторный формализм . . . . .	217
	4.2б Интерпретация множеств решений . . . . .	224
	4.2в Множества АЕ-решений . . . . .	225
4.3	Детализация постановки задачи . . . . .	231
	4.3а Обсуждение . . . . .	231
	4.3б Что такое «интервальная задача оценивания»? . . . . .	232
	4.3в Задачи, которые будут рассматриваться . . . . .	236
4.4	Трудоёмкость интервальных задач . . . . .	241

Комментарий к Главе 4 . . . . .	244
Литература к Главе 4 . . . . .	247
<b>Глава 5. Множества решений</b>	
<b>интервальных систем уравнений</b>	<b>252</b>
5.1 Характеризации множеств АЕ-решений . . . . .	252
5.2 АЕ-решения интервальных линейных уравнений . . . . .	257
5.2а Кванторный формализм в линейном случае . . . . .	257
5.2б Характеризация и постановки задач . . . . .	264
5.3 Дальнейшие свойства множеств решений . . . . .	271
5.4 Управляемое множество решений . . . . .	276
5.5 Распознавание множеств решений . . . . .	282
5.6 Интервальные уравнения со связанными параметрами . . . . .	285
5.7 Метод осевых сечений . . . . .	289
5.8 Предварительное оценивание множеств решений . . . . .	292
Комментарий к Главе 5 . . . . .	296
Литература к Главе 5 . . . . .	297
<b>Глава 6. Решение интервальной</b>	
<b>линейной задачи о допусках</b>	<b>302</b>
6.1 Обсуждение постановки задачи . . . . .	302
6.2 Строение и описание допускового множества решений . . . . .	307
6.3 Ограниченность допускового множества решений . . . . .	310
6.4 Грубое исследование разрешимости . . . . .	314
6.5 Полное исследование разрешимости . . . . .	317
6.5а Распознающий функционал . . . . .	317
6.5б Применение распознающего функционала . . . . .	325
6.6 Коррекция линейной задачи о допусках . . . . .	328
6.6а Коррекция вектора правой части . . . . .	328
6.6б Коррекция матрицы системы . . . . .	330
6.7 Формулы для размеров бруса решения . . . . .	333
6.8 Переборный алгоритм построения бруса решения . . . . .	339
6.9 Алгоритмы типа «ветвей и границ» . . . . .	342
Комментарий к Главе 6 . . . . .	352
Литература к Главе 6 . . . . .	354
<b>Глава 7. Внешнее оценивание</b>	
<b>объединённого множества решений</b>	<b>358</b>
7.1 Подготовительные факты . . . . .	359
7.2 Интервальный метод Гаусса . . . . .	363
7.3 Интервальный итерационный метод Гаусса-Зейделя . . . . .	372
7.4 Формально-алгебраический подход . . . . .	378
7.5 Предобуславливание . . . . .	386
7.6 Стационарные итерационные методы . . . . .	393
7.7 Процедура Хансена-Блика-Рона . . . . .	396
7.8 Локальные оценивающие процедуры . . . . .	401
Комментарий к Главе 7 . . . . .	405

Литература к Главе 7 . . . . .	409
<b>Глава 8. Внешнее оценивание решений</b>	
<b>нелинейных уравнений и систем уравнений</b>	<b>413</b>
8.1 Интервальный метод Ньютона . . . . .	413
8.2 Многомерный интервальный метод Ньютона . . . . .	419
8.3 Метод Кравчика . . . . .	422
8.4 Модификации многомерного интервального метода Ньютона . . . . .	427
8.5 Внешнее оценивание для интервальных уравнений . . . . .	429
8.6 Глобальное решение нелинейных систем уравнений . . . . .	433
8.7 Интервальные методы распространения ограничений . . . . .	439
Комментарий к Главе 8 . . . . .	440
Литература к Главе 8 . . . . .	440
<b>Глава 9. Оптимальное внешнее оценивание</b>	
<b>объединённого множества решений</b>	<b>443</b>
9.1 Пассивные переборные алгоритмы . . . . .	443
9.2 Метод Янссона . . . . .	447
9.3 Метод Рона . . . . .	448
9.4 Методы дробления решений . . . . .	450
9.4а Основной алгоритм . . . . .	450
9.4б Доказательство сходимости . . . . .	455
9.4в Трудоёмкость методов дробления решений . . . . .	460
9.5 Модификации методов дробления решений . . . . .	464
9.5а Оценивание по знакоопределённым брусам . . . . .	464
9.5б Использование локальных оценивающих процедур . . . . .	466
9.5в Новая стратегия дробления . . . . .	467
9.5г Итоговая схема . . . . .	469
9.6 Методы дробления параметров . . . . .	472
9.6а Общая схема методов . . . . .	472
9.6б Решение интервальных линейных систем . . . . .	474
9.7 Модификации методов дробления параметров . . . . .	479
9.7а Тест на монотонность . . . . .	479
9.7б Стратегия дробления . . . . .	481
9.7в Модификация Рона . . . . .	482
9.7г Влияние базового алгоритма . . . . .	491
9.7д Отбраковка бесперспективных записей . . . . .	492
9.7е Итоговая схема . . . . .	493
9.8 Последовательно гарантирующие алгоритмы . . . . .	498
9.9 Методы дробления параметров для интервальных систем со связями . . . . .	503
9.9а Теория . . . . .	504
9.9б Тест на монотонность . . . . .	509
9.9в Стратегия дробления . . . . .	512
9.9г Численный пример . . . . .	513
Комментарий к Главе 9 . . . . .	513
Литература к Главе 9 . . . . .	516

<b>Глава 10. Внешнее оценивание множеств АЕ-решений</b>	<b>520</b>
10.1 Формальный подход . . . . .	520
10.2 Оптимальность внешнего оценивания . . . . .	524
10.3 Обобщённый интервальный метод Гаусса-Зейделя . . . . .	529
10.4 Исследование обобщённого интервального метода Гаусса-Зейделя . . . . .	532
10.5 Предобуславливание . . . . .	535
10.6 Внешнее оценивание для нелинейных систем . . . . .	540
10.7 Оптимальное оценивание множеств АЕ-решений . . . . .	546
Комментарий к Главе 10 . . . . .	548
Литература к Главе 10 . . . . .	549
<b>Глава 11. Внутреннее оценивание множеств решений</b>	<b>551</b>
11.1 Практический пример . . . . .	551
11.2 Формальный подход для интервальных линейных систем . . . . .	554
11.3 Формальный подход в общем случае . . . . .	557
11.4 Максимальность внутренних оценок . . . . .	561
11.5 Коррекция внутренних оценок . . . . .	564
11.6 Интервальные системы с неотрицательными матрицами . . . . .	570
11.6а Теоретическая основа . . . . .	570
11.6б Алгоритм внутреннего оценивания . . . . .	576
11.6в Выбор начальной точки . . . . .	578
11.6г Численные примеры . . . . .	579
11.7 «Центровой» подход к внутреннему оцениванию . . . . .	581
11.7а Уточнение постановки задачи . . . . .	582
11.7б Формула для размеров внутренней оценки . . . . .	583
11.7в Вычисление размеров внутренней оценки . . . . .	588
Комментарий к Главе 11 . . . . .	591
Литература к Главе 11 . . . . .	592
<b>Глава 12. Численное нахождение формальных решений</b>	<b>595</b>
12.1 Простые частные случаи . . . . .	595
12.2 Погружение в линейное пространство . . . . .	597
12.2а Мотивации погружения . . . . .	597
12.2б Определения и основные свойства . . . . .	598
12.2в Стандартное погружение . . . . .	603
12.2г Знаково-блочная матрица . . . . .	605
12.2д Абсолютно регулярные матрицы . . . . .	607
12.3 Исследование индуцированных уравнений . . . . .	610
12.3а Выпуклость и субдифференцируемость . . . . .	613
12.3б Полиэдральность . . . . .	617
12.3в Оценки субдифференциалов . . . . .	620
12.4 Существование формальных решений . . . . .	622
12.5 Субдифференциальный метод Ньютона . . . . .	627
12.5а Алгоритм . . . . .	627
12.5б Доказательство сходимости . . . . .	628
12.5в Вычисление субдифференциала . . . . .	633



12.6 Численные примеры . . . . .	637
12.7 Стационарные одношаговые итерационные методы . . . . .	639
12.7а Диагональное расщепление матрицы системы . . . . .	640
12.7б Треугольное расщепление матрицы системы . . . . .	641
12.7в Общий подход: расщепление матрицы системы . . . . .	644
12.7г Отщепление точечной матрицы . . . . .	645
12.8 Численные примеры . . . . .	650
Комментарий к Главе 12 . . . . .	652
Литература к Главе 12 . . . . .	653
<b>Послесловие</b>	<b>655</b>
<b>Предметный указатель</b>	<b>667</b>

# Введение

*Интервалом* мы называем замкнутый отрезок вещественной оси, а *интервальная неопределённость* — это состояние неполного (частичного) знания об интересующей нас величине, когда известна лишь её принадлежность некоторому интервалу, т. е. когда мы можем указать лишь границы возможных значений этой величины (пределы её изменения). Соответственно, *интервальный анализ* — это отрасль математического знания, исследующая задачи с интервальными неопределённостями и методы их решения.

Можно дать и более развёрнутое определение. Каждая научная дисциплина характеризуется, как известно, своим отдельным *предметом* и собственным специфическим *методом*. Интервальный анализ — это раздел математики,

- предметом которого является решение задач с интервальными (или, более общо, ограниченными) неопределённостями и неоднозначностями в данных, возникающими либо в условиях задачи, либо в процессе её решения,
- чьей характеристической особенностью является рассмотрение множеств неопределённости как самостоятельных целостных объектов, посредством установления арифметических, аналитических и т. п. операций и отношений между ними.

Интервальный анализ и его специфичные методы имеют, таким образом, наивысшую ценность в задачах, где неопределённости и неоднозначности возникают с самого начала и являются неотъемлемой частью постановки задачи. Хотя это никоим образом не исключает других плодотворных применений интервального анализа, в частности, в задачах, формулируемых вообще без привлечения понятия интервала. Например, в последние десятилетия интервальный анализ получил широчайшее распространение в качестве основы для так называемых *доказательных (достоверных, надёжных) вычислений* на ЭВМ, *вычислений с гарантированной точностью* и т. п., несмотря на то, что в этих приложениях интервальные методы являются всего лишь вспомогательным средством для решения задач, неинтервальных по своей природе.

Метод интервального анализа по своей сути алгоритмичен и для доведения решения «до числа» требует реализации на вычислительной машине, поэтому неудивительно, что в докомпьютерную эпоху развитие интервального анализа не состоялось. Но уже в середине прошлого века, в связи с развитием методов приближённых вычислений и особенно с появлением и распространением первых ЭВМ, потребность в интервальных методах и оценках стала ощущаться столь остро, что пионерские ра-

боты по интервальному анализу появились практически одновременно и независимо в Советском Союзе, США, Японии и Польше.

Современный интервальный анализ и интервальные методы первоначально возникли как средство автоматического учёта ошибок округлений при расчётах с конечной точностью представления чисел, в частности, при счёте на цифровых ЭВМ с конечной разрядной сеткой. На протяжении ряда лет этот акцент в развитии интервального анализа был доминирующим, и именно так новая научная дисциплина была представлена, например, в классической советской «Математической энциклопедии» (1977–85 годы). В некоторых странах (например, в Германии) подобная односторонняя ориентация со временем повлекла за собой постепенную деформацию научной терминологии. Выявилась даже отчётливая тенденция к устранению самих слов «интервальный», «интервальность» и т. п., характеризующих отдельное и целостное научное направление. Взамен предлагается говорить о «надёжных», «доказательных» или даже просто «научных» вычислениях, хотя их основой неизменно служат интервальные методы.

Однако идеи, положенные в основу нового научного направления, оказались гораздо шире чисто «округленческих» приложений. Довольно скоро выяснилось, что нарождающиеся интервальные подходы и модели получают чрезвычайно плодотворное применение как язык описания некоторого особого класса неопределённостей, — так называемых ограниченных по величине неопределённостей.<sup>1</sup> Интервальное представление неопределённости стало привлекать всё большее внимание математиков и практиков потому, что оно является наименее ограничительным и отвечает широкому классу прикладных задач, в которых часто нет оснований или недостаточно информации для того, чтобы рассматривать эту неопределённость как случайную, т. е. подчиняющуюся теоретико-вероятностным моделям. Интервальный анализ и возникшая практически одновременно с ним теория нечётких множеств явились ответом на вызов бурно развивающейся практики, которая требовала развития аппарата для учёта неопределённостей нестатистической (или, в общем случае, неизвестной) природы. При этом интервальный анализ оказался способным исследовать содержательные модели, которые основываются на наиболее скудных априорных допущениях о характере неопределённости, когда относительно рассматриваемых величин ничего не известно, кроме их свойства принимать значения из некоторых ограниченных множеств.

Характерная черта исследований, в которых интервальный анализ используется для доказательных вычислений на цифровых ЭВМ с конечной разрядной сеткой (т. е. для получения математически гарантированных результатов с учётом ошибок округлений) — допущение о малости интервалов изменений «входных» данных, позволяющее во многих случаях осуществлять асимптотический анализ и т. п. При этом погрешности вычислений необходимо учитывать в большинстве операций на ЭВМ, формирующих окончательный результат. Существенное влияние на работы по этой тематике оказывают конкретные особенности вычислительных машин и процессоров, их архитектура, языки программирования и пр.

Напротив, в тех работах, где интервальный анализ служит средством для исследования ограниченных неопределённостей, опираться на малость возмущений уже

---

<sup>1</sup>Соответствующие английские термины — bounded disturbances, bounded error approach, bounded parameter model и т. п.



алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{11}x_1 + \mathbf{a}_{12}x_2 + \dots + \mathbf{a}_{1n}x_n = \mathbf{b}_1, \\ \mathbf{a}_{21}x_1 + \mathbf{a}_{22}x_2 + \dots + \mathbf{a}_{2n}x_n = \mathbf{b}_2, \\ \vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \\ \mathbf{a}_{n1}x_1 + \mathbf{a}_{n2}x_2 + \dots + \mathbf{a}_{nn}x_n = \mathbf{b}_m, \end{cases} \quad (3)$$

с интервалами  $\mathbf{a}_{ij}$  и  $\mathbf{b}_i$ , или, в краткой форме,

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b} \quad (4)$$

с интервальной  $m \times n$ -матрицей  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$  и интервальным  $m$ -вектором правой части  $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_i)$ .

Основной материал книги концентрируется вокруг решения различных задач, возникающих в связи с интервальными системами уравнений (1)–(2) и (3)–(4). Но помимо собственно математических результатов мы также исследуем (в Главе 4) процесс формулировки этих интервальных задач. Принятая нами точка зрения состоит в том, что в большинстве случаев некорректно говорить о «решении интервальных уравнений» (систем уравнений, неравенств и т. п.) вообще. Правильнее вести речь о решении тех или иных *постановок задач*, связанных с интервальными уравнениями (системами уравнений, неравенств и т. п.). В свою очередь, формулировка постановки интервальной задачи подразумевает указание, по крайней мере, *множества решений задачи и способа его оценивания*.

В этом отношении ситуация в интервальном анализе отчасти напоминает теорию дифференциальных уравнений, где также избегают говорить о решении просто уравнений самих по себе. Вместо этого исследуются и решаются «задача Коши» или «краевая задача» (для обыкновенных дифференциальных уравнений), «смешанная задача», «задача Дирихле» или «задача Неймана» и т. п. (для уравнений в частных производных). В Главе 4 мы даём аккуратную формализацию понятия «постановка интервальной задачи». Кроме того, одним из итогов нашего анализа является обобщение понятия *множества решений* для интервальных систем уравнений, неравенств и т. п.

Коль скоро исторически интервальный анализ возник из необходимости учёта ошибок вычислений и задач чувствительности, то неудивительно, что на первоначальном этапе своего развития множество решений задачи с интервальными данными понималось как множество всевозможных решений точечных задач с параметрами, которые могут принимать значения из заданных интервалов. Но по мере развития интервальных методов и расширения сферы их приложений обнаружилось, что это простейшее понимание множества решений не отражает существо ряда практически важных интервальных задач. Таковой, является, например, *задача о допусках*, возникающая в эконометрике и несколько позже в теории автоматического управления для объектов с интервальными неопределённостями в данных (см. Главу 6). Решение задачи о допусках приводит к необходимости рассмотрения так называемого *допускового множества решений* интервальных систем уравнений, которое является одним из важных представителей обширного семейства *множеств кванторных решений* интервальных систем уравнений. Эти множества решений естественным об-

разом возникают в ситуациях, когда интервальные параметры задачи подвержены влиянию различных конфликтующих факторов.

Множества канторных решений образуют чрезвычайно широкий класс множеств решений, описывающих многошаговые процессы принятия решений в условиях внешних ограниченных возмущений, когда подходящими управлениями мы должны достичь целевого назначения системы. Но часто имеет смысл ограничиться более простыми, но не менее важными для практики *АЕ-решениями*, которые описывают один этап возмущение-управление. Один из основных итогов представляемых в книге исследований — развитие эффективных численных методов распознавания и оценивания множеств АЕ-решений интервальных систем уравнений.

Структурно настоящая книга состоит из введения, указателя обозначений, собственно основного текста, разбитого на двенадцать глав, послесловия и предметного указателя. О её детальном содержании можно составить представление из оглавления и предисловий к отдельным главам. Каждая из двенадцати глав основного текста книги посвящена изложению отдельного крупного вопроса, либо развитию ряда родственных идей. У читателя не предполагается никаких предварительных знаний в области интервального анализа, и чтобы придать тексту самодостаточный характер, конспективно даны необходимые результаты из других областей математики и приложений, снабженные подробными литературными ссылками. В книге сознательно не затронуты интервальные дифференциальные задачи (обыкновенные и в частных производных), интервальные методы в интегральных уравнениях и ряд других важных и интересных тем ввиду их чрезвычайной обширности, из-за которой освещение каждой из них может потребовать написания отдельных книг сравнимого с этой объёма.

Значительная часть изложенного в книге материала неоднократно читалась автором в виде различных лекционных курсов в Алтайском и Новосибирском государственных университетах. Автор благодарен своим коллегам А.В. Лакееву, Б.С. Добронцу, А.П. Воцинину, Г.Г. Меньшикову, В.А. Новикову и В.В. Шайдурову за плодотворные научные дискуссии, а также С.И. Кумкову, С.И. Жилину, А.В. Пролубникову и А.Н. Баженову за ценные замечания по рукописи книги.

# Обозначения

Наша система обозначений следует, в основном, неформальному международному стандарту на обозначения в интервальном анализе, выработанному в 2002 году и модифицированному в нескольких последующих редакциях. В настоящее время его текст доступен в Интернете и опубликован в статье — Кирфотт Б., Накао М., Ноймайер А., Румп З., Шарый С.П., ван Хентенрик П. Стандартизация обозначений в интервальном анализе // Вычислительные технологии, 2010, Т. 15, №1, с. 7–13.

Интервалы и другие интервальные величины (векторы, матрицы и др.) всюду в тексте обозначаются жирным математическим шрифтом, например, **A**, **B**, **C**, ..., **x**, **y**, **z**, тогда как неинтервальные (точечные) величины никак специально не выделяются. Арифметические операции с интервальными величинами — это операции соответствующих интервальных арифметик: либо классической интервальной арифметики  $\mathbb{IR}$  (см. §1.2), либо полной интервальной арифметики Каухера  $\mathbb{KR}$  (см. §1.8). Наконец, если не оговорено противное, под векторами (точечными или интервальными) всюду понимаются вектор-столбцы.

## Другие обозначения

$:=$	левая часть равенства есть обозначение для правой
$\&$	логическая конъюнкция, связка «и»
$\Rightarrow$	логическая импликация
$\Leftrightarrow$	логическая равносильность
$\rightarrow$	отображение множеств
$\mapsto$	правило сопоставления элементов при отображении
$\leftarrow$	оператор присваивания в алгоритмах
$\circ$	знак композиции отображений
$\emptyset$	пустое множество
$x \in X$	элемент $x$ принадлежит множеству $X$
$x \notin X$	элемент $x$ не принадлежит множеству $X$

$X \ni x$	множество $X$ содержит элемент $x$	
$X \not\ni x$	множество не $X$ содержит элемент $x$	
$X \cup Y$	объединение множеств $X$ и $Y$	
$X \cap Y$	пересечение множеств $X$ и $Y$	
$X \setminus Y$	разность множеств $X$ и $Y$	
$X \subseteq Y$	множество $X$ есть подмножество множества $Y$	
$X \subset Y$	множество $X$ есть собственное подмножество для $Y$	
$X \times Y$	прямое декартово произведение множеств $X$ и $Y$	
$\mathbb{N}$	множество натуральных чисел	
$\mathbb{R}$	множество вещественных (действительных) чисел	
$\mathbb{R}_+$	множество неотрицательных вещественных чисел	
$\mathbb{R}^+$	расширенная числовая ось $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$	
$\mathbb{C}$	множество комплексных чисел	
$\mathbb{IR}$	классическая интервальная арифметика	25
$\mathbb{ID}$	множество интервалов, содержащихся в $D \subseteq \mathbb{R}^n$	95
$\mathbb{KR}$	полная интервальная арифметика Каухера	48
$\mathbb{IC}$	комплексная интервальная арифметика	62
$\mathbb{IC}_{\text{circ}}$	комплексная круговая арифметика	62
$\mathbb{IC}_{\text{rect}}$	комплексная прямоугольная арифметика	62
$\mathbb{R}^n$	множество вещественных $n$ -мерных векторов	
$\mathbb{IR}^n$	множество $n$ -мерных векторов с элементами из $\mathbb{IR}$	93
$\mathbb{KR}^n$	множество $n$ -мерных векторов с элементами из $\mathbb{KR}$	93
$\mathbb{R}^{m \times n}$	множество вещественных $m \times n$ -матриц	
$\mathbb{IR}^{m \times n}$	множество $m \times n$ -матриц с элементами из $\mathbb{IR}$	
$\mathbb{KR}^{m \times n}$	множество $m \times n$ -матриц с элементами из $\mathbb{KR}$	
$\mathcal{EF}$	семейство элементарных функций	147
$i$	мнимая единица	
$\text{sgn } x$	знак вещественного числа $x$	
$x^+, x^-$	положительная и отрицательная части числа $x$	55
$\text{sgn } \mathbf{a}$	знак интервала $\mathbf{a}$	
$\mathbf{a}^+, \mathbf{a}^-$	положительная и отрицательная части интервала $\mathbf{a}$	620
$\underline{\mathbf{a}}, \inf \mathbf{a}$	левый конец интервала $\mathbf{a}$	50
$\overline{\mathbf{a}}, \sup \mathbf{a}$	правый конец интервала $\mathbf{a}$	50
$ \mathbf{a} $	абсолютная величина (магнитуда) интервала $\mathbf{a}$	35
$\text{abs } \mathbf{a}$	интервальное расширение функции модуля	147
$\langle \mathbf{a} \rangle$	магнитуда интервала $\mathbf{a}$	36



$\langle \mathbf{A} \rangle$	компаратант интервальной матрицы $\mathbf{A}$	134
$\text{mid } \mathbf{a}$	середина (медиана) интервала $\mathbf{a}$	35, 94
$\text{wid } \mathbf{a}$	ширина интервала $\mathbf{a}$	35, 94
$\text{rad } \mathbf{a}$	радиус интервала $\mathbf{a}$	35, 94
$\text{dev } \mathbf{a}$	отклонение интервала $\mathbf{a}$ от нуля	36
$\text{dual } \mathbf{a}$	дуальный (двойственный) к $\mathbf{a}$ интервал	51
$\text{opp } \mathbf{a}$	алгебраически противоположный к $\mathbf{a}$ интервал	52
$\text{inv } \mathbf{a}$	алгебраически обратный к $\mathbf{a}$ интервал	55
$\text{pro } \mathbf{a}$	правильная проекция интервала $\mathbf{a}$	52
$\text{vert } \mathbf{a}$	множество крайних точек интервала $\mathbf{a}$	94
$\ominus$	«внутреннее» интервальное вычитание	52
$\oslash$	«внутреннее» интервальное деление	55
$\chi(\mathbf{a})$	функционал Рачека от интервала $\mathbf{a}$	41
$\Xi_{uni}$	объединённое множество решений	228, 262
$\Xi_{tol}$	допусковое множество решений	228, 262
$\Xi_{ctl}$	управляемое множество решений	228, 276
$\Xi_{\alpha\beta}$	множество АЕ-решений типа $\alpha\beta$	227
$\Xi_{\mathcal{A}\beta}$	множество АЕ-решений типа $\mathcal{A}\beta$	261
$\mathbf{A}^{-1}$	обратная интервальная матрица	124
$\mathbf{A}^c$	характеристическая матрица ИСЛАУ	267
$\mathbf{b}^c$	характеристический вектор правой части ИСЛАУ	267
$\text{dist}$	метрика в интервальных пространствах	67, 109
$\text{Dist}$	мультиметрика в интервальных пространствах	109
$\text{sti}$	стандартное погружение $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^{2n}$	604
$\text{dom } f$	область определения функции $f$	
$\text{ran } (f, X)$	область значений функции $f$ на множестве $X$	144
$f^\angle(\tilde{x}, x)$	наклон функции $f$ между точками $\tilde{x}$ и $x$	161
$\text{hyp } f$	подграфик функции $f$	617
$\text{epi } f$	надграфик функции $f$	617
$\partial f$	субдифференциал функции $f$	615
$\partial X$	граница множества $X$	
$\text{int } X$	топологическая внутренность множества $X$	
$\text{cl } X$	топологическое замыкание множества $X$	
$\text{ch } X$	выпуклая оболочка множества $X$	
$\square X$	интервальная оболочка множества $X$	95
$\wedge$	минимум в частично упорядоченном множестве	48

$\vee$	максимум в частично упорядоченном множестве	48
$\mathbb{I}$	условный экстремум по включению	54
$I$	единичная матрица соответствующих размеров	
$Q^\sim$	знаково-блочная матрица для матрицы $Q$	606
$\ \cdot\ $	векторная или матричная норма	103
$\ \cdot\ _1$	1-норма векторов или подчинённая 1-норма матриц	106
$\ \cdot\ _2$	2-норма векторов или подчинённая 2-норма матриц	106
$\ \cdot\ _\infty$	$\infty$ -норма векторов или подчинённая $\infty$ -норма матриц	105
$\lambda(A)$	собственное значение матрицы $A$	
$\rho(A)$	спектральный радиус матрицы $A$	107
$\sigma(A)$	сингулярное число матрицы $A$	106
$\Pi(A)$	дополнение по Шуру в матрице $A$	368
$\text{diag}\{z_1, \dots, z_n\}$	диагональная $n \times n$ -матрица с элементами $z_1, \dots, z_n$ по главной диагонали	
$\mathcal{N}(x, \mathbf{X})$	интервальный оператор Ньютона	414, 420
$\mathcal{K}(x, \mathbf{X})$	интервальный оператор Кравчика	423
$\mathcal{H}(x, \mathbf{X})$	интервальный оператор Хансена-Сенгупты	427

К интервальным векторам и матрицам все введённые выше операции за исключением операции « $\langle \cdot \rangle$ » — взятия мигнитуды — будут применяться покомпонентно и поэлементно, так что если, к примеру,  $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_i)$  — интервальный вектор, то  $\text{mid } \mathbf{a}$  — это вещественный вектор ( $\text{mid } \mathbf{a}_i$ ).

Если  $x$  — вектор, то его подвектор, состоящий из компонент  $x_k$  с индексами  $k$  из некоторого индексного подмножества  $K$  обозначается через  $x_K$ , а дополнительный к нему вектор — через  $x_{\notin K}$  или  $x_{\neq k}$ , если  $K = \{k\}$ . Аналогичных соглашений будем придерживаться и в отношении матриц, так что, к примеру, если  $A$  является  $m \times n$ -матрицей, то  $A_{:, \neq k}$  — это матрица размера  $m \times (n - 1)$ , полученная из  $A$  удалением  $k$ -го столбца.

Конец доказательства теоремы или предложения и конец примера выделяются в тексте стандартным знаком «■».

Значительная часть описываемых в книге алгоритмов снабжается псевдокодами на неформальном алгоритмическом языке, в котором операторные скобки

DO FOR ... END DO означают оператор цикла со счётчиком, который задаётся после FOR,

DO WHILE ... END DO означают оператор цикла с предусловием, стоящим после WHILE,

IF ... THEN ... ELSE ... END или IF ... THEN ... END означают условные операторы с условием, стоящим после IF.

## Глава 1

# Интервальные арифметики

*Интервалом*  $[a, b]$  вещественной оси  $\mathbb{R}$  мы называем множество всех чисел, расположенных между заданными числами  $a$  и  $b$ , включая их самих, т. е.

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

При этом  $a$  и  $b$  называются *концами* интервала  $[a, b]$ , левым и правым соответственно, а множество всех интервалов обозначается символом  $\mathbb{IR}$ . В противоположность интервалам и интервальным величинам мы будем называть *точечными* те величины, значениями которых являются отдельные точки — вещественной оси, плоскости или, более общо, какого-либо пространства.

Основная идея интервального анализа — построить исчисление интервалов, т. е. научиться оперировать с ним так же, как с обычными числами, чтобы затем использовать построенную технику для решения различных задач, где интервалы встречаются в виде данных.

При реализации этого замысла, прежде всего, необходимо построить интервальные аналоги арифметических операций, так как они являются первичными и самыми важными при решении различных задач. Соответственно, важнейшим инструментом интервального анализа являются так называемые *интервальные арифметики* — алгебраические системы, формализующие для интервалов, как целостных объектов нового типа, арифметические операции. В этой главе мы даём обзор различных интервальных арифметик и их свойств, а также вводим на множестве интервалов другие необходимые структуры.

## 1.1 Мотивации интервального анализа

Согласно одному из популярных определений, «... математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира» [5]. В свою очередь, эти количественные отношения выражаются через те или иные величины, которые часто бывают неточны, имеют неопределённость, неоднозначность и т. п.

Важно иметь в виду, что, хотя термин «неопределённость» выражает отрицание «определённости», он в большинстве случаев означает не полное незнание (когда

любое исследование до чрезвычайности затруднилось бы, либо стало совсем невозможным), а состояние частичного знания, когда мы всё-таки располагаем какой-то информацией об интересующей нас величине. Каковы же в принципе могут быть частичные описания не известной точно величины?

Простейшей и наиболее распространённой ситуацией является знание множества возможных значений неизвестной величины. Например, « $x \in \{1, 2, 3, 5, 7\}$ », или « $1 \leq x \leq 5$ », или даже « $x \in \mathbb{R}$ ». Нередко кроме множества возможных значений имеется дополнительная информация о том, что эти возможные значения неизвестной величины не вполне равноценны друг другу, имеют различную «степень возможности», «вероятности» и пр., так что на множестве всех возможных значений задаётся некоторая дополнительная структура. Например, это может быть вероятностное распределение величины при теоретико-вероятностном описании (см. [12, 27] и др.), функция принадлежности при использовании теории нечётких множеств [17, 20, 26, 32] и т. п. Тем не менее, наиболее «скупое» описание неопределённости, когда кроме ограниченного множества возможных значений нам ничего не задано, является достаточно содержательным и нередко наиболее адекватным потребностям практики. Именно оно лежит в основе интервального анализа.

С другой стороны, во многих моделях реальности необходимо иметь дело с целыми диапазонами значений тех или иных величин, которые нельзя называть «неопределённостями», поскольку присущая им неоднозначность и неопределённость носят принципиальный и неустранимый характер (см. пункт «Неопределённость в физических законах и явлениях» в примерах ниже). Для исследования таких моделей и работы с ними также полезны математические методы, которые позволяют оперировать с интервалами и, более общо, ограниченными множествами.

Итак, наша цель — развитие инструмента для работы с приближёнными числами, границами ошибок и даже с целыми множествами значений рассматриваемых величин. Потребность в такого рода технике возникает во множестве самых разнообразных ситуаций, и некоторые наиболее типичные мы перечислим ниже.

*Представление чисел.* Как в ручных, так и в машинных вычислениях мы, как правило, можем эффективно оперировать лишь объектами, которые имеют конечное описание (конечную конструктивную сложность), заменяя произвольное вещественное число на некоторое его приближение, имеющее конечное число знаков в используемой системе счисления. Например,

$$\frac{2}{3} \approx 0.66667, \quad \sqrt{2} \approx 1.4142, \quad \pi \approx 3.1415926$$

в привычной нам десятичной системе. Тем самым уже в начале вычислений допускается некоторая неизбежная погрешность — *погрешность представления* — и, кроме того, теряется информация о том, каким именно приближением, с недостатком или с избытком, является указываемое значение.

Более корректное представление данных должно явным образом указывать границу погрешности. К примеру, это можно сделать путём уточнения, что все выписанные нами знаки верны и, таким образом, погрешность не превосходит половины единицы последнего разряда. Другой возможный способ указания интересующей нас погрешности, даже более предпочтительный, состоит в том,

чтобы дать пользователю наиболее узкие точно представимые границы — нижнюю и верхнюю — для интересующей нас величины:

$$\begin{aligned}\frac{2}{3} &\in [0.66666, 0.66667], \\ \sqrt{2} &\in [1.4142, 1.4143], \\ \pi &\in [3.1415926, 3.1415927].\end{aligned}$$

Частным случаем погрешностей представления, имеющим более инженерный характер, являются *погрешности ввода-вывода* и *погрешности перевода из одной системы счисления в другую*. Многие десятичные числа (к примеру, 0.1) не имеют точного конечного представления среди двоичных или шестнадцатеричных чисел, с которыми оперируют современные цифровые вычислительные машины. Но при введении подобных чисел в ЭВМ мы обязаны заменять их некоторой конечной суммой по степеням двойки, что имеет следствием внесение погрешности.

*Ошибки округления.* При выполнении арифметических операций с десятичными числами результат часто не представим тем же числом десятичных знаков и в некоторых ситуациях должен быть округлён, т. е. заменён на число с заданным количеством знаков. Например, если мы ограничиваемся десятичной арифметикой с пятью значащими цифрами, то

$$12345/6789 \approx 1.8184,$$

но включение

$$12345/6789 \in [1.8183, 1.8184]$$

является более корректным и даёт больше информации.

*Результаты измерений и физические константы.* Как правило, они известны неточно. К примеру, значение гравитационной константы  $G$  в законе всемирного тяготения Ньютона принимается обычно равным

$$G = 6.6720 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ с}^{-2} \text{ кг}^{-1},$$

но более серьёзные источники (например, [35]) указывают для этой величины ещё стандартное (среднеквадратичное) отклонение, характеризующее неточность нашего знания  $G$ , так что, фактически, имеется целый интервал возможных значений этой величины.

Отмеченное положение вещей с погрешностями и неточностями измерений является совершенно типичным и распространено повсеместно. В статье [6] один из создателей квантовой механики М. Борн писал в середине XX века: «... я не намереваюсь изгонять из физики понятие действительного числа. Оно необходимо для применения анализов. Но я имею в виду, что физическая ситуация должна описываться посредством действительных чисел таким образом, чтобы во всех наблюдениях естественная неточность принималась во внимание».

Интервалы атомных весов присутствуют с 2009 года в периодической таблице химических элементов Д.И. Менделеева, так как химики столкнулись с неизбежной изменчивостью изотопного состава некоторых химических элементов (более десятка) в зависимости от того, где в природе производится выборка этого элемента [93].

*Допуски.* Техническим термином «допуск» по определению обозначают «интервал, в котором допускается отклонение числовой характеристики параметра от его номинального (расчётного) значения. Допуски задают на геометрические параметры деталей машин и механизмов (линейные и угловые размеры, форму и расположение поверхностей и др.), на механические, физико-химические и др. параметры (например, электрическое сопротивление, твёрдость, процентное содержание химических элементов в материалах и т. д.)» [5]. В качестве примера напомним, что ширина железнодорожной колеи в России и ряде других стран задаётся допуском  $[1520 - 4, 1520 + 8]$  мм (для прямых участков с обычным скоростным режимом).

«Наиболее широко понятие допуска распространено в машиностроении, где допуски устанавливают для обеспечения необходимого качества изделий и взаимозаменяемости деталей или целых узлов машин и механизмов. Допуск характеризует уровень требований к точности изготовления деталей. От него зависит выбор метода обработки, оборудования и способов контроля и, в конечном итоге, стоимость изготовления. На практике не стремятся получить идеальные детали, т. к. это невозможно по условиям технологии и методам контроля и необязательно для обеспечения правильной работы машины или механизма. Кроме допуска на изготовление, устанавливают допуск на изменение характеристик изделий в процессе эксплуатации» [5].

Опять-таки, допуск — это интервал, в пределах которого допускается разброс значений интересующей нас величины, не нарушающий «штатное» функционирование устройства, системы и т. п. См., к примеру, [18].

*Неопределённость в физических законах и явлениях.* Ограниченные по величине неопределённости и неоднозначности естественно возникают при математическом моделировании многих механических, физических, химических и пр. явлений.

Интересным примером является сила сухого трения скольжения, играющая важнейшую роль в технике. Хорошо известно, что её максимальная величина  $T_{\max}$  пропорциональна силе, с которой прижаты друг к другу соприкасающиеся поверхности (закон Амонтона-Кулона, см. [43]). Но, вообще говоря, если движение одной поверхности по другой не наступило, то абсолютная величина силы их сцепления — так называемой *силы трения покоя* — может принимать любое значение из интервала  $[0, T_{\max}]$ .

В физике волновых явлений известно, что спектр любого сигнала конечной длительности (волнового пакета или цуга) помимо основной частоты неизбежно содержит целый диапазон близких частот (см., к примеру, [43]). Его ширина обратно пропорциональна длительности излучения, т. е. ширине волнового па-

кета. Этим обуславливается, к примеру, неустранимая (естественная) ширина спектральных линий и другие аналогичные эффекты.

*Неопределённости в технических, экономических и пр. системах.* Они неизбежны при оперировании с величинами, точные значения которых нам неизвестны или же могут изменяться. На протяжении длительного времени, вплоть до второй половины XX века, для их описания преимущественно использовалась теория вероятностей. Но по мере развития практики постепенно накопилась критическая масса материала, требующего иных подходов к описанию неопределённостей и неточностей.

Основоположником исследования ограниченных неопределённостей, для которых известны лишь границы изменения, является Л.В. Канторович, впервые сформулировавший идею их использования в работе [25] и там же наметивший основы математического аппарата для их обработки.

Интересный пример даёт понятие управления, по самому своему смыслу подразумевающее неоднозначность параметров объекта, которые мы можем выбирать из некоторого множества значений, чтобы достичь те или иные желаемые цели управления. С другой стороны, даже цели управления и параметры функционирования объекта могут быть определены неточно. Здесь приходим к задаче так называемого робастного управления [19, 33].

*Интервальнозначные вероятности.* Это аппарат, существенно расширяющий сферу применимости теоретико-вероятностных моделей и традиционной математической статистики [28].

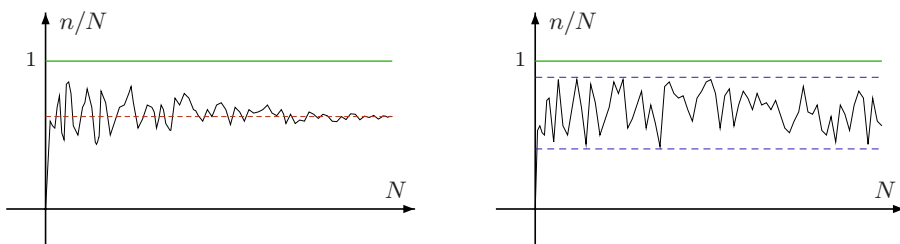


Рис. 1.1. Графики относительной частоты события в зависимости от количества испытаний для классической вероятности (слева) и для случая интервальной вероятности (справа).

Традиционная теория вероятностей может быть определена (см. к примеру, [12]) как область математики, которая исследует математические модели случайных явлений, обнаруживающих статистическую устойчивость (называемую также «статистической однородностью»). Это свойство означает установление значения относительной частоты интересующего нас события в длинном ряду повторений некоторого эксперимента, а само установившееся значение частоты полагается равным математической вероятности этого события в частотной интерпретации понятия вероятности [12, 27].

Если же в некотором явлении относительная частота какого-то события не имеет тенденции к установлению, а изменяется примерно так, как показано на правом чертеже Рис. 1.1 (см. также [13]), то методы традиционной теории вероятностей для его исследования уже не применимы. Один из возможных выходов из этого затруднения состоит в том, чтобы считать вероятность подобных событий интервальнозначной, равной интервалу, левый и правый концы которого суть нижний и верхний пределы соответственно для последовательности относительных частот при неограниченном увеличении количества испытаний. Из математического анализа известно, что эти пределы всегда существуют.

Большой вклад в развитие соответствующей теории внёс В.П. Кузнецов в работах 80-х годов прошлого века, и эти результаты подытожены в книге [28]. В настоящее время теория и приложения интервальнозначных вероятностей — это интенсивно развивающийся раздел прикладной математики.

Обратимся теперь к внутриматематическим потребностям, которые ощущаются в самой математике и естественно приводят к необходимости допущения в различных ситуациях интервальных величин и оперирования ими как с частным случаем числовых множеств.

*Расширение понятия предела.* Известное из математического анализа понятие предела последовательности или функции формализует свойство «бесконечно приближаться» к какому-то значению. Но его оказывается недостаточным, когда значения рассматриваемой последовательности или множества значений функции «сгущаются» более чем к одной точке. В этом случае предела в классическом смысле не существует, но мы можем считать, что пределом такой последовательности является целый *интервал* значений, от нижней предельной точки до верхней. Ситуация здесь в значительной мере аналогична той, что возникает при рассмотрении интервальнозначных вероятностей (см. выше).

*Интервальное интегрирование.* Глубокий результат Дж. фон Неймана утверждает, что любая теория интегрирования вещественных функций, требующая, чтобы значение интеграла выражалось числом, неизбежно влечёт существование неинтегрируемых функций. Элегантным способом преодоления этой неувязки является теория интервального интегрирования, развитая Л. Роллом, О. Капрани и К. Мадсенем в [50, 51]. Они допустили интервальное значение интеграла, положив его равным интервалу, левый конец которого равен нижнему интегралу Дарбу от функций, ограничивающих подынтегральную функцию снизу, а правый конец — верхнему интегралу Дарбу от функций, ограничивающих подынтегральную функцию сверху. Так как интегралы Дарбу существуют всегда, то все точечные и интервальные функции оказываются всегда интегрируемыми. То же самое применимо к интегрированию комплексных функций.

*Теоремы Брауэра и Миранды.* Эти эффектные результаты математического анализа для своего конструктивного применения (в частности, для построения на их основе численных методов) требуют нахождения образов множеств под действием отображений:



**Теорема Брауэра о неподвижной точке.** Пусть  $D$  — выпуклое компактное множество в  $\mathbb{R}^n$ . Если непрерывное отображение  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  переводит  $D$  в себя,  $T(D) \subseteq D$ , то оно имеет на  $D$  неподвижную точку  $x^*$ , т. е. такую что  $x^* = T(x^*)$ .

**Теоремы Миранды.** Пусть  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x))^T$  — функция, непрерывная на брус  $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}^n$  с гранями, параллельными координатным осям, и для  $i = 1, 2, \dots, n$  области значений компонент  $F_i(x)$  функции  $F(x)$  на  $i$ -ых противоположных гранях бруса  $\mathbf{X}$  имеют разные знаки. Тогда на брус  $\mathbf{X}$  существует нуль функции  $F$ , т. е. точка  $\tilde{x}$ , в которой  $F(\tilde{x}) = 0$ .

Теорема Миранды является многомерным обобщением широко известной теоремы Больцано-Коши о том, что непрерывная на интервале функция, которая на его концах принимает значения разных знаков, обязательно обращается внутри интервала в нуль. Характерной особенностью теоремы Миранды является специальная форма множества, на котором утверждается существование нуля функции: оно должно быть брусом с гранями, параллельными координатным осям, т. е. интервальным вектором (см. Главу 2). В целом, для полноценного применения теорем Брауэра и Миранды нужно уметь находить области значений функций на множествах.

*Задачи глобальной оптимизации*, в которых требуется, грубо говоря, перебрать и проверить целый континуум значений

желательно иметь в своём распоряжении аппарат для оценивания области значений (образа функции) по целым подобластям области определения

*Остаточные члены приближённых формул.* Вспомним разложение Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для  $n$ -кратно дифференцируемой функции  $f(x)$ :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x-a)^n, \quad (1.1)$$

где  $\xi$  лежит между  $a$  и  $x$ . Аналогично, интерполяционные формулы приближённо восстанавливают значение функции в желаемой точке по ряду известных значений в некоторых фиксированных точках области определения. Квадратурные формулы дают выражение интеграла от  $f$  через взвешенную сумму значений функции  $f$  в некоторых точках интервала интегрирования. Все эти формулы имеют погрешность — так называемый остаточный член, который обычно выражается через значение некоторой производной  $f^{(p)}(\xi)$  в какой-то промежуточной точке  $\xi$  отрезка интегрирования или интерполирования. Для количественного определения этой ошибки желательно иметь в своём распоряжении оценку области значений для  $f^{(p)}(\xi)$  при  $\xi$ , пробегающем интервал между  $a$  и  $x$ .

Если такая внешняя оценка — обозначим её  $\mathbf{f}^{(p)}([a, x])$  — известна, то формуле Тейлора (1.1) может быть придан даже более информативный и не менее

элегантный вид

$$f(x) \in \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n)}([a, x])}{n!} (x-a)^n,$$

где все арифметические операции нужно понимать как операции между множествами. К аналогичному виду могут быть приведены также другие формулы для приближённого представления функций и квадратурные формулы.

## 1.2 Классическая интервальная арифметика

Построение математического аппарата для оперирования с множествами, представляющими неопределённости, неоднозначности и погрешности, естественно начать с организации между ними простейших арифметических операций. Прецеденты в математике уже имеются: это, например, сумма Минковского выпуклых множеств в евклидовом пространстве [3], которая берётся «по представителям», так что сумма множеств  $A$  и  $B$  есть множество всевозможных сумм  $a + b$  по всем  $a \in A$  и  $b \in B$ .

Очевидно, что свойства вводимых между множествами операций будут зависеть не только от этих операций, но также и от вида множеств. При этом желательны

- 1) хорошие алгебраические свойства получаемых операций:
  - коммутативность,
  - ассоциативность,
  - обратимость или какие-нибудь её ослабленные аналоги,
  - и т. п.
- 2) простота описания множеств, т. е. их невысокая конструктивная сложность, которая важна в случае, если мы собираемся реализовывать наши вычисления на компьютере.

Выписанными условиями существенно ограничивается класс множеств, на которых можно «хорошо определить» арифметические операции. Мы ещё вернёмся к этому интересному вопросу в §1.11, а сейчас, имея в виду описание неопределённостей на вещественной оси, отметим, что интервалы  $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$  действительно являются наиболее просто устроенными и наиболее просто описываемыми множествами в  $\mathbb{R}$ . Именно их следует прежде всего рассмотреть в качестве средства представления ограниченных неопределённостей. При этом вещественные числа  $a$  отождествляются с интервалами нулевой ширины  $[a, a]$ , называемыми также *вырожденными интервалами*. Соответственно, интервалы  $[a, b]$ , у которых  $a < b$ , называются *невырожденными*.

Обратимся к определению между интервалами арифметических операций — сложения, вычитания, умножения и деления. Ясно, что эти операции следует определять «по представителям», т. е. результат некоторой операции « $\star$ » между интервалами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  должен быть образован из результатов  $a \star b$  этой же операции между числами  $a$  и  $b$  из интервалов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  соответственно. Но как именно сконструировать  $\mathbf{a} \star \mathbf{b}$  из множества всевозможных  $a \star b$ ? Единого универсального правила здесь быть не может, так как всё зависит от наших целей, от конкретной задачи, которую мы решаем.

Далее в книге мы рассмотрим различные способы определения интервальных операций, обслуживающие различные постановки задач с интервальными входными данными. Самым первым будет простой и естественный способ, который основан на следующем фундаментальном принципе:

$$\mathbf{a} \star \mathbf{b} := \{a \star b \mid a \in \mathbf{a}, b \in \mathbf{b}\} \quad (1.2)$$

для интервалов  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ , таких что выполнение точечной операции  $a \star b, \star \in \{+, -, \cdot, /\}$ , имеет смысл для любых  $a \in \mathbf{a}$  и  $b \in \mathbf{b}$ . Тем самым результатом интервального аналога операции мы назначаем область значений этой операции над точками из данных интервалов. Ясно, что введённые таким образом арифметические операции между интервалами предназначены, прежде всего, для задач вычисления областей значений различных выражений.

**Предложение 1.2.1** *Для интервальных арифметических операций развёрнутое определение, равносильное (1.2), задаётся следующими формулами:*

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = [\underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}}], \quad (1.3)$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = [\underline{\mathbf{a}} - \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}}], \quad (1.4)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = [\min\{\underline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{a}}\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}}\overline{\mathbf{b}}\}, \max\{\underline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{a}}\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}}\overline{\mathbf{b}}\}], \quad (1.5)$$

$$\mathbf{a}/\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot [1/\overline{\mathbf{b}}, 1/\underline{\mathbf{b}}] \quad \text{для } \mathbf{b} \not\ni 0. \quad (1.6)$$

**Доказательство.** Прежде всего отметим, что множество  $\mathbf{a} \star \mathbf{b}$ , определяемое в (1.2), является связным. Это образ связного множества — декартова произведения  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  — при непрерывных отображениях, которыми являются арифметические операции. Кроме того, результаты этих непрерывных арифметических операций на компактном множестве  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  также должны быть компактами (см., к примеру, [21]), т. е. достигать как минимума, так и максимума. Получается, что в условиях доказываемого предложения множества, определяемые согласно (1.2), в самом деле являются интервалами вещественной оси  $\mathbb{R}$ . Более того, определение (1.2) можно переписать в следующем конструктивном виде

$$\mathbf{a} \star \mathbf{b} = \left[ \min_{a \in \mathbf{a}, b \in \mathbf{b}} a \star b, \max_{a \in \mathbf{a}, b \in \mathbf{b}} a \star b \right], \quad \text{где } \star \in \{+, -, \cdot, /\}.$$

Складывая почленно двусторонние неравенства

$$\underline{\mathbf{a}} \leq a \leq \overline{\mathbf{a}} \quad \text{и} \quad \underline{\mathbf{b}} \leq b \leq \overline{\mathbf{b}},$$

получим

$$\underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}} \leq a + b \leq \overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}}. \quad (1.7)$$

Складывая почленно двусторонние неравенства

$$\underline{\mathbf{a}} \leq a \leq \overline{\mathbf{a}} \quad \text{и} \quad -\overline{\mathbf{b}} \leq -b \leq -\underline{\mathbf{b}},$$

получим

$$\underline{\mathbf{a}} - \overline{\mathbf{b}} \leq a - b \leq \overline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}}. \quad (1.8)$$

Если для каждого  $a$  переменная  $b$  может принимать любые значения из интервала  $\mathbf{b}$ , а для каждого  $b$  переменная  $a$  может принимать любые значения из интервала  $\mathbf{a}$ , то полученные оценки для суммы (1.7) и разности (1.8) являются точными, т. е. достигаются для каких-то  $a \in \mathbf{a}$  и  $b \in \mathbf{b}$ . Они совпадают с (1.3) и (1.4).

Для доказательства (1.5) заметим, что функция  $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , задаваемая правилом  $\phi(a, b) = a \cdot b$ , будучи линейной по  $b$  при каждом фиксированном  $a$ , принимает минимальное и максимальное значения на концах интервала изменения переменной  $b$ . Это же верно и для экстремумов по  $a \in \mathbf{a}$  при любом фиксированном значении  $b$ . Наконец,

$$\begin{aligned} \min_{a \in \mathbf{a}, b \in \mathbf{b}} \phi(a, b) &= \min_{a \in \mathbf{a}} \min_{b \in \mathbf{b}} \phi(a, b) = \min_{b \in \mathbf{b}} \min_{a \in \mathbf{a}} \phi(a, b), \\ \max_{a \in \mathbf{a}, b \in \mathbf{b}} \phi(a, b) &= \max_{a \in \mathbf{a}} \max_{b \in \mathbf{b}} \phi(a, b) = \max_{b \in \mathbf{b}} \max_{a \in \mathbf{a}} \phi(a, b), \end{aligned}$$

т. е. взятие минимума по совокупности аргументов может быть заменено повторным минимумом, а взятие максимума по совокупности аргументов — повторным максимумом. Это вытекает из того обстоятельства, что область, по которой берутся экстремумы, является прямым декартовым произведением интервалов по отдельным переменным. Следовательно, для  $a \in \mathbf{a}$  и  $b \in \mathbf{b}$  в самом деле

$$\min \{ \underline{\mathbf{a}} \underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{a}} \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}} \underline{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}} \bar{\mathbf{b}} \} \leq a \cdot b \leq \max \{ \underline{\mathbf{a}} \underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{a}} \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}} \underline{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}} \bar{\mathbf{b}} \}, \quad (1.9)$$

и эта оценка достижима с обеих сторон, если для  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  выполнены те естественные условия, которые предполагались в случае сложения и вычитания.

Соотношение (1.6) следует из (1.5) и из того, что  $a/b = a \cdot (1/b)$ . ■

Помимо бинарных арифметических операций имеет смысл также ввести операцию унарного минуса. Именно, посредством  $(-\mathbf{a})$  условимся обозначать интервал  $(-1) \cdot \mathbf{a}$ , так что  $-\mathbf{a} = [-\bar{\mathbf{a}}, -\underline{\mathbf{a}}]$ . Отметим, что это определение находится в согласии с определением арифметической операции вычитания интервалов, так как в самом деле  $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ .

Полезно выписать определение интервального умножения в виде так называемой таблицы Кэли, дающей представление результата операции в зависимости от различных комбинаций значений операндов. Для этого выделим в  $\mathbb{IR}$  следующие подмножества:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &:= \{ \mathbf{a} \in \mathbb{IR} \mid \underline{\mathbf{a}} \geq 0 \text{ и } \bar{\mathbf{a}} \geq 0 \} && \text{— неотрицательные интервалы,} \\ \mathcal{Z} &:= \{ \mathbf{a} \in \mathbb{IR} \mid \underline{\mathbf{a}} \leq 0 \leq \bar{\mathbf{a}} \} && \text{— нульсодержащие интервалы,} \\ -\mathcal{P} &:= \{ \mathbf{a} \in \mathbb{IR} \mid -\mathbf{a} \in \mathcal{P} \} && \text{— неположительные интервалы.} \end{aligned}$$

В целом  $\mathbb{IR} = \mathcal{P} \cup \mathcal{Z} \cup (-\mathcal{P})$ . Тогда интервальное умножение (1.5) может быть описано с помощью Табл. 1.1, особенно удобной при программной реализации этой операции на ЭВМ.

При умножении интервала на число удобно также следующее простое правило:

$$\mu \cdot \mathbf{a} = \begin{cases} [\mu \underline{\mathbf{a}}, \mu \bar{\mathbf{a}}], & \text{если } \mu \geq 0, \\ [\mu \bar{\mathbf{a}}, \mu \underline{\mathbf{a}}], & \text{если } \mu \leq 0. \end{cases} \quad (1.10)$$

Таблица 1.1. Интервальное умножение

$\cdot$	$b \in \mathcal{P}$	$b \in \mathcal{Z}$	$b \in -\mathcal{P}$
$a \in \mathcal{P}$	$[\underline{a}b, \bar{a}\bar{b}]$	$[\bar{a}\underline{b}, \bar{a}\bar{b}]$	$[\bar{a}\underline{b}, \underline{a}\bar{b}]$
$a \in \mathcal{Z}$	$[\underline{a}\bar{b}, \bar{a}\bar{b}]$	$[\min\{\underline{a}\bar{b}, \bar{a}\underline{b}\}, \max\{\underline{a}\underline{b}, \bar{a}\bar{b}\}]$	$[\bar{a}\underline{b}, \underline{a}\bar{b}]$
$a \in -\mathcal{P}$	$[\underline{a}\bar{b}, \bar{a}\underline{b}]$	$[\underline{a}\bar{b}, \underline{a}\bar{b}]$	$[\bar{a}\bar{b}, \underline{a}\bar{b}]$

**Определение 1.2.1** Алгебраическая система  $\langle \mathbb{IR}, +, -, \cdot, / \rangle$ , образованная множеством всех вещественных интервалов  $\mathbf{a} := [\underline{a}, \bar{a}] = \{x \in \mathbb{R} \mid \underline{a} \leq x \leq \bar{a}\}$  с бинарными операциями сложения, вычитания, умножения и деления, которые определены формулами (1.3)–(1.6), называется классической интервальной арифметикой.

Специального комментария требует тот факт, что в классической интервальной арифметике отдельно вводятся действия вычитания и деления интервалов. В поле вещественных чисел  $\mathbb{R}$ , к примеру, они определяются не самостоятельно, а как операции, обратные сложению и умножению. Но для действий над интервалами таким путём идти уже нельзя, поскольку интервальное вычитание не обратное сложению, а интервальное деление не обратное умножению: в общем случае

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - \mathbf{b} \neq \mathbf{a}, \quad (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})/\mathbf{b} \neq \mathbf{a}.$$

Коль скоро интервалы — это множества, то для них естественно определяется включение друг в друга:

$$\mathbf{a} \subseteq \mathbf{b} \quad \iff \quad \underline{a} \geq \underline{b} \text{ и } \bar{a} \leq \bar{b}. \quad (1.11)$$

Это отношение является частичным порядком на  $\mathbb{IR}$ . Как связаны с ним интервальные арифметические операции (1.3)–(1.6)? Имеет место важное свойство *монотонности по включению*:

**Предложение 1.2.2** Для любых интервалов  $\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}' \in \mathbb{IR}$  и любой арифметической операции  $\star \in \{+, -, \cdot, /\}$  из включений  $\mathbf{a} \subseteq \mathbf{a}'$  и  $\mathbf{b} \subseteq \mathbf{b}'$  следует

$$\mathbf{a} \star \mathbf{b} \subseteq \mathbf{a}' \star \mathbf{b}'. \quad (1.12)$$

Иными словами, расширяя операнды интервальной арифметической операции, получим расширение её результата.

**Доказательство** вытекает непосредственно из основного принципа (1.2), на основе которого определяются операции (1.3)–(1.6). Если интервалы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  заменяются на более широкие,  $\mathbf{a}'$  и  $\mathbf{b}'$  соответственно, то и множество результатов всевозможных операций  $\mathbf{a} \star \mathbf{b}$  для  $\mathbf{a} \in \mathbf{a}'$  и  $\mathbf{b} \in \mathbf{b}'$  также становится бóльшим (по крайней мере, не сужается).

## 1.3 Независимые и связанные интервальные величины

Интервал сам по себе описывает лишь границы возможных значений той или иной переменной величины. Для более тонкого анализа нередко требуется указание того, какая именно переменная может пробегать этот интервал, так как один и тот же интервал может представлять значения совершенно разных переменных. Станем говорить, что задана *интервальная величина* (интервальный параметр), если имеется переменная, которая может принимать значения в пределах некоторого интервала. На формальном математическом языке интервальной величиной является упорядоченная пара, которую мы будем обозначать специальными скобками  $[a, \mathbf{a}]$ , где  $a$  — переменная и  $\mathbf{a}$  — интервал её возможных значений,  $a \in \mathbf{a}$ . Допуская некоторую вольность, в тех случаях, где это не приводит к недоразумениям, договоримся употреблять для обозначения интервальной величины  $[a, \mathbf{a}]$  также записи « $a \in \mathbf{a}$ » и « $\mathbf{a} \ni a$ ».

**Определение 1.3.1** Для интервальных величин  $[a_1, \mathbf{a}_1], [a_2, \mathbf{a}_2], \dots, [a_n, \mathbf{a}_n]$  назовём совместной областью значений множество всевозможных значений упорядоченного набора соответствующих переменных  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  в  $\mathbb{R}^n$ .

Несмотря на кажущуюся тривиальность этого определения, оно задаёт очень важный объект. Для интервальных величин, которые являются результатами вычислений, совместная область значений, фактически, служит протоколом предыстории их изменения, а её аккуратное использование позволяет наиболее точно оценивать результаты длинных цепочек вычислений.

Совместная область значений  $\mathcal{S}$  интервальных величин  $[a_1, \mathbf{a}_1], \dots, [a_n, \mathbf{a}_n]$  — это просто какое-то множество в  $\mathbb{R}^n$ , и из принадлежностей  $a_1 \in \mathbf{a}_1, a_2 \in \mathbf{a}_2, \dots, a_n \in \mathbf{a}_n$  следует, что

$$\mathcal{S} \subseteq \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \dots \times \mathbf{a}_n.$$

В действительности, соотношение левой и правой частей этого включения оказывает огромное влияние на интервальное оценивание результатов различных операций и отображений.

**Определение 1.3.2** Интервальные величины  $[a_1, \mathbf{a}_1], [a_2, \mathbf{a}_2], \dots, [a_n, \mathbf{a}_n]$  назовём независимыми (несвязанными), если совместная область значений этих величин совпадает с прямым декартовым произведением  $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \dots \times \mathbf{a}_n$  интервалов их изменения. Если совместная область значений интервальных величин не совпадает с прямым декартовым произведением интервалов их изменения, то интервальные величины называются зависимыми или связанными.

Определение 1.3.2 для двух интервальных величин  $[x_1, \mathbf{x}_1]$  и  $[x_2, \mathbf{x}_2]$  можно пояснить следующим образом. Их независимость означает, что никакая из переменных  $x_1$  и  $x_2$  не оказывает влияние на изменение другой переменной в пределах своего интервала. Тогда при любых значениях  $x_2$  интервал изменения  $x_1$  равен  $\mathbf{x}_1$  (левый рисунок на Рис. 1.2), а при любых значениях  $x_1$  интервал изменения  $x_2$  равен  $\mathbf{x}_2$

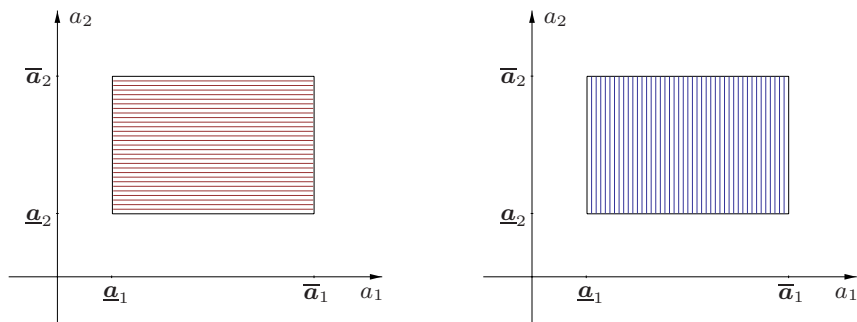


Рис. 1.2. Пояснение к определению независимых и связанных интервальных величин.

(правый рисунок на Рис. 1.2). В целом, в обоих случаях совместная область значений переменных  $x_1$  и  $x_2$ , т. е. пары  $(x_1, x_2)$ , совпадает с декартовым произведением  $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2$ .

Удобно говорить также, что на рассматриваемые интервальные величины  $[a_1, \mathbf{a}_1]$ ,  $[a_2, \mathbf{a}_2]$ ,  $\dots$ ,  $[a_n, \mathbf{a}_n]$  *наложены связи*, если имеются в виду какие-то соотношения для  $a_1, a_2, \dots, a_n$  в виде равенств, неравенств и т. п. условий, которые ограничивают область их совместных значений. Конкретный вид зависимости (связанности) интервальных величин удобно представлять наглядно графически на чертеже, изображающем совместное множество значений этих величин на фоне декартова произведения  $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \dots \times \mathbf{a}_n$ . Мы будем называть такие чертежи *диаграммами зависимости* (диаграммами связанности).

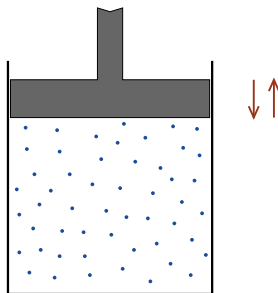


Рис. 1.3. Газ в цилиндре под подвижным поршнем: его объём и давление, изменяющиеся в каких-то пределах — связанные интервальные величины.

**Пример 1.3.1** Рассмотрим поведение массы  $M$  идеального газа, имеющего молярную массу  $\mu$  и находящегося в сосуде переменного объёма (например, в цилиндре с поршнем). Напомним, что все реальные газы при достаточно высокой температуре и не слишком большой плотности могут считаться идеальными. В силу известного

уравнения Клапейрона-Менделеева [43]

$$pV = \frac{M}{\mu}RT, \quad (1.13)$$

где  $p$  — давление газа,  $V$  — его объём,  $T$  — абсолютная температура, а  $R$  — константа, называемая универсальной газовой постоянной. Пусть объём газа изменяется от  $\underline{V}$  до  $\overline{V}$ ,  $\underline{V} < \overline{V}$ , т. е. в интервале  $[\underline{V}, \overline{V}]$ . При этом его давление также изменяется, и при неизменной температуре  $T$  интервал  $[\underline{p}, \overline{p}]$  изменения давления может быть найден из соотношений

$$\underline{p} = \frac{MRT}{\mu \overline{V}}, \quad \overline{p} = \frac{MRT}{\mu \underline{V}}.$$

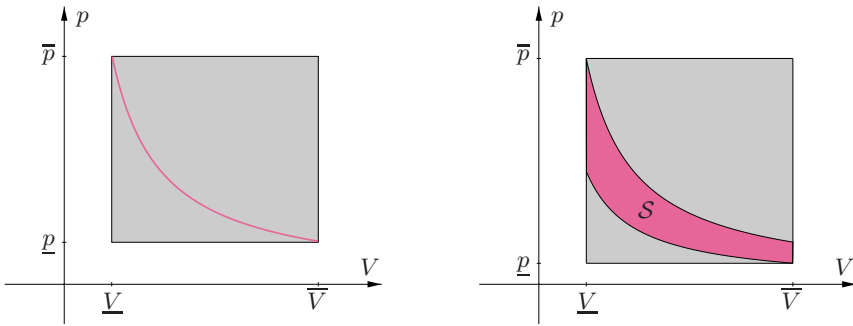


Рис. 1.4. Диаграммы связанности для интервальных величин объёма  $V \in \mathbf{V}$  и давления  $p \in \mathbf{p}$  газа в случае изотермического (слева) и неизотермического (справа) процессов.

Если процесс неизотермичен, т. е. температура газа не остаётся постоянной, изменяясь в интервале  $[\underline{T}, \overline{T}]$ , то приведённые выше формулы для концов интервала давления незначительно усложнятся

$$\underline{p} = \frac{MR\underline{T}}{\mu \overline{V}}, \quad \overline{p} = \frac{MR\overline{T}}{\mu \underline{V}}.$$

Итак, если объём газа  $V$  варьируется в пределах  $[\underline{V}, \overline{V}]$ , а его температура  $T$  — в пределах  $[\underline{T}, \overline{T}]$ , то давление газа изменяется в интервале  $[\underline{p}, \overline{p}]$ , но множество совместных значений переменных  $V$  и  $p$  — упорядоченных пар  $(\overline{V}, p)$  — «замечает» подмножество  $\mathcal{S}$  прямоугольника  $[\underline{V}, \overline{V}] \times [\underline{p}, \overline{p}]$ , закрашенное более тёмным тоном на правом чертеже Рис. 1.4. Он и является диаграммой связанности интервальных величин  $V \in [\underline{V}, \overline{V}]$  и  $p \in [\underline{p}, \overline{p}]$ . ■

Если интервальные величины  $a \in \mathbf{a}$  и  $b \in \mathbf{b}$  не являются независимыми, то при их сложении, вычитании и умножении двусторонние неравенства (1.7), (1.8) и (1.9) могут уже не быть точными. Соответственно, формулы для интервальных арифметических операций (1.3)–(1.6) будут давать при этом лишь огрублённую внешнюю оценку истинной области значений результата операции.



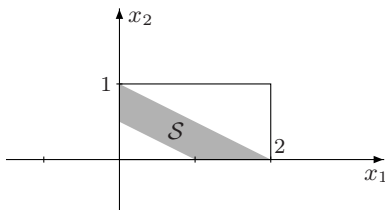


Рис. 1.5. Диаграммы связанности для интервальных величин, связанных соотношением (1.14).

**Пример 1.3.2** Для связанных интервальных величин  $x_1 \in [0, 2]$  и  $x_2 \in [0, 1]$ , изменяющихся так, что имеет место неравенство

$$1 \leq x_1 + 2x_2 \leq 2, \quad (1.14)$$

диаграмма зависимости изображена на Рис. 1.5. Тогда точная область значений разности есть

$$\{x_1 - x_2 \mid x_1 \in [0, 2], x_2 \in [0, 1], (x_1, x_2) \in \mathcal{S}\} = [-1, 2] = [0, 2] - [0, 1],$$

где  $\mathcal{S}$  — совместная область значений величин  $x_1 \in [0, 2]$  и  $x_2 \in [0, 1]$ . Получается, что область значений результатов вычитания совпадает с разностью интервалов по формуле (1.4). В то же время,

$$\{x_1 + x_2 \mid x_1 \in [0, 2], x_2 \in [0, 1], (x_1, x_2) \in \mathcal{S}\} = [0.5, 2],$$

$$\{x_1 \cdot x_2 \mid x_1 \in [0, 2], x_2 \in [0, 1], (x_1, x_2) \in \mathcal{S}\} = [0, 0.5],$$

тогда как в соответствии с правилами (1.3) и (1.5) интервальной арифметики

$$[0, 2] + [0, 1] = [0, 3],$$

$$[0, 2] \cdot [0, 1] = [0, 2].$$

Видно, что множество результатов сложения и умножения связанных представителей интервалов  $[0, 2]$  и  $[0, 1]$  оказывается гораздо уже интервалов, полученных по формулам классической интервальной арифметики. ■

Связанность переменных является весьма распространённым явлением в окружающем нас мире, но классическая интервальная арифметика и некоторые другие элементарные инструменты интервального анализа приспособлены для обработки именно независимых величин. Этот их недостаток в задачах со связанными данными приходится компенсировать разнообразными способами. Одним из популярных инструментов для вычислений с множествами, который учитывает взаимные связи и зависимость величин, является так называемая аффинная арифметика [90]. В ней области совместных значений переменных операндов приближаются с помощью многогранников специального вида, и информация о них сохраняется и далее используется в процессе вычислений.

Помимо ситуации, рассмотренной в Примере 1.3.1, когда интервальные величины связаны в силу наличия каких-либо физических, механических, химических и пр. законов, ещё один важнейший источник зависимости (связанности) интервальных величин — их общее происхождение от других, но одних и тех же интервальных величин.

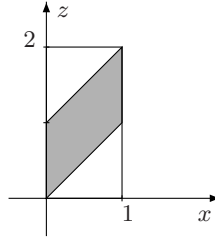


Рис. 1.6. Совместная область значений переменных и её суммы с другой переменной.

**Пример 1.3.3** Пусть  $x \in [0, 1]$  и  $y \in [0, 1]$  — независимые интервальные величины, а  $z = x + y$ . Тогда интервальная величина  $z \in [0, 2]$  является связанной как с  $x$ , так и с  $y$ .

В самом деле, хотя  $z$  может принимать любые значения из  $[0, 2]$ , совместная область значений переменных  $x$  и  $z$  (изображённая на Рис. 1.6) не заполняет всего бруса  $[0, 1] \times [0, 2]$ . ■

Ясно, что тот же самый вывод о связанности (зависимости) результата операции и его операндов мы сделали бы и в том случае, если бы в Примере 1.3.3 рассматривалась любая другая арифметическая операция — вычитание, умножение или деление. Возникновение связанности (зависимости друг от друга) промежуточных интервальных величин, получающихся при расчёте тех или иных выражений как следствие их общего происхождения от исходных переменных, мы будем называть *эффектом связанности* (зависимости). Он является одной из главных причин огрубления интервальных оценок областей значений выражений.

**Предложение 1.3.1** Если  $[x_1, \mathbf{x}_1]$ ,  $[x_2, \mathbf{x}_2]$ ,  $[x_3, \mathbf{x}_3]$  — независимые интервальные величины, то для любой арифметической операции  $\star \in \{+, -, \cdot, /\}$  интервальные величины  $[x_1 \star x_2, \mathbf{x}_1 \star \mathbf{x}_2]$  и  $[x_3, \mathbf{x}_3]$  также являются независимыми.

**Доказательство** очевидно.

Как следствие, если интервальные величины  $x_1 \in \mathbf{x}_1$ ,  $y_1 \in \mathbf{y}_1$ ,  $x_2 \in \mathbf{x}_2$  и  $y_2 \in \mathbf{y}_2$  независимы друг от друга, то для любых арифметических операций  $\star, \ast \in \{+, -, \cdot, /\}$  интервальные величины  $[z_1, \mathbf{x}_1 \star \mathbf{y}_1]$  и  $[z_2, \mathbf{x}_2 \ast \mathbf{y}_2]$ , такие что  $z_1 = x_1 \star y_1$  и  $z_2 = x_2 \ast y_2$ , также являются независимыми. Это соображение позволит анализировать уже более сложные выражения.

В дальнейшем всюду в книге по умолчанию будет считаться, что входные интервальные данные в рассматриваемых задачах независимы, а случаи связанности переменных будут оговариваться специально.

## 1.4 Основная теорема интервальной арифметики

Как правило, решение любой более или менее сложной практической задачи требует выполнения целых цепочек арифметических действий. Насколько полезными могут оказаться при этом введённые нами интервальные аналоги арифметических операций (1.3)–(1.6)? Можно ли комбинировать их друг с другом для оценивания областей значений выражений, составленных из многих операций?

Напомним, что функция  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  называется *рациональной*, если она задаётся аналитическим выражением, которое является конечной комбинацией переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и констант с четырьмя арифметическими операциями.

**Теорема 1.4.1** (основная теорема интервальной арифметики)

Пусть  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — рациональная функция вещественных аргументов  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и для неё определён результат  $\mathbf{f}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  подстановки вместо аргументов интервалов их изменения  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{IR}$  и выполнения всех действий над ними по правилам интервальной арифметики. Тогда

$$\{ f(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \in \mathbf{x}_1, x_2 \in \mathbf{x}_2, \dots, x_n \in \mathbf{x}_n \} \subseteq \mathbf{f}(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (1.15)$$

т. е.  $\mathbf{f}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  содержит множество значений функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  на  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Если выражение для  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  содержит не более чем по одному вхождению каждой переменной в первой степени, то в (1.15) вместо включения выполняется точное равенство.

**Пример 1.4.1** Для рациональной функции  $f(x, y) = xy - x + 3$  на области изменения переменных  $0 \leq x \leq 1$  и  $1 \leq y \leq 2$  применение основной теоремы интервальной арифметики даёт оценку области значений  $[0, 1] \cdot [1, 2] - [0, 1] + 3 = [2, 5]$ . Но если переписать выражение для оцениваемой функции в виде  $f(x, y) = x(y - 1) + 3$ , то тот же самый рецепт приводит к интервалу  $[0, 1] \cdot ([1, 2] - 1) + 3 = [3, 4]$ , в три раза более узкому. ■

Таким образом, при интервальном оценивании имеет смысл рассуждать не в терминах функций, а в терминах задающих их выражений, коль скоро различные выражения оказываются неэквивалентными. Если задана функция  $f$ , мы будем обозначать выражение для неё буквой того же имени и регистра, но другого (рубленного) шрифта —  $\mathbf{f}$ .

**Доказательство.** Прежде всего, отметим, что в условиях теоремы интервальная функция  $\mathbf{f}$  является монотонной по включению, так как этим свойством (1.12) обладают все операции, из которых  $\mathbf{f}$  сконструирована.

Возьмём какие-нибудь аргументы  $\tilde{x}_1 \in \mathbf{x}_1, \tilde{x}_2 \in \mathbf{x}_2, \dots, \tilde{x}_n \in \mathbf{x}_n$ . Из процедуры построения интервальной функции  $\mathbf{f}$  следует, что

$$f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) = \mathbf{f}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n).$$

Но в силу монотонности интервальной функции  $\mathbf{f}$  по включению

$$\mathbf{f}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) \subseteq \mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n).$$

По этой причине

$$\mathbf{f}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) \subseteq \mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n),$$

что справедливо для любых  $\tilde{x}_1 \in \mathbf{x}_1, \tilde{x}_2 \in \mathbf{x}_2, \dots, \tilde{x}_n \in \mathbf{x}_n$ . Это доказывает соотношение (1.15).

Для доказательства второго утверждения теоремы заметим, что если исходные интервальные величины  $x_1 \in \mathbf{x}_1, x_2 \in \mathbf{x}_2, \dots, x_n \in \mathbf{x}_n$  были независимы, то для любой бинарной операции, которая встретится при вычислении выражения, входные интервальные величины также будут независимыми в силу Предложения 1.3.1 и условия, наложенного на выражение для функции  $f$ . Тогда интервальные арифметические операции будут давать точные области значений всех действий, встречающихся при вычислении рассматриваемого выражения, в том числе и для окончательного результата. ■

## 1.5 Характеристики интервалов и их свойства

### 1.5а Абсолютные характеристики

Любой интервал полностью задаётся двумя числами — своими концами, но на практике повсеместно используются также другие способы задания интервалов и другие их характеристики. Важнейшими из них являются *середина* интервала (его центр)

$$\text{mid } \mathbf{a} = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{a}}),$$

и его *радиус*

$$\text{rad } \mathbf{a} = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{a}}).$$

Нередко вместо радиуса рассматривается эквивалентное понятие *ширины* интервала

$$\text{wid } \mathbf{a} = \bar{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{a}}.$$

Таким образом,  $\mathbf{a} = \text{mid } \mathbf{a} + [-1, 1] \cdot \text{rad } \mathbf{a}$ , что равносильно представлению

$$\mathbf{a} = \{ x \in \mathbb{R} \mid |x - \text{mid } \mathbf{a}| \leq \text{rad } \mathbf{a} \}. \quad (1.16)$$

Середина интервала — это его «наиболее типичный» элемент, который наименее удалён от всех точек интервала. Радиус и ширина характеризуют разброс (рассеяние) точек интервала, т. е. абсолютную меру неопределённости или неоднозначности, выражаемой этим интервалом.

Далее, весьма полезными оказываются абсолютное значение интервала — магнитуда, и его антипод — мигнитуда.

**Определение 1.5.1** Абсолютной величиной интервала  $\mathbf{a}$  (называемой также модулем или магнитудой интервала) называется наибольшее из абсолютных значений точек интервала  $\mathbf{a}$ , т. е. величина

$$|\mathbf{a}| := \max\{ |a| \mid a \in \mathbf{a} \} = \max\{ |\underline{\mathbf{a}}|, |\bar{\mathbf{a}}| \}.$$

**Определение 1.5.2** Мигнитудой интервала  $\mathbf{a}$  назовём наименьшее из абсолютных значений точек интервала  $\mathbf{a}$  — величину

$$\langle \mathbf{a} \rangle := \min\{|a| \mid a \in \mathbf{a}\} = \begin{cases} \min\{|\underline{\mathbf{a}}|, |\underline{\mathbf{a}}|\}, & \text{если } 0 \notin \mathbf{a}, \\ 0, & \text{если } 0 \in \mathbf{a}. \end{cases}$$

Для абсолютной величины интервала можно дать удобное альтернативное представление в виде

$$|\mathbf{a}| = \max\{-\underline{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}\}. \quad (1.17)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}| &= \max\{|\underline{\mathbf{a}}|, |\bar{\mathbf{a}}|\} = \max\{\max\{-\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{a}}\}, \max\{-\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}\}\} \\ &= \max\{-\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{a}}, -\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}\} = \max\{-\underline{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}\}, \end{aligned}$$

поскольку  $\underline{\mathbf{a}} \leq \bar{\mathbf{a}}$ . Аналогично, нетрудно показать, что

$$\langle \mathbf{a} \rangle = \max\{0, \underline{\mathbf{a}}, -\bar{\mathbf{a}}\}.$$

**Определение 1.5.3** Интервал  $\mathbf{a}$  называется уравновешенным, если он симметричен относительно нуля, т. е. если  $\underline{\mathbf{a}} = -\bar{\mathbf{a}}$  или, что равносильно,  $\text{mid } \mathbf{a} = 0$ .

Среди интервалов с заданным абсолютным значением уравновешенный интервал — наиболее широкий. И наоборот, среди интервалов фиксированной ширины уравновешенный интервал имеет наименьшее абсолютное значение (модуль).

Нередко востребованной бывает не абсолютная величина интервала, а просто значение его наиболее уклоняющейся от нуля точки. Именно, *отклонением* интервала  $\mathbf{a}$  называют величину

$$\text{dev } \mathbf{a} := \begin{cases} \underline{\mathbf{a}}, & \text{если } |\underline{\mathbf{a}}| \geq |\bar{\mathbf{a}}|, \\ \bar{\mathbf{a}}, & \text{иначе,} \end{cases}$$

т. е. наиболее удалённую от нуля точку интервала  $\mathbf{a}$ . Ясно, что  $|\mathbf{a}| = |\text{dev } \mathbf{a}|$ . Для уравновешенных интервалов отклонение определяется неоднозначно: если  $\mathbf{a} = -\mathbf{a}$ , то можно считать, что  $\text{dev } \mathbf{a} = \underline{\mathbf{a}}$  или  $\text{dev } \mathbf{a} = \bar{\mathbf{a}}$ .

Помимо упорядочения интервалов по включению (1.11) большую роль играют также бинарные отношения на множестве интервалов, которые продолжают и обобщают линейный порядок « $\leq$ » между числами на вещественной оси. Вообще говоря, это распространение может быть выполнено неединственным образом, так что существует много различных отношений на  $\mathbb{IR}$ , обобщающих порядок « $\leq$ » на  $\mathbb{R}$ . Некоторые из них не являются частичными порядками на  $\mathbb{IR}$ , но всего лишь квазипорядками, называемыми также «предпорядками»; см. [4]. Каким из них пользоваться в конкретной ситуации — зависит от задачи и требуемого ею смысла сравнения интервалов.

Пожалуй, наиболее популярным частичным порядком на множестве интервалов  $\mathbb{IR}$ , который естественно обобщает отношение « $\leq$ » между вещественными числами, является прямое произведение этих порядков « $\leq$ ». Обозначать его мы будем тем же символом.

**Определение 1.5.4** Для интервалов  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}$  условимся считать, что  $\mathbf{a}$  не превосходит  $\mathbf{b}$  и писать « $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ » тогда и только тогда, когда  $\underline{\mathbf{a}} \leq \underline{\mathbf{b}}$  и  $\overline{\mathbf{a}} \leq \overline{\mathbf{b}}$ .

**Определение 1.5.5** Интервал  $\mathbf{a}$  называется неотрицательным, т. е.  $\mathbf{a} \geq 0$ , если неотрицательны оба его конца. Интервал  $\mathbf{a}$  называется неположительным, т. е.  $\mathbf{a} \leq 0$ , если неположительны оба его конца.

Полезно также понятие знака интервала, который мы определяем как

$$\operatorname{sgn} \mathbf{a} = \begin{cases} +, & \text{если } \mathbf{a} \geq 0, \\ -, & \text{если } \mathbf{a} \leq 0, \\ \text{не определён,} & \text{если } \underline{\mathbf{a}} < 0 < \overline{\mathbf{a}}. \end{cases}$$

Нулю, т. е. нулевому интервалу  $[0, 0]$ , может быть приписан любой знак.

Каким образом преобразуются введённые выше характеристики интервалов при арифметических операциях и как они связаны с различными отношениями порядка на  $\mathbb{R}$ ?

**Предложение 1.5.1** (свойства абсолютной величины и мигнитуды)

$$\mathbf{a} \subseteq \mathbf{b} \Rightarrow |\mathbf{a}| \leq |\mathbf{b}| \text{ и } \langle \mathbf{a} \rangle \geq \langle \mathbf{b} \rangle, \quad (1.18)$$

$$|\mathbf{a}| - \langle \mathbf{b} \rangle \leq |\mathbf{a} \pm \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|, \quad (1.19)$$

$$\langle \mathbf{a} \rangle - |\mathbf{b}| \leq \langle \mathbf{a} \pm \mathbf{b} \rangle \leq \langle \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{b} \rangle, \quad (1.20)$$

$$|\mathbf{a}\mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|, \quad \langle \mathbf{a}\mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{b} \rangle, \quad (1.21)$$

$$|\mathbf{a}/\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|/\langle \mathbf{b} \rangle, \quad \langle \mathbf{a}/\mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a} \rangle/|\mathbf{b}|, \quad \text{если } 0 \notin \mathbf{b}, \quad (1.22)$$

$$\left| \frac{1}{\mathbf{a}} \right| = \langle \mathbf{a} \rangle^{-1}, \quad \text{если } 0 \notin \mathbf{a}. \quad (1.23)$$

**Доказательство.** Для обоснования (1.18) достаточно заметить, что

$$|\mathbf{a}| = \max_{t \in \mathbf{a}} |t| \leq \max_{t \in \mathbf{b}} |t| = |\mathbf{b}| \quad \text{и} \quad \langle \mathbf{a} \rangle = \min_{t \in \mathbf{a}} |t| \geq \min_{t \in \mathbf{b}} |t| = \langle \mathbf{b} \rangle,$$

если  $\mathbf{a} \subseteq \mathbf{b}$ .

Чтобы доказать (1.19), напомним, что  $|a| - |b| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$  для любых  $a, b \in \mathbb{R}$ . Поэтому

$$|\mathbf{a} \pm \mathbf{b}| = \max_{\substack{a \in \mathbf{a} \\ b \in \mathbf{b}}} |a \pm b| \leq \max_{\substack{a \in \mathbf{a} \\ b \in \mathbf{b}}} (|a| + |b|) = \max_{a \in \mathbf{a}} |a| + \max_{b \in \mathbf{b}} |b| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|,$$

$$|\mathbf{a}| - \langle \mathbf{b} \rangle = \max_{a \in \mathbf{a}} |a| - \min_{b \in \mathbf{b}} |b| = \max_{\substack{a \in \mathbf{a} \\ b \in \mathbf{b}}} (|a| - |b|) \leq \max_{a \in \mathbf{a}} |a \pm b| = |\mathbf{a} \pm \mathbf{b}|.$$

Неравенства (1.20) доказываются следующим образом:

$$\langle \mathbf{a} \pm \mathbf{b} \rangle = \min_{\substack{a \in \mathbf{a} \\ b \in \mathbf{b}}} |a \pm b| \geq \min_{\substack{a \in \mathbf{a} \\ b \in \mathbf{b}}} (|a| - |b|) = \min_{a \in \mathbf{a}} |a| - \max_{b \in \mathbf{b}} |b| = \langle \mathbf{a} \rangle - |\mathbf{b}|,$$

$$\langle \mathbf{a} \pm \mathbf{b} \rangle = \min_{\substack{a \in \mathbf{a} \\ b \in \mathbf{b}}} |a \pm b| \leq \min_{\substack{a \in \mathbf{a} \\ b \in \mathbf{b}}} (|a| + |b|) = \min_{a \in \mathbf{a}} |a| + \min_{b \in \mathbf{b}} |b| = \langle \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{b} \rangle.$$

Отметим, что в выписанных выше цепочках оценок завершающие равенства возможны лишь для независимых  $a \in \mathbf{a}$  и  $b \in \mathbf{b}$ .

Из независимости интервальных величин  $a \in \mathbf{a}$  и  $b \in \mathbf{b}$  вытекают также равенства

$$|\mathbf{ab}| = \max_{\substack{a \in \mathbf{a} \\ b \in \mathbf{b}}} |ab| = \max_{\substack{a \in \mathbf{a} \\ b \in \mathbf{b}}} (|a| |b|) = \max_{a \in \mathbf{a}} |a| \cdot \max_{b \in \mathbf{b}} |b| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|,$$

$$|\mathbf{a/b}| = \max_{\substack{a \in \mathbf{a} \\ b \in \mathbf{b}}} |a/b| = \max_{\substack{a \in \mathbf{a} \\ b \in \mathbf{b}}} (|a|/|b|) = \max_{a \in \mathbf{a}} |a| / \min_{b \in \mathbf{b}} |b| = |\mathbf{a}| / \langle \mathbf{b} \rangle,$$

обосновывающие первые из свойств (1.21) и (1.22). Доказательство вторых совершенно аналогично и получается заменой  $\max$  на  $\min$  и  $\min$  на  $\max$ .

Наконец, доказательство для (1.23) получается непосредственно из определений магнитуды, мигнитуды и деления на интервал, не содержащий нуля. ■

**Предложение 1.5.2** (свойства середины)

$$\text{mid}(\mathbf{a} \pm \mathbf{b}) = \text{mid} \mathbf{a} \pm \text{mid} \mathbf{b}, \quad (1.24)$$

$$\text{mid}(\mathbf{ab}) = a \cdot \text{mid} \mathbf{b}, \quad \text{если } a \in \mathbb{R}. \quad (1.25)$$

**Доказательство** легко выводится из формул (1.3)–(1.4) для сложения и вычитания интервалов, а также из формулы (1.10) для умножения числа на интервал. ■

**Предложение 1.5.3** (свойства радиуса)

$$\mathbf{a} \subseteq \mathbf{b} \Rightarrow \text{rad} \mathbf{a} \leq \text{rad} \mathbf{b}, \quad (1.26)$$

$$\text{rad}(\mathbf{a} \pm \mathbf{b}) = \text{rad} \mathbf{a} + \text{rad} \mathbf{b}, \quad (1.27)$$

$$\text{rad}(\mathbf{ab}) = |a| \cdot \text{rad} \mathbf{b}, \quad \text{если } a \in \mathbb{R}, \quad (1.28)$$

$$\max\{|a| \cdot \text{rad} \mathbf{b}, \text{rad} \mathbf{a} \cdot |b|\} \leq \text{rad}(\mathbf{ab}) \leq |a| \cdot \text{rad} \mathbf{b} + \text{rad} \mathbf{a} \cdot |b|, \quad (1.29)$$

$$\text{rad}\left(\frac{1}{\mathbf{a}}\right) = \frac{\text{rad} \mathbf{a}}{\langle \mathbf{a} \rangle |a|}, \quad \text{если } 0 \notin \mathbf{a}. \quad (1.30)$$

**Доказательство.** Для (1.26) оно очевидно: коль скоро  $\mathbf{a} \subseteq \mathbf{b}$ , то

$$\bar{\mathbf{a}} \leq \bar{\mathbf{b}} \quad \text{и} \quad \underline{\mathbf{a}} \geq \underline{\mathbf{b}},$$

и потому

$$\text{rad} \mathbf{a} = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{a}}) \leq \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{b}} - \underline{\mathbf{b}}) = \text{rad} \mathbf{b}.$$

Обоснование (1.27) легко выводится из определений радиуса, сложения и вычитания интервалов. В частности, для сложения имеем

$$\begin{aligned} \text{rad}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \frac{1}{2}(\overline{\mathbf{a} + \mathbf{b}} - \underline{\mathbf{a} + \mathbf{b}}) = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}} - \underline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}}) \\ &= \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{a}}) + \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{b}} - \underline{\mathbf{b}}) = \text{rad} \mathbf{a} + \text{rad} \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Для доказательства (1.28) вспомним правило (1.10) для умножения интервала на вещественное число:

$$a\mathbf{b} = \begin{cases} [\underline{a}\mathbf{b}, a\bar{\mathbf{b}}] & \text{при } a \geq 0, \\ [a\bar{\mathbf{b}}, \underline{a}\mathbf{b}] & \text{при } a < 0. \end{cases}$$

Радиус интервала равен половине модуля разности его концов, и поэтому при любом знаке числа  $a$  справедливо

$$\text{rad}(a\mathbf{b}) = \frac{1}{2}|a\underline{\mathbf{b}} - a\bar{\mathbf{b}}| = \frac{1}{2}|a(\underline{\mathbf{b}} - \bar{\mathbf{b}})| = |a| \cdot \frac{1}{2}|\underline{\mathbf{b}} - \bar{\mathbf{b}}| = |a| \cdot \text{rad } \mathbf{b}.$$

Чтобы доказать левое неравенство в (1.29), предположим, что  $|\mathbf{a}| = |\tilde{\mathbf{a}}|$  для некоторой точки  $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbf{a}$  (ясно, что  $\tilde{\mathbf{a}}$  — один из концов интервала  $\mathbf{a}$ , но для нашего доказательства это даже не важно). Тогда  $\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{b} \subseteq a\mathbf{b}$ , а потому  $\text{rad}(\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{b}) \leq \text{rad}(a\mathbf{b})$  в силу (1.26). В свою очередь,  $\text{rad}(\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{b}) = |\tilde{\mathbf{a}}| \cdot \text{rad } \mathbf{b}$  согласно свойству (1.28). В итоге получаем  $|\mathbf{a}| \cdot \text{rad } \mathbf{b} \leq \text{rad}(a\mathbf{b})$ .

Совершенно аналогично устанавливается неравенство  $\text{rad } \mathbf{a} \cdot |\mathbf{b}| \leq \text{rad}(a\mathbf{b})$ , и оно совместно с полученным ранее доказывает оценку снизу в (1.29).

Пусть теперь  $\bar{a}\mathbf{b} = a'b'$  и  $\underline{a}\mathbf{b} = a''b''$  для каких-то концов  $a'$ ,  $a''$  интервала  $\mathbf{a}$  и каких-то концов  $b'$ ,  $b''$  интервала  $\mathbf{b}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \text{rad}(a\mathbf{b}) &= \frac{1}{2}(a'b' - a''b'') = \frac{1}{2}(a'b' - a'b'' + a'b'' - a''b'') \\ &= \frac{1}{2}a'(b' - b'') + \frac{1}{2}(a' - a'')b'', \end{aligned}$$

и потому

$$\text{rad}(a\mathbf{b}) \leq |a'| \frac{1}{2}|b' - b''| + \frac{1}{2}|a' - a''||b''| \leq |a| \cdot \text{rad } \mathbf{b} + \text{rad } \mathbf{a} \cdot |\mathbf{b}|,$$

что и требовалось. ■

Свойства, аналогичные (1.26)–(1.30), выполняются также для ширины, но ввиду очевидности мы не приводим их отдельной формулировки и обоснования.

Как видим, радиусы (ширины) интервалов при сложении и вычитании могут только складываться, и потому противоположного (обратного по сложению) элемента для невырожденных интервалов в  $\mathbb{IR}$  не существует. Аналогично, при умножении невырожденного интервала на ненулевой интервал радиус произведения, как следует из (1.29), никогда не может сделаться нулевым. Поэтому невырожденные интервалы не могут иметь обратных в  $\mathbb{IR}$ . Вместо полноценной обратимости интервальных арифметических операций имеют место более слабые «свойства сокращения»

$$\mathbf{a} + \mathbf{c} = \mathbf{b} + \mathbf{c} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} = \mathbf{b}, \quad (1.31)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}, \quad 0 \notin \mathbf{a}, \quad 0 \notin \mathbf{b}, \quad 0 \notin \mathbf{c} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} = \mathbf{b}. \quad (1.32)$$

Для радиуса произведения вместо верхней оценки в (1.29), в действительности, имеют место более тонкие свойства

$$\text{rad}(a\mathbf{b}) \leq |a| \cdot \text{rad } \mathbf{b} + \text{rad } \mathbf{a} \cdot |\text{mid } \mathbf{b}|, \quad (1.33)$$

$$\text{rad}(a\mathbf{b}) \leq \text{rad } \mathbf{a} \cdot |\mathbf{b}| + |\text{mid } \mathbf{a}| \cdot \text{rad } \mathbf{b}. \quad (1.34)$$



Их обоснование можно найти в книге [80].

Возведение интервала в целочисленную степень определим стандартным образом:

$$\mathbf{a}^n = \underbrace{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \cdot \dots \cdot \mathbf{a}}_{n \text{ раз}}$$

**Предложение 1.5.4** Для любого интервала  $\mathbf{a} \in \mathbb{IR}$

$$\text{rad}(\mathbf{a}^n) \leq n |\mathbf{a}|^{n-1} \text{rad} \mathbf{a}. \quad (1.35)$$

Если  $0 \in \mathbf{a}$ , то

$$\text{rad}(\mathbf{a}^n) = |\mathbf{a}|^{n-1} \text{rad} \mathbf{a}. \quad (1.36)$$

**Доказательство.** Неравенство (1.35) докажем индукцией по степени  $n$ . Замечая его очевидность при  $n = 1$ , предположим, что оно уже справедливо при некотором натуральном  $n$ . Тогда для оценки радиуса  $\mathbf{a}^{n+1}$  можно применить правое неравенство из (1.29), получая

$$\begin{aligned} \text{rad}(\mathbf{a}^{n+1}) &= \text{rad}(\mathbf{a}^n \mathbf{a}) \\ &\leq |\mathbf{a}^n| \cdot \text{rad} \mathbf{a} + \text{rad}(\mathbf{a}^n) \cdot |\mathbf{a}| \\ &\leq |\mathbf{a}^n| \cdot \text{rad} \mathbf{a} + n |\mathbf{a}|^{n-1} \text{rad} \mathbf{a} \cdot |\mathbf{a}| \\ &\leq (n+1) |\mathbf{a}|^n \cdot \text{rad} \mathbf{a}, \end{aligned}$$

т. е. доказываемое соотношение (1.35) для степени  $(n+1)$ . Следовательно, (1.35) действительно верно при любых степенях  $n$ .

При доказательстве равенства (1.36) предположим сначала для определённости, что  $\text{mid} \mathbf{a} \geq 0$ , т. е.  $|\mathbf{a}| = \bar{\mathbf{a}} \geq 0$ . Покажем, что тогда в условиях Предложения

$$\mathbf{a}^n = |\mathbf{a}|^{n-1} \cdot \mathbf{a}. \quad (1.37)$$

Для  $n = 1$  это соотношение очевидно. При  $n = 2$  по формулам умножения нуль-содержащих интервалов из Табл. 1.1 имеем

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{a}\mathbf{a} = [\underline{\mathbf{a}}\bar{\mathbf{a}}, \max\{\underline{\mathbf{a}}^2, \bar{\mathbf{a}}^2\}] = [\underline{\mathbf{a}}\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}^2] = \bar{\mathbf{a}} \cdot [\underline{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}] = |\mathbf{a}| \mathbf{a}.$$

Далее, если  $\mathbf{a}^n = |\mathbf{a}|^{n-1} \cdot \mathbf{a}$  для некоторого натурального  $n$ , то

$$\mathbf{a}^{n+1} = \mathbf{a}^n \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^{n-1} \cdot \mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^{n-1} \cdot |\mathbf{a}| \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^n \mathbf{a},$$

так что в силу принципа математической индукции равенство выполняется для любых  $n$ . Беря радиус от обеих частей равенства (1.37), получаем (1.36).

В случае, когда  $\text{mid} \mathbf{a} < 0$ , интервал  $(-\mathbf{a})$  обладает свойством  $\text{mid}(-\mathbf{a}) > 0$ . Кроме того,  $|-\mathbf{a}| = |\mathbf{a}|$ ,  $\text{rad}(-\mathbf{a}) = \text{rad} \mathbf{a}$  и

$$\text{rad}((-\mathbf{a})^n) = \text{rad}((-1)^n \mathbf{a}^n) = \text{rad}(\pm \mathbf{a}^n) = \text{rad}(\mathbf{a}^n),$$

что завершает доказательство (1.36). ■

### 1.5б Относительные характеристики

Радиус и ширина интервала характеризуют абсолютный размер интервальной неопределённости, но иногда бывает полезно иметь меру относительного размаха интервала. Ясно, к примеру, что хотя интервалы  $[1, 2]$  и  $[1001, 1002]$  имеют одинаковую ширину, но первый из них соответствует неопределённости с разбросом значений в 2 раза, т. е. 100%, тогда как второй — менее чем в 1.001 раза, т. е. 0.1%.

Естественно было бы взять для описания относительной неопределённости, выражаемой интервалом  $\mathbf{a}$ , что-нибудь вроде отношения  $\overline{\mathbf{a}}/\underline{\mathbf{a}}$ , но эта конструкция годится лишь для интервалов, не содержащих нуля. Часто для этой же цели используется отношение

$$\frac{\text{wid } \mathbf{a}}{|\text{mid } \mathbf{a}|}.$$

Оно работает лучше, но всё-таки не вполне адекватно в применении к широким интервалам, середина которых близка к нулю.

Х. Рачек в [85] пошёл альтернативным путём, рассматривая не относительную ширину, а противоположную ей по смыслу относительную «узость» (меру сосредоточенности) ненулевых интервалов, и предложил для её описания функционал

$$\chi(\mathbf{a}) := \begin{cases} \underline{\mathbf{a}}/\overline{\mathbf{a}}, & \text{если } |\underline{\mathbf{a}}| \leq |\overline{\mathbf{a}}|, \\ \overline{\mathbf{a}}/\underline{\mathbf{a}}, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1.38)$$

Для нулевых интервалов функционал  $\chi$  не определён. Ясно, что

$$-1 \leq \chi(\mathbf{a}) \leq 1,$$

и  $\chi(\mathbf{a}) = 1$  тогда и только тогда, когда  $0 \neq \mathbf{a} \in \mathbb{R}$ . Значение  $-1$  функционал  $\chi$  принимает на уравновешенных интервалах вида  $[-a, a]$ ,  $a > 0$ , симметричных относительно нуля.

**Определение 1.5.6** Для ненулевого интервала  $\mathbf{a}$  относительным интервалом будем называть интервал  $[\chi(\mathbf{a}), 1]$ . Ширину относительного интервала, т. е. величину  $1 - \chi(\mathbf{a})$ , назовём относительной шириной интервала  $\mathbf{a}$ .

В силу определений (1.5а) и (1.38) всякий ненулевой интервал  $\mathbf{a}$  можно представить в виде произведения отклонения на относительный интервал, т. е. в виде

$$\mathbf{a} = \text{dev } \mathbf{a} \cdot [\chi(\mathbf{a}), 1]. \quad (1.39)$$

Из этого представления очевидно, что для интервала и для его относительного интервала одинаково решаются вопросы о том, содержат ли они нуль, является ли нуль внутренней точкой интервала, а если является, то в каком соотношении (при  $\text{dev } \mathbf{a} < 0$  с точностью до обращения) нуль делит интервал. Но относительные интервалы, в силу своего специального вида, гораздо удобнее для анализа.

**Предложение 1.5.5** Всякий ненулевой интервал можно представить в виде произведения вещественного числа на интервал вида  $[x, 1]$ , где  $-1 \leq x \leq 1$ . Для неуравновешенных интервалов такое представление единственно, а для уравновешенных — единственно с точностью до знака вещественного числа.

**Доказательство.** В качестве представления ненулевого интервала  $\mathbf{a}$  в виде произведения вещественного числа на интервал  $[x, 1]$ , как уже отмечалось, можно выбрать

$$\mathbf{a} = \text{dev } \mathbf{a} \cdot [\chi(\mathbf{a}), 1].$$

Предположим, что существует другое представление  $\mathbf{a} = \mu \cdot [x, 1]$  с некоторыми  $\mu, x \in \mathbb{R}$ . Тогда

$$\text{dev } \mathbf{a} \cdot [\chi(\mathbf{a}), 1] = \mu \cdot [x, 1]. \quad (1.40)$$

Поскольку два интервала равны, если совпадают их концы, то в силу (1.10) равенство (1.40) означает, что имеет место по крайней мере одна из систем соотношений

$$\begin{cases} \text{dev } \mathbf{a} = \mu, \\ \text{dev } \mathbf{a} \cdot \chi(\mathbf{a}) = \mu x \end{cases} \quad (\text{при } \text{dev } \mathbf{a} \cdot \mu \geq 0)$$

или

$$\begin{cases} \text{dev } \mathbf{a} \cdot \chi(\mathbf{a}) = \mu, \\ \text{dev } \mathbf{a} = \mu x \end{cases} \quad (\text{при } \text{dev } \mathbf{a} \cdot \mu \leq 0).$$

Так как по условию  $\mathbf{a} \neq [0, 0]$ , то  $\text{dev } \mathbf{a} \neq 0$ ,  $\mu \neq 0$ . Следовательно,

$$\begin{cases} \text{dev } \mathbf{a} = \mu, \\ \chi(\mathbf{a}) = x \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \chi(\mathbf{a}) = \mu / \text{dev } \mathbf{a} < 0, \\ 1 = \chi(\mathbf{a}) x. \end{cases}$$

Но  $|\chi|$  и  $|x|$  не больше 1, поэтому окончательно имеем

$$\begin{cases} \text{dev } (\mathbf{a}) = \mu, \\ \chi(\mathbf{a}) = x \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \chi(\mathbf{a}) = x = -1, \\ \mu = -\text{dev } \mathbf{a}. \end{cases}$$

Это и означает, что при  $\chi(\mathbf{a}) \neq -1$  (что соответствует неуравновешенному интервалу  $\mathbf{a}$ ) оба представления интервала совпадают, а при  $\chi(\mathbf{a}) = -1$  интервал  $\mathbf{a}$  уравновешен и допускает ещё представление  $\mathbf{a} = -\text{dev } \mathbf{a} \cdot [\chi(\mathbf{a}), 1]$ . ■

Представление (1.39) полезно при работе с произведениями интервалов, поскольку оно разбивает умножение интервалов на умножение отклонений и умножение относительных интервалов и тем самым даёт возможность работать отдельно с некоторой вещественной характеристикой интервалов (отклонением) и относительным интервалом, простым для умножения. Далее это представление используется при выводе формулы (1.44) для  $\chi(\mathbf{ab})$ .

**Предложение 1.5.6** *Ширина ненулевого интервала  $\mathbf{a}$  равна произведению его модуля на относительную ширину, т. е.*

$$\text{wid } \mathbf{a} = |\mathbf{a}|(1 - \chi(\mathbf{a})). \quad (1.41)$$

Это свойство, в частности, оправдывает название функционала  $\chi$  как *относительной узости* интервала.

**Доказательство.** Беря ширину от обеих частей представления (1.39), получим

$$\text{wid } \mathbf{a} = \text{wid}(\text{dev } \mathbf{a} \cdot [\chi(\mathbf{a}), 1]) = |\text{dev } \mathbf{a}| \cdot \text{wid}[\chi(\mathbf{a}), 1] = |\mathbf{a}|(1 - \chi(\mathbf{a})),$$

что и требовалось. ■

Прежде чем сформулировать основные свойства функционала  $\chi$ , введём

**Определение 1.5.7** Если для ненулевых интервалов  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{IR}$  имеет место

$$(\bar{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{a}}) \cdot (\bar{\mathbf{b}} + \underline{\mathbf{b}}) \geq 0,$$

то будем говорить, что интервалы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  одинаково расположены относительно нуля.

Этому свойству удобно придать следующий равносильный вид —

$$\text{mid } \mathbf{a} \cdot \text{mid } \mathbf{b} \geq 0,$$

объясняющий происхождение термина. Интервалы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  одинаково расположены относительно нуля в случае, когда их середины  $\text{mid } \mathbf{a}$  и  $\text{mid } \mathbf{b}$  имеют совпадающие знаки, т. е. когда с одной стороны от нуля расположены «основные части» этих интервалов.

**Предложение 1.5.7** Если  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}$  — ненулевые интервалы, то

$$\chi(\mathbf{a}) = \chi(\mathbf{b}) \iff \mathbf{a} = t\mathbf{b} \text{ и } 0 \neq t \in \mathbb{R}, \quad (1.42)$$

$$\chi(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \leq \max\{\chi(\mathbf{a}), \chi(\mathbf{b})\}, \quad (1.43)$$

$$\chi(\mathbf{ab}) = \min\{\chi(\mathbf{a}), \chi(\mathbf{b}), \chi(\mathbf{a})\chi(\mathbf{b})\}. \quad (1.44)$$

Если  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  одинаково расположены относительно нуля, то

$$\chi(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \geq \min\{\chi(\mathbf{a}), \chi(\mathbf{b})\}. \quad (1.45)$$

Если  $\mathbf{a} \supseteq \mathbf{b}$  и  $\chi(\mathbf{b}) \geq 0$ , то

$$\chi(\mathbf{a}) \leq \chi(\mathbf{b}). \quad (1.46)$$

**Доказательство.** Ясно, что если  $\mathbf{a} = t\mathbf{b}$  с  $t \neq 0$ , то  $\chi(\mathbf{a}) = \chi(\mathbf{b})$  по самому определению  $\chi$ . Обратное, если дано равенство  $\chi(\mathbf{a}) = \chi(\mathbf{b})$ , то можем положить

$$t := \text{dev } \mathbf{a} / \text{dev } \mathbf{b}.$$

Из Предложения 1.5.5 следует, что тогда в самом деле  $\mathbf{a} = t\mathbf{b}$ .

Для доказательства свойств (1.43) и (1.45) нам потребуется уточнение «неравенства треугольника» для модуля интервалов (1.19): модуль суммы интервалов равен сумме их модулей, если эти интервалы одинаково расположены относительно нуля, и строго меньше — иначе:

$$\begin{cases} |\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|, & \text{если } \text{mid } \mathbf{a} \cdot \text{mid } \mathbf{b} \geq 0, \\ |\mathbf{a} + \mathbf{b}| < |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1.47)$$

Действительно, в силу представления (1.17)

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} + \mathbf{b}| &= \max\{-\underline{(\mathbf{a} + \mathbf{b})}, \overline{\mathbf{a} + \mathbf{b}}\} = \max\{-\underline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}}\}, \\ |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| &= \max\{-\underline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{a}}\} + \max\{-\underline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{b}}\}. \end{aligned}$$

Поэтому  $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$ , причём равенство имеет место тогда и только тогда, когда

$$(-\underline{\mathbf{a}} \leq \overline{\mathbf{a}} \ \& \ -\underline{\mathbf{b}} \leq \overline{\mathbf{b}}) \quad \text{или} \quad (-\underline{\mathbf{a}} \geq \overline{\mathbf{a}} \ \& \ -\underline{\mathbf{b}} \geq \overline{\mathbf{b}}),$$

то есть когда выполнено требование  $(\overline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{a}})(\overline{\mathbf{b}} + \underline{\mathbf{b}}) \geq 0$ .

Подставим теперь (1.41), т. е. представление радиуса через модуль интервала и его относительную узость, в формулу (1.27) для радиуса суммы интервалов. Получим

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|(1 - \chi(\mathbf{a} + \mathbf{b})) = |\mathbf{a}|(1 - \chi(\mathbf{a})) + |\mathbf{b}|(1 - \chi(\mathbf{b})).$$

По условию  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  ненулевой, поэтому деление обеих частей на  $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \neq 0$  даёт

$$\chi(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 1 - \frac{|\mathbf{a}|(1 - \chi(\mathbf{a})) + |\mathbf{b}|(1 - \chi(\mathbf{b}))}{|\mathbf{a} + \mathbf{b}|}.$$

Наконец, преобразуя выражение в правой части этого равенства с учётом (1.47), получаем для ненулевых интервалов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  следующие формулы:

$$\begin{cases} \chi(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \frac{|\mathbf{a}|\chi(\mathbf{a}) + |\mathbf{b}|\chi(\mathbf{b})}{|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|}, & \text{если } \text{mid } \mathbf{a} \cdot \text{mid } \mathbf{b} \geq 0, \\ \chi(\mathbf{a} + \mathbf{b}) < \frac{|\mathbf{a}|\chi(\mathbf{a}) + |\mathbf{b}|\chi(\mathbf{b})}{|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|}, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1.48)$$

В силу положительности  $|\mathbf{a}|$  и  $|\mathbf{b}|$

$$|\mathbf{a}|\chi(\mathbf{a}) + |\mathbf{b}|\chi(\mathbf{b}) \leq (|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|) \cdot \max\{\chi(\mathbf{a}), \chi(\mathbf{b})\},$$

и потому для ненулевых интервалов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  из (1.48) следует справедливость неравенства (1.43):

$$\chi(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \leq \max\{\chi(\mathbf{a}), \chi(\mathbf{b})\},$$

— относительная узость суммы всегда не больше наибольшей из относительных узостей слагаемых. С другой стороны,

$$|\mathbf{a}|\chi(\mathbf{a}) + |\mathbf{b}|\chi(\mathbf{b}) \geq (|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|) \cdot \min\{\chi(\mathbf{a}), \chi(\mathbf{b})\},$$

и если ненулевые интервалы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  одинаково расположены относительно нуля, то в этом случае из первого соотношения (1.48) следует свойство (1.45):

$$\chi(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \geq \min\{\chi(\mathbf{a}), \chi(\mathbf{b})\} \quad \text{при } \text{mid } \mathbf{a} \cdot \text{mid } \mathbf{b} \geq 0,$$

— относительная узость суммы интервалов, одинаково расположенных относительно нуля, не меньше наименьшей из относительных узостей слагаемых.

Для доказательства неравенства (1.44) отметим, что если  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  — ненулевые интервалы, то  $\mathbf{ab}$  тоже ненулевой и

$$\begin{aligned}\mathbf{ab} &= (\text{dev } \mathbf{a} \cdot [\chi(\mathbf{a}), 1]) \cdot (\text{dev } \mathbf{b} \cdot [\chi(\mathbf{b}), 1]) = \text{dev } \mathbf{a} \cdot \text{dev } \mathbf{b} \cdot [\chi(\mathbf{a}), 1] \cdot [\chi(\mathbf{b}), 1] \\ &= \text{dev } \mathbf{a} \cdot \text{dev } \mathbf{b} \cdot [\min\{\chi(\mathbf{a}), \chi(\mathbf{b}), \chi(\mathbf{a})\chi(\mathbf{b}), 1\}, \max\{\chi(\mathbf{a}), \chi(\mathbf{b}), \chi(\mathbf{a})\chi(\mathbf{b}), 1\}] \\ &= \text{dev } \mathbf{a} \cdot \text{dev } \mathbf{b} \cdot [\min\{\chi(\mathbf{a}), \chi(\mathbf{b}), \chi(\mathbf{a})\chi(\mathbf{b})\}, 1],\end{aligned}$$

так как  $|\chi| \leq 1$ . Наконец, поскольку  $|\min\{\chi(\mathbf{a}), \chi(\mathbf{b}), \chi(\mathbf{a})\chi(\mathbf{b})\}| \leq 1$ , то в силу Предложения 1.5.5

$$\chi(\mathbf{ab}) = \min\{\chi(\mathbf{a}), \chi(\mathbf{b}), \chi(\mathbf{a})\chi(\mathbf{b})\},$$

что и требовалось.

Для обоснования свойства (1.46) отметим, что если  $\chi(\mathbf{b}) \geq 0$ , то либо  $\underline{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{b}} \geq 0$ , либо  $\underline{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{b}} \leq 0$ . Предположим для определённости, что имеет место первый случай, при котором  $\chi(\mathbf{b}) = \underline{\mathbf{b}}/\bar{\mathbf{b}}$ .

Если  $\mathbf{a} \supseteq \mathbf{b}$ , то справедливо

$$\underline{\mathbf{a}} \leq \underline{\mathbf{b}} \quad \text{и} \quad 0 \leq \bar{\mathbf{b}} \leq \bar{\mathbf{a}}, \quad (1.49)$$

и при  $\underline{\mathbf{a}} \leq 0$  мы будем иметь  $\chi(\mathbf{a}) \leq 0$ , так что доказываемое неравенство  $\chi(\mathbf{a}) \leq \chi(\mathbf{b})$  окажется заведомо выполненным. Рассмотрим поэтому ситуацию  $\underline{\mathbf{a}} > 0$ .

Тогда в силу (1.49) ясно, что

$$\chi(\mathbf{a}) = \underline{\mathbf{a}}/\bar{\mathbf{a}} \leq \underline{\mathbf{b}}/\bar{\mathbf{b}} = \chi(\mathbf{b}).$$

Случай  $\underline{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{b}} \leq 0$  разбирается совершенно аналогичным образом. ■

При доказательстве свойства (1.44) мы на самом деле показали, что относительный интервал произведения интервалов равен произведению их относительных интервалов; при умножении относительных интервалов верхний конец всегда равен 1, а нижний ищется как минимум трех элементов. Если сравнить с правилом умножения обычных интервалов (1.5), то произведение относительных интервалов гораздо удобнее для анализа, поскольку легко описать случаи, когда  $\chi(\mathbf{ab})$  принимает каждое из возможных значений.

Ещё одна полезная интерпретация функционала  $\chi$  — «мера уравновешенности» интервала, т. е. его симметричности относительно нуля. Значение  $\chi(\mathbf{a}) = -1$  означает полную уравновешенность, симметричность интервала  $\mathbf{a}$  относительно нуля, тогда как  $\chi(\mathbf{a}) = 1$  имеет место для ненулевых вырожденных интервалов, т. е. точек вещественной оси  $\mathbb{R}$ , которые являются «совершенно неуравновешенными». В целом, интервал  $\mathbf{a}$  «более уравновешен», чем интервал  $\mathbf{b}$  тогда и только тогда, когда  $\chi(\mathbf{a}) < \chi(\mathbf{b})$ .

## 1.6 Алгебраические свойства интервальных операций

Классическая интервальная арифметика  $\mathbb{IR}$  может стать объектом самостоятельного изучения и как алгебраическая система, и как частично упорядоченное множество с отношением порядка по включению « $\subseteq$ », наиболее важным в  $\mathbb{IR}$ . Знать

соответствующие свойства  $\mathbb{R}$  необходимо потому, что на них основывается техника преобразований интервальных выражений и уравнений, которая служит основой для решения различных задач.

В  $\mathbb{R}$  нейтральными элементами относительно сложения и вычитания является нуль, так как

$$\mathbf{a} + 0 = \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} - 0 = \mathbf{a},$$

а относительно умножения и деления — единица:

$$\mathbf{a} \cdot 1 = \mathbf{a}, \quad \mathbf{a}/1 = \mathbf{a}.$$

Кроме того,  $\mathbf{a} \cdot 0 = 0 \cdot \mathbf{a} = 0$ .

Интервальные арифметические операции обладают свойствами:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \quad \text{— ассоциативность сложения,} \quad (1.50)$$

$$(\mathbf{a}\mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b}\mathbf{c}) \quad \text{— ассоциативность умножения,} \quad (1.51)$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \quad \text{— коммутативность сложения,} \quad (1.52)$$

$$\mathbf{a}\mathbf{b} = \mathbf{b}\mathbf{a} \quad \text{— коммутативность умножения.} \quad (1.53)$$

Доказательство для (1.50)–(1.53) легко выводится из (1.2).

Но особенностью интервальной арифметики является отсутствие дистрибутивности умножения относительно сложения: в общем случае  $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} \neq \mathbf{a}\mathbf{c} + \mathbf{b}\mathbf{c}$ . Например,

$$[1, 2] \cdot (1 - 1) = 0 \neq [-1, 1] = [1, 2] \cdot 1 - [1, 2] \cdot 1.$$

Тем не менее, имеет место более слабое свойство

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \subseteq \mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{a}\mathbf{c} \quad (1.54)$$

называемое *субдистрибутивностью* умножения относительно сложения. Доказательство этого соотношения следует из того, что всякое число  $x \in \mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c})$  представимо в виде

$$x = \mathbf{a}(b + c) \quad \text{для некоторых } a \in \mathbf{a}, b \in \mathbf{b}, c \in \mathbf{c}.$$

В свою очередь, в силу основной теоремы интервальной арифметики (Теорема 1.4.1) отсюда следует, что  $x = \mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{a}\mathbf{c}$ .

Обратное включение тем же способом доказать не получится потому, что числа  $y \in \mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{a}\mathbf{c}$  допускают представление лишь в виде

$$y = \mathbf{a}'\mathbf{b} + \mathbf{a}''\mathbf{c} \quad \text{для некоторых } \mathbf{a}', \mathbf{a}'' \in \mathbf{a}, b \in \mathbf{b}, c \in \mathbf{c},$$

где  $\mathbf{a}'$  не обязательно совпадает с  $\mathbf{a}''$ . Но в ряде частных случаев дистрибутивность всё-таки выполняется.

### Предложение 1.6.1

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{a}\mathbf{c}, \quad \text{если } \mathbf{a} \text{ — вещественное число,} \quad (1.55)$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{a}\mathbf{c}, \quad \text{если } \mathbf{b}, \mathbf{c} \geq 0 \text{ или } \mathbf{b}, \mathbf{c} \leq 0. \quad (1.56)$$

**Доказательство.** Равенство (1.55) непосредственно следует из определений сложения интервалов и умножения интервала на число (1.10).

Для обоснования (1.56) нам достаточно показать, что  $\mathbf{ab} + \mathbf{ac} \subseteq \mathbf{a(b+c)}$ , так как обратное включение следует из субдистрибутивности (1.54).

Возьмем какое-нибудь значение  $x \in \mathbf{ab} + \mathbf{ac}$ . Ясно, что оно представляется в виде  $x = a'b + a''c$  для каких-то  $a', a'' \in \mathbf{a}$ ,  $b \in \mathbf{b}$  и  $c \in \mathbf{c}$ . Если  $b = c = 0$ , то  $x = 0$  и, кроме того, интервал  $\mathbf{b+c}$  содержит нуль. Поэтому  $x = 0 \in \mathbf{a(b+c)}$ . Если же из чисел  $b$  и  $c$  хотя бы одно не равно нулю, то

$$\frac{b}{b+c} \geq 0, \quad \frac{c}{b+c} \geq 0,$$

в силу того, что  $\mathbf{b, c} \geq 0$  или  $\mathbf{b, c} \leq 0$ . При этом

$$\frac{b}{b+c} + \frac{c}{b+c} = 1.$$

Положим

$$t = \frac{b}{b+c} a' + \frac{c}{b+c} a''.$$

По построению  $t$  справедлива принадлежность  $t \in [a', a'']$ . Следовательно,  $t$  обязано лежать в интервале  $\mathbf{a}$ . Кроме того,  $t$  специально подобрано таким, что  $x = a'b + a''c = t(b+c)$ . Интервализуя правую часть этого равенства по  $t \in \mathbf{a}$ ,  $b \in \mathbf{b}$  и  $c \in \mathbf{c}$ , в силу основной теоремы интервальной арифметики получим  $x = t(b+c) \in \mathbf{a(b+c)}$ , что и требовалось. ■

Исчерпывающее описание всех случаев выполнения дистрибутивности в классической интервальной арифметике дано в работах [37, 86].

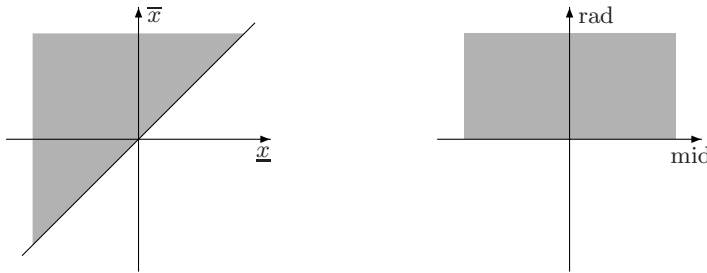


Рис. 1.7. Интервальные плоскости.

Отметим, что классическая интервальная арифметика не является ни одной из структур, которым традиционно уделяется наибольшее внимание в абстрактной алгебре — ни кольцом (алгеброй), ни, тем более, полем. И для алгебраистов здесь открываются огромные возможности развития новых алгебраических теорий (которые они, впрочем, почему-то не спешат воспользоваться).

Для описания интервала мы всегда указываем два числа, так что иногда бывает удобно представлять интервалы точками двумерной *интервальной плоскости*, откладывая по осям абсцисс и ординат либо левый и правый концы изображаемого



интервала, либо его середину и радиус, соответственно. Например, множество всех интервалов вещественной оси изобразится левым чертежом Рис. 1.7 в системе координат «левый конец-правый конец», а в системе координат «середина-радиус» — правым чертежом Рис. 1.7.

Некоторую неудовлетворённость может вызвать то обстоятельство, что при изображении  $\mathbb{IR}$  интервальная плоскость с любой системой координат используется не вся, а лишь «наполовину». В §1.7 это ограничение будет преодолено.

## 1.7 Полная интервальная арифметика

### 1.7а Неформальное обсуждение

Резюмируя результаты предшествующих параграфов, можно сказать, что алгебраические свойства классической интервальной арифметики  $\mathbb{IR}$  существенно более бедны, чем у привычных числовых систем — кольца целых чисел  $\mathbb{Z}$ , поля рациональных чисел  $\mathbb{Q}$ , поля вещественных чисел  $\mathbb{R}$  и поля комплексных чисел  $\mathbb{C}$ , поскольку

- все интервалы с ненулевой шириной, т. е. большинство элементов  $\mathbb{IR}$ , не имеют обратных элементов по отношению к операциям (1.3)–(1.6),
- арифметические операции (1.3)–(1.6) связаны друг с другом весьма слабым соотношением субдистрибутивности (1.54), а полноценная дистрибутивность умножения относительно сложения и вычитания не имеет места.

Как следствие, во-первых, в  $\mathbb{IR}$  элементарные уравнения относительно неизвестной переменной  $x$

$$\mathbf{a} + x = \mathbf{b}, \quad \mathbf{a} \cdot x = \mathbf{b}$$

и им подобные не всегда имеют решение. Во-вторых, техника символьных преобразований в классической интервальной арифметике  $\mathbb{IR}$  довольно бедна. Мы не можем даже переносить члены из одной части уравнения в другую, а отсутствие дистрибутивности делает невозможным приведение подобных членов.

Кроме того, неудовлетворительны порядковые свойства классической интервальной арифметики относительно естественного упорядочения по включению « $\subseteq$ ». В частично упорядоченных множествах огромную роль играет возможность взятия для любых двух элементов их нижней грани « $\wedge$ » и верхней грани « $\vee$ » относительно рассматриваемого порядка (аналогов минимума и максимума). В  $\mathbb{IR}$  соответствующими операциями являются

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} := \inf_{\subseteq} \{ \mathbf{a}, \mathbf{b} \} = [ \max\{ \underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}} \}, \min\{ \overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}} \} ], \quad (1.57)$$

— взятие нижней грани относительно « $\subseteq$ »,

$$\mathbf{a} \vee \mathbf{b} := \sup_{\subseteq} \{ \mathbf{a}, \mathbf{b} \} = [ \min\{ \underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}} \}, \max\{ \overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}} \} ], \quad (1.58)$$

— взятие верхней грани относительно « $\subseteq$ »,

и первая из этих операций не всегда выполнима. К примеру, минимум  $[1, 2] \wedge [3, 4]$  не существует среди обычных интервалов. Как следствие,  $\mathbb{IR}$  в определённом смысле «не замкнута» относительно порядка по включению.<sup>1</sup>

Наконец, ниже (см. Главы 4 и 5) мы встретимся с задачами, которые являются по своей природе *минимаксными*. Это постановки, которые требуют взятия минимаксов функций многих переменных, т. е. смешанных экстремумов, в которых по части аргументов функции берётся минимум, а по оставшимся — максимум. Для решения минимаксных задач желательно иметь в своём распоряжении специальную «минимаксную» интервальную арифметику, которая реализует вычисление минимаксов на уровне элементарных арифметических операций, каждая из которых является функцией двух (т. е. уже «многих») переменных. Но классическая интервальная арифметика (как и некоторые её популярные обобщения) разработана для оценивания областей значений арифметических операций и выражений или, иначе, для вычисления минимумов или максимумов одновременно по всем переменным. Следовательно, интервальная арифметика  $\mathbb{IR}$  оказываются здесь не вполне пригодной ещё и потому, что плохо соответствуют внутренней природе новых задач.

Отсутствие дистрибутивности в  $\mathbb{IR}$  и вытекающая из неё невозможность приводить подобные члены является, конечно, наиболее серьёзным дефектом интервальной арифметики, для исправления которого потребовалась бы, по-видимому, её значительная «переделка» как алгебраической системы. В настоящий момент не вполне ясны даже возможность и целесообразность этого шага. Что же касается необратимости арифметических операций и плохих порядковых свойств интервальной арифметики, то эти неудобства могут быть частично преодолены более лёгким и естественным путём: нам следует достроить  $\mathbb{IR}$  до некоторой более широкой и полной алгебраической системы  $\mathcal{S}$  (или, иначе, вложить  $\mathbb{IR}$  в более широкую алгебраическую систему  $\mathcal{S}$ ), алгебраические и порядковые свойства которой (обратимость элементов и т. п.) были бы лучше и в которой была бы более богатой техника эквивалентных преобразований и более мощные аналитические средства.

В частности, если потребуется найти решение некоторой интервальной задачи в алгебраическом смысле, то для его поиска можно выйти в расширенную систему  $\mathcal{S}$ , не ограничивая себя обычной интервальной арифметикой  $\mathbb{IR}$ : модифицированная подобным образом задача станет легче в силу более благоприятных алгебраических свойств системы  $\mathcal{S}$ . Но если полученный в результате этой процедуры ответ окажется обычным интервалом, лежащим в  $\mathbb{IR}$ , а не в дополнении  $\mathcal{S} \setminus \mathbb{IR}$ , то он и будет искомым решением исходной задачи.

Можно также осторожно надеяться, что алгебраическое пополнение  $\mathcal{A}$ , если оно будет построено «разумно», получит содержательный смысл и хорошую интерпретацию, как это случилось с отрицательными и комплексными числами.

Как можно осуществить требуемое расширение классической интервальной арифметики? Здесь нам на выручку приходит абстрактная алгебра. С более общей точки зрения арифметика  $\mathbb{IR}$  является коммутативной полугруппой как относительно сложения, так и относительно умножения. Известно (см., например, [29]), что всякая коммутативная полугруппа, в которой справедлив так называемый «закон сокращения», может быть вложена в группу (или, что эквивалентно, расширена до груп-

<sup>1</sup>Если  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  — обычные одномерные интервалы с непустым пересечением, то  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  и  $\mathbf{a} \vee \mathbf{b}$  совпадают с  $\mathbf{a} \cap \mathbf{b}$  и  $\mathbf{a} \cup \mathbf{b}$  соответственно. Но в общем случае это не так.

пы), т. е. в действительно более богатую алгебраическую систему, в которой каждый элемент имеет обратный. Как мы могли убедиться в предыдущем параграфе, интервальная арифметика  $\mathbb{IR}$  как раз таки является коммутативной полугруппой, удовлетворяющей закону сокращения относительно сложения (1.31). Относительно умножения полугруппу с законом сокращения (1.32) образуют все интервалы, не содержащие нуля.

По счастью, все технические конструкции, необходимые для такого согласованного расширения интервальных полугрупп по сложению и умножению, были реализованы немецким исследователем Э. Каухером ещё в 70-е годы XX века. В работах [64, 65, 66] он построил алгебраическую систему, которую мы будем обозначать  $\mathbb{KR}$  и которая включает в себя классическую интервальную арифметику  $\mathbb{IR}$  как собственное подмножество. Она вполне удовлетворяет нашим требованиям, так как является группой по сложению и «почти группой» по умножению. Кроме того, в  $\mathbb{KR}$  без каких-либо ограничений выполнимы операции (1.57)–(1.58) взятия нижней и верхней граней относительно упорядочения интервалов по включению, т. е.  $\mathbb{KR}$  обладает лучшими в сравнении с классической арифметикой  $\mathbb{IR}$  порядковыми свойствами. Напомним, что алгебраическая система с двумя бинарными операциями, которые идемпотентны, коммутативны, ассоциативны и удовлетворяют закону поглощения, называется *решёткой* [4]. В частично упорядоченном множестве такими бинарными операциями естественно выступают взятие нижней и верхней граней двухэлементных множеств, и в этом смысле  $\mathbb{KR}$  — решётка относительно операций « $\wedge$ » и « $\vee$ », определённых посредством (1.57)–(1.58).

Э. Каухер при расширении  $\mathbb{IR}$  опирался на свойство монотонности интервальных арифметических операций по включению и сохранил его в новой интервальной арифметике. Подчёркивая хорошие свойства новой алгебраической системы  $\mathbb{KR}$ , мы будем называть её *полной интервальной арифметикой* или, по имени её создателя, *интервальной арифметикой Каухера*.

Ещё одним замечательным свойством полной интервальной арифметики Каухера является то, что именно она является минимаксной интервальной арифметикой, в которой вычисление минимаксов и максиминов может быть осуществлено на уровне сложения, вычитания, умножения и деления.

## 1.76 Описание полной интервальной арифметики

Элементами полной интервальной арифметики  $\mathbb{KR}$  являются пары вещественных чисел  $[\eta, \vartheta]$ , не обязательно связанных соотношением  $\eta \leq \vartheta$ . Таким образом,  $\mathbb{KR}$  получается присоединением *неправильных* интервалов  $[\eta, \vartheta]$ ,  $\eta > \vartheta$ , ко множеству  $\mathbb{IR} = \{[\eta, \vartheta] \mid \eta, \vartheta \in \mathbb{R}, \eta \leq \vartheta\}$  *правильных* интервалов и вещественных чисел (отождествляемых с вырожденными интервалами нулевой ширины). Элементы арифметики Каухера и образуемые из них более сложные объекты (векторы, матрицы) мы будем выделять жирным шрифтом, как и обычные интервалы. При этом, если  $\mathbf{a} = [\eta, \vartheta]$ , то  $\eta$  называется *левым* (или *нижним*) концом интервала  $\mathbf{a}$  и обозначается  $\underline{\mathbf{a}}$  или  $\inf \mathbf{a}$ , а  $\vartheta$  называется *правым* (или *верхним*) концом интервала  $\mathbf{a}$  и обозначается  $\overline{\mathbf{a}}$  или  $\sup \mathbf{a}$ . Как и прежде, интервал  $\mathbf{a}$  назовём *уравновешенным*, если  $\underline{\mathbf{a}} = -\overline{\mathbf{a}}$ .

Не подменяя строгих математических построений, выполненных Э. Каухером,

рассмотрим описание арифметики  $\mathbb{KR}$  вместе с неформальными мотивациями, которые помогают понять смысл различных конструкций.

Одной из важнейших структур на множестве интервалов  $\mathbb{IR}$  является теоретико-множественное упорядочение по включению « $\subseteq$ ». Оно естественно распространяется на интервалы из  $\mathbb{KR}$  и определяется для них совершенно по тем же правилам.

**Определение 1.7.1** Для интервалов  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{KR}$  будем считать, что  $\mathbf{a}$  включается в  $\mathbf{b}$  и писать « $\mathbf{a} \subseteq \mathbf{b}$ », если  $\underline{\mathbf{a}} \geq \underline{\mathbf{b}}$  и  $\overline{\mathbf{a}} \leq \overline{\mathbf{b}}$ :

$$\mathbf{a} \subseteq \mathbf{b} \iff \underline{\mathbf{a}} \geq \underline{\mathbf{b}} \ \& \ \overline{\mathbf{a}} \leq \overline{\mathbf{b}}. \quad (1.59)$$

Например,  $[3, 1] \subseteq [2, 2] = 2 \in \mathbb{R}$ . Как следствие, операции взятия минимума и максимума по включению — (1.57) и (1.58) — в неизменном виде распространяются на  $\mathbb{KR}$ , но теперь они всегда выполнимы из-за присутствия в  $\mathbb{KR}$  неправильных интервалов. В частности,  $[1, 2] \wedge [3, 4] = [3, 2]$ . Таким образом, расширение  $\mathbb{IR}$  до  $\mathbb{KR}$  устраняет порядковую неполноту  $\mathbb{IR}$  и делает множество интервалов решёткой. Строго говоря,  $\mathbb{KR}$  становится даже условно полной решёткой относительно порядка по включению (1.59).<sup>2</sup>

Помимо включения на множестве интервалов  $\mathbb{KR}$  существует ещё одно частичное упорядочение, которое естественно обобщает линейный порядок « $\leq$ » на вещественной оси:

**Определение 1.7.2** Для интервалов  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{KR}$  будем считать, что  $\mathbf{a}$  не превосходит  $\mathbf{b}$  и писать « $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ », если  $\underline{\mathbf{a}} \leq \underline{\mathbf{b}}$  и  $\overline{\mathbf{a}} \leq \overline{\mathbf{b}}$ .

Интервал называется неотрицательным, т. е. « $\geq 0$ », если неотрицательны оба его конца. Интервал называется неположительным, т. е. « $\leq 0$ », если неположительны оба его конца.

Например,  $[1, 2] \leq [3, 2]$ , причём оба сравниваемых интервала  $[1, 2]$  и  $[3, 2]$  неотрицательны. Но в целом по поводу сравнения интервалов из  $\mathbb{KR}$ , которое обобщает порядок « $\leq$ » на вещественной оси, можно сказать то же самое, что и для множества обычных интервалов: таких бинарных отношений существует много, и выбор какого-то конкретного из них зависит от задачи и целей исследования.

Правильные и неправильные интервалы, две половинки  $\mathbb{KR}$ , переходят друг в друга в результате отображения дуализации  $\text{dual} : \mathbb{KR} \rightarrow \mathbb{KR}$ , меняющего местами (переворачивающего) концы интервала, т. е. такого что

$$\text{dual } \mathbf{a} := [\overline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{a}}].$$

Фактически, дуализация в  $\mathbb{KR}$  задаёт симметрию правильных и неправильных интервалов относительно вещественной оси  $\mathbb{R}$ . Но отношение включения (1.59) дуализация превращает в ему противоположное:

$$\mathbf{a} \subseteq \mathbf{b} \iff \text{dual } \mathbf{a} \supseteq \text{dual } \mathbf{b}. \quad (1.60)$$

---

<sup>2</sup>Условно полная решётка — это частично упорядоченное множество, в котором каждое непустое ограниченное подмножество имеет точные верхнюю и нижнюю грани [4]. Это уже больше, чем просто решётка, но меньше, чем полная решётка, где минимумы и максимумы можно брать по любым семействам элементов.

Как следствие,

$$\text{dual}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \text{dual } \mathbf{a} \vee \text{dual } \mathbf{b}, \quad (1.61)$$

$$\text{dual}(\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) = \text{dual } \mathbf{a} \wedge \text{dual } \mathbf{b}. \quad (1.62)$$

*Правильной проекцией* интервала  $\mathbf{a}$  называется величина

$$\text{pro } \mathbf{a} := \begin{cases} \mathbf{a}, & \text{если } \mathbf{a} \text{ правильный,} \\ \text{dual } \mathbf{a}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Эта операция нужна для того, чтобы получить из произвольного интервала его «правильный образ», с которым можно обращаться как с обычным числовым промежутком в  $\mathbb{R}$ , т. е. множеством всех точек вещественной оси между двумя заданными концами. Неправильные интервалы интерпретировать так нельзя: это абстрактные пары точек, смысл которых ещё предстоит выяснить.

Полугруппа всех правильных интервалов с операцией сложения устроена довольно просто: сложение интервалов распадается на независимые друг от друга операции сложения левых и правых концов слагаемых. Как следствие, распространение сложения с  $\mathbb{IR}$  на  $\mathbb{KR}$  осуществляется несложно, и оно определяется в  $\mathbb{KR}$  совершенно так же, как в классической интервальной арифметике:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} := [\underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}].$$

Но теперь из факта существования неправильных интервалов следует то, что каждый элемент  $\mathbf{a}$  из  $\mathbb{KR}$  имеет единственный обратный по сложению (противоположный), обозначаемый через «орр  $\mathbf{a}$ », и из равенства  $\mathbf{a} + \text{орр } \mathbf{a} = 0$  следует

$$\text{орр } \mathbf{a} := [-\underline{\mathbf{a}}, -\bar{\mathbf{a}}]. \quad (1.63)$$

Таким образом, относительно сложения арифметика  $\mathbb{KR}$  является коммутативной группой, изоморфной аддитивной группе стандартного линейного пространства  $\mathbb{R}^2$ . Для краткости мы будем обозначать через « $\ominus$ » операцию, которая обратна сложению и называется *внутренним (или алгебраическим) вычитанием* в  $\mathbb{KR}$ . Таким образом,

$$\mathbf{a} \ominus \mathbf{b} := \mathbf{a} + \text{орр } \mathbf{b} = [\underline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{b}}].$$

Нетрудно проверить, что для сложения в  $\mathbb{KR}$  справедливо соотношение

$$\text{dual}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \text{dual } \mathbf{a} + \text{dual } \mathbf{b}. \quad (1.64)$$

Оно означает, в частности, что сложение неправильных интервалов в  $\mathbb{KR}$  является «зеркальным отражением» операции сложения для правильных интервалов в  $\mathbb{IR}$ . Это согласуется со статусом неправильных интервалов, так что представляется необходимым сохранить это свойство и при определении других арифметических операций в  $\mathbb{KR}$ .

Распространение умножения на полную интервальную арифметику  $\mathbb{KR}$  начнём с самой простой ситуации — умножения на вещественные числа. Естественно определить его так же, как в классической интервальной арифметике (см. (1.10)):

$$\mu \cdot \mathbf{a} := \begin{cases} [\mu \underline{\mathbf{a}}, \mu \bar{\mathbf{a}}], & \text{если } \mu \geq 0, \\ [\mu \bar{\mathbf{a}}, \mu \underline{\mathbf{a}}], & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1.65)$$

Далее, для неотрицательных правильных интервалов умножение в  $\mathbb{IR}$  выполняется совершенно аналогично сложению, отдельно для левых концов и отдельно для правых (см. Табл. 1.1). Поэтому естественно доопределить на  $\mathbb{KR}$  умножение неотрицательных интервалов, не обязательно правильных, по тем же «поконцевым» формулам, т. е. как  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = [\underline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}]$ . Фактически, мы при этом вкладываем мультипликативную полугруппу положительных интервалов в некоторую группу, как это указывается абстрактной алгеброй. Если же в произведении  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  какой-то из сомножителей является неположительным интервалом, то можно сделать его неотрицательным с помощью умножения на  $(-1)$  и формулы (1.65), сведя умножение к предыдущему случаю. В итоге умножение в  $\mathbb{KR}$  будет определено для любых интервалов, у которых концы не имеют противоположные знаки.

Отметим, что во всех этих случаях выполнено аналогичное (1.64) свойство

$$\text{dual}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \text{dual } \mathbf{a} \cdot \text{dual } \mathbf{b},$$

которое следует просто из построения.

Как доопределить умножение на всё множество  $\mathbb{KR}$ ? То есть, как определить умножение интервалов из  $\mathbb{KR}$ , концы которых имеют противоположные знаки? Возможности алгебры здесь уже исчерпаны, так как вся полугруппа интервалов по умножению свойством сокращения не обладает, и опираться на результат о вложении полугруппы в группу нельзя. Чтобы продвинуться дальше, мы привлечём на помощь соображения, касающиеся порядка по включению (1.59) и связанных с ним свойств арифметических операций.

С помощью максимума по включению (1.58) фундаментальное свойство (1.2), определяющее операции классической интервальной арифметики можно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \star \mathbf{b} &= \{a \star b \mid a \in \mathbf{a}, b \in \mathbf{b}\} \\ &= \left[ \min_{a \in \mathbf{a}} \min_{b \in \mathbf{b}} (a \star b), \max_{a \in \mathbf{a}} \max_{b \in \mathbf{b}} (a \star b) \right] = \bigvee_{a \in \mathbf{a}} \bigvee_{b \in \mathbf{b}} (a \star b), \end{aligned} \quad (1.66)$$

где  $\star \in \{+, -, \cdot, /\}$ . Оказывается, что операция сложения, распространённая на всё множество правильных и неправильных интервалов  $\mathbb{KR}$ , а также операция умножения, определённая для интервалов, концы которых не имеют противоположных знаков, могут быть похожим образом представлены через операции максимума и минимума по включению. Более точно, если оба операнда  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  — неправильные, то

$$\mathbf{a} \star \mathbf{b} = \bigwedge_{a \in \text{pro } \mathbf{a}} \bigwedge_{b \in \text{pro } \mathbf{b}} (a \star b),$$

где  $\star \in \{+, \cdot\}$  и в аргументах минимумов необходимо брать правильные проекции интервалов. Это представление очевидно получается из (1.66) с помощью дуализации и свойства (1.62). Но вот следующие равенства уже неочевидны:

$$\mathbf{a} \star \mathbf{b} = \bigvee_{a \in \mathbf{a}} \bigwedge_{b \in \text{pro } \mathbf{b}} (a \star b),$$

если  $\mathbf{a}$  — правильный, а  $\mathbf{b}$  — неправильный, и

$$\mathbf{a} \star \mathbf{b} = \bigwedge_{a \in \text{pro } \mathbf{a}} \bigvee_{b \in \mathbf{b}} (a \star b),$$

если  $\mathbf{a}$  — неправильный, а  $\mathbf{b}$  — правильный. В их справедливости можно убедиться непосредственной проверкой.

Все выписанные разрозненные формулы, начиная с (1.66), можно объединить в одну. Введём так называемую условную операцию взятия экстремума по включению

$$\mathbb{I}_x^{\mathbf{a}} := \begin{cases} \bigvee_{x \in \mathbf{a}}, & \text{если } \mathbf{a} \text{ правильный,} \\ \bigwedge_{x \in \text{dual } \mathbf{a}}, & \text{если } \mathbf{a} \text{ неправильный.} \end{cases} \quad (1.67)$$

Эта операция, которая зависит от интервального параметра  $\mathbf{a}$ , является либо максимумом, либо минимумом по включению « $\subseteq$ », смотря по тому, правилен или неправилен  $\mathbf{a}$ . При этом экстремум берётся по всем  $x$  из правильной проекции интервала  $\mathbf{a}$ . Тогда в  $\mathbb{K}\mathbb{R}$  для сложения интервалов и для умножения интервалов, которые имеют противоположные знаки концов, справедливо соотношение

$$\mathbf{a} \star \mathbf{b} = \mathbb{I}_a^{\mathbf{a}} \mathbb{I}_b^{\mathbf{b}} (a \star b). \quad (1.68)$$

Представление (1.68) впервые выведено в [64], и оно выражает связь между результатом интервальной операции  $\mathbf{a} \star \mathbf{b}$  и результатами точечных операций  $a \star b$  для  $a \in \text{pro } \mathbf{a}$  и  $b \in \text{pro } \mathbf{b}$ . Его можно взять за основу для доопределения арифметических операций в полной интервальной арифметике  $\mathbb{K}\mathbb{R}$ . В частности, с помощью (1.68) можно определить умножение интервалов, в котором концы одного или обоих сомножителей имеют противоположные знаки. Замечательность представления (1.68) состоит также в том, что из него нетрудно вывести монотонность интервальных арифметических операций в  $\mathbb{K}\mathbb{R}$  относительно порядка по включению (1.59).

Для того, чтобы выписать явные формулы для умножения в полной интервальной арифметике, выделим в  $\mathbb{K}\mathbb{R}$  следующие подмножества:

$$\mathcal{P} := \{ \mathbf{a} \in \mathbb{K}\mathbb{R} \mid (\underline{\mathbf{a}} \geq 0) \ \& \ (\overline{\mathbf{a}} \geq 0) \} \quad \text{— неотрицательные интервалы,}$$

$$\mathcal{Z} := \{ \mathbf{a} \in \mathbb{K}\mathbb{R} \mid \underline{\mathbf{a}} \leq 0 \leq \overline{\mathbf{a}} \} \quad \text{— нульсодержащие интервалы,}$$

$$-\mathcal{P} := \{ \mathbf{a} \in \mathbb{K}\mathbb{R} \mid -\mathbf{a} \in \mathcal{P} \} \quad \text{— неположительные интервалы,}$$

$$\text{dual } \mathcal{Z} := \{ \mathbf{a} \in \mathbb{K}\mathbb{R} \mid \text{dual } \mathbf{a} \in \mathcal{Z} \} \quad \text{— интервалы, содержащиеся в нуле.}$$

В целом  $\mathbb{K}\mathbb{R} = \mathcal{P} \cup \mathcal{Z} \cup (-\mathcal{P}) \cup (\text{dual } \mathcal{Z})$ . Тогда умножение в интервальной арифметике Каухера может быть описано таблицей Табл. 1.2 [66], клетки которой получаются в результате расшифровки частных случаев применения формулы (1.68) и предшествующих результатов. Особо отметим, что эта таблица является дополнением Табл. 1.1 для классической интервальной арифметики ещё одной строкой и ещё одним столбцом, которые соответствуют операндам из множества  $\text{dual } \mathcal{Z}$ . Во всех прочих случаях Табл. 1.1 сохраняет свою справедливость!

Таблица 1.2. Умножение в полной интервальной арифметике

$\cdot$	$b \in \mathcal{P}$	$b \in \mathcal{Z}$	$b \in -\mathcal{P}$	$b \in \text{dual } \mathcal{Z}$
$a \in \mathcal{P}$	$[\underline{a}b, \overline{a}\overline{b}]$	$[\overline{a}b, \underline{a}\overline{b}]$	$[\overline{a}b, \underline{a}\overline{b}]$	$[\underline{a}b, \overline{a}\overline{b}]$
$a \in \mathcal{Z}$	$[\underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}]$	$[\min\{\underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}\}, \max\{\underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}\}]$	$[\overline{a}b, \underline{a}\overline{b}]$	0
$a \in -\mathcal{P}$	$[\underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}]$	$[\underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}]$	$[\overline{a}b, \underline{a}\overline{b}]$	$[\overline{a}\overline{b}, \underline{a}\underline{b}]$
$a \in \text{dual } \mathcal{Z}$	$[\underline{a}b, \overline{a}\overline{b}]$	0	$[\overline{a}\overline{b}, \underline{a}\underline{b}]$	$[\max\{\underline{a}b, \overline{a}\overline{b}\}, \min\{\underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}\}]$

Как видим, умножение в арифметике Каухера допускает нетривиальные делители нуля. Например,  $[-1, 2] \cdot [5, -3] = 0$ , и это в самом деле вытекает из определения (1.68). Интервальное умножение в арифметике Каухера оказывается коммутативным и ассоциативным [54, 65, 66], но группу по умножению в  $\mathbb{KR}$  образуют лишь интервалы  $\mathbf{a}$ , для которых  $\underline{a}\overline{a} > 0$  (или, иначе  $0 \notin \text{pro } \mathbf{a}$ ), поскольку «закон сокращения» (1.32) не выполняется ни на каком более широком подмножестве  $\mathbb{KR}$ .

Таким образом, для интервалов  $\mathbf{a}$  из  $\mathbb{KR}$ , которые не содержат нуль и сами не содержатся в нуле, существует единственный обратный относительно умножения элемент, который мы будем обозначать через «inv  $\mathbf{a}$ », и из равенства  $\mathbf{a} \cdot \text{inv } \mathbf{a} = 1$  следует

$$\text{inv } \mathbf{a} := [1/\underline{a}, 1/\overline{a}]. \tag{1.69}$$

Для краткости мы будем обозначать операцию, обратную умножению, так называемое внутреннее (алгебраическое) деление в  $\mathbb{KR}$ , через « $\oslash$ », так что

$$\mathbf{a} \oslash \mathbf{b} := \mathbf{a} \cdot \text{inv } \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot [1/\underline{b}, 1/\overline{b}] \quad \text{для } 0 \notin \text{pro } \mathbf{b}.$$

Выписанная выше таблица явных формул для умножения в полной интервальной арифметике удобна при компьютерной реализации, но довольно громоздка и малообозрима. В ряде случаев имеет смысл прибегнуть к другим формулам для интервального умножения в  $\mathbb{KR}$ , которые были предложены А.В. Лакеевым в [70, 71]. Чтобы выписать их, напомним следующее определение (см., к примеру, [4]):

**Определение 1.7.3** Для вещественного числа  $a$  величины

$$a^+ := \max\{a, 0\},$$

$$a^- := \max\{-a, 0\}$$

называются положительной частью и отрицательной частью  $a$  соответственно.



При этом  $a = a^+ - a^-$  и  $|a| = a^+ + a^-$ .

**Предложение 1.7.1** (формулы Лакеева) *Для любых интервалов  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{KR}$  справедливо*

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \left[ \max\{\underline{\mathbf{a}}^+ \underline{\mathbf{b}}^+, \overline{\mathbf{a}}^- \overline{\mathbf{b}}^-\} - \max\{\overline{\mathbf{a}}^+ \underline{\mathbf{b}}^-, \underline{\mathbf{a}}^- \overline{\mathbf{b}}^+\}, \right. \\ \left. \max\{\overline{\mathbf{a}}^+ \overline{\mathbf{b}}^+, \underline{\mathbf{a}}^- \underline{\mathbf{b}}^-\} - \max\{\underline{\mathbf{a}}^+ \overline{\mathbf{b}}^-, \overline{\mathbf{a}}^- \underline{\mathbf{b}}^+\} \right].$$

Если один из интервалов  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  является правильным, то

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \left[ \underline{\mathbf{a}}^+ \underline{\mathbf{b}}^+ + \overline{\mathbf{a}}^- \overline{\mathbf{b}}^- - \max\{\overline{\mathbf{a}}^+ \underline{\mathbf{b}}^-, \underline{\mathbf{a}}^- \overline{\mathbf{b}}^+\}, \right. \\ \left. \max\{\overline{\mathbf{a}}^+ \overline{\mathbf{b}}^+, \underline{\mathbf{a}}^- \underline{\mathbf{b}}^-\} - \underline{\mathbf{a}}^+ \overline{\mathbf{b}}^- - \overline{\mathbf{a}}^- \underline{\mathbf{b}}^+ \right]. \quad (1.70)$$

Эта формула не упрощается в случае, когда нам дополнительно известно, что оба интервала  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  правильные.

Если же из интервалов  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  один является правильным, а другой неправильным, то

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \left[ \underline{\mathbf{a}}^+ \underline{\mathbf{b}}^+ + \overline{\mathbf{a}}^- \overline{\mathbf{b}}^- - \overline{\mathbf{a}}^+ \underline{\mathbf{b}}^- - \underline{\mathbf{a}}^- \overline{\mathbf{b}}^+, \overline{\mathbf{a}}^+ \overline{\mathbf{b}}^+ + \underline{\mathbf{a}}^- \underline{\mathbf{b}}^- - \underline{\mathbf{a}}^+ \overline{\mathbf{b}}^- - \overline{\mathbf{a}}^- \underline{\mathbf{b}}^+ \right]. \quad (1.71)$$

Достоинство формул Лакеева — их глобальный характер. Они дают единое выражение для интервального произведения  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  на всей области определения  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , тогда как представление через Табл. 1.2 имеет кусочный характер. Табличное задание умножения неудобно при исследовании интервальных функций «в целом», на всей области определения интервальных выражений.

Вычитание и деление в арифметике  $\mathbb{KR}$  определяются так же, как и в классической интервальной арифметике:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} := \mathbf{a} + (-1) \cdot \mathbf{b} = \left[ \underline{\mathbf{a}} - \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}} \right], \\ \mathbf{a} / \mathbf{b} := \mathbf{a} \cdot \left[ 1/\overline{\mathbf{b}}, 1/\underline{\mathbf{b}} \right] \quad \text{для } 0 \notin \text{pro } \mathbf{b}.$$

## 1.7в Дальнейшие свойства полной интервальной арифметики

Аналогично  $\mathbb{IR}$ , арифметические операции полной интервальной арифметики  $\mathbb{KR}$  являются *монотонными по включению*, т. е. относительно частичного порядка (1.59): для любых  $\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}' \in \mathbb{KR}$  и  $\star \in \{+, -, \cdot, /\}$  справедливо

$$\mathbf{a} \subseteq \mathbf{a}', \mathbf{b} \subseteq \mathbf{b}' \Rightarrow \mathbf{a} \star \mathbf{b} \subseteq \mathbf{a}' \star \mathbf{b}'.$$

Это следует из определения арифметических операций в  $\mathbb{KR}$  по формуле (1.68).

Отметим, что с помощью условной операции экстремума по включению (1.67) любой интервал  $\mathbf{a} \in \mathbb{KR}$  может быть представлен в виде

$$\mathbf{a} = \bigvee_x^{\mathbf{a}} x$$

(вместо  $x$  здесь может стоять любая другая буква). Кроме того, справедливы следующие полезные свойства, вытекающие из представления (1.68):

$$\mathbf{a} \star \mathbf{b} = \bigvee_a^{\mathbf{a}} (\mathbf{a} \star \mathbf{b}), \quad \mathbf{a} \star \mathbf{b} = \bigvee_b^{\mathbf{b}} (\mathbf{a} \star \mathbf{b}) \quad (1.72)$$

для любой арифметической операции  $\star \in \{ +, -, \cdot, / \}$ . Необходимость в двух отдельных формулировках вызвана тем, что в операциях вычитания и деления операнды играют разную роль.

Взаимосвязь сложения и умножения в арифметике Каухера выражается следующими соотношениями:

$$\text{если } \mathbf{a} \text{ правильный, то } \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \subseteq \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \quad (1.73)$$

— субдистрибутивность,

$$\text{если } \mathbf{a} \text{ неправильный, то } \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \supseteq \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \quad (1.74)$$

— супердистрибутивность.

Фактически, каждое из этих включений является следствием другого и ещё соотношения двойственности (1.60).

Включения (1.73)–(1.74) обращаются в точные равенства в том случае когда  $\mathbf{a}$  стягивается в точку, т.е.  $\mathbf{a} = a \in \mathbb{R}$ :

$$a \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = a \cdot \mathbf{b} + a \cdot \mathbf{c}, \quad (1.75)$$

Другой важный случай дистрибутивности — совпадение знаков интервалов  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ :

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}, \quad \text{если } \mathbf{bc} \geq 0. \quad (1.76)$$

Докажем соотношения (1.73)–(1.74). Мы будем отталкиваться от свойства точной дистрибутивности (1.75), которое обосновывается непосредственно из определения входящих в него операций. В самом деле, предполагая, что  $a \geq 0$ , получим

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= a \cdot [\underline{\mathbf{b}} + \underline{\mathbf{c}}, \overline{\mathbf{b}} + \overline{\mathbf{c}}] = [a \cdot (\underline{\mathbf{b}} + \underline{\mathbf{c}}), a \cdot (\overline{\mathbf{b}} + \overline{\mathbf{c}})] \\ &= [a \cdot \underline{\mathbf{b}} + a \cdot \underline{\mathbf{c}}, a \cdot \overline{\mathbf{b}} + a \cdot \overline{\mathbf{c}}] = [a \cdot \underline{\mathbf{b}}, a \cdot \overline{\mathbf{b}}] + [a \cdot \underline{\mathbf{c}}, a \cdot \overline{\mathbf{c}}] \\ &= a \cdot [\underline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{b}}] + a \cdot [\underline{\mathbf{c}}, \overline{\mathbf{c}}] = a \cdot \mathbf{b} + a \cdot \mathbf{c}. \end{aligned}$$

Совершенно аналогично рассматривается для (1.75) случай  $a \leq 0$ . Далее, пусть  $\mathbf{a}$  — правильный интервал. Тогда в силу (1.72)

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \bigvee_{a \in \mathbf{a}} (a \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})) = \bigvee_{a \in \mathbf{a}} (a \cdot \mathbf{b} + a \cdot \mathbf{c}) \\ &\subseteq \bigvee_{a \in \mathbf{a}} (a \cdot \mathbf{b}) + \bigvee_{a \in \mathbf{a}} (a \cdot \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}. \end{aligned}$$

Если же интервал  $\mathbf{a}$  — неправильный, то, снова применяя (1.72), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \bigwedge_{a \in \text{dual } \mathbf{a}} (a \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})) = \bigwedge_{a \in \text{dual } \mathbf{a}} (a \cdot \mathbf{b} + a \cdot \mathbf{c}) \\ &\supseteq \bigwedge_{a \in \text{dual } \mathbf{a}} (a \cdot \mathbf{b}) + \bigwedge_{a \in \text{dual } \mathbf{a}} (a \cdot \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}. \end{aligned}$$

Э. Гарденьесом с соавторами в [54] для полного описания всех случаев дистрибутивности было введено понятие *областей дистрибутивности*, задаваемых интервалом  $\mathbf{a}$ , таких что принадлежность к этим областям приводит к равенствам вместо включений (1.73)–(1.74). Наконец, позднее С. Марковым и его сотрудниками, как классификация всевозможных частных вариантов отношения дистрибутивности сложения относительно умножения в  $\mathbb{K}\mathbb{R}$ , был предложен «обобщённый дистрибутивный закон» [47, 83], охватывающий большое количество различных ситуаций. Из всего многообразия рассмотренных в [47, 83] случаев нам далее понадобится следующее соотношение:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + (\text{dual } \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c}, \quad (1.77)$$

если интервалы  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{b} + \mathbf{c}$  имеют определённые знаки и  $\text{sgn } \mathbf{b} = -\text{sgn } \mathbf{c} = \text{sgn } (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ .

С представлением (1.68) тесно связаны дистрибутивные свойства арифметических операций по отношению к операциям взятия нижней и верхней грани по включению. Наиболее просто они выписываются для сложения (см. [54, 66]):

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{a} + \mathbf{c}), \quad (1.78)$$

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} \vee \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \vee (\mathbf{a} + \mathbf{c}). \quad (1.79)$$

Следующие простые примеры демонстрируют, что для умножения точная дистрибутивность, к сожалению, может не иметь места:

$$(-1 \wedge 1) \cdot [-1, 1] = [1, -1] \cdot [-1, 1] = 0 \subseteq [-1, 1] = ((-1) \cdot [-1, 1]) \wedge (1 \cdot [-1, 1]),$$

$$(-1 \vee 1) \cdot [1, -1] = [-1, 1] \cdot [1, -1] = 0 \supseteq [1, -1] = ((-1) \cdot [1, -1]) \vee (1 \cdot [1, -1]).$$

Но в общем случае, как показывается в [57],

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \subseteq \mathbf{a}\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}\mathbf{c},$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \vee \mathbf{c}) = \mathbf{a}\mathbf{b} \vee \mathbf{a}\mathbf{c},$$

если  $\mathbf{a}$  — правильный интервал, и

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{a}\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}\mathbf{c},$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \vee \mathbf{c}) \supseteq \mathbf{a}\mathbf{b} \vee \mathbf{a}\mathbf{c}.$$

если  $\mathbf{a}$  — неправильный. Тем не менее, если  $0 \notin \text{pro } \mathbf{a}$ , т. е. интервал  $\mathbf{a}$  не является ни нульсодержащим, ни содержащимся в нуле, то справедливы точные равенства

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{a}\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}\mathbf{c},$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \vee \mathbf{c}) = \mathbf{a}\mathbf{b} \vee \mathbf{a}\mathbf{c}.$$

Очень полезным оказывается определение модуля интервала в  $\mathbb{K}\mathbb{R}$ :

**Определение 1.7.4** Абсолютной величиной (модулем) интервала  $\mathbf{a}$  называется величина  $|\mathbf{a}| = \max\{|\underline{\mathbf{a}}|, |\overline{\mathbf{a}}|\}$ .

Фактически, модуль интервала определяется как наибольший из модулей чисел, принадлежащих правильной проекции интервала. Некоторые из свойств модуля интервала в классической интервальной арифметике остаются справедливыми также в  $\mathbb{KR}$ , а некоторые свойства нарушаются. Например,  $[3, 0] \subset [1, 2]$ , но  $|[3, 0]| > |[1, 2]|$ , так что свойство (1.18) неверно.

**Предложение 1.7.2** (свойства абсолютной величины)

$$|\mathbf{a} \pm \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|, \quad (1.80)$$

$$|\mathbf{a}\mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|, \quad \text{если } a \in \mathbb{R},$$

$$|\mathbf{a}\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|.$$

Отметим очевидный контраст последнего свойства с равенством (1.21), которое выполняется в классической интервальной арифметике  $\mathbb{IR}$  (как и для вещественных чисел):

$$|[-1, 2]| \cdot |[2, 1]| = 4, \quad \text{но } |[-1, 2] \cdot [2, 1]| = |[-1, 2]| = 2.$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} + \mathbf{b}| &= \max\{|\underline{\mathbf{a} + \mathbf{b}}|, |\overline{\mathbf{a} + \mathbf{b}}|\} = \max\{|\underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}}|, |\overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}}|\} \\ &\leq \max\{|\underline{\mathbf{a}}| + |\underline{\mathbf{b}}|, |\overline{\mathbf{a}}| + |\overline{\mathbf{b}}|\} \leq \max\{|\underline{\mathbf{a}}|, |\overline{\mathbf{a}}|\} + \max\{|\underline{\mathbf{b}}|, |\overline{\mathbf{b}}|\}. \end{aligned}$$

Доказательство второго свойства непосредственно следует из определения умножения числа на интервал (1.65). Распространение на общий случай умножения интервалов в  $\mathbb{KR}$  можно выполнить с помощью формул (1.72). ■

Что касается мигнитуды интервалов, то, на наш взгляд, вводить её отдельное обобщение для  $\mathbb{KR}$  большого смысла нет.

## 1.7г Минимаксный характер полной интервальной арифметики

Вновь обратимся к представлению (1.68), которое положено в основу определения интервальных арифметических операций в  $\mathbb{KR}$ :

$$\mathbf{a} \star \mathbf{b} = \bigvee_a^a \bigwedge_b^b (\mathbf{a} \star \mathbf{b}), \quad \star \in \{+, -, \cdot, /\}.$$

Фактически, оно означает, что неправильные интервалы — это тоже множества точек вещественной оси  $\mathbb{R}$ , заключенные между границами, которые даются концами интервала. Но вот в арифметические операции эти новые интервалы (для которых определена дополнительно ещё их «направленность») вступают уже некоторым специальным образом, который описывается минимаксами и максиминами и, в целом, формулой (1.68).

При обсуждении в §1.7а в качестве одной из мотиваций расширения классической интервальной арифметики мы сформулировали необходимость построения новой, «минимаксной» интервальной арифметики. Из представления (1.68) следует, что этой минимаксной интервальной арифметикой как раз таки и является полная интервальная арифметика  $\mathbb{KR}$ . Действительно, в  $\mathbb{KR}$  *концы результирующих интервалов являются минимаксом и максимином результатов точечных арифметических операций, если из оперируемых интервалов один правилен, а другой неправилен*. Например,

$$[-3, 5] \cdot [2, -1] = 0 = \left[ \min_{x \in [-3, 5]} \max_{y \in [-1, 2]} x \cdot y, \max_{x \in [-3, 5]} \min_{y \in [-1, 2]} x \cdot y \right],$$

в соответствии с формулой (1.68) и Табл. 1.2. Можно ли использовать это замечательное свойство для вычисления минимаксов и максиминов от более сложных выражений? Подобно тому, как основная теорема интервальной арифметики (Теорема 1.4.1) позволяет оценивать области значений рациональных функций с помощью арифметики  $\mathbb{IR}$ ? Напомним, что нахождение минимаксов и максиминов является важнейшей задачей теории игр и вообще теории принятия решений в условиях неопределённости и конфликта.

Ответ на поставленный вопрос, в целом, положителен, но он не является столь простым и исчерпывающим, как в случае классической интервальной арифметики и «чистых» экстремумов функций. Естественное интервальное расширение выражений в арифметике Каухера позволяет оценивать области значений минимакса или максимина, но получаемая оценка связана условиями на вид выражения и не всегда удобна для использования. Соответствующая (весьма изощренная) теория построена в работах испанских исследователей под руководством Э. Гарденьеса и М. Сайнца и представлена в наиболее полном виде в публикациях [58, 88, 89].

Чтобы понять характер возникающих при этом трудностей напомним, что в общем случае операции взятия минимума и максимума не перестановочны друг с другом, хотя для элементарных арифметических операций — сложения, вычитания, умножения и деления — минимум и максимум коммутируют. Не помогает даже наложение жесткого условия единственности вхождений переменных. Следующий выразительный пример позаимствован нами из обзора [89].

Рассмотрим функцию от четырёх переменных

$$\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)$$

Для интервалов изменения переменных  $x_1 \in [-2, 2]$ ,  $x_2 \in [-1, 1]$ ,  $x_3 \in [-1, 1]$ ,  $x_4 \in [-2, 2]$  имеем

$$\bigvee_{x_1 \in [-2, 2], x_3 \in [-1, 1]} \bigwedge_{x_2 \in [-1, 1], x_4 \in [-2, 2]} \phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left[ \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right],$$

$$\bigwedge_{x_2 \in [-1, 1], x_4 \in [-2, 2]} \bigvee_{x_1 \in [-2, 2], x_3 \in [-1, 1]} \phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left[ -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right],$$

что отличается от результата соответствующего «естественного интервального расширения» выражения  $\phi$ :

$$\phi([-2, 2], [1, -1], [-1, 1], [2, -2]) = 0.$$

Тем не менее, используя индукцию по сложности (длине) рассматриваемого выражения, нетрудно вывести из (1.68), что если рациональное выражение  $f(x, y) = f(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$  имеет не более одного вхождения каждой переменной  $x_i$  и  $y_j$  в первой степени, то для любых правильных интервальных векторов  $\mathbf{x} \in \mathbb{IR}^p$ ,  $\mathbf{y} \in \mathbb{IR}^q$  справедливо

$$\bigvee_{\mathbf{x} \in \mathbf{x}} \bigwedge_{\mathbf{y} \in \mathbf{y}} f(x, y) \subseteq f(\mathbf{x}, \text{dual } \mathbf{y}) \subseteq \bigwedge_{\mathbf{y} \in \mathbf{y}} \bigvee_{\mathbf{x} \in \mathbf{x}} f(x, y), \quad (1.81)$$

т. е., в развёрнутом виде,

$$\left[ \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{x}} \max_{\mathbf{y} \in \mathbf{y}} f(x, y), \max_{\mathbf{x} \in \mathbf{x}} \min_{\mathbf{y} \in \mathbf{y}} f(x, y) \right] \subseteq f(\mathbf{x}, \text{dual } \mathbf{y}),$$

$$f(\mathbf{x}, \text{dual } \mathbf{y}) \subseteq \left[ \max_{\mathbf{x} \in \mathbf{x}} \min_{\mathbf{y} \in \mathbf{y}} f(x, y), \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{x}} \max_{\mathbf{y} \in \mathbf{y}} f(x, y) \right].$$

Более сложные случаи, которые также доказывается по индукции. Если рациональное выражение  $f(x, y) = f(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$  имеет не более одного вхождения каждой из переменных  $y_i$  в первой степени, то для любых правильных интервальных векторов  $\mathbf{x} \in \mathbb{IR}^p$ ,  $\mathbf{y} \in \mathbb{IR}^q$  справедливо

$$\left[ \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{x}} \max_{\mathbf{y} \in \mathbf{y}} f(x, y), \max_{\mathbf{x} \in \mathbf{x}} \min_{\mathbf{y} \in \mathbf{y}} f(x, y) \right] \subseteq f(\mathbf{x}, \text{dual } \mathbf{y}). \quad (1.82)$$

Если рациональное выражение  $f(x, y) = f(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$  имеет не более одного вхождения каждой из переменных  $x_i$  в первой степени, то для любых правильных интервальных векторов  $\mathbf{x} \in \mathbb{IR}^p$ ,  $\mathbf{y} \in \mathbb{IR}^q$  справедливо

$$\left[ \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{x}} \max_{\mathbf{y} \in \mathbf{y}} f(x, y), \max_{\mathbf{x} \in \mathbf{x}} \min_{\mathbf{y} \in \mathbf{y}} f(x, y) \right] \supseteq f(\mathbf{x}, \text{dual } \mathbf{y}). \quad (1.83)$$

Подробное доказательство соотношений (1.81), (1.82) и (1.83) было впервые получено Э. Гарденьесом и его отрудниками и опубликовано в [58, 88, 89] (хотя и совершенно в других терминах).

Отметим, что различие между естественным интервальным расширением выражений в арифметике Каухера и точными областями значений минимакса и максими на тем меньше, чем меньше размеры интервалов аргументов. На этой основе могут быть построены интервальные методы вычисления минимаксов и максиминов, использующие адаптивное дробление области определения, аналогично интервальным методам глобальной оптимизации из Главы 3.

Закljučая раздел, можно резюмировать, что, хотя полная интервальная арифметика Каухера  $\mathbb{KR}$  не исправляет «до конца» всех недостатков классической интервальной арифметики, она всё же является гораздо более удобной для проведения алгебраических преобразований и в рассуждениях, привлекающих порядок по включению. Это важно, в частности, при нахождении формальных решений интервальных уравнений (см. Определение 4.3.2) и в их многочисленных применениях (см. Главы 10, 11 и 12). Кроме того, полная интервальная арифметика Каухера оказывается полезной при решении задач, связанных с вычислением минимаксов и максиминов.

## 1.8 Комплексные интервальные арифметики

В отличие от одномерной вещественной оси  $\mathbb{R}$  множество комплексных чисел  $\mathbb{C}$  является уже «двумерным»: каждый его элемент нуждается для своего описания в двух числах, в качестве которых могут выступать вещественная и мнимая части (обозначаемые обычно  $\text{Re}$  и  $\text{Im}$ ), либо модуль и аргумент комплексного числа и т. п. Соответственно, интервалы на комплексной плоскости определяются парами вещественных интервалов, и это можно сделать несколькими способами.

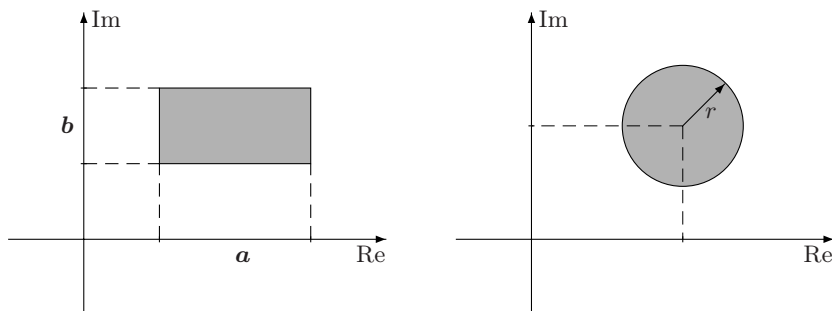


Рис. 1.8. Прямоугольный и круговой интервалы на комплексной плоскости.

Наиболее популярные комплексные интервалы — это прямоугольники и круги комплексной плоскости. Для интервалов  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{IR}$  *прямоугольным комплексным интервалом*  $\mathbf{a} + i\mathbf{b}$  называется множество комплексной плоскости

$$\{z = a + ib \in \mathbb{C} \mid a \in \mathbf{a}, b \in \mathbf{b}\}.$$

*Круговым комплексным интервалом*  $(c, r)$ , где  $c \in \mathbb{C}$  и  $r \in \mathbb{R}_+$ , называется множество комплексной плоскости

$$(c, r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| \leq r\}.$$

Множество всех прямоугольных комплексных интервалов будем обозначать  $\mathbb{IC}_{\text{rect}}$ , а множество круговых комплексных интервалов —  $\mathbb{IC}_{\text{circ}}$ . Если же конкретный тип арифметики неважен или из контекста понятно, о чём именно идёт речь, для комплексных интервальных арифметик будет использоваться общее обозначение  $\mathbb{IC}$ .

Аналогично вещественному случаю введём

**Определение 1.8.1** *Абсолютной величиной (модулем) комплексного интервала  $\mathbf{z}$  называется величина  $|\mathbf{z}| = \max\{|z| \mid z \in \mathbf{z}\}$ .*

Для прямоугольного комплексного интервала  $\mathbf{z} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$

$$|\mathbf{z}| = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2},$$

а для кругового комплексного интервала  $\mathbf{z} = (c, r)$

$$|\mathbf{z}| = |c| + r.$$

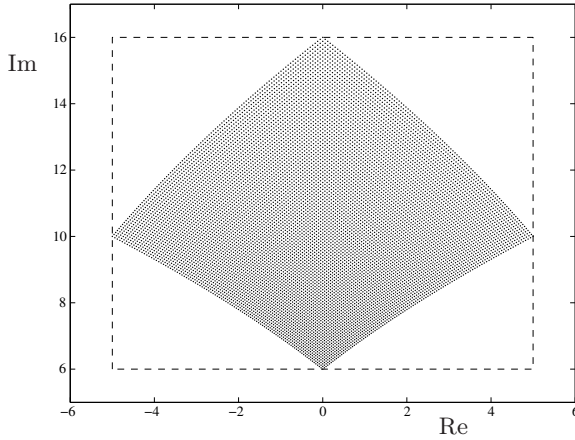


Рис. 1.9. Множество всех произведений представителей комплексных интервалов  $[1, 2] + i[1, 2]$  и  $[3, 4] + i[3, 4]$  в сравнении с их интервальным произведением.

Условимся для интервала  $\mathbf{a} \in \mathbb{IR}$  под  $\mathbf{a}^2$  понимать интервальное расширение функции возведения в квадрат  $x \mapsto x^2$ , т.е.  $\mathbf{a}^2 = \{a^2 \mid a \in \mathbf{a}\}$ . Конструктивное определение этой операции таково

$$\mathbf{a}^2 = \begin{cases} [\underline{\mathbf{a}}^2, \overline{\mathbf{a}}^2], & \text{если } \mathbf{a} \geq 0, \\ [0, \max\{\underline{\mathbf{a}}^2, \overline{\mathbf{a}}^2\}], & \text{если } \mathbf{a} \ni 0, \\ [\overline{\mathbf{a}}^2, \underline{\mathbf{a}}^2], & \text{если } \mathbf{a} \leq 0. \end{cases}$$

Тогда арифметические операции над прямоугольными комплексными интервалами определяются следующим образом:

$$(\mathbf{a}_1 + i\mathbf{b}_1) + (\mathbf{a}_2 + i\mathbf{b}_2) = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) + i(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2),$$

$$(\mathbf{a}_1 + i\mathbf{b}_1) - (\mathbf{a}_2 + i\mathbf{b}_2) = (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2) + i(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2),$$

$$(\mathbf{a}_1 + i\mathbf{b}_1) \cdot (\mathbf{a}_2 + i\mathbf{b}_2) = (\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 - \mathbf{b}_1\mathbf{b}_2) + i(\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1),$$

$$(\mathbf{a}_1 + i\mathbf{b}_1)/(\mathbf{a}_2 + i\mathbf{b}_2) = \frac{1}{\mathbf{a}_2^2 + \mathbf{b}_2^2} ((\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_1\mathbf{b}_2) + i(\mathbf{a}_2\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1\mathbf{b}_2)),$$

причём деление выполнимо при  $0 \notin (\mathbf{a}_2 + i\mathbf{b}_2)$ .

Деление вообще требует особых предосторожностей, поскольку в силу неоднократного вхождения  $\mathbf{a}_2$  и  $\mathbf{b}_2$  в приведённую выше формулу получаемый с её помощью прямоугольный комплексный интервал в общем случае значительно шире точной области значений частного  $\{z_1/z_2 \mid z_1 \in (\mathbf{a}_1 + i\mathbf{b}_1), z_2 \in (\mathbf{a}_2 + i\mathbf{b}_2)\}$ . К примеру, если интервалы  $(\mathbf{a}_1 + i\mathbf{b}_1)$  и  $(\mathbf{a}_2 + i\mathbf{b}_2)$  оказываются вещественными, т.е. когда  $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2 = 0$ , результат выполнения комплексного прямоугольного деления  $(\mathbf{a}_1 + i\mathbf{b}_1)/(\mathbf{a}_2 + i\mathbf{b}_2)$  не совпадает с результатом деления по формулам классической интервальной арифметики  $\mathbb{IR}$ , т.е. с  $\mathbf{a}_1/\mathbf{a}_2$ .



Нередко на практике более предпочтительным является определение деления, данное Дж. Рокне и П. Ланкастером в [84]:

$$(a_1 + ib_1)/(a_2 + ib_2) = (a_1 + ib_1) \cdot \frac{1}{a_2 + ib_2},$$

где под

$$\frac{1}{a_2 + ib_2}$$

понимается наименьший по включению прямоугольный комплексный интервал  $w \in \mathbb{C}_{\text{rect}}$ , такой что  $\{1/z \mid z \in (a_2 + ib_2)\} \subseteq w$ . Тем самым действительно получаются более точные результаты, но ценой существенных дополнительных трудозатрат для вычисления по специальным формулам из [84].

Арифметические операции над круговыми комплексными интервалами определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} (c_1, r_1) + (c_2, r_2) &= (c_1 + c_2, r_1 + r_2), \\ (c_1, r_1) - (c_2, r_2) &= (c_1 - c_2, r_1 + r_2), \\ (c_1, r_1) \cdot (c_2, r_2) &= (c_1 c_2, |c_1| r_2 + |c_2| r_1 + r_1 r_2), \\ \frac{1}{(c, r)} &= \left( \frac{c^*}{|c|^2 - r^2}, \frac{r}{|c|^2 - r^2} \right), \\ (c_1, r_1)/(c_2, r_2) &= (c_1, r_1) \cdot \frac{1}{(c_2, r_2)}, \end{aligned}$$

где  $c^* = \text{Re } c - i \text{Im } c$  — комплексное число, сопряжённое к  $c$ .

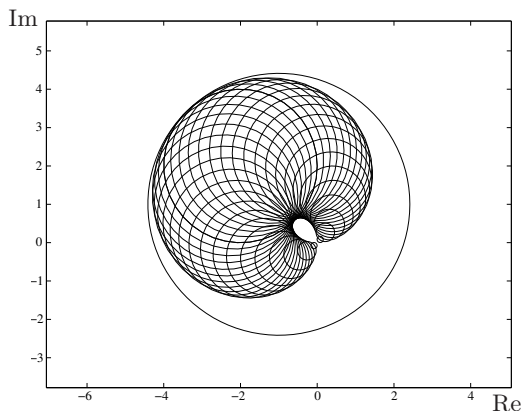


Рис. 1.10. Множество всех произведений представителей круговых комплексных интервалов  $(1, 1)$  и  $(-1 + i, 1)$  в сравнении с их интервальным произведением.

Покажем, что

$$\{z_1 z_2 \mid z_1 \in (c_1, r_1), z_2 \in (c_2, r_2)\} \subseteq (c_1, r_1) \cdot (c_2, r_2). \quad (1.84)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} |z_1 z_2 - c_1 c_2| &= |c_1(z_2 - c_2) + c_2(z_1 - c_1) + (z_1 - c_1)(z_2 - c_2)| \\ &\leq |c_1| |z_2 - c_2| + |c_2| |z_1 - c_1| + |z_1 - c_1| |z_2 - c_2| \\ &\leq |c_1| r_2 + |c_2| r_1 + r_1 r_2. \end{aligned}$$

Но насколько сильно отличаются друг от друга левая и правая части включения (1.84)? На Рис. 1.10 изображено интервальное произведение  $(1, 1) \cdot (-1 + i, 1)$  — круг комплексной плоскости с центром в  $(-1 + i)$  — в сравнении с множеством результатов умножений «по представителям», т. е.

$$\{z_1 z_2 \mid z_1 \in (1, 1), z_2 \in (-1 + i, 1)\},$$

которое выделено круговой штриховкой. Этот выразительный пример, иллюстрирующий огрубление результата при перемножении круговых комплексных интервалов, был предложен М. Гриммером.

Алгебраические свойства комплексных интервальных арифметик:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= \mathbf{v} + \mathbf{u}, && \text{— коммутативность сложения,} \\ (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} &= \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}), && \text{— ассоциативность сложения,} \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, && \text{— коммутативность умножения,} \\ \mathbf{u}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) &\subseteq \mathbf{uv} + \mathbf{uw}, && \text{— субдистрибутивность.} \end{aligned}$$

При этом, как и в вещественном случае,

$$\mathbf{u}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{uv} + \mathbf{uw}$$

для любых  $u \in \mathbb{C}$  и  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{IC}$ .

Отметим, что умножение в прямоугольной комплексной интервальной арифметике  $\mathbb{IC}_{\text{rect}}$  не обладает ассоциативностью. К примеру, для  $\mathbf{u} = ([1, 2] + i)$ ,  $\mathbf{v} = (1 + i)$  и  $\mathbf{w} = (1 + i)$  имеем

$$\begin{aligned} (\mathbf{uv})\mathbf{w} &= ([0, 1] + i[2, 3]) \cdot (1 + i) = [-3, -1] + i[2, 4], \\ \mathbf{u}(\mathbf{vw}) &= ([1, 2] + i) \cdot 2i = -2 + i[2, 4]. \end{aligned}$$

Причина этой потери кроется в отсутствии дистрибутивности умножения по сложению в вещественной интервальной арифметике  $\mathbb{IR}$ . Но в круговой комплексной интервальной арифметике ассоциативность умножения выполняется:

$$(\mathbf{uv})\mathbf{w} = \mathbf{u}(\mathbf{vw}) \quad \text{для любых } \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{IC}_{\text{circ}}.$$

**Предложение 1.8.1** В комплексных интервальных арифметиках  $\mathbb{IC}_{\text{rect}}$  и  $\mathbb{IC}_{\text{circ}}$  арифметические операции монотонны по включению, т. е. для любых прямоугольных или круговых комплексных интервалов  $\mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{v}, \mathbf{v}'$  и любой операции  $\star \in \{+, -, \cdot, /\}$  справедливо

$$\mathbf{u} \subseteq \mathbf{u}', \mathbf{v} \subseteq \mathbf{v}' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} \star \mathbf{v} \subseteq \mathbf{u}' \star \mathbf{v}'.$$

В вещественном случае обоснование этого свойства было прозрачным и не сталкивалось с трудностями, но для комплексной круговой интервальной арифметики монотонность по включению неочевидна и требует специального доказательства, поскольку комплексный аналог точного равенства (1.2) не выполняется. Читатель может увидеть доказательство Предложения 1.8.1 в книге [1].

Справедлив комплексный вариант основной теоремы интервальной арифметики

**Теорема 1.8.1** Пусть  $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$  — рациональная функция комплексных аргументов  $z_1, z_2, \dots, z_n$  и для неё определён результат  $\mathbf{f}(z_1, z_2, \dots, z_n)$  подстановки вместо аргументов интервалов их изменения  $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$  и выполнения всех действий над ними по правилам комплексной интервальной арифметики. Тогда

$$\{f(z_1, \dots, z_n) \mid z_1 \in z_1, \dots, z_n \in z_n\} \subseteq \mathbf{f}(z_1, \dots, z_n),$$

т. е.  $\mathbf{f}(z_1, z_2, \dots, z_n)$  содержит область значений функции  $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$  на множестве  $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ .

Доказательство этого утверждения совершенно аналогично вещественному случаю. Но теперь в силу особенностей комплексных интервальных арифметик даже единственность вхождений переменных в выражение и их первая степень не гарантируют совпадения области значений функции с результатом интервального оценивания  $\mathbf{f}(z_1, z_2, \dots, z_n)$ .

Отметим в заключение, что на комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  наряду с рассмотренными типами интервалов в виде кругов и прямоугольников в некоторых задачах используются также круговые кольца [82], круговые или кольцевые секторы [68, 46] и даже подмножества  $\mathbb{C}$  в виде «полумесяцев».

## 1.9 Метрика и топология на множествах интервалов

Любой интервал задаётся парой чисел, т. е. точкой в пространстве  $\mathbb{R}^2$ . Поэтому отличие одного интервала от другого можно измерять с помощью любого из расстояний, существующих в  $\mathbb{R}^2$ , например, евклидовым расстоянием или с помощью чебышёвской метрики. Но это будет довольно поверхностным решением вопроса, так как интервалы — это не просто пары точек, но в случае  $\mathbb{I}\mathbb{R}$  они являются также подмножествами вещественной оси  $\mathbb{R}$ . Желательно определить расстояние между интервалами так, чтобы оно было естественно связанным с расстоянием между отдельными точками из этих интервалов. Тогда в различных выкладках и рассуждениях можно будет пользоваться этой связью, получая более точные оценки или более тонкие выводы.

В геометрии известна конструкция *хаусдорфова расстояния* между множествами (расстояния Хаусдорфа), которое использует в качестве основы расстояние между точками множеств. Напомним, что если на  $\mathbb{R}^n$  задано некоторое расстояние  $d$ , то *хаусдорфово расстояние* между компактными множествами  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  определяется [3], как

$$d(A, B) = \max\left\{\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} d(a, b)\right\}. \quad (1.85)$$

Оно имеет ясный и естественный геометрический смысл, будучи максимумом из таких минимальных возможных неотрицательных чисел  $r_A$  и  $r_B$ , что  $r_B$ -окрестность множества  $A$  относительно расстояния  $d$  содержит  $B$ , а  $r_A$ -окрестность множества  $B$  относительно расстояния  $d$  содержит множество  $A$ .

Мы введём на множестве интервалов некоторое расстояние, а затем покажем, что оно и является искомым хаусдорфовым расстоянием.

**Предложение 1.9.1** *Отображения*

$$\text{dist} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad \text{и} \quad \text{dist} : \mathbb{K}\mathbb{R} \times \mathbb{K}\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

*определяемые как*

$$\text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \max\{|\underline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}}|, |\overline{\mathbf{a}} - \overline{\mathbf{b}}|\} = |\mathbf{a} \ominus \mathbf{b}|, \quad (1.86)$$

*обладают следующими свойствами:*

$$\text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \geq 0, \text{ и равенство достигается только при } \mathbf{a} = \mathbf{b},$$

$$\text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \text{dist}(\mathbf{b}, \mathbf{a}),$$

$$\text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) \leq \text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \text{dist}(\mathbf{b}, \mathbf{c}) \text{ для любых } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ из } \mathbb{R} \text{ или } \mathbb{K}\mathbb{R}.$$

**Доказательство.** Первые два свойства следуют непосредственно из вида выражения (1.86), а последнее свойство вытекает из «неравенства треугольника» для абсолютной величины вещественных чисел.

В самом деле, очевидны неравенства

$$|\underline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{c}}| \leq |\underline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}}| + |\underline{\mathbf{b}} - \underline{\mathbf{c}}| \quad \text{и} \quad |\overline{\mathbf{a}} - \overline{\mathbf{c}}| \leq |\overline{\mathbf{a}} - \overline{\mathbf{b}}| + |\overline{\mathbf{b}} - \overline{\mathbf{c}}|.$$

Беря их почленный максимум, получим

$$\max\{|\underline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{c}}|, |\overline{\mathbf{a}} - \overline{\mathbf{c}}|\} \leq \max\{|\underline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}}| + |\underline{\mathbf{b}} - \underline{\mathbf{c}}|, |\overline{\mathbf{a}} - \overline{\mathbf{b}}| + |\overline{\mathbf{b}} - \overline{\mathbf{c}}|\}. \quad (1.87)$$

Не ограничивая общность рассмотрения, можно предположить, что максимум в правой части этого неравенства достигается на первой сумме, т. е. равен  $|\underline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}}| + |\underline{\mathbf{b}} - \underline{\mathbf{c}}|$ . Тогда неравенство только усилится, если мы заменим первое слагаемое этой суммы на не меньший его  $\max\{|\underline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}}|, |\overline{\mathbf{a}} - \overline{\mathbf{b}}|\}$ , а второе слагаемое аналогично заменим на заведомо не меньшую его величину  $\max\{|\underline{\mathbf{b}} - \underline{\mathbf{c}}|, |\overline{\mathbf{b}} - \overline{\mathbf{c}}|\}$ . В целом получаем

$$\max\{|\underline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{c}}|, |\overline{\mathbf{a}} - \overline{\mathbf{c}}|\} \leq \max\{|\underline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}}|, |\overline{\mathbf{a}} - \overline{\mathbf{b}}|\} + \max\{|\underline{\mathbf{b}} - \underline{\mathbf{c}}|, |\overline{\mathbf{b}} - \overline{\mathbf{c}}|\},$$

что и означает

$$\text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) \leq \text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \text{dist}(\mathbf{b}, \mathbf{c}).$$

Аналогичными рассуждениями можно показать, что это же неравенство будет верно и в случае, когда в правой части (1.87) максимум достигается на второй сумме. ■

Предложение 1.9.1 показывает, что величина  $\text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  обладает всеми свойствами абстрактного расстояния, т. е. метрики (см., к примеру, [21]). Таким образом, мотивируется следующее

**Определение 1.9.1** Величину  $\text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ , определяемую посредством (1.86), будем называть расстоянием (метрикой) на множествах интервалов  $\mathbb{IR}$  или  $\mathbb{KR}$ .

**Предложение 1.9.2** Для любых интервалов  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  из  $\mathbb{IR}$  или  $\mathbb{KR}$  имеет место

$$\text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \max \left\{ \min \{ t \in \mathbb{R}_+ \mid \mathbf{a} \subseteq \mathbf{b} + t[-1, 1] \}, \min \{ t \in \mathbb{R}_+ \mid \mathbf{b} \subseteq \mathbf{a} + t[-1, 1] \} \right\}. \quad (1.88)$$

**Доказательство.** Для интервалов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  обозначим через  $d$  правую часть равенства (1.88), то есть

$$d := \max \left\{ \min \{ t \in \mathbb{R}_+ \mid \mathbf{a} \subseteq \mathbf{b} + t[-1, 1] \}, \min \{ t \in \mathbb{R}_+ \mid \mathbf{b} \subseteq \mathbf{a} + t[-1, 1] \} \right\}.$$

Тогда

$$\mathbf{b} \subseteq \mathbf{a} + d[-1, 1], \quad (1.89)$$

$$\mathbf{a} \subseteq \mathbf{b} + d[-1, 1], \quad (1.90)$$

и  $d$  — минимальное неотрицательное вещественное число, удовлетворяющее соотношениям (1.89)–(1.90).

Условие (1.89) равносильно системе неравенств

$$\bar{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{b}} \geq -d, \quad (1.91)$$

$$\underline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}} \leq d, \quad (1.92)$$

а условие (1.90) равносильно системе неравенств

$$\bar{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{b}} \leq d, \quad (1.93)$$

$$\underline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}} \geq -d. \quad (1.94)$$

Комбинируя (1.91) с (1.93) и (1.92) с (1.94), получим

$$|\underline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}}| \leq d \quad \text{и} \quad |\bar{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{b}}| \leq d,$$

так что если  $d$  — наименьшее число, для которого выполнены оба эти неравенства, то

$$d = \max \{ |\underline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}}|, |\bar{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{b}}| \}.$$

Это совпадает с определением расстояния между  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . ■

Предложением 1.9.2 обосновывается тот факт, что расстояние  $\text{dist}$  на  $\mathbb{IR}$  в самом деле является хаусдорфовым расстоянием между интервалами, как множествами числовой оси  $\mathbb{R}$ . Перечислим основные свойства расстояния  $\text{dist}$ :

**Предложение 1.9.3**

$$\text{dist}(\mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad (1.95)$$

$$\text{dist}(\mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{b} + \mathbf{d}) \leq \text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \text{dist}(\mathbf{c}, \mathbf{d}), \quad (1.96)$$

$$\text{dist}(\text{dual } \mathbf{a}, \text{dual } \mathbf{b}) = \text{dist}(-\mathbf{a}, -\mathbf{b}) = \text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad (1.97)$$

$$\text{dist}(\text{pro } \mathbf{a}, \text{pro } \mathbf{b}) \leq \text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad (1.98)$$

$$\text{dist}(\mathbf{ab}, \mathbf{ac}) \leq |\mathbf{a}| \text{dist}(\mathbf{b}, \mathbf{c}), \quad (1.99)$$

$$\mathbf{a} \subseteq \mathbf{b} \subseteq \mathbf{c} \Rightarrow \max\{\text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \text{dist}(\mathbf{b}, \mathbf{c})\} \leq \text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{c}). \quad (1.100)$$

Некоторые из свойств этого списка имеют свои собственные имена. В частности, свойство (1.95) называется «инвариантностью относительно сдвигов» или «трансляционной инвариантностью».

**Доказательство.** Первое свойство следует непосредственно из определения расстояния  $\text{dist}$ . Далее, с помощью (1.95) и неравенства треугольника нетрудно обосновать следующее неравенство (1.96):

$$\begin{aligned} \text{dist}(\mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{b} + \mathbf{d}) &\leq \text{dist}(\mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) + \text{dist}(\mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{b} + \mathbf{d}) \\ &= \text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \text{dist}(\mathbf{c}, \mathbf{d}). \end{aligned}$$

Свойства (1.97) и (1.98) очевидны.

Доказательство важного свойства (1.99) мы проведём в предположении, что интервал  $\mathbf{a}$  правилен. Если это не так, то дуализуем произведения  $\mathbf{ab}$  и  $\mathbf{ac}$ , рассмотрев  $\text{dual}(\mathbf{ab})$  и  $\text{dual}(\mathbf{ac})$ . Расстояние между ними в силу (1.97) равно расстоянию между  $\mathbf{ab}$  и  $\mathbf{ac}$ , но теперь

$$\text{dual}(\mathbf{ab}) = \text{dual } \mathbf{a} \cdot \text{dual } \mathbf{b} \quad \text{и} \quad \text{dual}(\mathbf{ac}) = \text{dual } \mathbf{a} \cdot \text{dual } \mathbf{c},$$

где общий множитель  $\text{dual } \mathbf{a}$  является правильным интервалом.

Если положить  $r := \text{dist}(\mathbf{b}, \mathbf{c})$ , то

$$\mathbf{b} \subseteq \mathbf{c} + r[-1, 1] \quad \text{и} \quad \mathbf{c} \subseteq \mathbf{b} + r[-1, 1]$$

в силу Предложения 1.9.2. Умножая обе части этих соотношений на  $\mathbf{a}$  и пользуясь далее монотонностью интервальных арифметических операций по включению и субдистрибутивностью, получим

$$\mathbf{ab} \subseteq \mathbf{a}(\mathbf{c} + r[-1, 1]) \subseteq \mathbf{ac} + \mathbf{a}r[-1, 1] \quad \text{и} \quad \mathbf{ac} \subseteq \mathbf{a}(\mathbf{b} + r[-1, 1]) \subseteq \mathbf{ab} + \mathbf{a}r[-1, 1].$$

Но если  $\mathbf{a}$  — правильный интервал, то  $\mathbf{a}[-1, 1] = |\mathbf{a}|[-1, 1]$ , и поэтому справедливо

$$\mathbf{ab} \subseteq \mathbf{ac} + (|\mathbf{a}|r)[-1, 1] \quad \text{и} \quad \mathbf{ac} \subseteq \mathbf{ab} + (|\mathbf{a}|r)[-1, 1].$$

Повторное применение Предложения 1.9.2 приводит к заключению о том, что действительно

$$\text{dist}(\mathbf{ab}, \mathbf{ac}) \leq |\mathbf{a}|r = |\mathbf{a}| \text{dist}(\mathbf{b}, \mathbf{c}).$$

Докажем, наконец, (1.100). Если  $\mathbf{a} \subseteq \mathbf{b}$ , то  $\underline{\mathbf{a}} \geq \underline{\mathbf{b}}$  и  $\bar{\mathbf{a}} \leq \bar{\mathbf{b}}$ , а потому

$$|\underline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}}| = \underline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}} \quad \text{и} \quad |\bar{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{b}}| = \bar{\mathbf{b}} - \bar{\mathbf{a}}.$$

Следовательно, тогда  $\text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \max\{\underline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{b}} - \bar{\mathbf{a}}\}$ .

По тем же самым причинам  $\text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = \max\{\underline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{c}}, \bar{\mathbf{c}} - \bar{\mathbf{a}}\}$ . Но  $\underline{\mathbf{b}} \geq \underline{\mathbf{c}}$  и  $\bar{\mathbf{b}} \leq \bar{\mathbf{c}}$  в силу  $\mathbf{b} \subseteq \mathbf{c}$ , так что

$$\underline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}} \geq \underline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{c}} \quad \text{и} \quad \bar{\mathbf{b}} - \bar{\mathbf{a}} \geq \bar{\mathbf{c}} - \bar{\mathbf{a}}.$$

Беря максимумы от соответствующих частей этих неравенств, получаем неравенство того же смысла, означающее  $\text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq \text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{c})$ .

Аналогичным образом доказывается, что  $\text{dist}(\mathbf{b}, \mathbf{c}) \leq \text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{c})$ , и потому действительно  $\max\{\text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \text{dist}(\mathbf{b}, \mathbf{c})\} \leq \text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{c})$ . ■

Из доказательства свойства (1.99) хорошо видно, что оно целиком обязано своим существованием факту хаусдорфовости расстояния  $\text{dist}$ . В иных условиях (1.99) было бы невозможным. Другое интересное наблюдение состоит в том, что расстояние  $\text{dist}$  между интервалами является, фактически, чебышёвским расстоянием (максимум-расстоянием) между точками интервальной плоскости  $\mathbb{R}^2$ , изображающими эти интервалы в координатах «левый конец-правый конец».

**Предложение 1.9.4** *Последовательность интервалов  $\{\mathbf{a}_k\}_{k=1}^{\infty}$  сходится тогда и только тогда, когда последовательности концов  $\{\underline{\mathbf{a}}_k\}$  и  $\{\bar{\mathbf{a}}_k\}$  сходятся в  $\mathbb{R}$ . При этом*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{a}_k = \left[ \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{\mathbf{a}}_k, \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{a}}_k \right].$$

**Доказательство** очевидно. ■

Множество вместе с заданным на нём расстоянием-метрикой называется, как известно, *метрическим пространством* (см., к примеру, [21]). Говорят, что метрическое пространство *полное*, если любая фундаментальная последовательность (называемая также «последовательностью Коши» или «сходящейся в себе последовательностью») имеет в нём предел [21]. Полнота метрического пространства, фактически, означает, что существование пределов и выполнимость предельных переходов в нём не ограничены свойствами самого этого пространства. Другая возможная трактовка этого свойства состоит в том, что полное метрическое пространство не имеет «дырок», т. е. недоступных мест, которые бесконечно близки к этому пространству, но не принадлежат ему. Из сформулированных ранее фактов вытекает, что множества интервалов  $\mathbb{IR}$  и  $\mathbb{KR}$ , снабжённые расстоянием  $\text{dist}$ , являются полными метрическими пространствами.

Немедленным следствием Предложения 1.9.4 и известной из математического анализа теоремы Вейерштрасса о сходимости монотонной ограниченной последовательности является

**Предложение 1.9.5** (принцип вложенных интервалов) *В классической интервальной арифметике  $\mathbb{IR}$  всякая вложенная последовательность интервалов  $\{\mathbf{a}_k\}_{k=1}^{\infty}$ , т. е. такая, что  $\mathbf{a}_{k+1} \subseteq \mathbf{a}_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , имеет предел  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{a}_k$  и*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{a}_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathbf{a}_k.$$

Введение на множестве интервалов предельных переходов и сходимости позволя-ет рассмотреть понятие непрерывности интервальных отображений.

**Определение 1.9.2** *Интервальная функция  $\mathbf{f} : \mathbb{IR} \rightarrow \mathbb{IR}$  или  $\mathbf{f} : \mathbb{KR} \rightarrow \mathbb{KR}$  называется непрерывной в  $\tilde{\mathbf{x}}$ , если для любой последовательности  $\mathbf{x}_k$ , сходящейся к  $\tilde{\mathbf{x}}$ , последовательность значений функции  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$  сходится к  $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}})$ . Интервальная функция называется непрерывной на заданном множестве, если она непрерывна в любой точке этого множества.*

Это определение очевидным образом распространяется также на интервальные функции нескольких переменных, если стандартным образом определить метрику на прямом произведении необходимого количества экземпляров метрических пространств  $\mathbb{IR}$  или  $\mathbb{KR}$  (см. [21]). Далее этот вопрос подробно обсуждается в Главе 2.

Отметим, что все интервальные арифметические операции на  $\mathbb{IR}$  и  $\mathbb{KR}$ , а также операции  $\vee$ ,  $\wedge$ , «dual», «pro» и «opp» являются непрерывными в метрике  $\text{dist}$ . Для сложения и вычитания это прямо следует из неравенства (1.96), а для умножения и деления — из неравенства (1.99). Действительно, если последовательности интервалов  $\{\mathbf{a}_k\}$  и  $\{\mathbf{b}_k\}$  таковы, что  $\lim \mathbf{a}_k = \mathbf{a}$  и  $\lim \mathbf{b}_k = \mathbf{b}$ , то

$$\begin{aligned} \text{dist}(\mathbf{a}_k + \mathbf{b}_k, \mathbf{a} + \mathbf{b}) &\leq \text{dist}(\mathbf{a}_k, \mathbf{a}) + \text{dist}(\mathbf{b}_k, \mathbf{b}) \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty, \\ \text{dist}(\mathbf{a}_k \mathbf{b}_k, \mathbf{a} \mathbf{b}) &\leq \text{dist}(\mathbf{a}_k \mathbf{b}_k, \mathbf{a}_k \mathbf{b}) + \text{dist}(\mathbf{a}_k \mathbf{b}, \mathbf{a} \mathbf{b}) \\ &\leq |\mathbf{a}_k| \text{dist}(\mathbf{b}_k, \mathbf{b}) + |\mathbf{b}| \text{dist}(\mathbf{a}_k, \mathbf{a}) \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Это и означает непрерывность сложения и умножения. Непрерывность вычитания и деления нетрудно вывести из выражения этих операций через сложение и умножение, т. е. пользуясь тем, что

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-1) \mathbf{b}, \quad \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \mathbf{a} \cdot \left[ \frac{1}{\mathbf{b}}, \frac{1}{\mathbf{b}} \right].$$

## 1.10 Твины и твинная арифметика

Слово «твин» является калькой английского термина *twın*, который, в свою очередь, есть сокращение от *TWice INterval* — «двойной интервал». С другой стороны, в английском языке имеется самостоятельное слово *twın*, означающее «двойня», или, более общо, «парная вещь», что по смыслу довольно близко к нашему термину. Как бы то ни было, твин — это «интервал интервалов», или, что равносильно, интервал с интервальными концами, что можно записать в виде

$$[\underline{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}], [\underline{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{b}}].$$



Твин является множеством всех интервалов, больших или равных  $[\underline{a}, \bar{a}]$  и меньших или равных  $[\underline{b}, \bar{b}]$ , и точное определение зависит от смысла, который мы вкладываем в понятия «больше или равно», «меньше или равно».

Поскольку интервалы могут быть упорядочены различными способами, то существуют различные виды твинов. Двум основным частичным порядкам на  $\mathbb{IR}$  и  $\mathbb{KR}$  — « $\subseteq$ » и « $\leq$ » — соответствуют и два основных типа твинов: « $\subseteq$ »-твины и « $\leq$ »-твины.

Впервые твины были рассмотрены в работе Э. Гарденьеса и его сотрудников [56]. Необходимость в таких объектах действительно возникает в ряде практических ситуаций. В примерах из §1.1 интервалы были введены как семейства значений точечных величин, но нередко первичными объектами наблюдения являются целые интервалы. Ряд наблюдений с интервальными значениями порождает интервалы с неопределёнными концами.

Например, придя в банк по поводу обмена валюты, мы сталкиваемся с двумя величинами — курсом покупки данной валюты банком и курсом её продажи. Ясно, что где-то между ними лежит «себестоимость» данной валюты для банка, а потому результатом наблюдения в рассматриваемом случае является целый интервал. Обследование нескольких банков приводит уже к семейству интервалов, которые можно формализовать как интервал с интервальными концами, т. е. как твин.

Поскольку интервалы могут быть упорядочены различными способами, то существуют различные виды твинов. Двум основным частичным порядкам на  $\mathbb{IR}$  и  $\mathbb{KR}$  — « $\subseteq$ » и « $\leq$ » — соответствуют и два основных типа твинов: « $\subseteq$ »-твины и « $\leq$ »-твины.

## 1.11 Другие интервальные арифметики

### 1.11а Интервальная арифметика Кэхэна

Ещё одна популярная интервальная арифметика — это *расширенная интервальная арифметика Кэхэна*, идея которой впервые была высказана У. Кэхэном в работе [63]. Но систематическое описание этой арифметики было дано позже в [72].

В основе арифметики Кэхэна лежит то простое наблюдение, что при делении  $\mathbf{a}/\mathbf{b}$ , даже в случае присутствия нуля в интервале-делителе  $\mathbf{b}$ , результаты операции  $a/b$  для остальных  $a \in \mathbf{a}$  и  $b \in \mathbf{b}$  определены. На их основе, руководствуясь фундаментальным свойством (1.2)

$$\mathbf{a} \star \mathbf{b} = \{ a \star b \mid a \in \mathbf{a}, b \in \mathbf{b} \} \quad \text{для } \star \in \{ +, -, \cdot, / \},$$

можно придать интервальному делению  $\mathbf{a}/\mathbf{b}$  расширенный смысл. Будем считать результатом этого деления такое множество («обобщённый интервал»), которое образовано результатами всевозможных делений  $a/b$  для тех представителей  $a \in \mathbf{a}$  и  $b \in \mathbf{b}$ , для которых это имеет смысл. Иными словами, положим

$$\mathbf{a}/\mathbf{b} := \{ a/b \mid a \in \mathbf{a}, b \in \mathbf{b} \setminus \{0\} \}.$$

Помимо обычных интервалов из  $\mathbb{IR}$  элементами арифметики Кэхэна являются также множества вида

$$[-\infty, p], \quad [q, +\infty], \quad [-\infty, p] \cup [q, +\infty], \quad [-\infty, +\infty] \quad (p < q).$$

Для любых обычных интервалов  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{IR}$  результаты сложения, вычитания, умножения и деления  $\mathbf{a}/\mathbf{b}$  при  $0 \notin \mathbf{b}$  в классической интервальной арифметике и арифметике Кэхэна полностью совпадают. Но в арифметике Кэхэна дополнительно определено деление интервалов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  с  $0 \in \mathbf{b}$ , которое и приводит к бесконечным интервалам. Для удобства мы выпишем соответствующие результаты в развёрнутой форме:

$$\mathbf{a}/\mathbf{b} = \frac{[\underline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{a}}]}{[\underline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{b}}]} = \begin{cases} \mathbf{a} \cdot [1/\overline{\mathbf{b}}, 1/\underline{\mathbf{b}}], & \text{если } 0 \notin \mathbf{b}, \\ ] - \infty, +\infty [, & \text{если } 0 \in \mathbf{a} \text{ и } 0 \in \mathbf{b}, \\ [\overline{\mathbf{a}}/\underline{\mathbf{b}}, +\infty [, & \text{если } \overline{\mathbf{a}} < 0 \text{ и } \underline{\mathbf{b}} < \overline{\mathbf{b}} = 0, \\ ] - \infty, \overline{\mathbf{a}}/\underline{\mathbf{b}}] \cup [\overline{\mathbf{a}}/\underline{\mathbf{b}}, +\infty [, & \text{если } \overline{\mathbf{a}} < 0 \text{ и } \underline{\mathbf{b}} < 0 < \overline{\mathbf{b}}, \\ ] - \infty, \overline{\mathbf{a}}/\overline{\mathbf{b}}], & \text{если } \overline{\mathbf{a}} < 0 \text{ и } 0 = \underline{\mathbf{b}} < \overline{\mathbf{b}}, \\ ] - \infty, \underline{\mathbf{a}}/\underline{\mathbf{b}}], & \text{если } 0 < \underline{\mathbf{a}} \text{ и } \underline{\mathbf{b}} < \overline{\mathbf{b}} = 0, \\ ] - \infty, \underline{\mathbf{a}}/\underline{\mathbf{b}}] \cup [\underline{\mathbf{a}}/\overline{\mathbf{b}}, +\infty [, & \text{если } 0 < \underline{\mathbf{a}} \text{ и } \underline{\mathbf{b}} < 0 < \overline{\mathbf{b}}, \\ [\underline{\mathbf{a}}/\overline{\mathbf{b}}, +\infty [, & \text{если } 0 < \underline{\mathbf{a}} \text{ и } 0 = \underline{\mathbf{b}} < \overline{\mathbf{b}}, \\ \emptyset, & \text{если } 0 \notin \mathbf{a} \text{ и } 0 = \mathbf{b}. \end{cases} \quad (1.101)$$

Подробное описание интервальной арифметики, формализующей операции над интервалами и их дополнениями, аналогичные (1.101), можно найти в [72]. Эта арифметика полезна, например, при вычислениях с цепными дробями, но для наших целей вполне достаточно использовать формулы (1.101), а затем пересечь результат с обычным интервалом.

Отметим, что в интервальной арифметике Кэхэна имеет место монотонность операций по включению, которая является незаменимым инструментом теоретического анализа интервальных методов и основой их применения.

В широких масштабах арифметика Кэхэна сама по себе применяется редко. Одной из причин этого является то обстоятельство, что промежутки между отдельными компонентами связности интервалов вида  $[-\infty, p] \cup [q, +\infty]$  уже при самых простейших операциях с ними исчезают, получается вся числовая ось  $\mathbb{R}$ , и дальнейшие вычисления становятся бессодержательными.

### 1.116 Мультиинтервальная арифметика

Мультиинтервал — это объединение конечного числа несвязных интервалов числовой оси (Рис. 1.11). Между мультиинтервалами также могут быть определены арифметические операции «по представителям» совершенно аналогично тому, как это сделано на множестве интервалов. Конкретные детали этого построения читатель может найти в [44].

Рис. 1.11. Мультиинтервал в  $\mathbb{R}$ .

Мультиинтервалы могут возникнуть как сами по себе, исходя из желания более точно описать какую-то несвязную числовую область, так и результате комбинации пересечения и деления в арифметике Кэхэна. Например,

$$\frac{[1, 2]}{[-1, 2]} \cap [-3, 4] = ((-\infty, -1] \cup [1, \infty)) \cap [-3, 4] = [-3, -1] \cup [1, 4].$$

Алгебраические свойства мультиинтервальной арифметики заметно хуже, чем у классической интервальной арифметики, так как в ней даже для сложения не выполняется закон сокращения (1.31). Например,

$$([1, 2] \cup [3, 4]) + [0, 1] = [1, 3] \cup [3, 5] = [1, 5],$$

но и

$$[1, 4] + [0, 1] = [1, 5].$$

Невозможность сокращения имеет следствием отсутствие обратимости арифметических операций, которая столь важна при решении обратных задач и в алгебраических преобразованиях. То есть, алгебраическое пополнение мультиинтервальной арифметики, похожее на арифметику Каухера, в принципе не может быть построено.

Но главным недостатком мультиинтервальной арифметики является быстрое нарастание сложности вычислений вследствие лавинообразного «размножения» интервалов, из которых составлены мультиинтервалы. Например, при сложении или вычитании мультиинтервалов, каждый из которых образован двумя интервалами, результат будет, вообще говоря, состоять уже из *четырёх* интервалов ( $4 = 2 \cdot 2$ ). Это практическое наблюдение подкрепляется теоретическими результатами. В работе М. Ногейра и А. Нандигам [81] строго доказано, что добавление к множеству интервалов хотя бы одного мультиинтервала превращает некоторые простые полиномиально разрешимые интервальные задачи в труднорешаемые (NP-трудные). Тем не менее, в ограниченном объёме применять мультиинтервалы в различных вычислениях можно и нужно, что подтверждается успешной практикой.

### 1.11в Сегментные арифметики

*Сегментом* или *отрезком* числовой оси  $\mathbb{R}$  часто называют (см., к примеру, [5]), множество чисел, заключённых между двумя данными числами  $a, b \in \mathbb{R}$ , причём сами они включаются в сегмент. В нашей книге, как и во всех других работах по интервальному анализу, такие множества называют «интервалами», и с дальнейшим развитием интервального анализа это словоупотребление, по-видимому, будет распространяться всё шире. В подобных условиях авторы, пишущие на интервальные темы, иногда используют слово «сегмент» для обозначения полуоткрытых и открытых промежутков числовой оси, т. е. множеств точек между двумя данными границами, из которых либо одна, либо обе не принадлежат самому этому

множеству. При такой терминологии сегментами являются, к примеру, множества  $]1, 2[ = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 2\}$  и  $]1, 2[ = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 2\}$ . Соответственно, *сегментные арифметики* — это множества таких сегментов, снабжённые арифметическими операциями наподобие интервальной арифметики.

Зачем нужны подобные арифметики и имеют ли они смысл?

Цель создания таких арифметик представляется, на первый взгляд, вполне разумной: расширить запас множеств, с которыми мы можем оперировать, раздвинув, тем самым, наши возможности исследования поведения функций на границах множеств и в их окрестностях.

Но, в действительности, все вещественные арифметические операции являются одновременно открытыми и замкнутыми, в топологическом смысле, отображениями из  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$  (см. [42]): они переводят открытые множества в открытые, а замкнутые множества — в замкнутые, и исключением является лишь деление на нуль. Следовательно, результат любой арифметической операции между открытыми или полуоткрытыми интервалами отличается от результата этой же операции между замыканиями только в крайних точках, и это отличие легко может быть найдено и учтено в каждом конкретном случае. Отдельную арифметику незамкнутых множеств строить для этого совсем не стоит!

Что касается деления на интервалы, содержащие нуль, то здесь мы действительно способны получить определённую выгоду от аккуратного вычленения нуля с границы интервала:

$$\frac{1}{[0, 1]} = \mathbb{R}, \quad \text{тогда как} \quad \frac{1}{]0, 1]} = [1, +\infty[,$$

т. е. вместо всей числовой оси получаем лишь полуось. И это соображение является вообще единственным аргументом за допущение незамкнутых интервалов. «Минусов» введения незамкнутых интервалов много и все они очень серьёзные. В силу ряда принципиальных математических причин исчисление незамкнутых интервалов (если оно вообще когда-либо будет создано) по своим возможностям окажется значительно слабее, чем традиционный интервальный анализ, т. е. исчисление замкнутых интервалов.

Дело в том, что своими математическими свойствами ограниченные замкнутые интервалы в корне отличаются от незамкнутых — открытых и полуоткрытых — интервалов. Если первые — компактные множества, то открытые и полуоткрытые интервалы некомпактны со всеми вытекающими отсюда последствиями. Рассматриваемые как топологические пространства, незамкнутые интервалы не обладают свойством полноты, так что фундаментальные последовательности элементов таких незамкнутых интервалов не обязательно сходятся. Наконец, незамкнутые интервалы не являются полными решётками относительно стандартного порядка « $\leq$ » на вещественной оси. Эти факты имеют многообразные нехорошие следствия для практики:

На компактных замкнутых интервалах непрерывные функции достигают своих экстремумов, а на некомпактных открытых и полуоткрытых интервалах могут и не достигать (теорема Вейерштрасса об экстремальных значениях, см., например, [21]).

Для незамкнутых интервалов в  $\mathbb{R}$  и их многомерных аналогов неверна теорема Брауэра о неподвижной точке, лемма Лерэ-Шаудера и основанные на них ин-

тервальные тесты существования решений систем уравнений — интервальный метод Ньютона, метод Кравчика, метод Хансена-Сенгупты (см. Главы 7 и 8). Тем самым на незамкнутых интервалах вычислительный интервальный анализ лишается наиболее мощных своих инструментов, широко применяемых при решении систем линейных и нелинейных уравнений и в глобальной оптимизации.

Неверным оказывается принцип вложенных интервалов (Предложение 1.9.5). Теперь последовательность полуоткрытых в нуле интервалов  $]0, \frac{1}{k}]$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , ни к чему не сходится и имеет пустое пересечение. Оно останется пустым даже в том случае, если мы допустим в нашей последовательности хотя бы один открытый в нуле интервал.

Это большая потеря. Напомним, что теория интервального интеграла (и интервальных оценок интеграла вещественной функции) базируется на этом принципе.

Наиболее практичные и эффективные интервальные методы для решения операторных уравнений (интегральных и дифференциальных) основываются на принципе вложенных интервалов и теоремах Банаха или Шрёдера о сжимающих отображениях, которые также становятся неверными, коль скоро незамкнутые интервалы не являются полными топологическими пространствами.

Принцип Биркгофа-Тарского и лемма Канторовича — результаты о существовании неподвижных точек монотонных отображений частично упорядоченных множеств — неверны для незамкнутых интервалов, не являющихся полными решётками.

Напомним точную формулировку принципа Биркгофа-Тарского (см. [4], §V.3). Пусть  $X$  — полная решётка и  $F : X \rightarrow X$  — некоторое изотонное (т. е. сохраняющее порядок) отображение. Тогда  $F$  имеет неподвижную точку  $x^*$  на  $X$ , т. е.  $x^* = F(x^*)$  для некоторого  $x^* \in X$ .

Далее, каким следует считать расстояние между  $[a, b[$  и  $[a, b]$ ? Введённое в §1.9 расстояние оказывается равным нулю и, тем самым, одно из главных назначений этого расстояния — различать несовпадающие друг с другом элементы пространства — перестаёт выполняться. Более того, на множестве всех замкнутых и незамкнутых интервалов метрика (расстояние) вообще не может введено никаким способом, т. е. как топологическое пространство это множество принципиально неметризуемо.

Известный критерий метризуемости Архангельского утверждает (см. [42]), что топология пространства может быть задана метрикой тогда и только тогда, когда это пространство удовлетворяет первой аксиоме отделимости (так называемой T1) и имеет счётное фундаментальное множество открытых окрестностей. Аксиома T1 топологического пространства — самая слабая из аксиом отделимости, она требует, чтобы у любых двух точек пространства имелось по окрестности, не содержащей другой точки. Нетрудно сообразить, что пространство всех замкнутых и незамкнутых интервалов не удовлетворяет даже этой слабейшей аксиоме: полуоткрытый интервал  $[a, b[$  и его замыкание  $[a, b]$  такими окрестностями окружить нельзя.

Невыполнение аксиомы T1 — это очень серьёзное свидетельство того, что рассматриваемое пространство является весьма экзотичным, на грани патологии. Фактически, оно означает, что содержательное исчисление на множестве замкнутых и

незамкнутых интервалов, скорее всего, никогда не будет построено. Разумеется, это не исключает отдельных эпизодических применений незамкнутых интервалов в тех или иных частных ситуациях.

### 1.11г Дистрибутивные интервальные арифметики

Они были предложены независимо Т.Э. Каминским [23, 24] и А. Ноймайером [79]

## 1.12 Интервалы в сравнении с другими способами описания неопределённости

Помимо интервалов в современной прикладной математике существуют и другие способы описания неопределённости, т.е. частичного знания об интересующих нас величинах. Широко известно теоретико-вероятностное описание неопределённости, справедливое для явлений, которые обнаруживают свойство статистической устойчивости. Соединение идей интервального анализа и теории вероятностей привело в последние годы к развитию вычислительного вероятностного анализа [16]. Разработке близкого круга вопросов, но в другом направлении, посвящена также теория нечётких множеств — отдельная обширная область знаний со своими ценностями и своей оригинальной идеологией (см. например, [17, 20, 26, 32]).

Пусть задано некоторое множество  $X$ , которое будем называть *универсальным множеством*. *Нечётким множеством*  $C$  в  $X$  называется совокупность всевозможных пар вида  $(x, \mu_C(x))$ , где  $x \in X$  и  $\mu_C : X \rightarrow [0, 1]$  — функция, называемая *функцией принадлежности* нечёткого множества  $C$ . Значение  $\mu_C(x)$  для конкретного  $x$  называется *степенью принадлежности* элемента  $x$  нечёткому множеству  $C$  и количественно описывает то, «насколько сильно»  $x$  принадлежит  $C$ .

Теория нечётких множеств имеет определённое внешнее сходство с интервальным анализом, но различия и в аппарате и в основных идеях этих дисциплин всё-таки очень велики. В частности, характерная отличительная особенность теории нечётких множеств в сравнении с интервальным анализом — это наличие нетривиальной функции принадлежности и содержательные рассуждения с ней. Ничего подобного в связи с обычными интервалами не делается. Но в последние годы появляются работы, в которых на интервалах вводится некоторая дополнительная структура (гистограммы и т. п.), операции над которой позволяют более точно определить степень принадлежности или даже вероятность тех или иных значений из результирующей интервальной оценки.

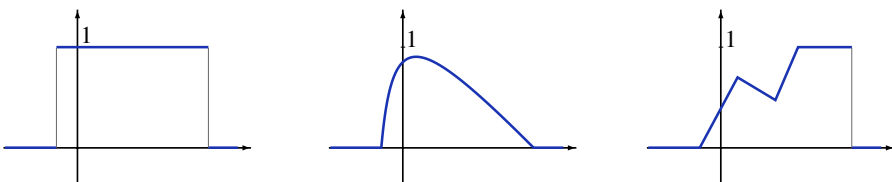


Рис. 1.12. Функции принадлежности интервала (слева) и нечётких множеств.

В чем преимущества и недостатки интервалов в сравнении с другими способами описания неопределённости? Это очень большой и важный вопрос, к которому мы будем неоднократно возвращаться на протяжении всей книги. Прежде всего, интервалы проще, чем вероятностные распределения или нечёткие множества. Для описания одномерного интервала нужно всего два числа (левый и правый концы или середина-радиус), тогда как для описания распределения вероятностей или нечёткого множества нужно задать функции, т. е. существенно больше значений. Можно сказать, что классический интервал — это «бесструктурный объект», который более беден в своих выразительных возможностях, в описании неопределённости, чем вероятностное распределение или нечёткое множество. Но следствием этой «бедности» является лучшая развитость теории интервального анализа и вычислительных методов с интервалами. Кроме того, интервалы и интервальные арифметики оказываются замечательными (или даже уникальными) во многих отношениях.

Помимо классических интервалов и арифметики  $\mathbb{IR}$  неоднократно рассматривались их обобщения, в которых для лучшего описания некоторых частных типов неопределённостей к множеству вещественных интервалов добавлялись дополнительные объекты. Выше мы уже рассматривали арифметику Кэхэна. В работе М. Ногейра и А. Нандигам [81] строго доказано, что добавление к множеству интервалов хотя бы одного неинтервала (в частности, мультиинтервала) превращает задачу нахождения области значений суммы кусочно-линейных функций из полиномиально разрешимой в труднорешаемую (NP-трудную).

С другой стороны, как впервые было отмечено В. Крейновичем [69], интервалы оказываются предельным случаем сумм независимых ограниченных величин.

Предположим, что у нас имеется прибор для измерения значений некоторой физической величины  $x$  с гарантированной точностью  $\epsilon$  (сообщаемой обычно производителем прибора). Слово «гарантированный» означает, что для результата измерения  $\tilde{x}$  истинное значение величины  $x$  удовлетворяет неравенству  $|x - \tilde{x}| \leq \epsilon$ , или, иными словами, возможные значения погрешности  $(x - \tilde{x})$  принадлежат интервалу  $[-\epsilon, \epsilon]$ . Являются ли все точки интервала возможными для значения погрешности?

В некоторых экзотических случаях ответ на этот вопрос отрицателен. Например, при измерении напряжённости электромагнитного поля вблизи элементов памяти современного цифрового компьютера наводки от микросхем памяти будут основным источником погрешности измерения. Поскольку элемент памяти может находиться в одном из двух возможных состояний (в зависимости от того, представляет он 0 или 1), то и создаваемая его полем погрешность может принимать лишь значения, близкие к этим двум крайним.

Но в большинстве практических ситуаций погрешность измерения возникает в результате накопления и наложения большого количества независимых факторов, а приведённый выше пример одного источника ошибок действительно экзотичен. Оказывается, что если некоторая величина есть сумма большого количества малых независимых компонент, то множество всевозможных значений этой величины близко к интервалу, причем чем меньше значимость (вклад) суммируемых компонент, тем меньше отличие результата от непрерывного интервала. То есть, возможные «дырки» между отдельными компонентами связности множеств неопределённости «затягиваются», так что результирующее множество становится «всё более связным» и всё более близким к интервалу. Действительно весомый аргумент в пользу применения

интервалов для представления данных с ограниченными неопределённостями!

Совершенно аналогичная ситуация имеет место в теории вероятностей: распределение большого числа малозначащих случайных величин близко к одному из так называемых *безгранично делимых распределений*, к которым принадлежит и широко известное нормальное гауссово распределение (см. [12]). Поэтому можно с уверенностью считать, что распределение суммарной погрешности в большинстве случаев также безгранично делимо — факт, широко используемый в большинстве статистических приложений.

Перейдем к формальным определениям и утверждениям.

Как и в случае операций над интервалами, под суммой  $A + B$  двух множеств  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  будем понимать множество  $\{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ , полученное как множество всевозможных сумм «по представителям». Для случая общих множеств эту операцию называют обычно *суммой Минковского* [3]. Всюду ниже мы рассматриваем в качестве расстояния  $\text{dist}(A, B)$  между множествами  $A$  и  $B$  хаусдорфову метрику (1.85). Кроме того, будем считать, что в пределах складываемых множеств переменные изменяются независимо друг от друга в смысле определений §1.3, а множества их возможных значений замкнуты в хаусдорфовой метрике в согласии с теми выводами, которые были сделаны в §1.11в.

**Теорема 1.12.1** (предельная теорема Крейнвича) *Сумма замкнутых множеств вещественной оси  $\mathbb{R}$ , диаметр каждого из которых не превосходит  $\delta$ , отличается в хаусдорфовой метрике от интервала не более чем на  $\delta$ .*

*Если для любого  $\delta > 0$  множество  $E$  вещественной оси может быть представлено как конечная сумма замкнутых множеств диаметра не более  $\delta$ , то  $E$  является интервалом.*

Для многомерного случая полученные в [69] результаты слабее, чем для одномерного. Тем не менее, они также весьма полезны и практически, и методически.

**Теорема 1.12.2** *В пространстве  $\mathbb{R}^n$  сумма замкнутых множеств, диаметр каждого из которых не превосходит  $\delta$ , отличается в хаусдорфовой метрике не более чем на  $\delta$  от связного множества.*

*Если для любого положительного  $\delta$  множество  $E \subset \mathbb{R}^n$  может быть представлено как конечная сумма замкнутых подмножеств  $\mathbb{R}^n$  диаметра не более  $\delta$ , то  $E$  связно.*

В 2018 году М.М. Рогинская и В.С. Шульман в работе [34] получили полное решение поставленного В. Крейнвичем вопроса. В связи с обсуждаемой темой очень полезно ввести

**Определение 1.12.1** *Подмножество линейного нормированного пространства станем называть бесконечно делимым, если для любого  $\delta > 0$  оно может быть представлено в виде конечной суммы Минковского замкнутых подмножеств с диаметром не более  $\delta$ .*

Новое понятие является аналогом бесконечно делимых (или «безгранично делимых») распределений в теории вероятностей [12]: бесконечно делимое распределение



в теоретико-вероятностном смысле — это распределение случайной величины, которая для любого натурального  $N$  может быть представлена в виде суммы  $N$  независимых и одинаково распределённых слагаемых. Помимо того, что такие распределения (и только они) являются предельными распределениями, они обладают и другими замечательными свойствами. Функция распределения суммы независимых случайных величин с бесконечно делимыми функциями распределения бесконечно делима. Функция распределения, предельная для последовательности бесконечно делимых функций распределения, также является бесконечно делимой. Не менее замечательны свойства бесконечно делимых множеств.

**Теорема 1.12.3** (теорема Рогинской-Шульмана) *В пространстве  $\mathbb{R}^n$  компактное множество является выпуклым тогда и только тогда, когда оно бесконечно делимо.*

Этот результат обобщает теоремы Крейнвича и, кроме того, оказывается верным также для бесконечномерных пространств, если замкнутость в них понимается в смысле так называемой слабой топологии.

## 1.13 Компьютерные реализации интервальных арифметик

Поскольку в интервальном анализе интервалы рассматриваются как самостоятельные целостные объекты, то при вычислениях с ними на ЭВМ естественно ввести отдельный тип данных (назвав его, скажем, INTERVAL) аналогично стандартным типам данных REAL или INTEGER. Действия между величинами этого интервального типа будут подчиняться правилам (1.3)–(1.6).

Как известно, множество машинных чисел типа REAL произвольной фиксированной точности, представимых в цифровых ЭВМ, не совпадает с идеальной математической вещественной осью  $\mathbb{R}$ . По этой причине при выполнении на ЭВМ операций (в частности, арифметических) весьма часто возникает необходимость заменить результат операции на машинно представимое число. Здесь возникает нетривиальный вопрос о способе этой замены, или *округления* в ЭВМ. На современных компьютерах округление по умолчанию выполняют обычно к ближайшему машинно-представимому числу, но при необходимости этот способ округления может быть изменён с помощью системных команд и настроек. Как же округлять результаты арифметических операций с концами интервалов?

В первую очередь, это зависит от характера решаемой задачи и требований к её ответу. Там, где входные интервальные неопределённости велики и верность последних знаков результата несущественна, проблему машинного округления можно просто игнорировать. При решении задач гарантированного внешнего интервального оценивания множеств решений и областей значений функций обычно реализуют интервальную арифметику, другие операции и математические функции, а также операции ввода-вывода, с постоянным внешним направленным округлением. Но интервальные задачи в которых требуются иные, не внешние, способы оценивания множеств решений и областей значений выражений (рассматриваемые, к примеру, в Главах 4, 6 и 11 нашей книги) иногда требуют внутреннее направленное округление.

Какими способами интервалы и интервальные типы данных могут быть адаптированы для вычислений на ЭВМ? Здесь условно можно выделить две основные тенденции, проявившиеся с самого момента возникновения вычислительного интервального анализа:

1. Создание самостоятельных «интервальных» языков программирования, в которых присутствуют интервальные типы данных, операции и отношения.
2. Создание библиотек интервальных операций и отношений, сопровождающих существующие языки программирования.

Летом 2015 года американским Институтом инженеров по электротехнике и электронике (более известным аббревиатурой IEEE) был принят стандарт IEEE 1788 [62], регламентирующий реализации интервальных вычислений на цифровых ЭВМ.

Следует отметить желательность присутствия в языках программирования арифметики произвольной (или любой требуемой конечной) точности. Подобная арифметика является весьма дорогостоящей, но всё же её ограниченное применение является совершенно необходимым в критических местах некоторых современных численных алгоритмов (и будет необходимо в обозримом будущем). Дело в том, что интервальная арифметика сама по себе не является средством повышения точности результатов. Она, по сути, всего лишь *пассивно* отслеживает ошибки округления, которые возникают в процессе вычислений, но никак не мешает их возникновению. То есть, интервальная арифметика, конечно, делает накопление ошибки вполне контролируемым (повышает тем самым *надёжность* вычислений), но не позволяет избежать её вовсе или хотя бы уменьшить. Для повышения точности счёта и окончательных результатов нужны *активные* средства противодействия ошибкам округления, т. е. повышение точности промежуточных данных и вычислений с ними, хотя бы в избранных местах алгоритмов, переформулировка самих алгоритмов и т. п.

Постоянное переключение режима округления при арифметических операциях с плавающей точкой, которой является необходимой компонентой реализаций интервальной арифметики, — операция весьма медленная, и она существенно снижает общую производительность интервальных вычислений. На очереди стоит аппаратная реализация — «в железе» — полного набора инструкций интервальной арифметики, что позволило бы свести разрыв в быстродействии компьютеров на обычных и интервальных операциях к минимуму.

Касаясь перспектив развития интервальных языков программирования, следует признать необходимым наличие в них полного контроля за режимом округления, т. е. включение, отключение и назначение нужного режима в различных операциях по желанию пользователя, а также, возможно, введение в язык дублирующих интервальных арифметических операций без направленного округления. В частности, нам нужны специальные форматы ввода-вывода, которые округляют «как нужно».

Реализация библиотеки основных операций интервальной арифметики не представляет принципиальных трудностей, и может быть выполнена практически на любом из языков высокого уровня (PASCAL, Fortran, C, C++ и др.) программистом средней квалификации, знакомым с особенностями машинной арифметики с плавающей точкой. Практическое руководство к такой реализации на C++ содержится, к примеру, в книге [19] в главе «Сделай сам» («Do it yourself»). Существенно более сложной является оптимизация производительности интервальной арифметики для

конкретных типов процессоров и архитектур ЭВМ, а также реализация интервальных расширений элементарных функций (тесно связанная с математической задачей наилучшего приближения функций).

Мы не будем давать здесь обзор конкретных средств для программирования интервальных вычислений, так как эта область практической информатики очень динамично изменяется и подвержена влиянию текущей моды в архитектуре вычислительных систем, языках программирования и системном программном обеспечении. Читатель сам сможет найти актуальную на текущий момент информацию на просторах Интернета.

## Комментарий к Главе 1

Истоки интервального анализа, как, видимо, и любой глубокой и плодотворной идеи, могут быть прослежены задолго до фактического оформления соответствующего научного направления. Наиболее оригинальной является на этот счёт точка зрения, высказанная изобретателем термина «интервальный анализ» американцем Р.Е. Муром и состоящая в том, что первым «интервальщиком» следует считать Архимеда, широко использовавшего в своих расчётах двусторонние приближения, в частности, для определения границ числа  $\pi$ .

В §1.1 мы уже цитировали М. Борна [6]: «... физическая ситуация должна описываться посредством действительных чисел таким образом, чтобы во всех наблюдениях естественная неточность принималась во внимание». Далее в статье [6] можно прочесть: «Уже пятьдесят лет назад Феликс Клейн потребовал, чтобы подобный шаг был предпринят в геометрии. Наряду с абстрактной, точной геометрией он пожелал иметь практическую геометрию, в которой точка заменяется маленьким пятном, прямые линии — узкими полосами и т. д. Однако из этого не получилось ничего значительного». Упомянутая в этой цитате инициатива крупнейшего немецкого математика Ф. Клейна (1849–1925) относится к концу XIX – началу XX веков, и, добавим от себя, не имела успеха она по причине недостатка сил и неготовности необходимых инструментов, а не потому, что подобная ветвь развития бесперспективна в принципе. Аппарат для оперирования с неопределённостями и неточностями, как мы теперь знаем, малопригоден для аналитических преобразований «на бумаге», которые были типичны для докомпьютерной эпохи. Можно предполагать, что именно поэтому огромные для того времени трудности практических расчётов с новыми объектами — «маленькими пятнами», «узкими полосами» и т. п. — привели к краху всего начинания.

Так или иначе, но развитие «интервальной идеи» состоялось лишь в XX веке, причём оно оказалось тесно связанным с развитием и распространением практических вычислений. А оформление интервального анализа в самостоятельную научную дисциплину вообще стало возможным лишь с появлением ЭВМ.

В 1931 году англичанка Розалинда Янг [94] разработала арифметику для вычислений с множествами чисел. В 1951 году П. Двайер [48] в США рассматривал специальный случай замкнутых интервалов (числовые диапазоны) в связи с необходимостью учёта погрешностей в численном анализе. В 1956–58-м годах появились работы Мечислава Вармуса в Польше [92] и Тэруо Сунаги в Японии [91], предлагавшие классическую интервальную арифметику и намечавшие её приложения. При этом в

[91] в связи с новым аппаратом впервые были использованы современные термины «интервал», «интервальный».<sup>3</sup> Кроме того, Т. Сунага заложил основы интервального алгебраического формализма и дал весьма нетривиальные примеры применений новой техники, к примеру, в численном решении задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (см. также [73]).

1959-м годом датируется начало многосторонней деятельности Раймона Мура [75], написавшего в 1966-м году первую систематическую монографию по интервальному анализу [76]. Ясный и свежий язык этой книги, новые интересные постановки задач, поучительные применения интервальной техники — всё это оказало громадное влияние на становление и развитие нового научного направления во всём мире.

В России и Советском Союзе «интервальную» историю можно отсчитывать с 20-х годов прошлого века, и связана она с именем видного русского и советского математика и педагога В.М. Брадиса. Примерно с этого времени он пропагандировал так называемый *метод границ* — способ организации вычислений, приводящий к достоверным двусторонним границам точного значения вычисляемого результата, фактически аналогичный интервальной арифметике. Работая в Тверском педагогическом институте<sup>4</sup>, он опубликовал ряд научно-методических произведений на эту тему, в частности, книги [7, 8, 9]. Основные идеи «метода границ» являются настолько простыми и прозрачными, что В.М. Брадис рекомендовал даже их введение в школьный курс приближённых арифметических вычислений (см. [10], стр. 173–177).

В докомпьютерную эпоху «метод границ» не нашёл широкого применения в вычислительной практике, так как требовал увеличения числа выполняемых операций и скрупулёзного их выполнения. Тем не менее, идеи В.М. Брадиса были замечены, его статья «Устный и письменный счёт. Вспомогательные средства вычислений» попала в «Энциклопедию элементарной математики» (Книга 1. — Москва: Учпедгиз, 1951), а её основные положения упомянуты в популярном учебнике [14] (см. §19). Впоследствии эта «Энциклопедия элементарной математики» была переведена на немецкий язык в Германской Демократической Республике [52] и, таким образом, стала известна и за пределами нашей страны.

В 1962-м году в одном из первых выпусков «Сибирского математического журнала» появилась статья Л.В. Канторовича [25], обозначившего эту тематику как приоритетную для нашей вычислительной науки. Она написана чрезвычайно ясно и чётко, будучи кратким конспектом лекций, прочитанных автором в Ленинграде, Москве и Киеве. Замечательно, что в этой статье, где новое научное направление ещё не называется явно, но рельефно очерчивается, акцент в приложениях нового подхода делается как на повышении точности и надёжности традиционных численных алгоритмов, так и на перспективах развития аппарата для оперирования с ограниченными неопределённостями. Особую значимость этой статье Л.В. Канторовича придаёт то обстоятельство, что в ней впервые сформулированы исходные положения нового подхода к анализу данных, в котором теоретико-вероятностная модель ошибки заменяется на ограниченную по величине ошибку, относительно которой никаких других допущений не делается.

Для введения в интервальный анализ можно порекомендовать читателю также

---

<sup>3</sup>Интересно отметить, что термины «интервальный» и «точный» в том же самом смысле широко использовались в математической статистике ещё до возникновения интервального анализа.

<sup>4</sup>Позднее ставшем Калининским государственным педагогическим институтом.

книги [1, 36, 49, 74, 77, 78, 80]. Обзоры результатов и подробную библиографию по «округленческому» направлению интервального анализа читатель может найти в книгах Р.Е. Мура [76, 77], Г. Алефельда и Ю. Херцбергера [1], С.А. Калмыкова, Ю.И. Шокина и З.Х. Юлдашева [22], Р.Б. Кирфотта [67], курсе проф. Г.Г. Меньшикова [30].

**К §1.1.** Цитируемое определение математики восходит ещё к Ф. Энгельсу («Анти-Дюринг», глава 3). См., к примеру, МАРКС К., ЭНГЕЛЬС Ф. *Избранные сочинения. В 9-ти томах. Т. 5.* – Москва: Издательство политической литературы, 1986.

**К §1.3.** Различные конструкции, вытекающие из понятия зависимости интервальных величин, использовались в книге Ж. Столфи и Л.Н. Фигейредо [90], но строгое определение связанности (зависимости) впервые дано в работах автора [39, 40]. Затем оно было переоткрыто в [53], где сделана также попытка ввести классификацию типов зависимостей интервальных величин по виду их диаграммы связанности.

Отметим, что наше определение зависимости интервальных величин оказывается очень похожим на то, которое Л. Заде даёт в [20] для «взаимодействующих» нечётких (расплывчатых) переменных.

**К §1.4.** Название «основная теорема интервальной арифметики» для Теоремы 1.4.1 является данью исторической традиции. Оно давно не отражает положение этого результата в современном интервальном анализе, хотя «основная теорема интервальной арифметики» по-прежнему остаётся важной и часто используемой. Ситуация здесь напоминает то положение, которое в современной алгебре занимает «основная теорема алгебры» о существовании корней многочленов в поле комплексных чисел.

**К §1.5а.** Термин «магнитуда» происходит от латинского слова *magnitudo*, означающего «величина», и нередко применяется в естественных науках. В частности, в геофизике магнитудой землетрясения называют условную величину, характеризующую общую энергию упругих колебаний, вызванных этим землетрясением [5].

Уравновешенные интервалы часто называют «симметричными относительно нуля» или даже просто «симметричными», но эти термины, на наш взгляд, весьма неудачны потому, что слово «симметричный» перегружено в математике.

Например, в линейной алгебре симметричными называют матрицы, у которых элементы расположены симметрично относительно главной диагонали. Но ведь интервальная матрица с «симметричными относительно нуля элементами» тоже имеет право называться «симметричной интервальной матрицей»! Наш язык тем самым чрезвычайно запутывается. Напротив, термин «уравновешенный интервал» находится в хорошем согласии с терминологией функционального анализа, где уравновешенным множеством называют множество, инвариантное относительно умножения на скаляр, не превосходящий по модулю единицы.

В стандарте IEEE 1788-2015 на интервальные вычисления на ЭВМ [62] бинарные отношения сравнения интервалов, которые обобщают привычный порядок « $\leq$ » между вещественными числами, классифицируются и называются согласно работе [45]. Для временных интервалов, используемых в темпоральной логике и т. п., эта классификация вполне подходит, но в общем случае она является, на наш взгляд,

не вполне адекватной различным интерпретациям интервальной неопределённости, возникающим на практике. Удобную классификацию бинарных отношений сравнения интервалов можно построить на основе аккуратного учёта различных типов интервальной неопределённости (см. Главу 4).

Для ширины произведения интервалов существуют более точные (но и более сложно выписываемые) оценки, чем (1.29) и даже чем (1.33)–(1.34). Историю вопроса и завершающий результат в этом направлении можно найти в заметке [87].

Любопытно, что в книге А. Ноймайера [80] вместо точного равенства (1.36) доказывается неравенство  $\text{rad}(\mathbf{a}^n) \leq |\mathbf{a}|^{n-1} \cdot \text{rad} \mathbf{a}$ , которое имеет смысл, противоположный левому неравенству в (1.29).

**К §1.56.** Функционал  $\chi$  оставлен нами неопределённым в нуле, хотя даже самим его автором Х. Рачеком предпринимались попытки как-то исправить это положение и определить  $\chi([0, 0])$  различными более или менее разумными способами. На наш взгляд, они не привели к успеху: неизбежной издержкой этого доопределения становятся более громоздкие рассуждения, которые должны учитывать существование исключительного нулевого случая, тогда как возможности техники практически не расширяются.

Изложение основных свойств функционала Рачека (относительной узости) и их обоснование следует работе И.А. Шарой [37]. В этой же работе введены полезные понятия «относительного интервала» и «относительной ширины» интервала.

**К §1.6.** В связи с исследованием алгебраической структуры интервальной арифметики весьма плодотворным оказалось понятие квазилинейного пространства (см., к примеру, [41]).

**К §1.7а.** Сам Э. Каухер называл свою арифметику «расширенной» [66]. Мы не следуем этому словоупотреблению потому, что интервальных арифметик, так или иначе расширяющих  $\mathbb{IR}$  (подчас весьма незначительно), было предложено немало, но арифметика Каухера занимает среди них уникальное место.

Идея облегчить нахождение формальных решений интервальных уравнений путём предварительного перехода в более широкую алгебраическую систему была впервые предложена С.П. Шарым в [38].

Подробное описание арифметики  $\mathbb{KR}$  и её свойств можно найти, например, в оригинальных работах Э. Каухера [64, 66], или же в трудах испанских исследователей под руководством Э. Гарденьеса [54, 55, 56, 57, 58, 88, 89]. При этом следует иметь в виду то обстоятельство, что, интенсивно применяя арифметику Каухера, испанцы пользуются своим собственным специфическим языком, говоря о так называемых «модальных интервалах» и т. п. Плодотворная попытка ревизии результатов испанской школы и переформулировки их на более привычном математическом языке осуществлена А. Гольдштейном в его диссертации [60].

**К §1.7г.** Довольно забавна история вопроса. В ранних публикациях испанской школы [54, 56] ошибочно утверждалось, что

$$\bigvee_{x \in \mathbf{x}} \bigwedge_{y \in \mathbf{y}} f(x, y) = f(\mathbf{x}, \text{dual } \mathbf{y}) = \bigwedge_{y \in \mathbf{y}} \bigvee_{x \in \mathbf{x}} f(x, y),$$

если каждая из переменных  $x_i, y_i$  входит в  $f$  не более одного раза в первой степени. Тем самым, фактически, заявлялась новая неизвестная ранее теорема о минимаксе. Ошибка была замечена и исправлена лишь через десятилетие, а статья с корректной формулировкой увидела свет вообще в 1999-м году [89].

**К §1.8.** Круговую комплексную интервальную арифметику  $\mathbb{I}\mathbb{C}_{\text{circ}}$  впервые рассмотрели И. Гаргантини и П. Энричи в [59].

**К §1.12.** Понятие бесконечно делимого множества в неявном виде было введено В. Крейновичем в работе [69], и там же установлены Теорема 1.12.1 и Теорема 1.12.2. Теорема 1.12.3 опубликована в [34], где также можно увидеть бесконечномерный вариант этого результата.

## Литература к Главе 1

- [1] АЛЕФЕЛЬД Г., ХЕРЦБЕРГЕР Ю. *Введение в интервальные вычисления*. – Москва: Мир, 1987.
- [2] БАБЕНКО К.И. О доказательных вычислениях и математическом эксперименте на ЭВМ // *Успехи математических наук*. – 1985. – Т. 40, №4 (244). – С. 137–138.
- [3] БЕРЖЕ М. *Геометрия. Т. 1–2*. – Москва: Мир, 1984.
- [4] БИРКГОФ Г. *Теория решёток*. – Москва: Наука, 1984.
- [5] *Большая Советская Энциклопедия*. – Москва: Издательство «БСЭ», 1970–77.
- [6] БОРН М. Действительно ли классическая механика детерминистична? // *Физика в жизни моего поколения*. – Москва: Издательство иностранной литературы, 1963. – С. 285–293.
- [7] БРАДИС В.М. Опыт обоснования некоторых практических правил действий над приближёнными числами // *Известия Тверского педагогического института*. – 1927. – Вып. 3.
- [8] БРАДИС В.М. *Теория и практика вычислений. Пособие для высших педагогических учебных заведений*. – Москва: Учпедгиз, 1937.
- [9] БРАДИС В.М. *Средства и способы элементарных вычислений*. – Москва: Издательство Академии педагогических наук РСФСР, изд. 1–2, 1948–1951.
- [10] БРАДИС В.М. *Методика преподавания математики в средней школе*. – Москва: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР, 1951.
- [11] БРОНШТЕЙН Е.М. Об одной возможной вероятностной интерпретации интервальной величины // *Вычислительные Технологии*. – 2014. – Т. 19, №5. – С. 12–13.
- [12] ГНЕДЕНКО Б.В. *Курс теории вероятностей*. – Москва: Наука, 1965, а также последующие издания.

- [13] ГОРБАНЬ И.И. Нарушение статистической устойчивости физических процессов // *Математические машины и системы*. – 2010. – №1. – С. 171–184.
- [14] ДЕМИДОВИЧ Б.П., МАРОН И.А. *Основы вычислительной математики*. – Москва: Наука, Физматлит, 1970.
- [15] ДОБРОНЕЦ Б.С., ШАЙДУРОВ В.В. *Двусторонние численные методы*. – Новосибирск: Наука, 1990.
- [16] ДОБРОНЕЦ Б.С., ПОПОВА О.А. *Численный вероятностный анализ неопределённых данных*. – Красноярск: Сибирский Федеральный Университет, 2014.
- [17] ДЮБУА Д., ПРАД А. *Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике*. – Москва: Радио и связь, 1990.
- [18] ЕВЛАНОВ Л.Г. *Контроль динамических систем*. – Москва: Наука, 1972.
- [19] ЖОЛЕН Л., КИФЕР М., ДИДРИ О., ВАЛЬТЕР Э. *Прикладной интервальный анализ*. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005.
- [20] ЗАДЕ Л. *Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближённых решений*. – Москва: Мир, 1976.
- [21] ЗОРИЧ В.А. *Математический анализ*. Т. 1. – Москва: Наука, 1981. Т. 2. – Москва: Наука, 1984.
- [22] КАЛМЫКОВ С.А., ШОКИН Ю.И., ЮЛДАШЕВ З.Х. *Методы интервального анализа*. – Новосибирск: Наука, 1986.
- [23] КАМИНСКИЙ Т.Э. Модифицированная интервальная арифметика и теория погрешностей / *Вычислительная математика и математическая физика. Сборник научных трудов*. Под ред. В.В. Щенникова. – Москва: МГПИ им. В.И. Ленина, 1982. – С. 96–105.
- [24] КАМИНСКИЙ Т.Э. *Алгебраические структуры в интервальной арифметике*. – Вологда: Вологодский гос. пед. университет, 2010.
- [25] КАНТОРОВИЧ Л.В. О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений // *Сибирский Математический Журнал*. – 1962. – Т. 3, №5. – С. 701–709.
- [26] КОФМАН А. *Введение в теорию нечётких множеств*. – Москва: Радио и связь, 1982.
- [27] КРАМЕР Г. *Математические методы статистики*. – Москва: Мир, 1975.
- [28] КУЗНЕЦОВ В.П. *Интервальные статистические модели*. – Москва: Радио и связь, 1991.
- [29] КУРОШ А.Г. *Лекции по общей алгебре*. – Москва: Наука, 1973.
- [30] МЕНЬШИКОВ Г.Г. *Интервальный анализ и методы вычислений. Конспект лекций*. – Санкт-Петербург: СПбГУ, Факультет прикладной математики – процессов управления, 1998–2000.
- [31] НАЗАРЕНКО Т.И., МАРЧЕНКО Л.В. *Введение в интервальные методы вычислительной математики*. – Иркутск: Издательство Иркутского университета, 1982.
- [32] ОРЛОВСКИЙ С.А. *Проблемы принятия решений при нечёткой исходной информации*. – Москва: Наука, 1981.
- [33] ПОЛЯК Б.Т., ЩЕРБАКОВ П.С. *Робастная устойчивость и управление*. – Москва: Наука, 2002.
- [34] РОГИНСКАЯ М.М., ШУЛЬМАН В.С. О суммах по Минковскому большого числа малых слагаемых // *Функциональный анализ и его приложения*. – 2018. – Т. 52, вып. 3. – С. 88–91.



- [35] *Физические величины. Справочник под ред. И.С. Григорьева и Е.З. Михайнова.* – Москва: Энергоатомиздат, 1991.
- [36] ХАНСЕН Э., УОЛСТЕР ДЖ.У. *Глобальная оптимизация с помощью методов интервального анализа.* – Москва-Ижевск: Издательство «РХД», 2012.
- [37] ШАРАЯ И.А. О дистрибутивности в классической интервальной арифметике // *Вычислительные Технологии.* – 1997. – Том 2, № 1. – С. 71–83.
- [38] ШАРЫЙ С.П. Об одной интервальной задаче линейной алгебры // *Информационно-оперативный материал.* – Красноярск, 1987. – (Препринт / ВЦ СО АН СССР; №2). – С. 45–46.
- [39] ШАРЫЙ С.П. Метод дробления параметров для интервальных линейных систем со связями // *Пятая международная конференция «Перспективы систем информатики» памяти акад. А.П.Ершова – PSI'03. Международное рабочее совещание по интервальной математике и методам распространения ограничений, 8–9 июля 2003 года, Новосибирск, Академгородок.* – Новосибирск: ИСИ СО РАН, 2003. – С. 1–12.
- [40] ШАРЫЙ С.П. Решение интервальных линейных систем со связями // *Сибирский Журнал Вычислительной Математики.* – 2004. – Том 7, №4. – С. 363–376.
- [41] ШОКИН Ю.И. *Интервальный анализ.* – Новосибирск: Наука, 1981.
- [42] ЭНГЕЛЬКИНГ Р. *Общая топология.* – Москва: Мир, 1986.
- [43] ЯВОРСКИЙ Б.М., ДЕТЛАФ А.А. *Справочник по физике для инженеров и студентов вузов.* – Москва: Наука, 1977.
- [44] ЯКОВЛЕВ А.Г. Машинная арифметика мультиинтервалов // *Вопросы кибернетики (Научный Совет по компл. проблеме «Кибернетика» АН СССР).* – 1986. – Вып. 125. – С. 66–81.
- [45] ALLEN J.F. Maintaining knowledge about temporal intervals // *Communications of the ACM.* – 1983. – Vol. 26, No. 11. – P. 832–843.
- [46] CANDAU Y., RAISSI T., RAMDANI N., IBOS L. Complex interval arithmetic using polar form // *Reliable Computing.* – 2006. – Vol. 12, No. 1. – P. 1–20.
- [47] DIMITROVA N.S., MARKOV S.M., POPOVA E.D. Extended interval arithmetics: new results and applications // *Computer Arithmetic and Enclosure Methods / Atanassova L. and Herzberger J., eds.* – Amsterdam: Elsevier, 1992. – P. 225–232.
- [48] DWYER P.S. *Linear Computations.* – New York: John Wiley & Sons, 1951.
- [49] CAPRANI O., MADSEN K., NIELSEN H.B. *Introduction to interval analysis.* – Lyngby: DTU – Technical University of Denmark, 2002.
- [50] CAPRANI O., MADSEN K., RALL L.B. Integration of interval functions // *SIAM Journal on Mathematical Analysis.* – 1982. – Vol. 12, №3. – P. 321–341.
- [51] RALL L.B. Integration of interval functions. II. The finite case // *SIAM Journal on Mathematical Analysis.* – 1983. – Vol. 13. – P. 690–697.
- [52] *Enzyklopädie der Elementarmathematik. Band I Arithmetik. Dritte Auflage / Grell H., Maruhn K., Rinow W., eds.* – Berlin: VEB Deutscher Verlag der Vissenschaften, 1966.
- [53] FERSON S., KREINOVICH V. Modeling correlation and dependencies among intervals // *REC-2006. Proceedings of the NSF Workshop on Reliable Engineering Computing, February 22–24, 2006, Savannah, Georgia, USA / Muhanna R.L., Mullen R.L., eds.* – P. 115–126.
- [54] GARDEÑES E., TREPAT A. Fundamentals of SIGLA, an interval computing system over the completed set of intervals // *Computing.* – 1980. – Vol. 24. – P. 161–179.

- [55] GARDEÑES E., TREPAT A., JANER J.M. SIGLA-PL/1 development and applications // *Interval Mathematics 1980* / Nickel K., ed. – New York: Academic Press, 1980. – P. 301–315.
- [56] GARDEÑES E., TREPAT A., JANER J.M. Approaches to simulation and to the linear problem in the SIGLA system // *Freiburger Intervall-Berichte*. – 1981. – No. 81/8. – P. 1–28.
- [57] GARDEÑES E., TREPAT A., MIELGO H. Present perspective of the SIGLA interval system // *Freiburger Intervall-Berichte*. – 1982. – No. 82/9. – P. 1–65.
- [58] GARDEÑES E., SAINZ M.A., JORBA L., CALM R., ESTELA R., MIELGO H., TREPAT A. Modal intervals // *Reliable Computing*. – 2001. – Vol. 7, No. 2. – P. 77–111.
- [59] GARGANTINI I., HENRICI P. Circular arithmetic and the determination of polynomial zeros // *Numerische Mathematik*. – 1972. – Bd. 18. – P. 305–320.
- [60] GOLDSZTEJN A. *Définition et applications des extensions des fonctions réelles aux intervalles généralisés*. – Thèse pour l'obtention du doctorat de l'université de Nice-Sophia-Antipolis, 2005.
- [61] HICKEY T., JU Q., VAN EMDEN M.H. Interval arithmetic: from principles to implementation // *Journal of the ACM*. – Vol. 48, No. 5. – P. 1038–1068.
- [62] IEEE Std 1788<sup>TM</sup>-2015. IEEE Standard for Interval Arithmetic. – New York: The Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2015.
- [63] KAHAN W. A more complete interval arithmetic // *Lecture notes for a summer course*. – University of Toronto, Canada, 1968.
- [64] KAUCHER E. Über metrische und algebraische Eigenschaften einiger beim numerischen Rechnen auftretender Räume. Dr. Naturwissen. Dissertation. – Karlsruhe: Universität Karlsruhe, 1973.
- [65] KAUCHER E. Algebraische Erweiterungen der Intervallrechnung unter Erhaltung Ordnungs- und Verbandsstrukturen // *Grundlagen der Computer-Arithmetik* / Albrecht R., Kulisch U., eds. – Wien: Springer, 1977. – P. 65–79. – (Computing Supplementum; 1)
- [66] KAUCHER E. Interval analysis in the extended interval space  $\mathbb{IR}$  // *Fundamentals of numerical computation (Computer-oriented numerical analysis)* / Alefeld G., Grigorieff R.D., eds. – Wien: Springer, 1980. – P. 33–49. – (Computing Supplement; 2)
- [67] KEARFOTT R.B. *Rigorous global search: continuous problems*. – Dordrecht: Kluwer, 1996.
- [68] KLATTE P., ULLRICH CH. Complex sector arithmetic // *Computing*. – 1980. – Vol. 24. – P. 139–148.
- [69] KREINOVICH V. Why intervals? A simple limit theorem that is similar to limit theorems from statistics // *Reliable Computing*. – 1995. – Vol. 1, No. 1. – P. 33–40.
- [70] LAKEYEV A.V. Linear algebraic equations in Kaucher arithmetic // *Reliable Computing, 1995, Supplement* (Extended Abstracts of APIC'95: International Workshop on Applications of Interval Computations, El Paso, TX, Febr. 23–25, 1995). – P. 130–133.
- [71] LAKEYEV A.V. On existence and uniqueness of solutions of linear algebraic equations in Kaucher's interval arithmetic // *Developments in Reliable Computing* / Csendes T., ed. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998. – P. 53–65.
- [72] LAVEUVE S.E. Definition einer Kahan-Arithmetik und ihre Implementierung // *Interval Mathematics* / Nickel K., ed. – Berlin: Springer Verlag, 1975. – P. 236–245. – (*Lecture Notes in Computer Science; vol. 29*).

- [73] MARKOV S., OKUMURA K. The contribution of T. Sunaga to interval analysis and reliable computing // *Developments in Reliable Computing* / Cendes T., ed. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998. – P. 167–188.
- [74] MAYER G. *Interval analysis and automatic result verification*. – Berlin: De Gruyter, 2017.
- [75] MOORE R.E. Automatic error analysis in digital computation // Technical report LMSD-84821 of Lockheed Missiles and Space Division. – Sunnyvale: Lockheed Corp., 1959.
- [76] MOORE R.E. *Interval analysis*. – Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1966.
- [77] MOORE R.E. *Methods and applications of interval analysis*. – Philadelphia: SIAM, 1979.
- [78] MOORE R.E., KEARFOTT R.B., CLOUD M.J. *Introduction to interval analysis*. – Philadelphia: SIAM, 2009.
- [79] NEUMAIER A. A distributive interval arithmetic // *Freiburger Intervall-Berichte*. – 1982. – No. 82/10. – P. 31–38.
- [80] NEUMAIER A. *Interval methods for systems of equations*. – Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [81] NOGUEIRA M., NANDIGAM A. Why intervals? If we allow other sets, tractable problems become intractable // *Reliable Computing*. – 1998. – Vol. 4, No. 4. – P. 389–394.
- [82] PETKOVIC M.S., MITROVIC Z.M., PETKOVIC L.B. Arithmetic of circular rings // *Interval Mathematics 1985* / Nickel K., ed. – New York: Springer Verlag, 1986. – P. 133–142. – (*Lecture Notes in Computer Science; vol. 212*).
- [83] POPOVA E. Multiplication distributivity of proper and improper intervals // *Reliable Computing*. – 2001. – Vol. 7, No. 2. – P. 129–140.
- [84] ROKNE J., LANCASTER P. Complex interval arithmetic // *Communications of the ACM*. – 1971. – Vol. 14. – P. 111–112.
- [85] RATSCHKE H. Die binären Systeme der Intervallmathematik // *Computing*. – 1970. – Vol. 6. – P. 295–308.
- [86] RATSCHKE H. Subdistributivität der Intervallarithmetic // *ZAMM*. – 1971. – Bd. 51. – S. 189–192.
- [87] RATSCHKE H., ROKNE J. Formulas for the width of interval products // *Reliable Computing*. – 1995. – Vol. 1, No. 1. – P. 9–14.
- [88] SAINZ M.A., ARMENGOL J., CALM R., HERRERO P., JORBA L., VEHI J. *Modal interval analysis. New tools for numerical information*. – Cham-Heidelberg-New York: Springer, 2014. – (*Lecture Notes in Mathematics; vol. 2091*).
- [89] SIGLA/X GROUP. Modal intervals (Basic tutorial) // *MISC'99 – Workshop on Applications of Interval Analysis to Systems and Control. Girona, Spain, February 24–26, 1999*. – Girona: Universitat de Girona, 1999. – P. 139–207.
- [90] STOLFI J., DE FIGUEIREDO L.H. *Self-validated numerical methods and applications*. – Rio de Janeiro: IMPA, Brazilian Mathematics Colloquium monograph, 1997.
- [91] SUNAGA T. Theory of an interval algebra and its application to numerical analysis // *RAAG Memoirs*. – 1958. – Vol. 2, Misc. II. – P. 547–564.
- [92] WARMUS M. Calculus of approximations // *Bull. Acad. Polon. Sci.* – 1956. – Cl. III, vol. IV, No. 5. – P. 253–259.
- [93] MEIJA J., COPLEN T.B., BERGLUND M., BRAND W.A., DE BIÈVRE P., GRÖNING M., HOLDEN N.E., IRRGEHER J., LOSS R.D., WALCZYK T., PROHASKA T. Atomic weights

of the elements 2013 (IUPAC Technical Report) // *Pure and Applied Chemistry*. – 2016. – Vol. 88, Issue 3. – P. 265–291.

[94] YOUNG R.C. Algebra of many-valued quantities // *Mathematische Annalen*. – 1931. – Bd. 104. – S. 260–290.

## Глава 2

# Интервальные векторы и матрицы

### 2.1 Основные определения и факты

Формально говоря, интервальный вектор — это упорядоченный кортеж из интервалов, расположенный вертикально (вектор-столбец) или горизонтально (вектор-строка). Таким образом, если  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  — некоторые интервалы, то

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \text{ — это интервальный вектор-столбец,}$$

а

$$\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) \text{ — это интервальная вектор-строка.}$$

Сами интервалы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  называются *компонентами* образуемых ими векторов. Всюду далее, говоря об интервальных векторах, по умолчанию будем иметь в виду вектор-столбцы.

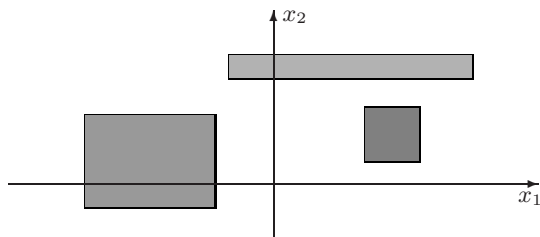


Рис. 2.1. Интервальные векторы-бруссы в  $\mathbb{R}^2$ .

Множество интервальных  $n$ -векторов, компоненты которых принадлежат  $\mathbb{IR}$ , обозначаем через  $\mathbb{IR}^n$ , а множество интервальных  $n$ -векторов с компонентами из  $\mathbb{KR}$

обозначается через  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ . При этом для нулевых векторов, т. е. таких, все компоненты которых суть нули, традиционно используется символ «0».

Интервальные векторы из  $\mathbb{I}\mathbb{R}^n$  являются прямыми произведениями интервалов вещественной оси, а их геометрическим образом служат прямоугольные параллелепипеды в пространстве  $\mathbb{R}^n$  с рёбрами и гранями, параллельными координатным осям (см. Рис. 2.1 и Рис. 2.2). Мы будем называть их кратким и ёмким термином *брус*. Соответственно, если  $\mathbf{a} \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n$ , то принадлежность  $a \in \mathbf{a}$ , включения  $S \subset \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{a} \subset S$  и им подобные отношения для подмножеств  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  будут пониматься в обычном теоретико-множественном смысле.

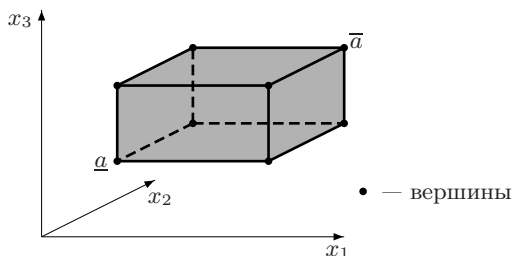


Рис. 2.2. Интервальный вектор-брус в  $\mathbb{R}^3$ .

Интервальная матрица — это прямоугольная таблица, составленная из интервалов  $\mathbb{I}\mathbb{R}$  либо  $\mathbb{K}\mathbb{R}$ , и если

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \dots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \dots & \mathbf{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_{m1} & \mathbf{a}_{m2} & \dots & \mathbf{a}_{mn} \end{pmatrix},$$

то привычно будем писать  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$ . Как и в традиционной теории матриц, мы можем отождествлять интервальные  $n$ -векторы с интервальными матрицами размера  $n \times 1$  (вектор-столбцы) либо  $1 \times n$  (вектор-строки).

В случае, когда нулевые и ненулевые элементы в интервальной матрице  $\mathbf{A}$  структурированы определённым образом, по отношению к  $\mathbf{A}$  будут употребляться те же термины, что и в теории матриц. Например, если  $m = n$  и рассматриваются квадратные матрицы, то

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \dots & \mathbf{a}_{1n} \\ & \mathbf{a}_{22} & \dots & \mathbf{a}_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{a}_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & & & \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{0} & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \mathbf{a}_{n1} & \mathbf{a}_{n2} & \dots & \mathbf{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

— это интервальные *верхняя треугольная* и *нижняя треугольная* матрицы соответственно (иногда их называют правой треугольной и левой треугольной матрицами). Если  $k$  — какое-то натуральное число, не превосходящее  $\min\{m, n\}$ , то интервальные

матрицы вида

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{a}_{11} & \cdots & \mathbf{a}_{1k} & \mathbf{a}_{1,k+1} & \cdots & \mathbf{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_{k1} & \cdots & \mathbf{a}_{kk} & \mathbf{a}_{k,k+1} & \cdots & \mathbf{a}_{kn} \\ \hline & & \mathbf{0} & \mathbf{a}_{k+1,k+1} & \cdots & \mathbf{a}_{k+1,n} \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & \mathbf{a}_{m,k+1} & \cdots & \mathbf{a}_{mn} \end{array} \right)$$

назовём *верхними блочно-треугольными* (правым блочно-треугольными), и так далее.

Если  $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ , то условимся обозначать

$$\underline{\mathbf{a}} = (\underline{\mathbf{a}}_1, \underline{\mathbf{a}}_2, \dots, \underline{\mathbf{a}}_n) \quad \text{и} \quad \bar{\mathbf{a}} = (\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \dots, \bar{\mathbf{a}}_n).$$

т. е. нижний конец вектора определяется как вектор нижних концов его компонент. Аналогичным образом будем определять  $\underline{\mathbf{a}}$  и  $\bar{\mathbf{a}}$  для интервального вектор-столбца  $\mathbf{a}$ . Точно так же, для интервальной матрицы  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$  точечные матрицы тех же размеров  $\underline{\mathbf{A}}$  и  $\bar{\mathbf{A}}$  будут обозначать матрицы, образованные элементами  $(\underline{\mathbf{a}}_{ij})$  и  $(\bar{\mathbf{a}}_{ij})$  соответственно. Операции взятия середины интервала, его радиуса и ширины, абсолютного значения (магнитуды), а также операции «dual», «pro», «opp» к интервальным векторам и матрицам будут применяться покомпонентно и поэлементно. Поэтому если, к примеру,  $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{m \times n}$ , то  $\text{mid } \mathbf{A}$  и  $\text{rad } \mathbf{A}$  — это тоже  $m \times n$ -матрицы, определяемые как

$$\text{mid } \mathbf{A} := \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{A}} + \underline{\mathbf{A}}) \quad \text{и} \quad \text{rad } \mathbf{A} := \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{A}} - \underline{\mathbf{A}}).$$

**Определение 2.1.1** Вершинами интервального вектора  $\mathbf{a}$  из  $\mathbb{IR}^n$  или  $\mathbb{KR}^n$  будем называть точечные  $n$ -векторы,  $i$ -ая компонента которых равна  $\underline{\mathbf{a}}_i$  или  $\bar{\mathbf{a}}_i$ . Множество вершин интервального вектора обозначаем как

$$\text{vert } \mathbf{a} := \{a \in \mathbb{R}^n \mid a_i \in \{\underline{\mathbf{a}}_i, \bar{\mathbf{a}}_i\}, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Вершинами интервальной матрицы  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$  из  $\mathbb{IR}^{m \times n}$  или  $\mathbb{KR}^{m \times n}$  назовём точечные  $m \times n$ -матрицы,  $ij$ -ым элементом которых является  $\underline{\mathbf{a}}_{ij}$  или  $\bar{\mathbf{a}}_{ij}$ . Множество вершин интервальной матрицы обозначаем как

$$\text{vert } \mathbf{A} := \{A \in \mathbb{R}^{m \times n} \mid A = (\mathbf{a}_{ij}), \mathbf{a}_{ij} \in \{\underline{\mathbf{a}}_{ij}, \bar{\mathbf{a}}_{ij}\}\}.$$

Упорядочение по включению на множестве интервальных векторов и матриц с элементами как из  $\mathbb{IR}$ , так и  $\mathbb{KR}$  определяется как прямое произведение порядков по включению на отдельных компонентах этих составных объектов, т. е.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = (\mathbf{a}_i) \subseteq \mathbf{b} = (\mathbf{b}_i) &\iff \mathbf{a}_i \subseteq \mathbf{b}_i \quad \text{для всех } i, \\ \mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij}) \subseteq \mathbf{B} = (\mathbf{b}_{ij}) &\iff \mathbf{a}_{ij} \subseteq \mathbf{b}_{ij} \quad \text{для всех } i, j. \end{aligned}$$

Операции « $\vee$ » и « $\wedge$ » в применении к интервальным векторам и матрицам будут, следовательно, пониматься покомпонентно и поэлементно, так что, в частности,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \vee \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_2 \vee \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \vee \mathbf{b}_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \wedge \mathbf{b}_n \end{pmatrix}.$$

Аналогично, в покомпонентном и поэлементном смысле будут пониматься отношения « $\leq$ », « $<$ », « $\geq$ » и « $>$ » между точечными и интервальными векторами и матрицами.

Интервальные векторы и матрицы, как можно понять, представляют специфичный и довольно узкий класс множеств в многомерных пространствах. С ними относительно удобно работать, и мы собираемся оценивать с их помощью другие множества, возникающие при решении математических задач. В этой связи чрезвычайно важно следующее

**Определение 2.1.2** Если  $S$  — непустое ограниченное множество в  $\mathbb{R}^n$  или  $\mathbb{R}^{m \times n}$ , то его интервальной оболочкой  $\square S$  называется наименьший по включению интервальный вектор (или матрица), содержащий  $S$ .

Нетрудно понять, что это определение равносильно такому: интервальная оболочка множества  $S$  — это пересечение всех интервальных векторов (матриц), содержащих  $S$ :

$$\square S = \bigcap \{ \mathbf{a} \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n \mid S \subseteq \mathbf{a} \} \quad \text{или} \quad \square S = \bigcap \{ \mathbf{A} \in \mathbb{I}\mathbb{R}^{m \times n} \mid S \subseteq \mathbf{A} \}.$$

Интервальная оболочка — это интервальный объект, наилучшим образом приближающий извне (т. е. объемлющий) рассматриваемое множество (см. Рис. 2.3), и компоненты  $\square S$  являются проекциями множества  $S$  на координатные оси пространства.

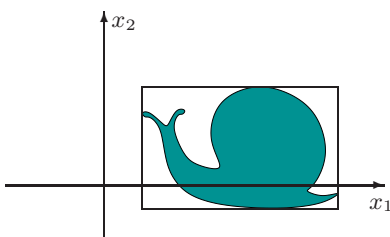


Рис. 2.3. Интервальная оболочка множества в  $\mathbb{R}^2$ .

В некоторых ситуациях нам бывает нужно не всё множество интервалов или интервальных векторов, а только лишь те из них, что лежат в заданной области рассмотрения. В этой связи полезно

**Определение 2.1.3** Пусть  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  — некоторое подмножество пространства. Через  $\mathbb{I}D$  будем обозначать множество всех брусков (интервальных векторов)  $\mathbf{a} \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n$  содержащихся в  $D$ , т. е. таких, что  $\mathbf{a} \subseteq D$ .



Как определить над интервальными векторами и матрицами операции сложения, вычитания и умножения? Для векторов и матриц с элементами из  $\mathbb{IR}$  естественным было бы определить их «по представителям», т. е. потребовать выполнения некоторого аналога основного свойства (1.2) —

$$\mathbf{a} \star \mathbf{b} := \{ a \star b \mid a \in \mathbf{a}, b \in \mathbf{b} \},$$

согласно которому результаты интервальных операций, выполняемых с интервальными матрицами совпадают с множествами всевозможных результатов тех же операций между точечными представителями этих матриц. Но в многомерном случае это едва ли возможно в полном объёме, так как, к примеру, образ бруса при умножении на точечную матрицу (т. е. при линейном преобразовании пространства) является в общем случае косым параллелепипедом в  $\mathbb{R}^n$ , а не бруском.

Как следствие, при определении операций над интервальными матрицами имеет смысл вместо (1.2) ограничиться каким-либо более слабым требованием. Ясно, что прежде всего для рассматриваемых операций  $\star \in \{+, -, \cdot\}$  должно выполняться включение

$$\mathbf{A} \star \mathbf{B} \supseteq \{ A \star B \mid A \in \mathbf{A}, B \in \mathbf{B} \}.$$

Кроме того, желательно, чтобы это включение было наиболее точным, т. е. чтобы  $\mathbf{A} \star \mathbf{B}$  была наиболее узкой интервальной матрицей, объёмлющей множество всевозможных поточечных результатов  $\{ A \star B \mid A \in \mathbf{A}, B \in \mathbf{B} \}$ . В целом это приводит к условию

$$\mathbf{A} \star \mathbf{B} = \square \{ A \star B \mid A \in \mathbf{A}, B \in \mathbf{B} \}, \quad \star \in \{+, -, \cdot\}. \quad (2.1)$$

Является ли оно реально выполнимым? Положительный ответ на этот вопрос даёт следующее

**Предложение 2.1.1** Для любых интервальных матриц  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$ ,  $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_{ij}) \in \mathbb{IR}^{m \times n}$  множество  $\{ A \pm B \mid A \in \mathbf{A}, B \in \mathbf{B} \}$  совпадает с интервальной матрицей  $\mathbf{C} = (\mathbf{c}_{ij}) \in \mathbb{IR}^{m \times n}$ , такой что  $\mathbf{c}_{ij} = \mathbf{a}_{ij} \pm \mathbf{b}_{ij}$ .

Для любых интервальных матриц  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij}) \in \mathbb{IR}^{m \times l}$ ,  $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_{ij}) \in \mathbb{IR}^{l \times n}$  множество  $\square \{ AB \mid A \in \mathbf{A}, B \in \mathbf{B} \}$  совпадает с интервальной матрицей  $\mathbf{C} = (\mathbf{c}_{ij}) \in \mathbb{IR}^{m \times n}$ , такой что

$$\mathbf{c}_{ij} = \sum_{k=1}^l \mathbf{a}_{ik} \mathbf{b}_{kj}. \quad (2.2)$$

**Доказательство.** Оно очевидно для сложения и вычитания, которые выполняются для каждого элемента матрицы независимо от остальных элементов.

Далее,  $ij$ -ый элемент матрицы-произведения  $AB$  двух точечных матриц  $A = (a_{ij})$  и  $B = (b_{ij})$  по определению есть

$$\sum_{k=1}^l a_{ik} b_{kj}, \quad (2.3)$$

и это выражение содержит по одному вхождению каждой из переменных  $a_{ik}$  и  $b_{kj}$  в первой степени. Следовательно, в силу основной теоремы интервальной арифметики интервальными выражениями (2.2) даются точные области значений для соответствующих точечных выражений (2.3) при  $a_{ik} \in \mathbf{a}_{ik}$  и  $b_{kj} \in \mathbf{b}_{kj}$ . ■

Интересно, что точное оценивание области значений тройного матричного произведения  $ABC$  для  $A \in \mathbf{A}$ ,  $B \in \mathbf{B}$ ,  $C \in \mathbf{C}$  является уже NP-трудной задачей [36].

Результат Предложения 2.1.1 мотивирует следующее конструктивное определение интервальных матричных операций, общее как для классической интервальной арифметики  $\mathbb{IR}$ , так и для полной интервальной арифметики  $\mathbb{KR}$ :

**Определение 2.1.4** Сумма (разность) двух интервальных матриц одинакового размера есть интервальная матрица того же размера, образованная поэлементными суммами (разностями) операндов.

Если  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij}) \in \mathbb{KR}^{m \times l}$  и  $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_{ij}) \in \mathbb{KR}^{l \times n}$ , то произведение матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  есть матрица  $\mathbf{C} = (\mathbf{c}_{ij}) \in \mathbb{KR}^{m \times n}$ , такая что

$$\mathbf{c}_{ij} := \sum_{k=1}^l \mathbf{a}_{ik} \mathbf{b}_{kj}.$$

Помимо операций сложения, вычитания и умножения интервальных векторов и матриц согласованных размеров имеет смысл ввести также

**Определение 2.1.5** Произведением скалярного интервала  $\mathbf{a} \in \mathbb{KR}$  на интервальную матрицу  $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_{ij}) \in \mathbb{KR}^{m \times n}$  назовём интервальную матрицу из  $\mathbb{KR}^{m \times n}$ , обозначаемую  $\mathbf{aB}$ , у которой  $ij$ -ый элемент равен  $\mathbf{a}\mathbf{b}_{ij}$ . Аналогичным образом определяется произведение интервальной матрицы  $\mathbf{A}$  на скалярный интервал  $\mathbf{b}$ .

Ясно, что это определение тоже удовлетворяет свойству (2.1), положенному в основу определений матричных интервальных операций.

Существует важный частный случай интервального матричного умножения, при котором его результат совпадает с множеством всевозможных точечных произведений «по представителям». Им является умножение интервальной матрицы на точечный вектор: для любых  $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  справедливо равенство

$$\mathbf{Ab} = \{ \mathbf{Ab} \mid \mathbf{A} \in \mathbf{A} \}. \quad (2.4)$$

Оно следует из того, что все выражения (2.3) для отдельных компонент пробегают интервалы (2.2) своих областей значений независимо друг от друга.

Тот факт, что результатом интервальной матричной операции умножения является интервальная матрица, которая не равна точно множеству произведений представителей матриц-сомножителей, а лишь оценивает его извне (хотя и наилучшим образом), имеет фундаментальные следствия. «Лишние матрицы», которые включаются в оценку в процессе взятия интервальной оболочки множества всех поточечных произведений, фактически, не имеют отношения к интересующему нас результату, но, однажды появившись в интервальной оценке, далее воспринимаются уже как её неотъемлемая часть, огрубляя окончательный ответ.

Рассмотрим в этой связи пример, который чрезвычайно важен для понимания специфики интервального анализа в многомерном случае. Он показывает, что фиксация формы множеств, ограничение их разнообразия, необходимые для организации эффективных конструктивных операций между этими множествами, становятся существенным ограничивающим фактором, приводят к появлению непривычных свойств и даже патологических ситуаций.

**Пример 2.1.1** Рассмотрим в  $\mathbb{R}^2$  итерационный процесс

$$\mathbf{x}^{(0)} \leftarrow ([1 - \epsilon, 1 + \epsilon], [-\epsilon, \epsilon])^\top, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} \leftarrow \frac{1}{1.15} R\mathbf{x}^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2.6)$$

с  $2 \times 2$ -матрицей

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться (запрограммировав, к примеру, этот процесс на ЭВМ), что итерации (2.5)–(2.6) расходятся: их результатом являются неограниченно увеличивающиеся в размерах брусы, вращающиеся вокруг начала координат и постепенно его захватывающие. На Рис. 2.4, иллюстрирующем наш пример, они выделены светло-серой закраской. Взятие интервальной оболочки точечных результатов при интервальном матрично-векторном умножении приводит к тому, что радиус бруса  $\mathbf{x}^{(k)}$  увеличивается примерно в 1.366 раза на каждом шаге.

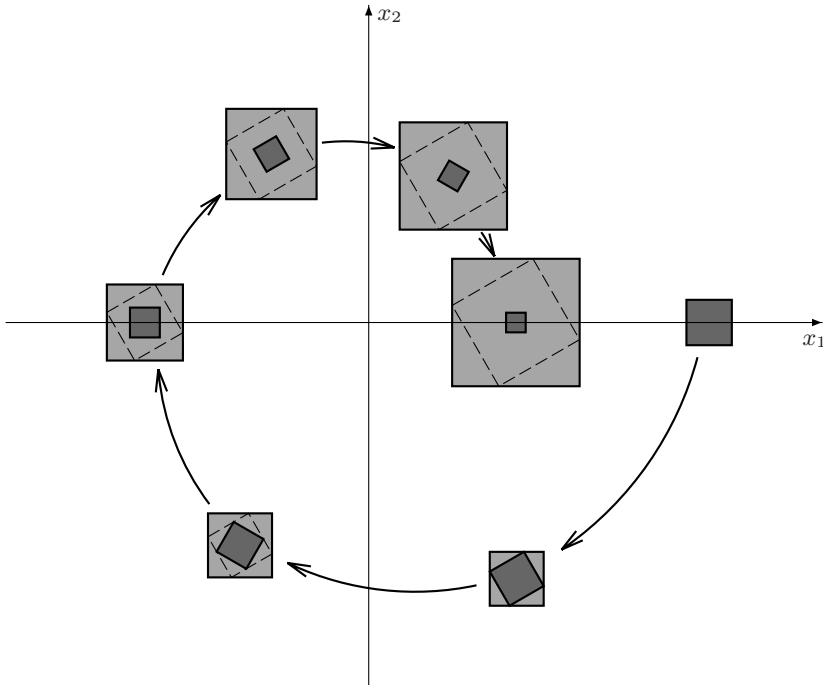


Рис. 2.4. Эффект обёртывания при многократном матрично-векторном интервальном умножении.

С другой стороны, коль скоро

$$\frac{1}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \quad \text{и} \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right),$$

матрица  $R$  задаёт поворот плоскости вокруг начала координат на угол  $(-\frac{\pi}{3})$ , а в итерациях (2.6) это сопровождается ещё и сжатием в 1.15 раза. Поэтому образы

начального бруса, рассматриваемые как множества всевозможных образов его точек, вращаясь, сжимаются в процессе (2.5)–(2.6) к началу координат (на Рис. 2.4 они изображены тёмным серым). ■

Мы будем называть *эффектом обёртывания* неконтролируемое увеличение размеров оценивающего интервального множества в сравнении с множеством идеальных математических результатов операции, выполненных «по представителям», которое возникает при многократном выполнении этой операции вследствие несовпадения формы множества точных результатов с формой оценивающих интервалов. Эффект обёртывания был рассмотрен выше на примере интервального матрично-векторного умножения, но он может проявиться и для других операций, не распадающихся поэлементно и покомпонентно вроде сложения и вычитания. Эффект обёртывания типичен в многомерном случае, для которого характерно большое разнообразие конфигураций множеств, и особенно сильно он проявляется в итерационных процессах либо рекуррентных вычислениях, где последовательные (пошаговые) замены множества решений на более простые интервальные оценки происходят многократно. Эффект обёртывания также присущ вычислениям в комплексных интервальных арифметиках (см. §1.8).

Эффект обёртывания и рассмотренный ранее в §1.2 эффект связанности (зависимости) переменных являются основными причинами огрубления интервальных оценок, получаемых в результате длинных цепочек интервальных вычислений.

## 2.2 Алгебраические и порядковые свойства

Обратимся к исследованию алгебраических свойств многомерных интервальных операций и тех свойств, которые связаны с их упорядочением по включению и преобразованием их характеристик.

Из частного случая дистрибутивности (1.55) следует справедливость следующих соотношений

$$a(\mathbf{B}' \pm \mathbf{B}'') = a\mathbf{B}' \pm a\mathbf{B}'', \quad (2.7)$$

$$(\mathbf{a}' \pm \mathbf{a}'')B = \mathbf{a}'B \pm \mathbf{a}''B, \quad (2.8)$$

где  $a, \mathbf{a}', \mathbf{a}''$  — скаляры, а  $B, \mathbf{B}', \mathbf{B}''$  — матрицы или векторы. Тем не менее, относительно введённых Определением 2.1.4 операций интервальные векторы и матрицы не образуют линейных векторных пространств в отличие, скажем, от  $\mathbb{R}^n$  и  $\mathbb{R}^{m \times n}$ . Этому мешает отсутствие в интервальных арифметиках полноценной дистрибутивности, вследствие чего нарушается аксиома линейного пространства

$$(\mu + \nu)\mathbf{a} = \mu\mathbf{a} + \nu\mathbf{a}$$

для скаляров  $\mu, \nu \in \mathbb{R}$  и интервального вектора или матрицы  $\mathbf{a}$ . Таким образом, интервальные векторы — не вполне «векторы» в том смысле, как этот термин понимается, к примеру, в линейной алгебре и линейном функциональном анализе.

Для интервальных векторных и матричных операций, совершенно аналогично одномерному случаю, выполняется важное свойство *монотонности по включению*.

Более точно, для любых интервальных матриц  $A, A', B, B'$  соответствующих размеров и любой операции  $\star \in \{+, -, \cdot\}$  справедливо

$$A \subseteq A', B \subseteq B' \Rightarrow A \star B \subseteq A' \star B'.$$

Оно непосредственно следует из определений и монотонности по включению интервальных арифметических операций в  $\mathbb{IR}$  и  $\mathbb{KR}$ .

Для любых интервальных матриц  $A, B$  одинакового размера справедливы соотношения

$$A + B = B + A, \quad \text{— коммутативность сложения,}$$

$$(A + B) + C = A + (B + C), \quad \text{— ассоциативность сложения.}$$

Но алгебраические свойства интервального матричного умножения весьма скудны. К естественному отсутствию коммутативности (которой нет и в точечном случае), добавляется отсутствие дистрибутивности умножения матриц по сложению, вытекающее из того, что это свойство не имеет места для сложения и умножения обычных интервалов. Ещё одна досадная особенность интервального матричного умножения — отсутствие ассоциативности. Например, даже в простейшем случае, когда

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} [-1, 1] \end{pmatrix},$$

имеем

$$(AB)C = 0 \cdot [-1, 1] = 0,$$

$$A(BC) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 1] \end{pmatrix} = [-2, 2].$$

Умножение матриц с элементами из полной интервальной арифметики  $\mathbb{KR}$ , очевидно, тем более не ассоциативно.

Отсутствие ассоциативности у интервального матричного умножения — большая потеря, которая, наряду с субдистрибутивностью, делает интервальную матрично-векторную алгебру, по существу, нелинейной, непохожей на традиционную линейную алгебру и более бедной.

Например, решение системы линейных уравнений вида  $Ax = b$  нам привычно выражать в виде  $A^{-1}b$ . Но в интервальном случае аналог такого понятия решения — так называемое формальное алгебраическое решение (см. Определение 4.3.2) для интервальной линейной системы  $Ax = b$  — уже не может быть выражено как  $A^{-1}b$  ни при каком разумном выборе  $A^{-1}$ . Хотя в полной интервальной арифметике Каухера мы можем попытаться определить формально обратную интервальную матрицу  $A^{-1}$  с помощью соотношения

$$AA^{-1} = I,$$

но проку от её введения будет немного, коль скоро

$$A^{-1}(Ax) \neq (A^{-1}A)x.$$

Важное практическое следствие из отсутствия ассоциативности в интервальном матричном умножении — это необходимость расстановкой скобок определять порядок операций в выражениях, содержащих более двух умножений подряд. В интервальной матричной алгебре выражения вида  $ABC$  не имеют однозначного смысла, так как их результат зависит от порядка выполнения умножений, а нам в этих условиях нужно чётко писать, требуется ли по смыслу задачи  $(AB)C$  или  $A(BC)$ .

**Предложение 2.2.1** Пусть  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{IR}^{m \times k}$ ,  $B = (b_{ij}) \in \mathbb{IR}^{k \times l}$ ,  $C = (c_{ij}) \in \mathbb{IR}^{l \times n}$ . Если  $A = A$  — точечная матрица или  $B, C \geq 0$ , то

$$(AB)C \subseteq A(BC). \quad (2.9)$$

Если  $C = C$  — точечная матрица или  $A, B \geq 0$ , то

$$(AB)C \supseteq A(BC). \quad (2.10)$$

**Доказательство.** Обоснуем сначала включение (2.9). В силу свойства субдистрибутивности (1.54)

$$\begin{aligned} ((AB)C)_{ij} &= \sum_{\nu=1}^l (AB)_{i\nu} c_{\nu j} = \sum_{\nu=1}^l \left( \sum_{\mu=1}^k a_{i\mu} b_{\mu\nu} \right) c_{\nu j} \\ &\subseteq \sum_{\nu=1}^l \sum_{\mu=1}^k a_{i\mu} b_{\mu\nu} c_{\nu j} = \sum_{\mu=1}^k \sum_{\nu=1}^l a_{i\mu} b_{\mu\nu} c_{\nu j} \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{\mu=1}^k a_{i\mu} \left( \sum_{\nu=1}^l b_{\mu\nu} c_{\nu j} \right) = \sum_{\mu=1}^k a_{i\mu} (BC)_{\mu j} = ((AB)C)_{ij}, \end{aligned}$$

где для вынесения за сумму общего множителя  $a_{i\mu}$  в равенстве  $(*)$  мы воспользовались одним из дистрибутивных соотношений (1.55)–(1.56).

Включение (2.10) доказывается схожим образом. ■

В самом общем случае, когда мы имеем дело с матрицами из  $\mathbb{KR}^{m \times n}$ , нельзя определённо указать, каким будет соотношение между результатами матричных произведений  $(AB)C$  и  $A(BC)$ . Дадим без доказательства один из результатов на эту тему, демонстрирующий огромное разнообразие ситуаций, которые могут встретиться при умножении интервальных матриц.

**Предложение 2.2.2** Пусть  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{KR}^{m \times k}$ ,  $B = (b_{ij}) \in \mathbb{KR}^{k \times l}$ ,  $C = (c_{ij}) \in \mathbb{IR}^{l \times n}$ . Если  $A$  — матрица, образованная неправильными интервалами и  $C = C$  — точечная матрица, то

$$(AB)C \subseteq A(BC).$$

Если  $A$  — матрица, образованная правильными интервалами и  $C = C$  — точечная матрица, то

$$(AB)C \supseteq A(BC).$$

Если  $\mathbf{A} = A$  — точечная матрица и  $\mathbf{C}$  образована только неправильными интервалами, то

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C} \supseteq \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C}).$$

Если  $\mathbf{A} = A$  — точечная матрица и  $\mathbf{C}$  образована только правильными интервалами, то

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C} \subseteq \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C}).$$

В некоторых важных частных ситуациях ассоциативность для интервальных матричных произведений всё-таки имеет место. В частности, справедливо

**Предложение 2.2.3** Пусть  $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{K}\mathbb{R}^{m \times k}$ ,  $\mathbf{B} = (b_{ij}) \in \mathbb{K}\mathbb{R}^{k \times l}$ ,  $\mathbf{C} = (c_{ij}) \in \mathbb{K}\mathbb{R}^{l \times n}$ . Если  $\mathbf{A} = A$  и  $\mathbf{C} = C$  — точечные матрицы или если  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \geq 0$ , то

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C}).$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} ((\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C})_{ij} &= \sum_{\nu=1}^l (\mathbf{A}\mathbf{B})_{i\nu} c_{\nu j} = \sum_{\nu=1}^l \left( \sum_{\mu=1}^k a_{i\mu} b_{\mu\nu} \right) c_{\nu j} \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{\nu=1}^l \sum_{\mu=1}^k (a_{i\mu} b_{\mu\nu}) c_{\nu j} = \sum_{\mu=1}^k \sum_{\nu=1}^l a_{i\mu} (b_{\mu\nu} c_{\nu j}) \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{\mu=1}^k \left( a_{i\mu} \sum_{\nu=1}^l b_{\mu\nu} c_{\nu j} \right) = \sum_{\mu=1}^k a_{i\mu} (\mathbf{B}\mathbf{C})_{\mu j} = (\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C}))_{ij}, \end{aligned}$$

где в равенствах, отмеченных знаком (\*), для внесения общего множителя  $c_{\nu j}$  (в первом случае) и вынесения за сумму общего множителя  $a_{i\mu}$  (во втором случае) мы воспользовались дистрибутивными соотношениями (1.55) и (1.56). ■

**Предложение 2.2.4** (свойства середины и радиуса)

$$\text{mid}(\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \text{mid } \mathbf{A} \pm \text{mid } \mathbf{B},$$

$$\text{mid}(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \text{mid } \mathbf{B}, \quad \text{mid}(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \text{mid } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \quad (2.11)$$

$$\text{rad}(\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \text{rad } \mathbf{A} + \text{rad } \mathbf{B},$$

$$\max\{|\mathbf{A}| \cdot \text{rad } \mathbf{B}, \text{rad } \mathbf{A} \cdot |\mathbf{B}|\} \leq \text{rad}(\mathbf{A}\mathbf{B}) \leq |\mathbf{A}| \cdot \text{rad } \mathbf{B} + \text{rad } \mathbf{A} \cdot |\mathbf{B}|, \quad (2.12)$$

$$\text{rad}(\mathbf{A}\mathbf{B}) = |\mathbf{A}| \cdot \text{rad } \mathbf{B}, \quad \text{rad}(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \text{rad } \mathbf{A} \cdot |\mathbf{B}|. \quad (2.13)$$

**Доказательство.** Для первого свойства оно очевидно, поскольку сложение и вычитание интервальных матриц выполняется для каждого элемента независимо от других, а для скалярных интервалов справедливо (1.24). Аналогично, из (1.27) вытекает третье из доказываемых свойств.

Свойства (2.11) и (2.13) являются следствиями (1.25) и (1.28) соответственно. Необходимость отдельных формулировок для умножения на точечную матрицу слева и справа вызвана тем, что матричное умножение не коммутативно.

Докажем (2.12). Элемент с индексами  $ij$  матрицы  $\text{rad}(\mathbf{AB})$  в силу (1.29) можно оценить сверху следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{rad}(\mathbf{AB})_{ij} &= \text{rad} \sum_{\nu=1}^l \mathbf{a}_{i\nu} \mathbf{b}_{\nu j} = \sum_{\nu=1}^l \text{rad}(\mathbf{a}_{i\nu} \mathbf{b}_{\nu j}) \\ &\leq \sum_{\nu=1}^l (|\mathbf{a}_{i\nu}| \cdot \text{rad} \mathbf{b}_{\nu j} + \text{rad} \mathbf{a}_{i\nu} \cdot |\mathbf{b}_{\nu j}|) = (|\mathbf{A}| \cdot \text{rad} \mathbf{B} + \text{rad} \mathbf{A} \cdot |\mathbf{B}|)_{ij}. \end{aligned}$$

Оценка снизу доказывается аналогично. ■

Интересным следствием Предложения 2.2.4 являются следующие элегантные формулы для произведения интервальной матрицы на точечную:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= [\text{mid} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \text{rad} \mathbf{A} \cdot |\mathbf{B}|, \text{mid} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \text{rad} \mathbf{A} \cdot |\mathbf{B}|], \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= [\mathbf{A} \cdot \text{mid} \mathbf{B} - |\mathbf{A}| \cdot \text{rad} \mathbf{B}, \mathbf{A} \cdot \text{mid} \mathbf{B} + |\mathbf{A}| \cdot \text{rad} \mathbf{B}]. \end{aligned}$$

Они вытекают из свойств середины и радиуса произведения матриц, т. е. из равенств второй и пятой строк формулировки Предложения. В частности, произведение интервальной матрицы на точечный вектор, часто встречающееся на практике, может быть представлено в виде

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = [\text{mid} \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \text{rad} \mathbf{A} \cdot |\mathbf{x}|, \text{mid} \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \text{rad} \mathbf{A} \cdot |\mathbf{x}|].$$

## 2.3 Нормы интервальных векторов и матриц

Традиционным атрибутом большинства линейных векторных пространств, используемых в приложениях математики и математическом моделировании, является понятие нормы вектора. Будучи обобщением абсолютной величины числа на многомерный случай, оно формализует такие интуитивно понятные свойства как «длина» вектора, «размер» объекта и им подобные, т. е. то, насколько рассматриваемый объект «мал» или «велик» вне зависимости от его расположения, формы и прочих второстепенных свойств. Чрезвычайно полезно ввести поэтому понятие «нормы» и в пространствах интервальных векторов  $\mathbb{IR}^n$  и  $\mathbb{KR}^n$ , несмотря на то, что полноценной линейностью эти пространства не обладают.

*Нормой* интервального вектора  $\mathbf{a}$  мы будем называть вещественную величину, обозначаемую  $\|\mathbf{a}\|$ , которая удовлетворяет следующим условиям (их часто называют *аксиомами нормы*):

$$(ВН1) \quad \|\mathbf{a}\| \geq 0, \text{ причём } \|\mathbf{a}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = 0 \text{ — неотрицательность,}$$

$$(ВН2) \quad \|\alpha \mathbf{a}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{a}\| \text{ для } \alpha \in \mathbb{R} \text{ — абсолютная однородность,}$$

$$(ВН3) \quad \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\| \text{ — «неравенство треугольника»,}$$



(ВН4)  $\text{prg } \mathbf{a} \subseteq \text{prg } \mathbf{b} \Rightarrow \|\mathbf{a}\| \leq \|\mathbf{b}\|$  — монотонность по включению.

**Пример 2.3.1** Для всякого  $\mathbf{a} \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n$  выражением

$$N(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n (|\underline{a}_i| + |\bar{a}_i|)$$

задаётся величина, удовлетворяющая первым трём аксиомам нормы (ВН1)–(ВН3). Однако нельзя сказать, что она характеризует «размер» или «величину» интервального вектора  $\mathbf{a}$ , так как

$$[2, 3] \subset [0, 4], \quad \text{но } N([2, 3]) = 5 > 4 = N([0, 4]),$$

что противоречит здравому смыслу и интуитивному пониманию «размера интервала». Ясно, что у большего по включению интервала этот «размер» тоже должен быть больше! ■

Подобные примеры мотивируют требование на норму интервальных векторов из  $\mathbb{I}\mathbb{R}^n$ : включение  $\mathbf{a} \subseteq \mathbf{b}$  должно влечь за собой  $\|\mathbf{a}\| \leq \|\mathbf{b}\|$ . Что касается векторов из  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ , то, учитывая тот факт (см. §1.7г), что неправильные интервалы интерпретируются тоже как подмножества  $\mathbb{R}$ , но вступающие в операции по специальным законам, новую аксиому нормы естественно адаптировать в виде (ВН4).

Наша ближайшая цель — описать естественный и весьма общий приём, с помощью которого могут быть построены конкретные нормы интервальных векторов. Напомним, что норма точечного вектора называется *абсолютной*, если она зависит лишь от абсолютных значений его компонент. Норма называется *монотонной*, если покомпонентное неравенство  $|a| \leq |b|$  влечёт неравенство норм  $\|a\| \leq \|b\|$  для любых векторов  $a$  и  $b$ . Свойство монотонности нормы оказывается равносильным её абсолютности [17, 25]. Для интервальных векторов мы также будем называть норму  $\|\cdot\|$  абсолютной, если  $\|\mathbf{a}\| = \|\|\mathbf{a}\|\|$ .

Если некоторое выражение  $\mathcal{N}(a)$  задаёт абсолютную норму точечных векторов  $a \in \mathbb{R}^n$ , то для интервальных векторов  $\mathbf{a}$  той же размерности выражением  $\mathcal{N}(|\mathbf{a}|)$  также задаётся норма в  $\mathbb{I}\mathbb{R}^n$  или  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ , удовлетворяющая всем аксиомам (ВН1)–(ВН4). Выполнение свойств (ВН1)–(ВН3) следует из свойств абсолютного значения интервалов в  $\mathbb{I}\mathbb{R}$  и  $\mathbb{K}\mathbb{R}$ , в частности, из неравенств треугольника (1.19) и (1.80). Выполнение свойства (ВН4) вытекает из того, что  $\mathcal{N}(a)$  определяет абсолютную норму и что для любых интервалов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  справедливо

$$|\mathbf{a}| = |\text{prg } \mathbf{a}| \quad \text{и} \quad \mathbf{a} \subseteq \mathbf{b} \Rightarrow |\mathbf{a}| \leq |\mathbf{b}|.$$

Таким образом, нормы интервальных векторов можно легко конструировать из абсолютных векторных норм в  $\mathbb{R}^n$ . Например, норму интервального вектора  $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_i) \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n$  можно определить как

$$\|\mathbf{a}\|_1 := |\mathbf{a}_1| + |\mathbf{a}_2| + \dots + |\mathbf{a}_n|,$$

т. е. как аналог 1-нормы, или

$$\|\mathbf{a}\|_2 := \sqrt{|\mathbf{a}_1|^2 + |\mathbf{a}_2|^2 + \dots + |\mathbf{a}_n|^2}, \quad (2.14)$$

т. е. как аналог евклидовой нормы (2-нормы), или

$$\|\mathbf{a}\|_{\infty} := \max_{1 \leq i \leq n} |a_i|, \quad (2.15)$$

как аналог чебышёвской нормы ( $\infty$ -нормы). Можно непосредственно убедиться, что все аксиомы (ВН1)–(ВН4) для этих норм выполнены. Мы будем называть норму (2.15) *чебышёвской нормой* или же *максимум-нормой*.

Разновидностью нормы (2.15) является взвешенная чебышёвская норма (взвешенная максимум-норма), определяемая для положительного  $n$ -вектора  $u = (u_i)$  как

$$\|\mathbf{a}\|_u := \max_{1 \leq i \leq n} |a_i|/u_i. \quad (2.16)$$

Замечательность этой и чебышёвской норм состоит в том, что их единичные шары совпадают по форме с интервальными векторами-брусами в  $\mathbb{R}^n$ . Ввиду этого обстоятельства нормы  $\|\cdot\|_{\infty}$  и  $\|\cdot\|_u$  играют заметную роль в интервальном анализе.

Аналогично интервальным векторам желательно иметь в своём распоряжении понятие нормы и для интервальных матриц. Станем называть *нормой* интервальной матрицы  $\mathbf{A}$  вещественную величину  $\|\mathbf{A}\|$ , которая обладает следующими свойствами:

(МН1)  $\|\mathbf{A}\| \geq 0$ , причём  $\|\mathbf{A}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = 0$  — неотрицательность,

(МН2)  $\|\alpha\mathbf{A}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{A}\|$  для  $\alpha \in \mathbb{R}$  — абсолютная однородность,

(МН3)  $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$  — «неравенство треугольника»,

(МН4)  $\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\|$  — субмультипликативность,

(МН5)  $\text{pro } \mathbf{A} \subseteq \text{pro } \mathbf{B} \Rightarrow \|\mathbf{A}\| \leq \|\mathbf{B}\|$  — монотонность по включению.

Таким образом, первые четыре из наших условий на норму интервальной матрицы совпадают с аксиомами нормы точечной матрицы (см., к примеру, [17, 25, 27]). С другой стороны, первые три и последняя из выписанных аксиом повторяют аксиомы векторной нормы и выражают взгляд на интервальную  $m \times n$ -матрицу, как на «вектор размерности  $mn$ », тогда как четвёртая аксиома отражает уже специфику множества матриц — наличие операции умножения.

Понимаемая в широком смысле, не только для матриц, но и для случая, когда  $\mathbf{A}$  или  $\mathbf{B}$  являются векторами, аксиома (МН4) может служить целям взаимного согласования матричных и векторных норм. Именно, мы будем называть нормы интервальных векторов и матриц *согласованными* друг с другом, если для любых матриц  $\mathbf{A}$  и векторов  $\mathbf{b}$ , для которых определено произведение  $\mathbf{Ab}$ , имеет место неравенство  $\|\mathbf{Ab}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{b}\|$ .

Наконец, на интервальную матрицу  $\mathbf{A}$  можно смотреть как на оператор  $\phi_{\mathbf{A}}$ , действующий из пространства  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$  в пространство  $\mathbb{K}\mathbb{R}^m$  по правилу  $\phi_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$ . Он является однородным, и потому для описания его действия напрашивается хорошо известная из линейной алгебры конструкция *подчинённой операторной нормы*

$$\|\phi_{\mathbf{A}}\| := \sup_{\|\mathbf{x}\| \leq 1} \|\mathbf{Ax}\|,$$

где обе нормы в правой части равенства понимаются как нормы интервальных векторов в  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$  и  $\mathbb{K}\mathbb{R}^m$  соответственно. Определённая так величина удовлетворяет всем аксиомам матричной нормы (проверка этого факта оставляется читателю как несложное упражнение) и может быть взята в качестве нормы интервальной матрицы  $\mathbf{A}$ . Часто её называют также *индуцированной нормой*.

**Предложение 2.3.1** Для интервальной  $m \times n$ -матрицы  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$  подчинённая 1-норма определяется выражением

$$\|\mathbf{A}\|_1 := \max_{1 \leq j \leq n} \left( \sum_{i=1}^m |\mathbf{a}_{ij}| \right).$$

Подчинённая  $\infty$ -норма интервальных матриц определяется выражением

$$\|\mathbf{A}\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq m} \left( \sum_{j=1}^n |\mathbf{a}_{ij}| \right).$$

**Доказательство.** Действительно,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_1 &= \sum_{i=1}^m |(\mathbf{A}\mathbf{x})_i| = \sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} \mathbf{x}_j \right| \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |\mathbf{a}_{ij} \mathbf{x}_j| \\ &\leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |\mathbf{a}_{ij}| |\mathbf{x}_j| = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m |\mathbf{a}_{ij}| |\mathbf{x}_j| = \sum_{j=1}^n \left( |\mathbf{x}_j| \sum_{i=1}^m |\mathbf{a}_{ij}| \right) \\ &\leq \left( \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |\mathbf{a}_{ij}| \right) \cdot \sum_{j=1}^n |\mathbf{x}_j| = \|\mathbf{A}\|_1 \|\mathbf{x}\|_1, \end{aligned}$$

причём все неравенства в этой цепочке соотношений обращаются в равенства при выборе вектора  $\mathbf{x}$  в виде столбца единичной матрицы с тем номером  $j$ , на котором достигается  $\max_j \sum_{i=1}^m |\mathbf{a}_{ij}|$ .

Аналогично доказывается и второе утверждение. ■

Напомним, что *сингулярными числами* матрицы  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  называются неотрицательные квадратные корни из собственных чисел матрицы  $A^T A$  [7, 10, 25, 27]. Равносильное определение: сингулярными числами матрицы  $A$  называются элементы диагональной матрицы  $\Sigma$  из (единственного) представления  $A = U \Sigma V^T$  с ортогональными матрицами  $U$  и  $V$ . Мы будем обозначать через  $\sigma_{\min}$  и  $\sigma_{\max}$  наименьшее и наибольшее сингулярные числа матрицы. Известно, что наибольшее сингулярное число матрицы является матричной нормой, подчинённой 2-норме (евклидовой норме) векторов в  $\mathbb{R}^n$  [4, 7, 10, 24, 25, 27]. Покажем, что аналогичный факт верен для норм интервальных векторов и матриц.

**Предложение 2.3.2** Величина, определяемая как

$$\|\mathbf{A}\|_2 := \sigma_{\max}(|\mathbf{A}|),$$

является нормой интервальных матриц и подчинена 2-норме интервальных векторов (2.14).

**Доказательство.** Для обоснования предложения оценим

$$\max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \|\mathbf{Ax}\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} (|\mathbf{Ax}|^\top |\mathbf{Ax}|)^{1/2}$$

Выражение, стоящее под знаком максимума, имеет смысл рассматривать лишь для уравновешенных (симметричных относительно нуля) интервалах, так как для всех других результат наверняка будет меньше. Это вызвано тем обстоятельством, что уравновешенные интервалы являются наиболее широкими из всех интервалов с данным модулем. Как следствие, на уравновешенных интервальных векторах  $\mathbf{x}$  произведение  $\mathbf{Ax}$  будет наиболее широким для интервальных векторов с фиксированным модулем компонент. ■

Напомним, что *спектральным радиусом* точечной  $n \times n$ -матрицы  $A$ , обозначаемым  $\rho(A)$ , называется наибольшее из абсолютных значений собственных чисел  $A$ , или, иначе, наименьший радиус круга комплексной плоскости с центром в начале координат, который целиком содержит спектр матрицы  $A$ . Известно, что спектральный радиус матрицы не превосходит любую из её норм (см. [4, 24, 25]), и поэтому, в частности,

$$\rho(|A|) \leq \|A\|$$

для всякой  $A \in \mathbb{K}\mathbb{R}^{n \times n}$ . Спектральный радиус как функция матрицы не является матричной нормой, но, как известно, для каждой фиксированной матрицы её спектральный радиус равен точной нижней грани значений всех норм этой матрицы [25].

Матрица  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  называется *разложимой*, если существует разбиение множества  $\{1, 2, \dots, n\}$  первых  $n$  натуральных чисел на два непересекающихся подмножества  $I$  и  $J$ , таких что  $a_{ij} = 0$  при  $i \in I$  и  $j \in J$ . Эквивалентное определение: матрица  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  разложима, если путём перестановок строк и столбцов она может быть приведена к блочно-треугольному виду

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

с квадратными блоками  $A_{11}$  и  $A_{22}$ . Матрицы, не являющиеся разложимыми, называются *неразложимыми*. Таких же определений разложимости и неразложимости мы будем придерживаться и для интервальных матриц. Важнейший пример неразложимых матриц — это матрицы, все элементы которых не равны нулю, в частности, положительны. Напомним основной результат теории неотрицательных матриц [4, 6, 17, 25]:

**Теорема 2.3.1** (теорема Перрона-Фробениуса). *Если  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — неразложимая неотрицательная матрица, то*

- (i) *A имеет положительное собственное значение, которое равно спектральному радиусу  $\rho(A)$ ;*

- (ii) существует положительный собственный вектор, отвечающий собственному значению  $\rho(A)$ ;
- (iii) собственное значение  $\rho(A)$  имеет алгебраическую кратность 1, т. е. является простым корнем характеристического многочлена для  $A$ .

Для разложимых матриц утверждение (iii) теоремы уже неверно. Тем не менее, поскольку любая неотрицательная матрица может быть представлена как предел последовательности положительных (и, следовательно, неразложимых) матриц, а доминирующее собственное значение и его нормализованный собственный вектор непрерывно зависят от элементов матрицы, то утверждения (i) и (ii) теоремы Перрона-Фробениуса остаются справедливыми для произвольных, не обязательно неразложимых, неотрицательных матриц. Итак, любая неотрицательная матрица имеет простое вещественное неотрицательное собственное значение, равное своему спектральному радиусу, и ему соответствует неотрицательный собственный вектор [6, 17, 25].

**Предложение 2.3.3** Пусть  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — неотрицательная матрица,  $\alpha$  — положительное вещественное число. Тогда

$$\begin{aligned} \rho(A) < \alpha &\iff (\exists v \in \mathbb{R}^n) (v > 0 \ \& \ Av < \alpha v), \\ \rho(A) \geq \alpha &\iff (\exists v \in \mathbb{R}^n) (v > 0 \ \& \ Av \geq \alpha v), \end{aligned}$$

где векторные неравенства понимаются покомпонентно.

**Доказательство** может быть найдено, например, в книге Р. Хорна и Ч. Джонсона [25], либо в англоязычных источниках [32, 46]. С другой стороны, неявным образом Предложение 2.3.3 обосновывается в доказательстве Х. Виландта теоремы Перрона-Фробениуса, которое воспроизводится во многих пособиях по теории матриц, например, в классической книге Ф. Гантмахера [6]. ■

Из Предложения 2.3.3 легко выводится следующее важное свойство спектрального радиуса: для любых матриц  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$|A| \leq B \quad \Rightarrow \quad \rho(A) \leq \rho(B). \quad (2.17)$$

Оно будет существенно использоваться далее.

## 2.4 Метрика и топология в интервальных пространствах

Определение метрики (расстояния) в пространствах интервальных векторов и матриц возможно различными способами.

Во-первых, аналогично определению расстояния между векторами  $a$  и  $b$  в линейных нормированных пространствах как  $\|a - b\|$ , мы можем ввести расстояние между интервальными векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  как норму того интервального вектора, на который они отличаются друг от друга. Единственная специфика интервального случая

состоит в том, что при вычислении этого отличия нужно брать алгебраическую разность  $\mathbf{a} \ominus \mathbf{b}$ , а не обычную интервальную разность  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ , которая предназначена для других целей. То есть, расстоянием в  $\mathbb{IR}^n$  или  $\mathbb{KR}^n$  полагаем

$$\text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \|\mathbf{a} \ominus \mathbf{b}\|, \quad (2.18)$$

где  $\|\cdot\|$  — некоторая векторная норма на  $\mathbb{KR}^n$ . Для пространства  $\mathbb{IR}^n$  эта метрика совпадает с хаусдорфовым расстоянием между интервальными векторами как брусками в  $\mathbb{R}^n$ , порождённым метрикой  $\text{dist}(a, b) = \|a - b\|$  на  $\mathbb{R}^n$  (см. §1.9).

Другой способ задания расстояния на многомерных интервальных пространствах  $\mathbb{IR}^n$  и  $\mathbb{KR}^n$  — отталкиваться от уже определённого расстояния  $\text{dist}$  между одномерными интервалами (см. §1.9), пользуясь тем, что многомерные пространства являются прямыми произведениями метрических пространств [12]. Например, можно определить расстояние между интервальными векторами  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  из  $\mathbb{KR}^n$  как

$$\text{dist}_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \sum_{i=1}^n \text{dist}(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i),$$

или как

$$\text{dist}_2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \left( \sum_{i=1}^n (\text{dist}(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i))^2 \right)^{1/2}.$$

В многомерных пространствах нередко бывает удобно работать с векторнозначным расстоянием — *мультиметрикой*. Для пространств интервальных векторов  $\mathbb{IR}^n$  и  $\mathbb{KR}^n$  естественно ввести её как

$$\text{Dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \begin{pmatrix} \text{dist}(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) \\ \vdots \\ \text{dist}(\mathbf{a}_n, \mathbf{b}_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^n, \quad (2.19)$$

т. е. как вектор расстояний между компонентами векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ .

На множествах интервальных матриц  $\mathbb{IR}^{m \times n}$  и  $\mathbb{KR}^{m \times n}$  также можно ввести обычное расстояние аналогично (2.18):

$$\text{dist}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) := \|\mathbf{A} \ominus \mathbf{B}\|, \quad (2.20)$$

где под  $\|\cdot\|$  понимается уже матричная норма в  $\mathbb{KR}^{m \times n}$ . Другой способ — введение расстояния на множестве матриц как на прямом произведении  $mn$  экземпляров пространств  $\mathbb{IR}$  или  $\mathbb{KR}$ , например,

$$\begin{aligned} \text{dist}_1(\mathbf{A}, \mathbf{B}) &= \sum_{i,j} \text{dist}(\mathbf{a}_{ij}, \mathbf{b}_{ij}), \\ \text{dist}_2(\mathbf{A}, \mathbf{B}) &= \left( \sum_{i,j} (\text{dist}(\mathbf{a}_{ij}, \mathbf{b}_{ij}))^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

и т. д. Наконец, можно использовать для измерения отклонения одной интервальной матрицы от другой мультиметрику, полагая для  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$  и  $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_{ij})$  из  $\mathbb{IR}^{m \times n}$  или  $\mathbb{KR}^{m \times n}$

$$\text{Dist}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) := \begin{pmatrix} \text{dist}(\mathbf{a}_{11}, \mathbf{b}_{11}) & \cdots & \text{dist}(\mathbf{a}_{1n}, \mathbf{b}_{1n}) \\ \text{dist}(\mathbf{a}_{21}, \mathbf{b}_{21}) & \cdots & \text{dist}(\mathbf{a}_{2n}, \mathbf{b}_{2n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{dist}(\mathbf{a}_{m1}, \mathbf{b}_{m1}) & \cdots & \text{dist}(\mathbf{a}_{mn}, \mathbf{b}_{mn}) \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Аксиомы расстояния, сформулированные в Предложении 1.9.1, а также свойства (1.95)–(1.96) и (1.100), справедливы для векторной и матричной мультиметрик, если понимать соответствующие неравенства и включения покомпонентно и поэлементно. С топологической точки зрения все рассмотренные метрики и мультиметрики эквивалентны друг другу, т. е. сходимость в одной из них равносильна сходимости в любой другой.

Аналогично одномерному случаю, справедливо

**Предложение 2.4.1** *Последовательность интервальных векторов  $\{\mathbf{a}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$  сходится в  $\mathbb{IR}^n$  или  $\mathbb{KR}^n$  тогда и только тогда, когда последовательности векторов концов  $\{\underline{\mathbf{a}}^{(k)}\}$  и  $\{\overline{\mathbf{a}}^{(k)}\}$  сходятся в  $\mathbb{R}^n$ . При этом*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{a}^{(k)} = \left[ \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{\mathbf{a}}^{(k)}, \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{\mathbf{a}}^{(k)} \right].$$

**Доказательство** очевидно.

**Предложение 2.4.2** (принцип вложенных интервалов)

*Всякая вложенная последовательность интервальных векторов  $\{\mathbf{a}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$  в  $\mathbb{IR}^n$ , т. е. такая, что  $\mathbf{a}^{(k+1)} \subseteq \mathbf{a}^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , имеет предел  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{a}^{(k)}$  и*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{a}^{(k)} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathbf{a}^{(k)}.$$

Это результат непосредственно следует из своего одномерного аналога (стр. 71).

Обобщим теперь на многомерный случай полезную оценку (1.99). Если  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  становятся в (1.99) интервальными векторами или матрицами, а расстояние между ними измеряется мультиметрикой  $\text{Dist}$ , то справедливо

**Предложение 2.4.3** *Для любых интервальных матриц  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij}) \in \mathbb{KR}^{m \times l}$  и  $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_{ij})$ ,  $\mathbf{C} = (\mathbf{c}_{ij}) \in \mathbb{KR}^{l \times n}$  имеет место*

$$\text{Dist}(\mathbf{AB}, \mathbf{AC}) \leq |\mathbf{A}| \cdot \text{Dist}(\mathbf{B}, \mathbf{C}). \quad (2.22)$$

**Доказательство.** Действительно, в силу неравенств (1.96)–(1.99) мы можем заклю-

чить, что

$$\begin{aligned} \text{dist}((\mathbf{AB})_{ij}, (\mathbf{AC})_{ij}) &= \text{dist}\left(\sum_{k=1}^l \mathbf{a}_{ik} \mathbf{b}_{kj}, \sum_{k=1}^l \mathbf{a}_{ik} \mathbf{c}_{kj}\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^l \text{dist}(\mathbf{a}_{ik} \mathbf{b}_{kj}, \mathbf{a}_{ik} \mathbf{c}_{kj}) \leq \sum_{k=1}^l |\mathbf{a}_{ik}| \cdot \text{dist}(\mathbf{b}_{kj}, \mathbf{c}_{kj}) \end{aligned}$$

при всех  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , что и доказывает многомерную оценку (2.22). ■

Совершенно аналогичным образом доказывается

**Предложение 2.4.4** Для любых интервальных матриц  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$ ,  $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_{ij}) \in \mathbb{K}\mathbb{R}^{m \times l}$ ,  $\mathbf{C} = (\mathbf{c}_{ij}) \in \mathbb{K}\mathbb{R}^{l \times n}$  имеет место

$$\text{Dist}(\mathbf{AC}, \mathbf{BC}) \leq \text{Dist}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \cdot |\mathbf{C}|.$$

Необходимость его отдельной формулировки вызвана тем, что матричное умножение некоммутативно.

Важнейший частный случай вышедоказанных предложений — неравенство

$$\text{Dist}(\mathbf{Ab}, \mathbf{Ac}) \leq |\mathbf{A}| \cdot \text{Dist}(\mathbf{b}, \mathbf{c}) \quad (2.23)$$

для интервальной матрицы  $\mathbf{A} \in \mathbb{K}\mathbb{R}^{m \times n}$  и интервальных векторов  $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n$ .

Интервальные матрично-векторные операции сложения, вычитания и умножения, а также операции  $\vee$ ,  $\wedge$ , «dual», «pro» и «opp» являются непрерывными как в метриках (2.18)–(2.20), так и в мультиметриках (2.19)–(2.21), что является очевидным следствием непрерывности этих интервальных операций в соответствующих арифметиках (см. §1.9).

Остаток этого параграфа мы посвятим напоминанию некоторых важных фактов из математического анализа, которые будут существенно использоваться далее в книге.

Пусть  $X$  — метрическое пространство с расстоянием  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Отображение  $f : X \rightarrow X$  называется *сжимающим* (или просто *сжатием*), если существует такая положительная постоянная  $\alpha < 1$ , что для любых элементов  $x, y \in X$  имеет место неравенство

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y),$$

т. е. при действии отображения  $f$  расстояние между образами любых двух точек в  $\alpha$  раз меньше расстояния между самими этими точками.

**Теорема 2.4.1** (теорема Банаха о неподвижной точке). *Сжимающее отображение  $f : X \rightarrow X$  полного метрического пространства  $X$  в себя имеет единственную неподвижную точку. Она может быть найдена как предел последовательных приближений*

$$x^{(k+1)} \leftarrow f(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

при любом начальном приближении  $x^{(0)} \in X$ .



Доказательство этого результата вместе с подробными комментариями можно найти, например, в [12, 15, 21].<sup>1</sup>

Для мультиметрических пространств аналогом теоремы Банаха о неподвижной точке сжимающих отображений является теорема Шрёдера о неподвижной точке. Ниже мы приводим её упрощённый конечномерный вариант, достаточный для наших нужд. Перед тем, как дать её формулировку, введём

**Определение 2.4.1** *Отображение  $f : X \rightarrow X$  мультиметрического пространства  $X$  с мультиметрикой  $D : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+^n$  называется  $P$ -сжимающим или  $P$ -сжатием, если существует неотрицательная  $n \times n$ -матрица  $P$  со спектральным радиусом  $\rho(P) < 1$ , такая что для всех  $x, y \in X$  имеет место*

$$D(f(x), f(y)) \leq P \cdot D(x, y). \quad (2.24)$$

Если из контекста ясно, какая матрица  $P$  имеет в виду, то и в этом случае можно просто говорить о «сжимающем отображении» или «сжатии». В отношении объекта, вводимого Определением 2.4.1, математики, к сожалению, не придерживаются единой терминологии. Ряд авторов (см. [46]) за матрицей  $P$  из неравенства (2.24) закрепляют отдельное понятие «оператора Липшица (матрицы Липшица) отображения  $f$ », рассматривая (2.24) как многомерный аналог известного условия Липшица. Тогда в условиях Определения 2.4.1 говорят, что «оператор Липшица для  $f$  — сжимающий».

**Теорема 2.4.2** (конечномерная теорема Шрёдера о неподвижной точке). *Пусть отображение  $\Phi : X \rightarrow X$  является  $P$ -сжимающим отображением полного мультиметрического пространства  $X$  с мультиметрикой  $D : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+^n$ . Тогда для любого  $x^{(0)}$  последовательность итераций*

$$x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

*сходится к единственной неподвижной точке  $x^*$  отображения  $\Phi$  в  $X$  и имеет место оценка*

$$D(x^{(k)}, x^*) \leq (I - P)^{-1} P \cdot D(x^{(k)}, x^{(k-1)}).$$

Доказательство можно найти, например, в книгах [1, 14, 21, 46]

## 2.5 Неособенные интервальные матрицы

**Определение 2.5.1** *Интервальная матрица  $A \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  называется неособенной (или регулярной), если неособенны все точечные  $n \times n$ -матрицы  $A \in A$ . Интервальная матрица  $A \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  называется особенной, если она содержит особенную точечную матрицу, т. е. не является неособенной.*

**Пример 2.5.1** *Особенными или неособенными являются интервальные матрицы*

$$\begin{pmatrix} [0, 1] & [2, 3] \\ [4, 5] & [6, 7] \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} [1, 2] & [3, 4] \\ [5, 6] & [7, 8] \end{pmatrix} ?$$

<sup>1</sup>В учебниках [12, 15] этот классический результат называется «принципом неподвижной точки», и в [12] связывается с именами Ш.Э. Пикара и С. Банаха.

Для ответа на этот вопрос можно воспользоваться интервальным оцениванием определителя. Для первой матрицы он равен  $[0, 1] \cdot [6, 7] - [4, 5] \cdot [2, 3] = [-15, -1] \not\supseteq 0$ , тогда как для второй  $[1, 2] \cdot [7, 8] - [5, 6] \cdot [3, 4] = [-17, 1] \ni 0$ . Следовательно, первая интервальная матрица неособенна, а вторая особенна, поскольку в случае  $2 \times 2$ -матриц в выражение для определителя все переменные — элементы матрицы — входят только по одному разу в первой степени. ■

В общем случае проверка того, особенна или неособенна интервальная матрица, представляет собой NP-трудную задачу [48]. В наиболее сильной форме соответствующий результат утверждает [52], что для всякого  $\epsilon > 0$  задача выяснения особенности/неособенности интервальных матриц вида  $[A - \epsilon E, A + \epsilon E]$ , где  $A$  — неотрицательная симметричная положительно определённая матрица с рациональными элементами, а  $E$  — матрица, все элементы которой равны 1, является NP-трудной. Принимая во внимание эти результаты и современное состояние теории сложности вычислений (гипотезу « $P \neq NP$ », см. [8]), мы не должны ожидать существования полиномиально-сложных алгоритмов для проверки неособенности общих интервальных матриц. Для практики имеет смысл выработать несложные достаточные условия особенности или неособенности интервальных матриц, причём желательно иметь в своём распоряжении, по-возможности, более широкий набор таких тестовых процедур. Каждая отдельная из них, как правило, бывает наиболее пригодной для каких-то отдельных классов задач.

Начнём этот параграф простыми признаками неособенности интервальных матриц, основанными на понятии диагонального преобладания. Напомним, что точечная матрица  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  называется *матрицей с диагональным преобладанием* (или просто имеющей диагональное преобладание), если для всякого  $i = 1, 2, \dots, n$  справедливо

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|. \quad (2.25)$$

Как известно, матрицы с диагональным преобладанием неособенны, и этот результат составляет содержание признака Адамара [6]. Если вместо (2.25) имеют место нестрогие неравенства

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.26)$$

то говорят о *слабом диагональном преобладании* в матрице  $A$ . Согласно известной теореме О. Таусски (см. [6]), если для неразложимой матрицы  $A$  выполнены условия (2.26), причём хотя бы одно из этих неравенств выполнено строго, то матрица  $A$  неособенна. Нетрудно перенести и признак Адамара, и теорему О. Таусски на интервальные матрицы.

**Определение 2.5.2** *Станем говорить, что интервальная матрица имеет диагональное преобладание, если диагонально преобладающими являются все содержащиеся в ней точечные матрицы.*

Ясно, что это определение эквивалентно следующему: интервальная матрица  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  обладает диагональным преобладанием, если она удовлетворяет

неравенствам

$$\langle \mathbf{a}_{ii} \rangle > \sum_{j \neq i} |\mathbf{a}_{ij}| \quad \text{для всех } i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.27)$$

Если же имеют место нестрогие неравенства,

$$\langle \mathbf{a}_{ii} \rangle \geq \sum_{j \neq i} |\mathbf{a}_{ij}| \quad \text{для всех } i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.28)$$

то будем говорить о *слабом диагональном преобладании*.

**Теорема 2.5.1** (интервальный признак Адамара) *Интервальная матрица с диагональным преобладанием, т. е. удовлетворяющая (2.27), является неособенной.*

**Доказательство** очевидным образом следует из обычного признака Адамара и Определения 2.5.2.

**Теорема 2.5.2** (интервальная теорема О. Таусски). *Если в неразложимой интервальной матрице  $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  имеет место слабое диагональное преобладание (2.28), причём хотя бы одно из этих неравенств выполнено строго, то матрица  $\mathbf{A}$  неособенна.*

Обратимся теперь к более сложным признакам особенности и неособенности интервальных матриц.

**Теорема 2.5.3** (критерий Баумана) *Интервальная матрица  $\mathbf{A}$  неособенна тогда и только тогда, когда определители всех её крайних матриц имеют одинаковый знак, т. е.  $(\det A')(\det A'') > 0$  для любых  $A', A'' \in \text{vert } \mathbf{A}$ .*

**Доказательство.** Необходимость покажем «от противного», предположив, что для каких-то крайних матриц  $A'$  и  $A''$  интервальной матрицы  $\mathbf{A}$  определители  $\det A'$  и  $\det A''$  имеют разный знак. Соединим в пространстве  $\mathbb{R}^{n \times n}$  матрицы  $A'$  и  $A''$  отрезком прямой, к примеру, с параметрическим уравнением  $(1-t)A' + tA''$ ,  $t \in [0, 1]$ , и рассмотрим функцию  $\psi(t) = \det((1-t)A' + tA'')$ .

Ясно, что  $\psi(t)$  — непрерывная вещественнозначная функция, к тому же на концах интервала  $[0, 1]$  она принимает значения разных знаков. Следовательно, в силу теоремы Больцано-Коши внутри  $[0, 1]$  обязательно найдётся точка  $\xi$ , в которой  $\psi(\xi) = 0$ . Соответствующая матрица  $(1-\xi)A' + \xi A''$  — особенная и лежит в интервальной матрице  $\mathbf{A}$ .

Для доказательства достаточности напомним читателю известный факт линейной алгебры: если в матрице некоторый столбец является суммой вектор-столбцов, то её определитель равен сумме определителей матриц, у которых на месте этого столбца стоят слагаемые вектор-столбцы. ■

Следующий результат является необходимым и достаточным условием особенности интервальных матриц, тесно связанным с характеристикой Оетгли-Прагера для объединённого множества решений ИСЛАУ (см. §5.26).

**Теорема 2.5.4** *Интервальная матрица  $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  особенна тогда и только тогда, когда система неравенств*

$$|(\text{mid } \mathbf{A})x| \leq (\text{rad } \mathbf{A})|x|, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.29)$$

*имеет ненулевое решение.*

**Доказательство.** **Необходимость.** Если  $\mathbf{A}$  содержит особенную матрицу  $\tilde{\mathbf{A}}$ , то  $\tilde{\mathbf{A}}\tilde{x} = 0$  для некоторого ненулевого вектора  $\tilde{x}$ . Следовательно,

$$|(\text{mid } \mathbf{A})\tilde{x}| = |(\text{mid } \mathbf{A} - \tilde{\mathbf{A}})\tilde{x}| \leq |\tilde{\mathbf{A}} - \text{mid } \mathbf{A}||\tilde{x}| \leq (\text{rad } \mathbf{A})|\tilde{x}|,$$

поскольку  $|\tilde{\mathbf{A}} - \text{mid } \mathbf{A}| \leq \text{rad } \mathbf{A}$ . Таким образом,  $\tilde{x}$  является решением системы неравенств (2.29).

**Достаточность.** Если неравенство (2.29) действительно имеет решение  $\tilde{x} \neq 0$ , то для векторов  $y = (y_i)$ ,  $z = (z_j) \in \mathbb{R}^n$ , таких что

$$y_i = \begin{cases} \frac{(\text{mid } \mathbf{A} \cdot \tilde{x})_i}{(\text{rad } \mathbf{A} \cdot |\tilde{x}|)_i}, & \text{если } (\text{rad } \mathbf{A} \cdot |\tilde{x}|)_i \neq 0, \\ 1, & \text{если } (\text{rad } \mathbf{A} \cdot |\tilde{x}|)_i = 0, \end{cases}$$

и

$$z_j = \begin{cases} 1, & \text{если } \tilde{x}_j \geq 0, \\ -1, & \text{если } \tilde{x}_j < 0, \end{cases}$$

$i, j = 1, 2, \dots, n$ , рассмотрим матрицу  $\tilde{\mathbf{A}}$  с элементами

$$(\text{mid } \mathbf{A})_{ij} - y_i z_j (\text{rad } \mathbf{A})_{ij}.$$

В матричном виде она может быть представлена как

$$\tilde{\mathbf{A}} = \text{mid } \mathbf{A} - \text{diag } \{y\} \cdot \text{rad } \mathbf{A} \cdot \text{diag } \{z\}.$$

Так как все  $|y_i z_j| \leq 1$ , то, очевидно,  $\tilde{\mathbf{A}}$  принадлежит  $\mathbf{A}$ . В то же время, она особенная, так как её произведение на ненулевой вектор  $\tilde{x}$  зануляется. В самом деле,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}\tilde{x} &= (\text{mid } \mathbf{A})\tilde{x} - \text{diag } \{y\} (\text{rad } \mathbf{A}) \text{diag } \{z\} \tilde{x} \\ &= (\text{mid } \mathbf{A})\tilde{x} - \text{diag } \{y\} (\text{rad } \mathbf{A})|\tilde{x}|, \end{aligned}$$

причём  $i$ -ая компонента этого вектора должна быть равна разности

$$((\text{mid } \mathbf{A})\tilde{x})_i - ((\text{rad } \mathbf{A})|\tilde{x}|)_i,$$

если  $((\text{rad } \mathbf{A})|\tilde{x}|)_i \neq 0$ , или разности двух нулей (в силу (2.29)), если  $((\text{rad } \mathbf{A})|\tilde{x}|)_i = 0$ .

■

Доказательство Теоремы 2.5.4 носит, как видим, конструктивный характер и позволяет по нетривиальному решению системы неравенств (2.29) указать, какую именно особенную точечную матрицу содержит данная интервальная матрица. Тем не менее, принимая во внимание результат об NP-трудности распознавания особенности/неособенности интервальных матриц, нахождение таких нетривиальных решений для (2.29) в общем случае очень непросто.

**Определение 2.5.3** *Ортантом пространства  $\mathbb{R}^n$  называется множество точек, координаты которых имеют определённые фиксированные знаки, взятое вместе со своей границей.*

Ортанты иногда называют также *координатными углами* пространства, а в двумерном случае — *квадрантами*. Каждый ортант в  $\mathbb{R}^n$  определяется системой нестрогих неравенств виде  $x_i \leq 0$  или  $x_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Теорема 2.5.5** *Интервальная матрица  $\mathbf{A}$  неособенна тогда и только тогда, когда для каждого ортанта  $\mathcal{O}$  в  $\mathbb{R}^n$  существует решение системы неравенств*

$$|(\text{mid } \mathbf{A})x| > (\text{rad } \mathbf{A})|x|,$$

*удовлетворяющее  $(\text{mid } \mathbf{A})x \in \mathcal{O}$ .*

В отличие от предшествующей теоремы доказательство этого результата является непростым и требует привлечения разнообразных фактов, касающихся линейной задачи о дополнителности, так называемых  $P$ -матриц и т. п. Практическое значение Теоремы 2.5.5 невелико, так как её применение требует, фактически, решения  $2^n$  линейных неравенств (в каждом из ортантов пространства). Но Теоремы 2.5.4–2.5.5 составляют основу для конструирования более практичных достаточных признаков особенности/неособенности интервальных матриц, выводу которых посвящена оставшаяся часть параграфа.

**Теорема 2.5.6** (признак Бекка) *Пусть интервальная матрица  $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  такова, что её середина  $\text{mid } \mathbf{A}$  неособенна и*

$$\rho(|(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \cdot \text{rad } \mathbf{A}) < 1. \quad (2.30)$$

*Тогда  $\mathbf{A}$  неособенная.*

**Доказательство.** Предположим, напротив, что интервальная матрица  $\mathbf{A}$  особенная. Тогда согласно Теореме 2.5.4 существует ненулевой  $n$ -вектор  $\tilde{x}$ , такой что

$$|(\text{mid } \mathbf{A})\tilde{x}| \leq (\text{rad } \mathbf{A})|\tilde{x}|.$$

Таким образом,

$$|\tilde{x}| = |(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}(\text{mid } \mathbf{A})\tilde{x}| \leq |(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \cdot |(\text{mid } \mathbf{A})\tilde{x}| \leq |(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \cdot (\text{rad } \mathbf{A}) \cdot |\tilde{x}|,$$

откуда в силу результата Предложения 2.3.3 следует, что спектральный радиус неотрицательной матрицы  $|(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}|(\text{rad } \mathbf{A})$  не меньше единицы. Противоречие! ■

**Теорема 2.5.7** Пусть интервальная матрица  $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  такова, что её середина  $\text{mid } \mathbf{A}$  неособенна и

$$\max_{1 \leq j \leq n} \left( \text{rad } \mathbf{A} \cdot |(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \right)_{jj} \geq 1. \quad (2.31)$$

Тогда  $\mathbf{A}$  особенная.

**Доказательство.** Пусть  $j$  — индекс, для которого

$$\left( \text{rad } \mathbf{A} \cdot |(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \right)_{jj} \geq 1.$$

Если посредством  $x$  обозначить  $j$ -ый столбец матрицы  $(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}$ , то должно выполняться неравенство

$$|(\text{mid } \mathbf{A}) x| \leq (\text{rad } \mathbf{A}) |x|,$$

причём  $x \neq 0$  в силу условия доказываемой теоремы. Но тогда в силу результата Теоремы 2.5.4 интервальная матрица  $\mathbf{A}$  должна быть особенной. ■

Для уяснения практической силы признака Бекка полезен следующий результат, установленный З. Румпом [53]: для всякого целого  $n \geq 1$  найдётся такая неособенная интервальная  $n \times n$ -матрица  $\mathbf{A}$ , что

$$\rho(|(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \cdot \text{rad } \mathbf{A}) > n - 1.$$

Таким образом, признак Бекка не отличается большой чувствительностью, но его основное назначение, как мы увидим в следующем разделе, состоит несколько в другом.

Практическое применение признаков, сформулированных в виде Теорем 2.5.6–2.5.7, имеет определённую специфику. Если вычисление обратной средней матрицы  $(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}$  выполняется приближённо, например, на цифровых ЭВМ в арифметике с плавающей точкой, то и неравенства (2.30)–(2.31) мы, строго говоря, проверить не сможем. Необходимы поэтому переформулировки результатов Теорем 2.5.6–2.5.7, которые бы учитывали приближённый характер обращения  $\text{mid } \mathbf{A}$ . Они были даны Г. Рексом и И. Роном в [50].

**Теорема 2.5.8** Если существует матрица  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , такая что

$$\rho(|I - R \cdot \text{mid } \mathbf{A}| + |R| \cdot \text{rad } \mathbf{A}) < 1, \quad (2.32)$$

то интервальная матрица  $\mathbf{A}$  — неособенная.

**Теорема 2.5.9** Если существует матрица  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , такая что покомпонентное неравенство

$$(I + |I - \text{mid } \mathbf{A} \cdot R|)_{\cdot j} \leq (\text{rad } \mathbf{A} \cdot |R|)_{\cdot j} \quad (2.33)$$

выполнено для некоторого  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , то интервальная матрица  $\mathbf{A}$  — особенная.

Для вычисления требуемого в Теоремах 2.5.6–2.5.8 спектрального радиуса можно с успехом применять степенные итерации [7, 10, 23, 24]. Действительно, матрицы

$$|(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \cdot \text{rad } \mathbf{A} \quad \text{и} \quad |I - R \cdot \text{mid } \mathbf{A}| + |R| \cdot \text{rad } \mathbf{A}$$

— неотрицательные, и потому в силу теории Перрона-Фробениуса они обладают неотрицательными доминирующими собственными значениями, которые превосходят по модулю все их остальные собственные значения. В этих условиях степенные итерации сходятся без патологий, вызванных возможным наличием у исследуемой матрицы комплексно сопряжённых собственных значений или (если матрица неразложима) нелинейного элементарного делителя. Тем не менее, для ускорения сходимости степенных итераций может потребоваться применение так называемых сдвигов [23, 24].

Если средняя матрица  $\text{mid } \mathbf{A}$  близка к особенной, то тесты, использующие обратную к ней матрицу, могут оказаться неустойчивыми. З. Румп в [53] предложил условия неособенности, не опирающиеся на нахождение «обратной средней», вместо которой используется информация о сингулярных числах матриц средин и радиусов для исследуемой матрицы.

**Теорема 2.5.10** (признак Румпа) *Если для интервальной матрицы  $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  имеет место*

$$\sigma_{\max}(\text{rad } \mathbf{A}) < \sigma_{\min}(\text{mid } \mathbf{A}), \quad (2.34)$$

*то она неособенная.*

**Доказательство.** Предположим обратное доказываемому: матрица  $\mathbf{A}$  — особенная. Тогда по Теореме 2.5.4 для некоторого вектора  $\tilde{x} \neq 0$  справедливо неравенство (2.29), т. е.

$$|(\text{mid } \mathbf{A}) \tilde{x}| \leq (\text{rad } \mathbf{A}) |\tilde{x}|,$$

а также равносильное ему покомпонентное неравенство для вектор-строк

$$|(\text{mid } \mathbf{A}) \tilde{x}|^{\top} \leq ((\text{rad } \mathbf{A}) |\tilde{x}|)^{\top}.$$

Компоненты векторов, стоящих в левых и правых частях этих неравенств, неотрицательны, и потому, перемножая скалярно векторы из одноимённых частей неравенств, мы придём к неравенству того же смысла:

$$|(\text{mid } \mathbf{A}) \tilde{x}|^{\top} |(\text{mid } \mathbf{A}) \tilde{x}| \leq ((\text{rad } \mathbf{A}) |\tilde{x}|)^{\top} (\text{rad } \mathbf{A}) |\tilde{x}|.$$

Далее без ограничения общности можно считать, что  $\|\tilde{x}\|_2 = 1$ , т. е. что вектор  $\tilde{x}$

нормализован в евклидовой норме. Имеем

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\min}^2(\text{mid } \mathbf{A}) &= \lambda_{\min}((\text{mid } \mathbf{A})^\top (\text{mid } \mathbf{A})) \\
 &= \min_{\|x\|=1} (x^\top (\text{mid } \mathbf{A})^\top (\text{mid } \mathbf{A}) x) \\
 &\leq ((\text{mid } \mathbf{A}) \tilde{x})^\top ((\text{mid } \mathbf{A}) \tilde{x}) \\
 &\leq |(\text{mid } \mathbf{A}) \tilde{x}|^\top |(\text{mid } \mathbf{A}) \tilde{x}| \\
 &\leq ((\text{rad } \mathbf{A}) |\tilde{x}|)^\top (\text{rad } \mathbf{A}) |\tilde{x}| \\
 &= |\tilde{x}|^\top (\text{rad } \mathbf{A})^\top (\text{rad } \mathbf{A}) |\tilde{x}| \\
 &\leq \max_{\|x\|=1} x^\top ((\text{rad } \mathbf{A})^\top (\text{rad } \mathbf{A})) x \\
 &= \lambda_{\max}((\text{rad } \mathbf{A})^\top (\text{rad } \mathbf{A})) = \sigma_{\max}^2(\text{rad } \mathbf{A}),
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

где для перехода от первой строки выкладок ко второй и от предпоследней к последней мы воспользовались характеристикой Рэлея собственных чисел симметричной матрицы (см., к примеру, [4, 6, 17, 25]):

$$\lambda_{\min}(A) = \min_{x \neq 0} \frac{x^\top A x}{x^\top x}, \quad \lambda_{\max}(A) = \max_{x \neq 0} \frac{x^\top A x}{x^\top x}.$$

Сравнивая начало и конец выкладок (2.35), в целом получаем

$$\sigma_{\min}(\text{mid } \mathbf{A}) \leq \sigma_{\max}(\text{rad } \mathbf{A}),$$

а это противоречит нашему исходному допущению. ■

### Пример 2.5.2 Интервальная матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [0, 1] & [2, 3] \\ [4, 5] & [6, 7] \end{pmatrix},$$

как мы видели выше в Примере 2.5.1, неособенная, и это легко выявляется признаком Бекка: спектральный радиус матрицы  $|(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \cdot \text{rad } \mathbf{A}$  равен 0.8750. В то же время,  $\sigma_{\max}(\text{rad } \mathbf{A}) = 1$ ,  $\sigma_{\min}(\text{mid } \mathbf{A}) = 0.9697$ , так что признак Румпа не позволяет определённо судить о неособенности  $\mathbf{A}$ .

Рассмотрим теперь матрицу

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3.2 & [0, 2] & [0, 2] \\ [0, 2] & 3.2 & [0, 2] \\ [0, 2] & [0, 2] & 3.2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку  $\sigma_{\max}(\text{rad } \mathbf{B}) = 2$ ,  $\sigma_{\min}(\text{mid } \mathbf{B}) = 2.2$ , то признак Румпа свидетельствует о неособенности  $\mathbf{B}$ . Но спектральный радиус матрицы  $(|\text{mid } \mathbf{B}|^{-1}) \cdot \text{rad } \mathbf{B}$  равен 1.0839, и потому признак Бекка к  $\mathbf{B}$  неприменим.



Таким образом, ни одно из условий (2.30) и (2.34) неособенности интервальных матриц не поглощает другое. ■

**Теорема 2.5.11** (признак Рона-Рекса) *Если для интервальной матрицы  $\mathbf{A}$  имеет место*

$$\sigma_{\min}(\text{rad } \mathbf{A}) \geq \sigma_{\max}(\text{mid } \mathbf{A}), \quad (2.36)$$

*то она особенная.*

**Доказательство.** Пусть, вопреки доказываемому, матрица  $\mathbf{A}$  является неособенной. Тогда в силу Теоремы 2.5.5, применённой к неотрицательному ортанту  $\mathcal{O}$ , существует вектор  $\tilde{x}$ , удовлетворяющий

$$(\text{mid } \mathbf{A}) \tilde{x} > (\text{rad } \mathbf{A}) |\tilde{x}|.$$

Опять-таки, можно далее считать, что  $\|\tilde{x}\|_2 = 1$ , и тогда

$$\begin{aligned} \lambda_{\max}((\text{mid } \mathbf{A})^\top (\text{mid } \mathbf{A})) &\geq \tilde{x}^\top (\text{mid } \mathbf{A})^\top (\text{mid } \mathbf{A}) \tilde{x} \\ &> |\tilde{x}|^\top (\text{rad } \mathbf{A})^\top (\text{rad } \mathbf{A}) |\tilde{x}| \geq \lambda_{\min}((\text{rad } \mathbf{A})^\top (\text{rad } \mathbf{A})), \end{aligned}$$

что противоречит (2.36). ■

Вопросы, связанные с нахождением сингулярных чисел матриц, хорошо разработаны в современном численном анализе (см., к примеру, [7, 10]). Для вычисления сингулярных чисел созданы надёжные алгоритмы, а реализующие их готовые подпрограммы входят в стандартные пакеты численных методов линейной алгебры (типа свободно распространяемого LAPACK'a [39]). Кроме того, встроенные функции для вычисления сингулярных чисел матриц имеются во всех системах компьютерной математики, таких как MATLAB, Scilab, Octave, Maple, Mathematica и пр.

Следует подчеркнуть, что рассмотренные выше признаки — Бекка, Румпа и Рекса-Рона — являются лишь достаточными условиями неособенности либо особенности интервальной матрицы, и ситуации, в которых даже их совместное применение не позволяет сделать никакого определённого заключения о свойствах матрицы, не столь уж редки.

## 2.6 Сильно неособенные интервальные матрицы

Определённый недостаток понятия неособенности интервальной матрицы, рассмотренного в предыдущем параграфе, состоит в том, что он не позволяет оценить пригодность интервальной матрицы для алгебраических манипуляций. Матрица может быть неособенной, но её произведение на другую неособенную матрицу становится уже особенным — ситуация, немислимая в классической линейной алгебре!

Рассмотрим в качестве примера матрицу

$$\begin{pmatrix} 3 & [0, 2] & [0, 2] \\ [0, 2] & 3 & [0, 2] \\ [0, 2] & [0, 2] & 3 \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

Она является представителем *матриц Ноймайера-Райхмана* — параметрического семейства интервальных матриц различных размеров, впервые рассмотренных в работе [49] и далее незначительно модифицированных и исследованных в книге [46]. Это интервальные квадратные матрицы вида

$$\begin{pmatrix} \theta & [0, 2] & \cdots & [0, 2] \\ [0, 2] & \theta & \cdots & [0, 2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0, 2] & [0, 2] & \cdots & \theta \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

где  $\theta$  — неотрицательный вещественный параметр. Можно показать (см. подробности в [46]), что  $n \times n$ -матрицы Ноймайера-Райхмана чётного порядка  $n$  неособенны при  $\theta > n$ , а матрицы нечётного порядка  $n$  неособенны при  $\theta > \sqrt{n^2 - 1}$ . Как следствие, матрица (2.37) неособенна.

С другой стороны, если умножить матрицу (2.37) слева на обратную к её середине, т. е. на

$$\begin{pmatrix} 0.4 & -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.4 & -0.1 \\ -0.1 & -0.1 & 0.4 \end{pmatrix},$$

то получим интервальную матрицу

$$\begin{pmatrix} [0.8, 1.2] & [-0.5, 0.5] & [-0.5, 0.5] \\ [-0.5, 0.5] & [0.8, 1.2] & [-0.5, 0.5] \\ [-0.5, 0.5] & [-0.5, 0.5] & [0.8, 1.2] \end{pmatrix}.$$

которая уже особенна: она содержит особенные точечные матрицы

$$\begin{pmatrix} 0.8 & -0.4 & -0.4 \\ -0.4 & 0.8 & -0.4 \\ -0.4 & -0.4 & 0.8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1.0 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.0 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 1.0 \end{pmatrix} \quad \text{и ещё много других.}$$

В целом  $3 \times 3$ -матрицы Ноймайера-Райхмана для значений  $\theta$ , близких к границе неособенности  $\sqrt{8}$ , уже не являются сильно неособенными. Нетрудно установить, что такой является, например, матрица

$$\begin{pmatrix} 3.2 & [0, 2] & [0, 2] \\ [0, 2] & 3.2 & [0, 2] \\ [0, 2] & [0, 2] & 3.2 \end{pmatrix},$$

которая встречалась в Примере 2.5.2.

Отмеченный недостаток неособенных интервальных матриц частично исправляется понятием, которое вводит следующее

**Определение 2.6.1** [46]. Будем говорить, что интервальная матрица  $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  сильно неособенная (сильно невырожденная, сильно регулярная), если интервальная матрица  $(\text{mid } \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}$  существует и неособенна.

Иными словами, сильно неособенные интервальные матрицы — это матрицы, которые «выдерживают» умножение на обратные средние к себе. Ясно, что если интервальная матрица сильно неособенная, то она и просто неособенная. Но из обычной неособенности, как мы видели выше, сильная неособенность не следует.

Почему в определении сильно неособенной матрицы фигурирует умножение на обратную к средней? Неформально это можно объяснить тем, что при таком выборе матрицы  $C$  в произведении  $C\mathbf{A}$  значение диагонали будет сделано наибольшим возможным относительно внедиагональной части полученной матрицы. Если даже такая матрица является особенной, то следует признать, что исходная интервальная матрица действительно довольно широка и близка к особенной.

В самом деле,

$$\begin{aligned} |C\mathbf{A}| &= |C(\text{mid } \mathbf{A} + \text{rad } \mathbf{A} \cdot [-1, 1])| \\ &= |C \text{mid } \mathbf{A} + C \text{rad } \mathbf{A} \cdot [-1, 1]| \quad \text{в силу дистрибутивности} \\ &= |C \text{mid } \mathbf{A}| + |C \text{rad } \mathbf{A}|, \quad \text{так как в } (C \text{rad } \mathbf{A} \cdot [-1, 1]) \text{ элементы уравновешены.} \end{aligned}$$

В матрице, стоящей первым слагаемым последней суммы, минимальное значение внедиагональных элементов равно нулю и достигается при  $C = (\text{mid } \mathbf{A})^{-1}$ . Примерно тогда же будет минимизироваться внедиагональная часть и всей суммы, если пренебречь изменением второго слагаемого (что возможно, к примеру, при небольшой абсолютной ширине элементов матрицы  $\mathbf{A}$ ). Получающаяся матрица будет иметь наименьшее возможное абсолютное значение внедиагональных элементов относительно диагональных и, соответственно, должна быть «наименее особенной».

**Предложение 2.6.1** Интервальная матрица  $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  сильно неособенна тогда и только тогда, когда

$$\rho(|(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \cdot \text{rad } \mathbf{A}) < 1.$$

**Доказательство.** Заметим, что

$$\begin{aligned} (\text{mid } \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A} &= (\text{mid } \mathbf{A})^{-1} (\text{mid } \mathbf{A} + [-1, 1] \cdot \text{rad } \mathbf{A}) \\ &= I + (\text{mid } \mathbf{A})^{-1} ([-1, 1] \cdot \text{rad } \mathbf{A}), \end{aligned} \tag{2.39}$$

и второе слагаемое в последней сумме является интервальной матрицей с радиусом  $|(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \cdot \text{rad } \mathbf{A}$ , все элементы которой суть уравновешенные интервалы.

Если спектральный радиус матрицы  $|(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \cdot \text{rad } \mathbf{A}$  меньше единицы, то в силу свойства (2.17) то же самое верно для всех матриц из  $(\text{mid } \mathbf{A})^{-1} ([-1, 1] \cdot \text{rad } \mathbf{A})$ . Соответственно, сумма любой матрицы из  $(\text{mid } \mathbf{A})^{-1} ([-1, 1] \cdot \text{rad } \mathbf{A})$  с единичной матрицей не может иметь нуль точкой спектра, что обосновывает достаточность условий теоремы.

Обратно, предполагая выполнение неравенства

$$\rho(|(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \cdot \text{rad } \mathbf{A}) \geq 1,$$

Таблица 2.1. Критические значения диагонального параметра для матриц Ноймайера-Райхмана различных порядков

размерность матрицы	диагональный параметр $\theta$
3	3.372281323
4	4.772001872
5	6.178908345
7	8.9999999999
10	13.2377392028
20	27.3747093007
30	41.515241069
50	69.798268376
70	98.0820167858
100	140.508035483
200	281.928943074
300	423.3501507626

покажем, что матрица  $(\text{mid } \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}$  особенна.

Пусть  $\varrho := \rho(|(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \cdot \text{rad } \mathbf{A})$ , тогда матрица  $\varrho^{-1} |(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \cdot \text{rad } \mathbf{A}$  имеет спектральный радиус 1 и, кроме того, неотрицательна. По теории Перрона-Фробениуса (см. §2.3) она имеет собственное значение 1. Соответственно, матрица

$$(-\varrho^{-1} |(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \cdot \text{rad } \mathbf{A})$$

имеет собственное значение  $(-1)$ , а матрица  $(I - \varrho^{-1} |(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \cdot \text{rad } \mathbf{A})$  поэтому особенна. Для завершения доказательства отметим, что  $0 < \varrho^{-1} \leq 1$ , из-за чего

$$-\varrho^{-1} |(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \cdot \text{rad } \mathbf{A} \in (\text{mid } \mathbf{A})^{-1}([-1, 1] \cdot \text{rad } \mathbf{A}).$$

Следовательно, в силу (2.39) интервальной матрице  $(\text{mid } \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}$  принадлежит особенная точечная матрица  $(I - \varrho^{-1} |(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \cdot \text{rad } \mathbf{A})$ . ■

Результат Предложения 2.6.1 показывает, что признак Бекка неособенности интервальной матрицы (Теорема 2.5.6), фактически, проверяет сильную неособенность. Именно в этом заключается его практическое значение.

В Табл. 2.1 сведены числовые значения границ между неособенностью и сильной неособенностью для матриц Ноймайера-Райхмана различных порядков, полезные для ориентировки в численных тестах с решением интервальных линейных систем уравнений (в правом столбце даётся значение диагонального параметра  $\theta$ , для которого происходит переход от сильной неособенности к обычной неособенности при уменьшении  $\theta$ ).

**Предложение 2.6.2** Если интервальная матрица  $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  сильно неособенна, то и любая матрица  $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$  также сильно неособенна.

Вопрос о том, как для интервальной матрицы соотносятся сильная неособенность и обычная неособенность, в общей постановке является нетривиальным (см. [54]), но его исчерпывающее решение было дано А.В. Лакеевым в работе [16].

Класс сильно неособенных интервальных матриц интересен нам ещё потому, что он является просто описываемым классом матриц, для которых процедура предобуславливания позволяет добиться удовлетворения условиям применимости итерационных методов для интервальных линейных систем (см. Главы 7 и 10).

## 2.7 Обратные интервальные матрицы

**Определение 2.7.1** Для неособенной матрицы  $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  обратной интервальной матрицей называют

$$\mathbf{A}^{-1} := \square\{A^{-1} \mid A \in \mathbf{A}\},$$

т. е. интервальную оболочку множества всех обратных для точечных матриц, содержащихся в  $\mathbf{A}$ .

Можно считать при этом, что обозначение  $\mathbf{A}^{-1}$  выражает взятие интервального расширения матричного отображения  $A \mapsto A^{-1}$ .

Для интервальных  $2 \times 2$ -матриц обратные легко вычисляются в явном виде. Покажем, как это делается.

Из курса линейной алгебры читателю должно быть известно, что

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} &= \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{d}{ad - bc} & \frac{b}{bc - ad} \\ \frac{c}{bc - ad} & \frac{a}{ad - bc} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

В последней матрице выражения для элементов имеют весьма специальный вид, и их области значений при изменении  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  в пределах некоторых интервалов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{d}$  соответственно могут быть найдены очень простыми средствами.

Действительно, если, к примеру,  $a$  не обращается в нуль, то

$$\frac{a}{ad - bc} = \frac{1}{d - bc/a}.$$

Последнее выражение содержит всего по одному вхождению каждой переменной в первой степени, и потому при  $a \in \mathbf{a}$ ,  $b \in \mathbf{b}$ ,  $c \in \mathbf{c}$  и  $d \in \mathbf{d}$  его область значений совпадает с естественным интервальным расширением, т. е. равна

$$\frac{1}{\mathbf{d} - \mathbf{bc}/\mathbf{a}}.$$

Но даже если  $a$  обращается в нуль на интервале своего изменения  $\mathbf{a}$ , выражение  $a/(ad - bc)$  непрерывно и монотонно зависит от этой переменной, поскольку производная

$$\frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{a}{ad - bc} \right) = \frac{1 \cdot (ad - bc) - a \cdot d}{(ad - bc)^2} = -\frac{bc}{(ad - bc)^2}$$

сохраняет один и тот же знак при  $ad - bc \neq 0$  и фиксированном знаке  $bc$ . Эти условия всегда выполняются для неособенной интервальной  $2 \times 2$ -матрицы, так как её определитель  $(ad - bc)$  не зануляется, а в одной строке или одном столбце не могут одновременно присутствовать два нульсодержащих интервала.

Итак, при  $0 \in \mathbf{a}$  для нахождения

$$\min_{a,b,c,d} \left( \frac{a}{ad - bc} \right)$$

можно зафиксировать конец интервала  $\mathbf{a} \ni a$ : левый, если  $bc < 0$ , или правый, если  $bc > 0$ . Получившееся выражение,

$$\frac{\underline{a}}{\underline{ad} - bc} \quad \text{или} \quad \frac{\bar{a}}{\bar{ad} - bc},$$

будет иметь уже по одному вхождению каждой из оставшихся переменных  $b, c, d$  в первой степени, так что для его оценивания снова можно воспользоваться естественным интервальным расширением.

Аналогичным способом оцениваются и другие элементы обратной интервальной матрицы (2.40).

**Пример 2.7.1** Рассмотрим интервальную матрицу

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 1] \\ [-1, 2] & [2, 4] \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

Отметим, прежде всего, её неособенность. Для  $2 \times 2$ -матрицы естественное интервальное расширение определителя совпадает с его областью значений, поскольку каждая из переменных входит в выражение для определителя один раз в первой степени. В данном случае имеем

$$[2, 4] \cdot [2, 4] - [-1, 2] \cdot [-2, 1] = [4, 16] - [-4, 2] = [2, 20],$$

так что особых матриц в (2.41) нет.

С помощью описанной выше методики нетрудно вычислить обратную матрицу

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 1] \\ [-1, 2] & [2, 4] \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} [\frac{1}{6}, 1] & [-\frac{1}{2}, 1] \\ [-1, \frac{1}{2}] & [\frac{1}{6}, 1] \end{pmatrix}, \quad (2.42)$$

и она содержит особенную точечную матрицу

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Получается, что обратная интервальная матрица, даже оптимально оценённая, может быть особенной в силу того, что взятие внешней интервальной оценки множества всех обратных матриц вовлекает в неё лишние элементы. ■

**Пример 2.7.2** Рассмотрим теперь интервальную матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ [-5, -2] & 3 \end{pmatrix}.$$

Она, очевидно, неособенна, коль скоро интервальное расширение её определителя не содержит нуля:

$$2 \cdot 3 - [-5, -2] \cdot (-1) = 6 - [2, 5] = [1, 4] \not\equiv 0.$$

Но обратная интервальная матрица

$$\begin{pmatrix} [\frac{3}{4}, 3] & [\frac{1}{4}, 1] \\ [\frac{1}{2}, 5] & [\frac{1}{2}, 2] \end{pmatrix},$$

вычисленная в соответствии с методикой предыдущего примера, содержит особенную точечную матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Специфика этого примера состоит в том, что множество обратных матриц даже неотрицательно. ■

Нахождение обратной интервальной матрицы является NP-трудной задачей в общем случае [33]. Отчасти по этой причине в современном интервальном анализе имеется терминологическая тенденция называть обратной интервальной матрицей не интервальную оболочку множества всех обратных точечных матриц, как это требуется Определением 2.7.1, а просто какую-то внешнюю оценку этого множества, по-возможности, наиболее узкую. В оставшейся части параграфа мы кратко рассмотрим численные методы для нахождения таких обратных интервальных матриц.

Матрица  $A^{-1}$ , обратная к данной матрице  $A$ , является решением матричного уравнения  $AX = I$ , которое, в свою очередь, может быть расписано в виде  $n$  систем линейных алгебраических уравнений относительно столбцов искомой матрицы  $X$ . Поэтому для нахождения обратной матрицы может быть с успехом применено многократное решение ИСЛАУ каким-либо из методов, излагаемых ниже в Главе 7.

Другой подход — конструирование чисто матричных процедур, не опирающихся на методы решения систем линейных уравнений с векторными неизвестными, и здесь естественный путь состоит в том, чтобы организовать какие-либо матричные аналоги интервальных методов Гаусса-Зейделя, Кравчика, разнообразных модификаций стационарных итерационных методов (см. Главу 7). Но существуют и альтернативные матричные вычислительные процедуры для нахождения обратной матрицы, даже более быстрые и имеющие более широкую сферу приложимости.

Известен итерационный *метод Шульца* для обращения матриц:

$$X^{(k+1)} \leftarrow X^{(k)} (2I - AX^{(k)}). \quad (2.43)$$

Метод Шульца — это не что иное как метод Ньютона для решения системы уравнений, применённый к  $X^{-1} - A = 0$ . Его можно также рассматривать как матричную версию известной процедуры для вычисления обратной величины (см. [9], глава 3).

Простая интервализация метода Шульца, организованная для вычисления обратной интервальной матрицы, когда все точечные величины заменяются на интервальные аналоги, работает плохо или даже совсем расходится. Необходима коррекция исходной вычислительной схемы (2.43). Рассмотрим итерации

$$X^{(k+1)} \leftarrow \text{mid } X^{(k)} + X^{(k)}(I - A \cdot \text{mid } X^{(k)}), \quad (2.44)$$

которые работают уже неплохо. Будем называть их *интервальным методом Шульца*. Подробное исследование сходимости интервального метода Шульца можно найти в книге [1].

## 2.8 Интервальные $M$ -матрицы

Напомним, что все неравенства между векторами и матрицами мы понимаем в покомпонентном и поэлементном смысле.

**Определение 2.8.1** Будем говорить, что матрица  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  является *монотонной матрицей* (матрицей монотонного вида), если для любых векторов  $x', x'' \in \mathbb{R}^n$  из  $Ax' \leq Ax''$  следует  $x' \leq x''$ .

Нетрудно понять, что это определение равносильно следующему [4, 14]: матрица  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  является *монотонной матрицей* (матрицей монотонного вида), если для любого  $x \in \mathbb{R}^n$  из  $Ax \geq 0$  следует  $x \geq 0$ . Наконец, квадратная матрица монотонна тогда и только тогда, когда она неособенна и  $A^{-1} \geq 0$ . По этой причине квадратные монотонные матрицы часто называют *положительно обратимыми*.

Действительно, если  $Ax = 0$  для какого-то вектора  $x \in \mathbb{R}^n$ , то одновременно  $Ax \geq 0$  и  $Ax \leq 0$ , откуда можно заключить, что  $0 \leq x \leq 0$ , т.е.  $x = 0$ . Поэтому  $A$  должна быть неособенной. Далее, если в обратной матрице  $A^{-1}$  на месте  $(r, s)$  стоит отрицательный элемент, то при умножении  $A^{-1}$  на  $e_s$  —  $s$ -ый столбец единичной матрицы — мы получим вектор  $v = A^{-1}e_s$ , в котором  $r$ -ый элемент отрицателен. Но тогда  $Av = AA^{-1}e_s \geq 0$ , хотя  $v$  не является неотрицательным вектором. Противоречие!

Монотонные (положительно обратимые) матрицы интересны нам, в частности, потому, что для систем линейных уравнений с такими матрицами влияние возмущений правой части на решение может быть отслежено очень просто: если  $b' \leq b''$ , то из  $Ax' = b'$  и  $Ax'' = b''$  следует  $x' \leq x''$ . Мы будем существенно пользоваться этим фактом при оценивании множеств решений интервальных систем уравнений (в Главе 7 и последующих), а цель настоящего параграфа состоит в том, чтобы дать для будущего необходимый запас сведений по предмету.

Задача эффективного выявления монотонности или положительной обратимости в общем случае непроста, но среди положительно обратимых матриц существует один просто описываемый подкласс — так называемые  $M$ -матрицы.



**Определение 2.8.2** [4, 32]. Матрица  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  называется  $M$ -матрицей, если она представима в виде  $A = sI - P$ , где  $P$  — неотрицательная матрица  $s > \rho(P)$ .

Ясно, что  $M$ -матрицы неособенны, а обратную к  $M$ -матрице  $A$  можно представить сходящимся матричным рядом Неймана

$$A^{-1} = (sI - P)^{-1} = s^{-1}(I - s^{-1}P)^{-1} = s^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (P/s)^k,$$

все члены которого неотрицательны. Поэтому неотрицательна и его сумма, и матрица  $A$ , таким образом, положительно обратима.

Можно показать, что Определение 2.8.2 равносильно следующему условию: внедиагональные элементы матрицы  $A$  неположительны, а все главные миноры положительны (см. [6]).

Определение  $M$ -матрицы обладает некоторой неконструктивностью, поскольку используемое в нём представление  $A = sI - P$  неединственно и завязано на выбор скаляра  $s$ . В действительности, этот выбор не столь критичен, так как если  $A = s'I - P'$  для некоторых других  $s' > s$  и  $P' > 0$ , то необходимо

$$P' = P + (s' - s)I.$$

Для неотрицательной матрицы  $P$  по теории Перрона-Фробениуса (см. §2.3) спектральный радиус  $\rho(P)$  достигается на некотором неотрицательном собственном значении, а потому матрица  $P'$  обязана иметь точкой спектра число  $(s' - s) + \rho(P)$ . При сделанном нами допущении  $s' > s$  это собственное значение, очевидно, превосходит по модулю все остальные собственные значения матрицы  $P' = P + (s' - s)I$ , так что её спектральный радиус равен  $(s' - s) + \rho(P)$ . Итак, неравенства  $s' > \rho(P')$  и  $s' > s$  справедливы тогда и только тогда, когда  $s > \rho(P)$ , откуда следует, что два рассмотренных представления  $M$ -матрицы равносильны друг другу.

И всё же Определение 2.8.2, требуя вычисления спектрального радиуса, не очень удобно для практической проверки того, является ли данная матрица  $M$ -матрицей или нет. Желательно иметь для этого какие-нибудь простые признаки, и один из них предоставляет следующее

**Предложение 2.8.1** (критерий Фань Цзы) Матрица  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  является  $M$ -матрицей тогда и только тогда, когда её внедиагональные элементы неположительны и существует положительный вектор  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $v > 0$ , такой что  $Av > 0$ .

**Доказательство.** Если  $A = (a_{ij})$  —  $M$ -матрица, то по определению  $A = sI - P$  для какой-то неотрицательной матрицы  $P$  и  $s > \rho(P)$ . В силу Предложения 2.3.3 найдётся  $n$ -вектор  $v > 0$ , такой что  $Pv < sv$ . Ясно, что тогда  $Av = (sI - P)v > 0$ .

Обратно, пусть  $Av > 0$  для некоторого  $n$ -вектора  $v > 0$ , и в матрице  $A$  внедиагональные элементы неположительны. При этом диагональные элементы в  $A$  обязаны быть положительными, поскольку в противном случае неравенство  $Av > 0$  не могло бы иметь места.

Возьмём  $s := \max\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$  — максимум диагональных элементов из  $A$ . Тогда матрица  $P := sI - A$  оказывается неотрицательной, и из  $Av > 0$  следует, что

$(sI - P)v > 0$ , т. е.  $Pv < sv$ . Снова вспоминая Предложение 2.3.3, можем заключить, что  $\rho(P) < s$ .

Итак,  $A = sI - P$  и  $\rho(P) < s$ , так что  $A$  действительно является  $M$ -матрицей. ■

Отдельно подчеркнём тот факт, что  $M$ -матрица не может иметь на главной диагонали нулевые элементы. Иначе соответствующая этой строке компонента произведения  $Av$ ,  $v > 0$ , не получится положительной, так как вне главной диагонали  $M$ -матрицы находятся неположительные элементы. Кроме того, неравенство  $s > \rho(P)$  показывает, что главная диагональ  $M$ -матрицы доминирует над внедиагональными элементами, но не в смысле, рассмотренном в §2.5 и определяемом неравенствами (2.25)–(2.26), а в смысле спектрального радиуса.

**Пример 2.8.1** Матрицы с диагональным преобладанием, имеющие на главной диагонали положительные элементы, а вне главной диагонали – неположительные, являются  $M$ -матрицами: в критерии Фань Цзы (Предложении 2.8.1) для них достаточно взять вектор  $v = (1, 1, \dots, 1)^\top$ . ■

**Пример 2.8.2** Рассмотрим линейное уравнение межотраслевого экономического баланса (уравнение Леонтьева)

$$x = Px + y, \quad (2.45)$$

где  $x$  – вектор объёмов производства по отраслям,  $y$  – вектор конечного потребления, а матрица  $P \geq 0$  называется *матрицей коэффициентов прямых производственных затрат* [18, 20]. Эту матрицу иногда называют также технологической матрицей, а её элементы – технологическими коэффициентами.

Говорят, что неотрицательная матрица  $P$  – *продуктивная*, если существует положительный вектор  $v > 0$ , такой что  $(I - P)v > 0$  [18]. Экономический смысл этого определения очень прост: матрица прямых производственных затрат продуктивна тогда и только тогда, когда существует такой план  $x$ , что каждая отрасль может произвести некоторое количество продукции для конечного потребления  $y$ . Некоторые авторы (к примеру, [20]) называют при этом продуктивной всю модель (2.45).

Так или иначе, но в этих условиях в силу критерия Фань Цзы (Предложения 2.8.1) матрица  $(I - P)$  системы линейных уравнений

$$(I - P)x = y$$

для определения плана  $x$  оказывается не чем иным, как  $M$ -матрицей. ■

**Теорема 2.8.1** Пусть  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A$  –  $M$ -матрица и  $B \geq 0$ . Матрица  $(A - B)$  является  $M$ -матрицей тогда и только тогда, когда  $\rho(A^{-1}B) < 1$ .

**Доказательство.** Если  $(A - B)$  –  $M$ -матрица, то существует положительный вектор  $u > 0$ , такой что  $(A - B)u > 0$ . Тогда  $A^{-1}Bu < u$ , поскольку  $A^{-1} \geq 0$ , и в силу Предложения 2.3.3 заключаем, что

$$\rho(A^{-1}B) < 1. \quad (2.46)$$

Обратно, пусть выполняется неравенство (2.46). Тогда матрица  $(I - A^{-1}B)$  обратима, и обратная матрица  $(I - A^{-1}B)^{-1}$  неотрицательна, в чём можно убедиться из её разложения в матричный ряд Неймана:

$$(I - A^{-1}B)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (A^{-1}B)^k$$

(см., к примеру, [4]). Следовательно, взяв положительный вектор  $v > 0$ , мы будем иметь

$$u := (I - A^{-1}B)^{-1}A^{-1}v > 0.$$

Но тогда

$$v = A(I - A^{-1}B)u = (A - B)u > 0.$$

А так как внедиагональные элементы матрицы  $(A - B)$  неположительны, то заключаем, что  $(A - B)$  действительно  $M$ -матрица. ■

**Предложение 2.8.2** *Матрица  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  с неположительными внедиагональными элементами является  $M$ -матрицей тогда и только тогда, когда справедлива импликация*

$$u \in \mathbb{R}^n, u \geq 0, Au \leq 0 \Rightarrow u = 0.$$

**Доказательство.** Если  $A$  —  $M$ -матрица, то  $A^{-1} \geq 0$ , и из  $Au \leq 0$  вытекает  $u \leq 0$ . Совместно с  $u \geq 0$  это действительно влечёт  $u = 0$ .

Наоборот, пусть в условиях доказываемого Предложения выполняется следование ( $u \in \mathbb{R}^n, u \geq 0, Au \leq 0 \Rightarrow u = 0$ ), но  $A$  не есть  $M$ -матрица. Положим

$$\alpha := \max \{1, a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\},$$

тогда  $B = I - \alpha^{-1}A \geq 0$ , а матрица  $\alpha^{-1}A = I - B$  не является  $M$ -матрицей одновременно с  $A$ . Применяя результат Теоремы 2.8.1, можем заключить, что  $\rho(B) \geq 1$ . Следовательно, в силу Предложения 2.3.3 существует ненулевой вектор  $v \geq 0$ , такой что

$$Bv \geq v \neq 0.$$

Тогда же

$$(I - \alpha^{-1}A)v \geq v,$$

и потому  $Av \leq 0$ , что противоречит нашему исходному допущению. ■

Как итог наших рассуждений полезно привести ещё несколько равносильных определений  $M$ -матриц [4, 32]. Именно, вещественная  $n \times n$ -матрица  $A = (a_{ij})$  является  $M$ -матрицей, если она удовлетворяет любому из следующих эквивалентных условий

- (i)  $A = sI - P$ , где  $P$  — неотрицательная матрица и  $s > \rho(P)$ ;
- (ii) внедиагональные элементы  $A$  неположительны и  $A^{-1} \geq 0$ ;
- (iii) внедиагональные элементы  $A$  неположительны и существует положительный вектор  $u > 0$ , такой что  $Au > 0$ ;

- (iv) внедиагональные элементы  $A$  неположительны и её собственные значения имеют положительные вещественные части;
- (v) внедиагональные элементы  $A$  неположительны и все её главные миноры положительны;
- (vi) ... и т.д.

В связи с решением интервальных систем линейных алгебраических уравнений (см. Главу 7 и последующие) особый интерес представляют интервальные матрицы, для систем уравнений с которыми влияние возмущений правой части на решение может быть отслежено просто. Введём

**Определение 2.8.3** Матрица  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  называется интервальной  $M$ -матрицей, если каждая вещественная матрица  $A \in \mathbf{A}$  является  $M$ -матрицей.

Таким образом, если  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — интервальная  $M$ -матрица, то и любая матрица  $B \subseteq A$  также является интервальной  $M$ -матрицей. Каким образом можно распознать, является данная интервальная матрица  $M$ -матрицей или нет?

**Предложение 2.8.3** Матрица  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  является  $M$ -матрицей тогда и только тогда, когда её внедиагональные элементы неположительны и существует положительный вектор  $v > 0$ , такой что  $Av > 0$ .

**Доказательство.** Доказательство следует из результата Предложения 2.8.1 (критерия Фань Цзы) и из свойства (2.4) интервального матрично-векторного умножения, которое влечёт справедливость равенства  $Av = \{ Av \mid A \in \mathbf{A} \}$ .

В самом деле, если  $A$  — интервальная  $M$ -матрица, то  $\underline{A}$  также является  $M$ -матрицей, для которой существует вектор  $v > 0$ , такой что  $\underline{A}v > 0$ . Тогда для любой матрицы  $\tilde{A} \in \mathbf{A}$  в силу положительности вектора  $v$  должно быть  $\tilde{A}v \geq \underline{A}v$ . Следовательно, в целом  $Av > 0$ .

Обратно, если  $Av > 0$  для некоторого положительного вектора  $v$ , то с этим же вектором  $v$  аналогичное неравенство  $\tilde{A}v \geq 0$  выполняется для любой матрицы  $\tilde{A} \in \mathbf{A}$ . Вместе с условием на знаки внедиагональных элементов в  $\mathbf{A} \ni \tilde{A}$  это означает, что  $\tilde{A}$  является  $M$ -матрицей. ■

**Теорема 2.8.2** [46] Интервальная матрица  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  является  $M$ -матрицей тогда и только тогда, когда  $\underline{A}$  и  $\overline{A}$  —  $M$ -матрицы. Всякая интервальная  $M$ -матрица неособенна и

$$A^{-1} = [\overline{A}^{-1}, \underline{A}^{-1}].$$

**Доказательство.** Ясно, что если интервальная матрица  $A$  является  $M$ -матрицей, то принадлежащие ей нижняя и верхняя граничные матрицы —  $\underline{A}$  и  $\overline{A}$  — это точечные  $M$ -матрицы.

Обратно, пусть  $\underline{A}$  и  $\overline{A}$  —  $M$ -матрицы. Если  $\tilde{A} \in \mathbf{A}$ , то из неравенства  $\tilde{A} \leq \overline{A}$  следует, что у  $\tilde{A}$  внедиагональные элементы неположительны. Кроме того, для  $M$ -матрицы  $\underline{A}$  должен существовать положительный вектор  $v \in \mathbb{R}^n$  со свойством  $\underline{A}v > 0$ . При этом из  $\tilde{A} \geq \underline{A}$  вытекает  $\tilde{A}v \geq \underline{A}v > 0$ , так что в силу критерия Фань Цзы (Предложения 2.8.1) матрица  $\tilde{A}$  также является  $M$ -матрицей.

Далее, умножая двойное неравенство

$$\underline{\mathbf{A}} \leq \tilde{\mathbf{A}} \leq \overline{\mathbf{A}}$$

справа на  $\tilde{\mathbf{A}}^{-1} \geq 0$ , получаем

$$\underline{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{A}}^{-1} \leq I \quad \text{и} \quad I \leq \overline{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{A}}^{-1}.$$

Отсюда после домножения первого неравенства слева на  $\underline{\mathbf{A}}^{-1} \geq 0$  и второго неравенства слева на  $\overline{\mathbf{A}}^{-1} \geq 0$  приходим к

$$\overline{\mathbf{A}}^{-1} \leq \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \leq \underline{\mathbf{A}}^{-1}. \quad (2.47)$$

Равенство  $\mathbf{A}^{-1} = [\overline{\mathbf{A}}^{-1}, \underline{\mathbf{A}}^{-1}]$  следует из того факта, что в (2.47) как оценка снизу, так и оценка сверху достижимы. ■

Получается, что интервальная  $M$ -матрица ведёт себя при обращении подобно одномерному интервалу вещественной оси, коль скоро

$$1/a = \left[ \frac{1}{\overline{a}}, \frac{1}{\underline{a}} \right]$$

для любого  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ . Доказанная теорема допускает обобщение и на все положительно обратимые матрицы.

**Теорема 2.8.3** (теорема Куттлера). Пусть интервальная матрица  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  такова, что  $\underline{\mathbf{A}}$  и  $\overline{\mathbf{A}}$  неособенны и положительно обратимы. Тогда  $\mathbf{A}$  также неособенная и

$$\mathbf{A}^{-1} = [\overline{\mathbf{A}}^{-1}, \underline{\mathbf{A}}^{-1}] \geq 0.$$

**Доказательство.** Возьмём какую-нибудь матрицу  $\tilde{\mathbf{A}} \in \mathbf{A}$ , так что

$$\tilde{\mathbf{A}} \leq \overline{\mathbf{A}} \quad \text{и} \quad \underline{\mathbf{A}} \leq \tilde{\mathbf{A}}.$$

Домножив слева первое из этих неравенств на  $\overline{\mathbf{A}}^{-1} \geq 0$ , а второе — на  $\underline{\mathbf{A}}^{-1} \geq 0$ , получим

$$\overline{\mathbf{A}}^{-1} \tilde{\mathbf{A}} \leq I \leq \underline{\mathbf{A}}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}. \quad (2.48)$$

Рассмотрим внимательнее матрицу  $\overline{\mathbf{A}}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}$ . Её внедиагональные элементы неположительны, как следует из неравенства (2.48). Далее, если  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $v > 0$ , то и вектор  $u := \underline{\mathbf{A}}^{-1}v$  также положителен, причём

$$\overline{\mathbf{A}}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}u = \overline{\mathbf{A}}^{-1} \tilde{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{A}}^{-1}v \geq \overline{\mathbf{A}}^{-1} \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{A}}^{-1}v = \overline{\mathbf{A}}^{-1}v > 0.$$

Следовательно,  $\overline{\mathbf{A}}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}$  — это  $M$ -матрица, и потому неособенна и положительно обратима.

Наконец,  $\tilde{\mathbf{A}}^{-1} = (\overline{\mathbf{A}}^{-1} \tilde{\mathbf{A}})^{-1} \overline{\mathbf{A}}^{-1} \geq 0$ , т. е.  $\tilde{\mathbf{A}}$  тоже положительно обратима, и поэтому, домножая неравенство (2.48) справа на  $\tilde{\mathbf{A}}$ , получаем требуемое:

$$\overline{\mathbf{A}}^{-1} \leq \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \leq \underline{\mathbf{A}}^{-1}.$$

Это неравенство, как нетрудно понять, достижимо с обеих сторон. ■

Следует лишь помнить, имея в виду Пример 2.7.2, что обратная интервальная матрица  $A^{-1}$  (в смысле Определения 2.7.1) может не быть неособенной даже в этих специальных условиях.

## 2.9 Интервальные $H$ -матрицы

Дальнейшим обобщением  $M$ -матриц являются так называемые  $H$ -матрицы, рассмотрению которых мы посвятим этот параграф. Они получаются из  $M$ -матриц ослаблением обременительного условия на знаки диагональных и внедиагональных элементов, которое неявно накладывалось Определением 2.8.2. При этом монотонность и положительная обратимость теряются, но некоторые важные свойства  $M$ -матриц удаётся сохранить для  $H$ -матриц.

Если из определения  $M$ -матриц удалить условие на знаки элементов, то в нём останется лишь идея преобладания, в спектральном смысле, диагонали над остальной частью матрицы. На эксплуатации этого условия основаны все хорошие свойства  $H$ -матриц.

В этой книге понятие  $H$ -матрицы используется для двух целей. Во-первых, для  $H$ -матриц можно выписать удобные оценки обратных матриц, на основе которых получаются оценки решений систем линейных алгебраических уравнений с  $H$ -матрицами. Для интервальных систем линейных алгебраических уравнений с  $H$ -матрицами отсюда следуют быстрые и практичные оценки множеств решений. Во-вторых, в терминах  $H$ -матриц наиболее аккуратно и точно формулируются условия применимости популярных интервальных численных методов — интервального метода Гаусса, интервальных итераций Гаусса-Зейделя, процедуры Хансена-Блика-Рона и некоторых других (см. Главу 7).

**Определение 2.9.1** Компарантом матрицы  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  будем называть матрицу того же размера, обозначаемую  $\langle A \rangle$ , такую что

$$ij\text{-й элемент } \langle A \rangle := \begin{cases} |a_{ij}|, & \text{если } i = j, \\ -|a_{ij}|, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Операция взятия компаранта матрицы — это принудительное назначение «нужных» знаков для элементов матрицы, положительных для диагональных элементов и отрицательных для внедиагональных. В частности, если  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — вещественная  $M$ -матрица, то  $\langle A \rangle = A$ .

**Определение 2.9.2** Матрицу  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  назовём  $H$ -матрицей, если её компарант является  $M$ -матрицей.

**Определение 2.9.3** Матрица  $A \in \mathbb{I}\mathbb{R}^{n \times n}$  называется интервальной  $H$ -матрицей, если каждая вещественная матрица  $A \in \mathbf{A}$  является  $H$ -матрицей.

Таким образом, если  $\mathbf{A} \in \mathbb{I}\mathbb{R}^{n \times n}$  — интервальная  $H$ -матрица, то любая матрица  $B \subseteq \mathbf{A}$  также является  $H$ -матрицей.

Удобно ввести понятие  $H$ -матрицы несколько другим способом, через распространение компаранта на интервальные матрицы, тем более, что это понятие имеет немаловажное самостоятельное значение.

**Определение 2.9.4** Будем говорить, что точечная  $n \times n$ -матрица  $\langle \mathbf{A} \rangle$  есть компарант интервальной матрицы  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij}) \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ , если

$$ij\text{-й элемент } \langle \mathbf{A} \rangle := \begin{cases} \langle \mathbf{a}_{ij} \rangle, & \text{если } i = j, \\ -|\mathbf{a}_{ij}|, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Если, к примеру,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 1] \\ [-1, 2] & [2, 4] \end{pmatrix},$$

то

$$\langle \mathbf{A} \rangle = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Получается, что

$$\langle \mathbf{A} \rangle = \min_{A \in \mathbf{A}} \langle A \rangle, \quad (2.49)$$

где минимум понимается в поэлементном смысле (и это служит определённым оправданием обозначения  $\langle \cdot \rangle$  для компаранта). Поэтому всегда  $\langle \mathbf{A} \rangle = \langle A \rangle$  для некоторой  $A \in \mathbf{A}$ . В частности,

$$\langle \mathbf{A} \rangle = \underline{\mathbf{A}}$$

для интервальной  $M$ -матрицы  $\mathbf{A}$ . В качестве следствия получаем

**Предложение 2.9.1** Интервальная матрица  $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  является  $H$ -матрицей тогда и только тогда, когда её компарант  $\langle \mathbf{A} \rangle$  является  $M$ -матрицей.

**Доказательство.** Если  $\mathbf{A}$  — интервальная  $H$ -матрица, то по определению все  $A \in \mathbf{A}$  — точечные  $H$ -матрицы, в том числе и та, компарант которой равен компаранту  $\langle \mathbf{A} \rangle$  всей интервальной матрицы. Поэтому  $\langle \mathbf{A} \rangle$  в самом деле является  $M$ -матрицей.

Обратно, если  $\langle \mathbf{A} \rangle$  есть  $M$ -матрица, то в силу критерия Фань Цзы (Предложение 2.8.1) существует вектор  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $v > 0$ , такой что  $\langle \mathbf{A} \rangle v > 0$ . Тогда для любой матрицы  $A \in \mathbf{A}$ , принимая во внимание (2.49), будем иметь  $\langle A \rangle v \geq \langle \mathbf{A} \rangle v > 0$ , так что  $A$  необходимо должна быть  $H$ -матрицей. ■

Результат доказанного предложения даёт, как видим, эквивалентную переформулировку Определения 2.9.3, и нередко его принимают за определение интервальных  $H$ -матриц.

**Предложение 2.9.2** Матрица  $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  является  $H$ -матрицей тогда и только тогда, когда существует положительный вектор  $v > 0$ , такой что  $\langle \mathbf{A} \rangle v > 0$ .

Доказательство очевидно ввиду критерия Фань Цзы (Предложения 2.8.1).

**Пример 2.9.1** Интервальные матрицы, имеющие диагональное преобладание в смысле Определения 2.5.2, являются  $H$ -матрицами: в предыдущем Предложении для них достаточно взять вектор  $v = (1, 1, \dots, 1)^\top$ . В частности,  $H$ -матрицами являются точечные матрицы с диагональным преобладанием. ■

Непосредственным следствием Предложения 2.8.2 является

**Предложение 2.9.3** Матрица  $A \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  является  $H$ -матрицей тогда и только тогда, когда для неё верна импликация

$$u \in \mathbb{R}^n, u \geq 0, \langle A \rangle u \leq 0 \Rightarrow u = 0.$$

Далее нам понадобится существенно опираться на свойства компаранта. Мы сведём основные свойства компаранта для точечных и интервальных матриц в один общий список:

**Предложение 2.9.4** Пусть  $A, B \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ ,  $C \in \mathbb{IR}^{n \times p}$ . Тогда

$$\langle A \rangle \geq \langle \text{mid } A \rangle - \text{rad } A, \quad (2.50)$$

$$\langle A \pm B \rangle \geq \langle A \rangle - |B|, \quad (2.51)$$

$$|A \pm B| \geq \langle A \rangle - \langle B \rangle, \quad (2.52)$$

$$|AC| \geq \langle A \rangle |C|, \quad (2.53)$$

$$A \subseteq B \Rightarrow \langle A \rangle \geq \langle B \rangle. \quad (2.54)$$

**Доказательство.** Обоснуем неравенство (2.51). Для диагональных элементов матрицы  $\langle A \pm B \rangle$  оно следует из неравенства (1.20) (стр. 37), а для внедиагональных — из неравенства (1.19) (на той же странице) и того факта, что  $|a| - \langle b \rangle \geq |a| - |b|$ .

Неравенство (2.50) следует из (2.51) и представления  $A = \text{mid } A + [-1, 1] \cdot \text{rad } A$ .

Докажем теперь (2.53). Если  $A = (a_{ij})$ ,  $C = (c_{ij})$ , то  $ij$ -й элемент матрицы  $|AC|$  есть, по определению,

$$\left| \sum_k a_{ik} c_{kj} \right|.$$

Вспоминая оценки (1.19) для модуля суммы интервалов снизу и сверху, а также очевидное неравенство  $|a| - \langle b \rangle \geq |a| - |b|$ , можем заключить, что

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} c_{kj} \right| &\geq |a_{ii} c_{ij}| - \left| \sum_{k \neq i} a_{ik} c_{kj} \right| \geq |a_{ii} c_{ij}| - \sum_{k \neq i} |a_{ik} c_{kj}| \\ &= |a_{ii}| |c_{ij}| - \sum_{k \neq i} |a_{ik}| |c_{kj}| \geq \langle a_{ii} \rangle |c_{ij}| - \sum_{k \neq i} |a_{ik}| |c_{kj}|. \end{aligned}$$

В последнем выражении легко узнаётся  $ij$ -й элемент матрицы  $\langle A \rangle |C|$ , что и требовалось.



Наконец, свойство (2.54) вытекает из (2.49), так как расширение множества, по которому берётся минимум, не увеличивает его значения. ■

**Пример 2.9.2** Важный пример  $H$ -матриц — это неособенные треугольные матрицы из  $\mathbb{IR}^{n \times n}$ , верхние или нижние [46].

Действительно, для такой матрицы  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$  положим

$$\alpha := \max\{\langle \mathbf{a}_{11} \rangle, \langle \mathbf{a}_{22} \rangle, \dots, \langle \mathbf{a}_{nn} \rangle\}.$$

Тогда  $\langle \mathbf{A} \rangle = \alpha I - P$ , где  $P$  — неотрицательная треугольная матрица, имеющая на главной диагонали элементы с абсолютными значениями, строго меньшими  $\alpha$ . Диагональные элементы треугольной матрицы — это её собственные значения, и поэтому спектральный радиус  $P$  тоже меньше  $\alpha$ . ■

Заметим, что Пример 2.9.2 демонстрирует существование  $H$ -матриц, не обладающих обычным диагональным преобладанием.

**Теорема 2.9.1** Если  $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  — интервальная  $H$ -матрица, то она неособенна и

$$|\mathbf{A}^{-1}| \leq \langle \mathbf{A} \rangle^{-1}, \quad (2.55)$$

причём это неравенство является немучшаемым.

**Доказательство.** Предположим, что  $Ax = 0$  для некоторой  $A \in \mathbf{A}$  и  $x \in \mathbb{R}^n$ . Тогда необходимо

$$0 = |Ax| \geq \langle A \rangle |x| \quad (2.56)$$

в силу (2.53). Коль скоро  $\mathbf{A}$  есть  $H$ -матрица, то  $\langle A \rangle^{-1}$  неотрицательна и, домножая на неё слева обе части неравенства (2.56), получим  $0 \geq |x|$ . Следовательно,  $x = 0$ , и потому матрица  $A$  не может быть особенной.

Далее, для всякой матрицы  $A \in \mathbf{A}$  также в силу (2.53) имеет место

$$I = |AA^{-1}| \geq \langle A \rangle |A^{-1}| \geq \langle \mathbf{A} \rangle |A^{-1}|.$$

Умножение обеих частей этого неравенства слева на  $\langle \mathbf{A} \rangle^{-1} \geq 0$  приводит к

$$|A^{-1}| \leq \langle \mathbf{A} \rangle^{-1},$$

откуда следует (2.55). Если же  $\mathbf{A}$  —  $M$ -матрица, то  $\langle \mathbf{A} \rangle = \underline{\mathbf{A}}$ , так что  $\langle \mathbf{A} \rangle^{-1} = \underline{\mathbf{A}}^{-1} = |\underline{\mathbf{A}}^{-1}|$  с учётом результата Теоремы 2.8.2, а в соотношении (2.55) действительно достигается равенство. ■

Отметим, что результат Теоремы 2.9.1 позволяет оценивать размеры множеств решений интервальных линейных систем уравнений, чем мы воспользуемся для быстрой локализации множеств решений интервальных систем уравнений в §5.8. Далее эти результаты будут применены в Главе 7.

**Теорема 2.9.2** Матрица  $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  является  $H$ -матрицей тогда и только тогда, когда  $\text{mid } \mathbf{A}$  — это  $H$ -матрица и

$$\rho(\langle \text{mid } \mathbf{A} \rangle^{-1} \text{rad } \mathbf{A}) < 1.$$

**Доказательство.** Если  $\text{mid } \mathbf{A}$  —  $H$ -матрица, то  $\langle \text{mid } \mathbf{A} \rangle$  — это  $M$ -матрица, так что по Теореме 2.8.1 ( $\langle \text{mid } \mathbf{A} \rangle - \text{rad } \mathbf{A}$ ) также есть  $M$ -матрица. Следовательно,  $(\langle \text{mid } \mathbf{A} \rangle - \text{rad } \mathbf{A})v > 0$  для некоторого вектора  $v > 0$ , и в силу свойства (2.50) это влечёт  $\langle \mathbf{A} \rangle v > 0$ . Итак,  $\mathbf{A}$  —  $H$ -матрица.

Обратно, если  $\mathbf{A}$  является  $H$ -матрицей, то её середина  $\text{mid } \mathbf{A}$  — это тоже  $H$ -матрица, а  $\langle \mathbf{A} \rangle$  —  $M$ -матрица. В силу следствия к Предложению 2.8.1 для всех  $i = 1, 2, \dots, n$  должно быть  $0 \notin \mathbf{a}_{ii}$ . По этой причине в (2.50) достигается равенство, т.е.  $\langle \mathbf{A} \rangle = \langle \text{mid } \mathbf{A} \rangle - \text{rad } \mathbf{A}$ . Тогда  $\langle \mathbf{A} \rangle u = (\langle \text{mid } \mathbf{A} \rangle - \text{rad } \mathbf{A}) u > 0$  для некоторого  $u > 0$ , и мы имеем  $(\text{mid } \mathbf{A}) u > (\text{rad } \mathbf{A}) u$ . Домножая обе части этого неравенства слева на неотрицательную матрицу  $(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}$ , получим

$$\langle \text{mid } \mathbf{A} \rangle^{-1} (\text{rad } \mathbf{A}) u < u,$$

а это в силу Предложения 2.3.3 означает, что у матрицы  $(\langle \text{mid } \mathbf{A} \rangle^{-1} \text{rad } \mathbf{A})$  спектральный радиус действительно меньше единицы. ■

Спектральный радиус произведения обратной средней матрицы на матрицу радиусов уже встречался нам в признаке Бекка неособенности интервальных матриц (Теорема 2.5.6, стр. 116). Там, правда, присутствовало абсолютное значение обратной средней матрицы, но для интервальных  $H$ -матриц, пользуясь неравенством (2.55), мы можем оценить его сверху через обратную для компаранта. Таким образом, обосновано

**Следствие.** Всякая интервальная  $H$ -матрица сильно неособенна.

Но обратное неверно, как показывает

**Пример 2.9.3** Матрица

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & [1, 2] \\ [1, 2] & 0 \end{pmatrix}$$

не является  $H$ -матрицей. Дело в том, что на главной диагонали у неё стоят нули, и потому её компарант не может быть  $M$ -матрицей. Тем не менее,  $\mathbf{C}$  сильно неособенна.

Действительно,

$$(\text{mid } \mathbf{C})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

и поэтому

$$(\text{mid } \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 0 & [1, 2] \\ [1, 2] & 0 \end{pmatrix}$$

— неособенная матрица. ■

**Теорема 2.9.3** [46]. Пусть интервальная матрица  $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  и точечная матрица  $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$  таковы, что их произведение  $\Lambda \mathbf{A}$  является  $H$ -матрицей. Тогда  $\mathbf{A}$  сильно неособенна.

**Доказательство.** Обозначим для удобства  $\mathbf{B} := \Lambda \mathbf{A}$ . В силу (2.11) и (2.13)

$$\text{mid } \mathbf{B} = \Lambda \cdot \text{mid } \mathbf{A}, \quad \text{rad } \mathbf{B} = |\Lambda| \cdot \text{rad } \mathbf{A}.$$

При этом как сама  $\mathbf{B}$ , так и  $\text{mid } \mathbf{B}$ , будучи  $H$ -матрицами, являются неособенными. Также неособенны  $\mathbf{A}$  и  $\Lambda$ , и тогда согласно Теореме 2.9.1

$$\begin{aligned} |(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| &= |(\Lambda^{-1}(\Lambda \text{mid } \mathbf{A}))^{-1}| = |(\text{mid } \mathbf{B})^{-1} \Lambda| \\ &\leq |(\text{mid } \mathbf{B})^{-1}| |\Lambda| \leq \langle \text{mid } \mathbf{B} \rangle^{-1} |\Lambda|. \end{aligned}$$

Следовательно, опираясь на свойство (2.17), получим

$$\rho(|(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \cdot \text{rad } \mathbf{A}) \leq \rho(\langle \text{mid } \mathbf{B} \rangle^{-1} |\Lambda| \text{rad } \mathbf{A}) = \rho(\langle \text{mid } \mathbf{B} \rangle^{-1} \text{rad } \mathbf{B}) < 1$$

в силу Теоремы 2.9.2. Сравнение начала и конца этой цепочки неравенств и применение Предложения 2.6.1 приводят к заключению о том, что матрица  $\mathbf{A}$  в самом деле сильно неособенная. ■

**Теорема 2.9.4** [46]. *Интервальная матрица  $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  сильно неособенна тогда и только тогда, когда произведение  $(\text{mid } \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}$  является  $H$ -матрицей.*

**Доказательство.** Если  $(\text{mid } \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}$  — интервальная  $H$ -матрица, то мы находимся в условиях Теоремы 2.9.3, где в качестве точечной матрицы  $\Lambda$  взята обратная средняя матрица  $(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}$ .

Покажем теперь следование в противоположную сторону, обозначив для удобства  $\mathbf{B} := (\text{mid } \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}$ . Если интервальная  $n \times n$ -матрица  $\mathbf{A}$  сильно неособенна, то неособенна также  $\mathbf{B}$ . Кроме того, в силу (2.11) и (2.13)

$$\begin{aligned} \text{mid } \mathbf{B} &= \text{mid}((\text{mid } \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}) = (\text{mid } \mathbf{A})^{-1} \text{mid } \mathbf{A} = I, \\ \text{rad } \mathbf{B} &= \text{rad}((\text{mid } \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}) = |(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \text{rad } \mathbf{A}. \end{aligned}$$

Поэтому  $\langle \text{mid } \mathbf{B} \rangle = I$  и, следовательно,

$$\rho(\langle \text{mid } \mathbf{B} \rangle^{-1} \text{rad } \mathbf{B}) = \rho(|(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \text{rad } \mathbf{A}) < 1$$

в силу Предложения 2.6.1, применённого к сильно неособенной матрице  $\mathbf{A}$ . Но тогда на основании Теоремы 2.9.2 можем заключить, что  $\mathbf{B}$  — это  $H$ -матрица. ■

Основное предназначение этого и предшествующего результатов — теория предобуславливания интервальных линейных систем уравнений (см. Главы 7 и 10). Фактически, Теоремы 2.9.3 и 2.9.4 обосновывают тот факт, что для применимости предобуславливания и популярных численных методов к интервальным системам линейных алгебраических уравнений необходима сильная неособенность матриц их коэффициентов.

## Комментарий к Главе 2

**К §2.1.** Термин «брус» для декартовых произведений одномерных интервалов — интервальных векторов по нашей терминологии — впервые был использован, по-видимому, Г.Е. Шиловым в его известном курсе математического анализа [28], §5.14. Соответствующий англоязычный термин — «box». Часто говорят также «interval box».

Помимо определения многомерных интервалов как декартовых произведений одномерных интервалов широко распространены и другие конструкции. Например, если  $U$  — частично упорядоченное линейное пространство с порядком « $\preceq$ », то естественно рассматривать в нём множества  $[a, b] := \{x \in U \mid a \preceq x \preceq b\}$ , которые являются порядковыми интервалами относительно него. Именно такой способ использовал Л.В. Канторович в своей пионерской работе [13]. В частности, если на  $\mathbb{R}^n$  упорядочение векторов понимается в покомпонентном смысле, то получаемые таким образом многомерные интервалы совпадают с прямыми декартовыми произведениями одномерных интервалов.

Другой путь введения многомерных аналогов интервалов может быть основан на обобщении представления «середина-радиус» (1.16). При этом «интервалами» в линейном нормированном пространстве  $U$  с нормой  $\|\cdot\|$  называют множества

$$(m, r) = \{x \in U \mid \|x - m\| \leq r\},$$

где  $m$  — заданный элемент из  $U$ , называемый центром (серединой), а  $r$  — неотрицательное вещественное число.

Иногда идут ещё дальше. При решении интервальных дифференциальных задач популярны оценивающие множества в виде политопов и эллипсоидов. Хотя их не называют «интервалами», но, фактически, это тоже обобщения идеи интервального анализа.

Эффект обёртывания в англоязычной литературе называется «wrapping effect». Он впервые был обнаружен Р.Е. Муром при исследовании пошаговых интервальных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Впоследствии было осознано, что этот эффект носит всеобщий характер и возникает не только при решении интервальных дифференциальных уравнений (см. [40]).

**К §2.4.** Пространства с мультиметрикой в математической литературе называют *мультиметрическими*, хотя изредка встречаются и другие термины. Л. Коллатц в известной книге [14] называет мультиметрику *псевдометрикой*, хотя позднее этот термин закрепился за другим понятием.

Для случая классической интервальной арифметики  $\mathbb{IR}$  неравенство (2.22) хорошо известно, а для полной интервальной арифметики в многомерном случае оно впервые было применено автором в [55].

**К §2.5.** Неособенные матрицы в русской математической литературе часто называют «невырожденными», но в интервальном анализе термины «вырождение», «невырожденность» и т. п. относятся, прежде всего, к наличию существенной интервальности, т. е. равенству или неравенству нулю ширины интервала. По этой причине мы

используем не менее ясные и не перегруженные термины «особенная/неособенная матрица».

Результат, который мы называем «признаком Адамара», нередко встречается под именем «теоремы Леви-Деспланка» (см., к примеру, [25]), но мы придерживаемся в этом пункте терминологии, принятой в книгах [6, 22]. В книге М. Пароди [22] можно прочитать, в частности, некоторые сведения об истории вопроса.

Обобщение признака Адамара (под именем теоремы Леви-Деспланка) на случай комплексных матриц с неопределёнными элементами найдено в [43].

Критерий Баумана неособенности интервальных матриц (Теорема 2.5.3) получен в работе [30].

Признак Бекка (Теорема 2.5.6) был предложен немецким математиком Х. Бекком в работе [31].

**К §2.6.** Предложение 2.6.1 впервые установлено Ф. Рисом в диссертации [51]. Автором Предложения 2.6.2 является А. Ноймайер [46].

**К §2.7.** Нахождение оценок обратных матриц может представлять интерес, к примеру, при определении производных компонент решения системы линейных уравнений относительно её коэффициентов и правой части. Другой пример необходимости вычисления обратных матриц предоставляют численные методы для решения линейных систем с блочными матрицами и задачи на собственные значения для блочных матриц. Таков, например, блочный метод Гаусса, описанный в книге [6]. Для решения интервальных версий подобных задач необходимо оценивание обратной интервальной матрицы.

**К §2.8 и §2.9.** По отношению к матрицам, выделяемым Определением 2.8.1, употребляется также термин *неотрицательно обратимые матрицы* [20].

Понятия  $M$ -матрицы и  $H$ -матрицы введены швейцарским математиком русского происхождения А.М. Островским в работе [47], причём буква « $M$ » была взята им в честь другого известного немецкого математика Г. Минковского. В [47] вводится также конструкция компаранта матрицы, который А.М. Островский называет немецким термином «*Vergleichsmatrix*». По имени автора понятия в немецкой математической литературе компарант часто называют также «*Ostrowski-Matrix*».

Список условий, эквивалентных Определению 2.8.2 для  $M$ -матрицы, может быть значительно продолжен. К примеру, А. Берман и Р. Племмонс в книге [32] перечисляют 50 условий, равносильных утверждению «матрица  $A$  является  $M$ -матрицей». Большое количество эквивалентных определений  $M$ -матрицы можно найти в справочнике [4] и книге А. Ноймайера [46].

Критерий Фань Цзы был предложен в работе [38]. В доказательстве Теоремы 2.8.1 мы следуем А. Ноймайеру [46], Теорема 3.6.3.

Интервальные  $M$ -матрицы впервые были рассмотрены В. Бартом и Е. Нудингом в статье [29], а интервальные  $H$ -матрицы введены А. Ноймайером в [45]. При этом вместо нашего термина «компарант» А. Ноймайер и другие авторы используют в англоязычной литературе более тяжеловесное «*comparison matrix*».

Теорема Куттлера впервые опубликована в [37].

В отечественной литературе вопросы, рассматриваемые в этих параграфах, освещены сравнительно слабо. Изложение отдельных элементов теории монотонных матриц и  $M$ -матриц можно найти в книгах [4, 6, 14, 19, 21].

Интересно, что иногда термин « $M$ -матрица» используется в другом смысле. Специалисты по управляемым системам называют  $M$ -матрицами вещественные матрицы с неотрицательными внедиагональными элементами (см. [5]). Впервые такие матрицы детально исследовались Л.А. Метцлером [42] и потому в некоторых западных публикациях получили наименование «метцлеровых» или, коротко,  $M$ -матриц. В этой ситуации для избежания путаницы наиболее разумным представляется рекомендовать специалистам по управлению всегда использовать только развёрнутый термин «метцлерова матрица» вместо двусмысленного сокращения.

## Литература к Главе 2

- [1] Алефельд Г., Херцбергер Ю. *Введение в интервальные вычисления*. – Москва: Мир, 1987.
- [2] Биркгоф Г. *Теория решёток*. – Москва: Наука, 1984.
- [3] Биркгоф Г., Барти Т. *Современная прикладная алгебра*. – Москва: Мир, 1976.
- [4] Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. *Матрицы и вычисления*. – Москва: Наука, 1984.
- [5] Воронов А.А. *Введение в динамику сложных управляемых систем*. – Москва: Наука, 1985.
- [6] Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц*. – Москва: 1988.
- [7] Голуб Дж., ван Лоун Ч. *Матричные вычисления*. – Москва: Мир, 1999.
- [8] Гэри М., Джонсон Д. *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи*. – Москва: Мир, 1982.
- [9] Демидович Б.П., Марон И.А. *Основы вычислительной математики*. – Москва: Наука, Физматлит, 1970.
- [10] Деммель Дж. *Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения*. – Москва: Мир, 2001.
- [11] Ерохин В.И. Необходимые и достаточные условия невырожденности интервальных матриц // *Международная конференция по вычислительной математике МКВМ-2004. Рабочие совещания* / Ред. Ю.И. Шокин и др. – Новосибирск: Издательство ИВМиМГ СО РАН, 2004. – С. 193–200.
- [12] Зорич В.А. *Математический анализ*. Т. 1. – Москва: Наука, 1981. Т. 2. – Москва: Наука, 1984, а также последующие издания.
- [13] Канторович Л.В. О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений // *Сибирский Математический Журнал*. – 1962. – Т. 3, №5. – С. 701–709.
- [14] Коллатц Л. *Функциональный анализ и вычислительная математика*. – Москва: Мир, 1969.
- [15] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. – Москва: Физматлит, 2004, а также другие издания книги.
- [16] Лакеев А.В. Оценка спектрального радиуса нерасширяющих матриц // *Вычислительные Технологии*. – 1998. – Т. 3, №2. – С. 21–30.

- [17] ЛАНКАСТЕР П. *Теория матриц*. – Москва: Наука, 1978.
- [18] ЛОПАТНИКОВ Л.И. *Экономико-математический словарь*. – Москва: Наука, 1993.
- [19] МАРШАЛЛ А., ОЛКИН И. *Неравенства: теория мажоризации и её приложения*. – Москва: Мир, 1983.
- [20] НИКАЙДО Х. *Выпуклые структуры и математическая экономика*. – Москва: Мир, 1972.
- [21] ОРТЕГА Дж., РЕЙНБОЛДТ В. *Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными*. – Москва: Мир, 1975.
- [22] ПАРОДИ М. *Локализация характеристических чисел матриц и её применения*. – Москва: Издательство иностранной литературы, 1960.
- [23] УИЛКИНСОН Дж.Х. *Алгебраическая проблема собственных значений*. – Москва: Наука, 1970.
- [24] ФАДДЕЕВ Д.К., ФАДДЕЕВА В.Н. *Вычислительные методы линейной алгебры*. – Москва: Физматгиз, 1963.
- [25] ХОРН Р., ДЖОНСОН Ч. *Матричный анализ*. – Москва: Мир, 1989.
- [26] ШАРЫЙ С.П. Об интервальных матрицах полного ранга // *Сибирский Журнал вычислительной математики*. – 2014. – Т. 17, №3. – С. 289–304.
- [27] ШАРЫЙ С.П. *Курс вычислительных методов*. – Новосибирск: ИВТ СО РАН, 2019.
- [28] ШИЛОВ Г.Е. *Математический анализ. Функции одного переменного. Части 1–2*. – Москва: Наука, 1969.
- [29] BARTH W., NUDING E. Optimale Lösung von Intervallgleichungssystemen // *Computing*. – 1974. – Vol. 12. – P. 117–125.
- [30] BAUMANN M. A regularity criterion for interval matrices // *Collection of Scientific Papers Honoring Prof. Dr. K. Nickel on Occasion of his 60th Birthday. Part I* / J. Garloff, ed. – University of Freiburg im Breisgau, 1984.
- [31] БЕЕСК Н. Zur Problematik der Hüllenbestimmung von Intervallgleichungssystemen // *Interval Mathematics* / Nickel K., ed. – Berlin: Springer Verlag, 1975. – P. 150–159. – (*Lecture Notes in Computer Science; vol. 29*).
- [32] BERMAN A., PLEMMONS R.J. *Nonnegative matrices in the mathematical sciences*. – New York: Academic Press, 1979.
- [33] COXSON G.E. Computing exact bounds on elements of an inverse interval matrix is NP-hard // *Reliable Computing*. – 1999. – Vol. 5. – P. 137–142.
- [34] HERZBERGER J. Iterative methods for the inclusion of the inverse of a matrix // *Topics in Validated Computations* / Herzberger J., ed. – Amsterdam: Elsevier, 1994. – P. 137–171.
- [35] KAUCHER E. Interval analysis in the extended interval space  $\mathbb{IR}$  // *Computing Supplement*. – 1980. – Vol. 2. – P. 33–49.
- [36] KOSHELEVA O., KREINOVICH V., MAYER G., NGUYEN H.T. Computing the cube of an interval matrix is NP-hard // *Proceedings of the 20th ACM Symposium on Applied Computing — SAC'2005, Santa Fe, New Mexico, March 13-17, 2005*. – P. 1449–1453. (работа доступна в Интернете на <http://www.cs.utep.edu/vladik/2004/tr04-28a.pdf>)
- [37] KUTTLER J. A fourth-order finite difference approximation for the fixed membrane eigenproblem // *Mathematics of Computation*. – 1971. – Vol. 25. – P. 237–256.
- [38] FAN K. Topological proofs for certain theorems on matrices with non-negative elements // *Monatsh. Math.* – 1958. – Vol. 62. – P. 219–237.

- [39] LAPACK — <http://www.netlib.org/lapack>
- [40] LOHNER R. On the ubiquity of the wrapping effect in the computation of the error bounds // *Perspectives of Enclosure Methods* / Kulisch U., Lohner R. and Facius A., eds. – Wien-New York: Springer, 2001. – P. 201–217.
- [41] MOORE R.E. *Methods and applications of interval analysis*. – Philadelphia: SIAM, 1979.
- [42] METZLER L. Stability of multiple markets: the Hicks conditions // *Econometrica*. – 1945. – Vol. 13. – P. 277–292.
- [43] NAIMARK L., ZEHEB E. An extension of Levy-Desplanque theorem and some stability conditions for matrices with uncertain entries // *IEEE Transactions on Circuits & Systems I: Fundamental Theory and Applications*. – 1997. – Vol. 44, No. 2. – P. 167–170.
- [44] NEMIROVSKI A. Several NP-hard problems arising in robust stability // *Mathematics of Control Signals and Systems*. – 1993. – Vol. 6, No. 2. – P. 99–105.
- [45] NEUMAIER A. New techniques for the analysis of linear interval equations // *Linear Algebra and its Applications*. – 1984. – Vol. 58. – P. 273–325.
- [46] NEUMAIER A. *Interval methods for systems of equations*. – Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [47] OSTROWSKI A.M. Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale // *Commentarii Mathematici Helvetici*. – 1937. – Bd. 10. – S. 69–96.
- [48] POLJAK S., ROHN J. Checking robust nonsingularity is NP-hard // *Mathematics of Control, Signals & Systems*. – 1993. – Vol. 6. – P. 1–9.
- [49] REICHMANN K. Abbruch beim Intervall-Gauß-Algorithmus // *Computing*. – 1979. – Vol. 22, Issue 4. – P. 355–361.
- [50] REX G., ROHN J. Sufficient conditions for regularity and singularity of interval matrices // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1999. – Vol. 20. – P. 437–445.
- [51] RIS F.N. Interval analysis and applications to linear algebra. PhD dissertation. – Oxford: Oxford University, 1972.
- [52] ROHN J. Checking positive definiteness or stability of symmetric interval matrices is NP-hard // *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*. – 1994. – Vol. 35. – P. 795–797.
- [53] RUMP S.M. Verification methods for dense and sparse systems of equations // *Topics in Validated Numerics* / Herzberger J., ed. – Amsterdam: Elsevier, 1994. – P. 63–135.
- [54] RUMP S.M. The distance between regularity and strong regularity // *Scientific Computing and Validated Numerics* / Alefeld G., Frommer A. and Lang B., eds. – Berlin: Akademie Verlag, 1996. – P. 105–117.
- [55] SHARY S.P. Outer estimation of generalized solution sets to interval linear systems // *Reliable Computing*. – 1999. – Vol. 5. – P. 323–335.
- [56] ZYUZIN V.S. On metrization of interval sets  $I(\mathbb{R})$ ,  $I(\mathbb{R}^n)$  // *Interval Computations*. – 1992. – No. 2(4). – P. 39–50.



## Глава 3

# Интервальное оценивание областей значений функций

Предметом этой главы является задача оценивания области значений функции, т. е. множества ,

$$\text{ran}(f, \mathbf{X}) := \{ f(x) \mid x \in \mathbf{X} \},$$

где  $\mathbf{X}$  — интервал в  $\mathbb{R}$  или же интервальный вектор-брус в  $\mathbb{R}^n$ . Рассматриваемые постановки тесно связаны с теми, что рассматриваются в теории оптимизации и математическом программировании — дисциплинах, занимающихся отысканием экстремальных значений различных функций. Фактически, для непрерывной функции  $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$  имеет место равенство

$$\text{ran}(f, \mathbf{X}) = \left[ \min_{x \in \mathbf{X}} f(x), \max_{x \in \mathbf{X}} f(x) \right].$$

Специфика постановки задачи, с которой имеет дело интервальный анализ, состоит в рассмотрении области значений и её оценок «в целом и глобально», без вычленения отдельных экстремумов, тем более локальных. Отметим, что оценивание области значений «как целого» действительно требуется во многих ситуациях как внутри математики (например, при решении интервальными методами уравнений и систем уравнений, см. Главу 8), так и на практике (при оценке погрешностей косвенных измерений и др).

Практически важная задача косвенных измерений возникает в случае, когда интересующую нас величину  $y$  нельзя измерить непосредственно, и она должна рассчитываться на основе известной зависимости

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

от одной или нескольких *первичных величин*  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , которые только и могут быть измерены имеющимися в нашем распоряжении приборами. Тогда говорят о *косвенном измерении* величины  $y$ . Косвенными являются, к примеру, большинство измерений расстояний между недоступными объектами на местности или в пространстве, определение объёмов тел по прямым измерениям их геометрических размеров,

измерения малых или больших температур, измерение напряжённости электромагнитного поля и т. п. В частности, при измерении температур порядка сотен градусов с помощью термоэлемента (термопары) определяют не саму температуру, а термо-ЭДС, по которой косвенным образом судят о температуре.

Часто измерения первичных величин неточны, и их результаты задаются интервалами возможных значений (при этом обычно говорят об «интервалах неопределённости», «доверительных интервалах» и т. п.). Какие значения может принимать тогда интересующая нас величина  $y$ ? Вычисление для неё двусторонней интервальной оценки по заданным интервалам  $x_1, x_2, \dots, x_n$  для  $x_1, x_2, \dots, x_n$  представляет собой задачу оценивания области значений функции  $f$  на бруске  $x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n$ .

В рассмотренном примере требуется внешняя — с помощью объемлющего множества — оценка области значений рассматриваемой функции, но нередко бывают нужны и другие способы оценивания, в частности, внутреннее оценивание области значений.

### 3.1 Интервальные оценивающие функции и их простейшие формы

*Интервальным оцениванием* будем называть вычисление интервальной оценки для точной области значений функции. Эта интервальная оценка может иметь различный смысл, оценивая область значений извне, как объемлющее множество (тогда говорят о *внешней оценке*), либо изнутри, как подмножество (тогда говорят о *внутренней оценке*), либо каким-нибудь другим способом, требуемым в постановке задачи (см. по этому поводу обсуждение в Главе 4). Ниже мы рассматриваем, главным образом, внешние оценки.

В основе методов интервального оценивания областей значений функций лежат несколько естественных идей:

Во-первых, это идея, оформленная в §1.4 при рассмотрении основной теоремы интервальной арифметики: в аналитическое выражение (или алгоритм для вычисления) функции нужно вместо входных аргументов подставить интервалы их изменения, а обычные арифметические операции и элементарные функции заменить их интервальными аналогами, затем вычислить полученное интервальное выражение (или выполнить интервальный алгоритм). Полученный таким образом интервал будет содержать искомую область значений.

Во вторых, это идея замены исходного выражения (или алгоритма вычисления функции) на другое, в том или ином смысле равносильное, но которое бы позволяло достичь большей точности, было бы более удобным при интервальном оценивании и т. п. Затем уже к полученному выражению применяется первая идея.

Вторая идея возникла как реакция на неудовлетворительные результаты применения первой, когда получающиеся оценки оказывались слишком уж далёкими от искомой области значений. Как мы могли видеть при доказательстве основной теоремы

интервальной арифметики, причиной этого служит зависимость промежуточных интервальных результатов, которая приобретается при вычислениях любых сколь угодно сложных выражений, содержащих неоднократные вхождения переменных. Как правило, при реализации второй идеи опираются на то, что оценивание некоторых типов выражений (линейных форм и др.) можно выполнить относительно просто и с хорошим качеством. К ним и стараются привести выражения произвольного вида, используя для этого различные разложения (например, формулу Тейлора).

Теоретическое оформление результатов по интервальному оцениванию базируется на следующих понятиях.

**Определение 3.1.1** *Интервальная функция  $\mathbf{f} : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^m$  называется интервальным продолжением точечной функции  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  на множестве  $D \subset \mathbb{R}^n$ , если  $\mathbf{f}(x) = f(x)$  для всех точечных аргументов  $x \in D$ .*

**Определение 3.1.2** *Интервальная функция  $\mathbf{f} : \mathbb{ID} \rightarrow \mathbb{IR}^m$  называется внешней оценивающей функцией для точечной функции  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  на множестве  $D \subset \mathbb{R}^n$ , если для любого интервала  $\mathbf{X} \subseteq D$  имеет место*

$$x \in \mathbf{X} \quad \Rightarrow \quad f(x) \in \mathbf{f}(\mathbf{X}),$$

или, что равносильно,

$$\text{ran}(f, \mathbf{X}) \subseteq \mathbf{f}(\mathbf{X}) \quad \text{для всех } \mathbf{X} \in \mathbb{ID}.$$

Если смысл оценивания ясен (внешнее оценивание), то можно говорить также — интервальная оценивающая функция или просто оценивающая функция.

**Определение 3.1.3** *Интервальная функция  $\mathbf{f} : \mathbb{IR}^n \rightarrow \mathbb{IR}^m$  называется интервальным расширением точечной функции  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  на множестве  $D \subset \mathbb{R}^n$ , если она является*

- (i) *интервальным продолжением для  $f$  на  $D$ ,*
- (ii) *внешней оценивающей функцией для  $f$  на  $D$ .*

Полезным свойством интервальных функций является монотонность по включению, когда для любых интервалов  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  из их области определения имеет место импликация

$$\mathbf{x} \subseteq \mathbf{y} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) \subseteq \mathbf{f}(\mathbf{y}).$$

Нетрудно понять, что монотонное по включению интервальное продолжение точечной функции является её интервальным расширением: для всякого бруса  $\mathbf{X}$  тогда из принадлежности  $x \in \mathbf{X}$  следует

$$f(x) = \mathbf{f}(x) \in \mathbf{f}(\mathbf{X}).$$

Этот факт использовался в доказательстве первой части основной теоремы интервальной арифметики (см. §1.4, стр. 34). Но в общем случае интервальные расширения не обязательно монотонны по включению.

Полезно также

**Определение 3.1.4** *Интервальная функция  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  называется оптимальным интервальным расширением точечной функции  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  на  $D \subset \mathbb{R}^n$ , если  $f(\mathbf{X}) = \square(\text{ran}(f, \mathbf{X}))$  для любого  $\mathbf{X} \in \mathbb{I}D$ , т. е. значения  $f$  являются интервальными оболочками областей значений  $f$  на брусках  $\mathbf{X} \in \mathbb{I}D$ .*

К примеру, оптимальным интервальным расширением функции знака числа  $\text{sgn } x$  является

$$\text{sgn } \mathbf{x} = \begin{cases} -1, & \text{если } \bar{\mathbf{x}} < 0, \\ [-1, 0], & \text{если } \underline{\mathbf{x}} < 0 = \bar{\mathbf{x}}, \\ [-1, 1], & \text{если } \underline{\mathbf{x}} < 0 < \bar{\mathbf{x}}, \\ 0, & \text{если } \underline{\mathbf{x}} = 0 = \bar{\mathbf{x}}, \\ [0, 1], & \text{если } \underline{\mathbf{x}} = 0 < \bar{\mathbf{x}}, \\ 1, & \text{если } 0 < \underline{\mathbf{x}}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Мы предполагаем, что читатель знает, что такое элементарные функции. Обычно этим термином называется некоторый фиксированный исторически сложившийся набор функций, встречающихся в элементарной математике, а именно

абсолютная величина (модуль),  $|x|$ ,

степенная функция,  $x^\alpha$ ,

показательная функция,  $a^x$ , записываемая также как  $\exp_a x$ ,

логарифмическая функция,  $\log_a x$ ,

круговые тригонометрические функции,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\text{tg } x$ ,

обратные тригонометрические функции,  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$ ,  $\text{arctg } x$ .

Семейство элементарных функций мы будем обозначать через  $\mathcal{EF}$ . Иногда в число элементарных включают также сложную показательную функцию  $x^y$ , но мы специально не выделяем её в этом списке, поскольку  $x^y = \exp(y \log x)$ .

Для всех перечисленных выше функций область значений на любом интервале из  $\mathbb{R}$  может быть несложно найдена на основе информации об их монотонности на тех или иных участках области определения, так что их оптимальные интервальные расширения строятся без проблем. При этом оптимальное интервальное расширение функции модуля договоримся обозначать посредством  $\text{abs}$ , так как  $|x|$  уже используется для обозначения модуля (магнитуды) интервала  $\mathbf{x}$ . Обычно множество  $\mathcal{EF}$  содержит стандартный набор элементарных функций, входящий в реализацию любой интервальной библиотеки на ЭВМ. При желании оно может быть дополнено другими функциями.

Например, нетрудно проверить, что  $\text{abs } \mathbf{x} = [\langle \mathbf{x} \rangle, |\mathbf{x}|]$ . Степенная, показательная, логарифмическая функции и обратные тригонометрические функции монотонны всюду на своих областях определения. И лишь тригонометрические функции  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\text{tg } x$  имеют чередующиеся участки возрастания и убывания. К примеру,  $\sin x$  возрастает на любом интервале вида  $[-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , и убывает на любом интервале вида  $[\pi/2 + 2k\pi, 3\pi/2 + 2k\pi]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  (см. Рис. 3.1). Если ширина интервала  $\mathbf{x}$  больше или равна  $2\pi$ , т. е. периода синуса, то  $\sin \mathbf{x} = [-1, 1]$ . Иначе путём деления интервала  $\mathbf{x}$  на  $2\pi$  можно определить его расположение относительно точек вида  $-\pi/2 + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , где убывание синуса сменяется возрастанием, и точек вида

$\pi/2 + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , где возрастание сменяется убыванием, и тем самым легко найти область значений синуса.

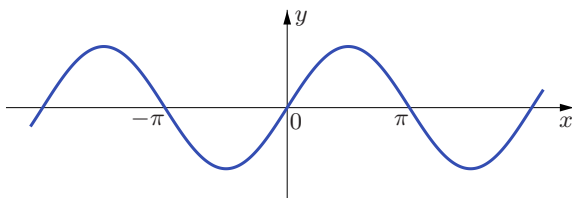


Рис. 3.1. Оптимальное интервальное расширение функции  $y = \sin x$  можно найти на основе известной информации о её поведении.

**Определение 3.1.5** Аналитические выражения, которые составлены из символов переменных, констант, четырёх арифметических операций — сложения, вычитания, умножения и деления — и элементарных функций, будем называть элементарными функциональными выражениями.

Удобно считать, что элементарные функциональные выражения — это те же элементарные функции, но жёстко ассоциированные со способом их вычисления, т. е. с задающим их выражением.

**Определение 3.1.6** Интервальное расширение элементарного функционального выражения, которое получается в результате замены его аргументов на интервалы их изменения, а арифметических операций и элементарных функций — на их интервальные аналоги и расширения называется естественным интервальным расширением.

То, что процедура подстановки интервалов вместо переменных и выполнения всех действий в получающемся интервальном выражении по правилам интервальной арифметики действительно даёт интервальное расширение, несложно устанавливается прямо из Определений 3.1.1–3.1.3. Условимся обозначать естественное интервальное расширение элементарного функционального выражения  $f$  через  $\mathbf{f}_i$ , а там, где конкретный вид выражения несуществен, можно говорить о естественном интервальном расширении  $\mathbf{f}_i$  для точечной функции  $f$ .

Преходя к рассмотрению функций в самом общем смысле, необходимо дать

**Определение 3.1.7** Функция  $f : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$  называется *text{сплошной}*, если она может быть представлена выражением  $f(x)$ , которое является последним членом конечной последовательности  $\{f_i(x)\}$  присваиваний выражений, таких что

$$f_i(x) = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

и для  $i > j, k, n$

$$f_i(x) = c_i \in \mathbb{R},$$

либо

$$f_i(x) = -f_j(x),$$

либо

$$f_i(x) = f_j(x) \star f_k(x) \quad \text{для } \star \in \{+, -, \cdot, /\},$$

либо

$$f_i(x) = \phi_i(f_j(x)) \quad \text{для } \phi_i \in \mathcal{EF}.$$

Последовательность  $\{f_i(x)\}$ , о которой говорится в этом определении, в практической информатике часто называют *списком инструкций*.<sup>1</sup> В качестве иллюстрации Определения 3.1.7 рассмотрим, например, функцию

Другим удобным формализмом, который даёт возможность выразить то же условие на выражение для функции, является понятие *дерева Канторовича*.

Напомним читателю некоторые понятия теории графов (см., например, [15]). *Графом* называют, как известно, объект, состоящий из непустого множества точек, *вершин*, и соединяющих их линий, *рёбер*. Вершина  $v$  графа называется *концевой*, если существует лишь одно ребро с концом  $v$ .

*Маршрутом* в графе называют такую чередующуюся последовательность  $(v_0, e_1, v_1, \dots, v_{m-1}, e_m, v_m)$  его вершин  $v_i$  и рёбер  $e_j$ , в которой каждое ребро  $e_j$  соединяет две вершины  $v_{j-1}$  и  $v_j$ , одна из которых непосредственно ему предшествует в этой последовательности, а другая непосредственно за ним следует. При этом говорят, что *длина маршрута*  $(v_0, e_1, v_1, \dots, v_{m-1}, e_m, v_m)$  равна  $m$ , т. е. количеству рёбер в нём. Если  $v_0 = v_n$ , то рассматриваемый маршрут называется *циклическим*, а если к тому же каждое ребро встречается в этом маршруте не более одного раза, то имеем *цикл*.

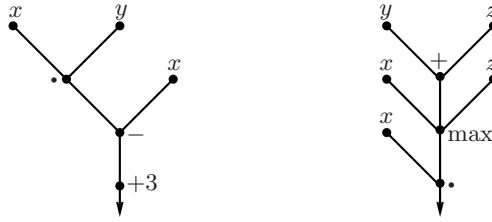
Наконец, *деревом* называют связный граф, не содержащий циклов. Дерево с какой-то одной выделенной вершиной — *корнем* — называется *корневым деревом*. В этом случае *высота* корневого дерева — наибольшая из длин маршрутов от корня дерева до его конечных вершин.

Понятие дерева необходимо для удобной и строгой формализации процесса вычисления значений выражений, которое впервые было дано Л.В. Канторовичем в [12]. *Деревом Канторовича* выражения  $f$  называется изображающее алгоритм вычисления значений для  $f$  корневое дерево, в котором [3]

- корень соответствует результату выражения,
- прочие концевые вершины (листья дерева) соответствуют исходным переменным выражения,
- остальные вершины дерева отображают в одно и то же время операции, встречающиеся при вычислении выражения, и результаты этих операций, являющиеся промежуточными результатами вычисления выражения  $f$ .

Рёбра дерева Канторовича показывают потоки данных — процесс передачи того или иного промежуточного значения к следующей операции. Например, на Рис. 3.2 представлены деревья Канторовича для выражений  $xy - x + 3$  и  $x \cdot \max\{x, y + z, z\}$  (корни этих деревьев обозначены стрелками).

<sup>1</sup>Соответствующий английский термин — code list, но он чрезвычайно перегружен также другими значениями, гораздо более употребительными.

Рис. 3.2. Деревья Канторовича выражений  $xy - x + 3$  и  $x \cdot \max\{x, y + z, z\}$ .

Понятие дерева Канторовича обладает большой наглядностью, но его определённым недостатком является «нелинейный характер», тогда как традиционные алгоритмы линейны по своей сути. Как дерево Канторовича, так и задаваемый Определением 3.1.7 список инструкций  $\{f_i(x)\}$ , могут быть построены по конкретному выражению неединственным образом. Впрочем, это обстоятельство не играет существенной роли в нашем анализе. Отметим также, что высота дерева Канторовича может служить мерой «сложности» отображаемого им выражения.

Качество внешнего интервального оценивания области значений функции с помощью естественного интервального расширения сильно зависит от вида выражения. Так, для лучшего вычисления естественного интервального расширения полиномов рекомендуется известная *схема Горнера*, в которой выражение представлено в виде «матрёшки» с вынесением переменной за скобки [4]. Из свойства субдистрибутивности (1.54) следует, что тогда при прочих равных условиях результат интервального оценивания будет более узким.

**Пример 3.1.1** Для квадратного трёхчлена  $g(x) = 3x^2 - 6x + 4$  на интервале  $[0, 2]$  область значений легко найти из того соображения, что

$$g(x) = 3(x^2 - 2x + 1) + 1 = 3(x - 1)^2 + 1. \quad (3.2)$$

Поэтому  $\text{ran}(g, [0, 2]) = 3([0, 2] - 1)^2 + 1 = 3 \cdot [-1, 1]^2 + 1 = 3 \cdot [0, 1] + 1 = [1, 4]$ , где  $[-1, 1]^2$  означает оптимальное интервальное расширение функции возведения в квадрат, т. е.  $[-1, 1]^2 = [0, 1]$ . В то же время, естественное интервальное расширение исходной формы трёхчлена даёт

$$g_i([0, 2]) = 3 \cdot [0, 2]^2 - 6 \cdot [0, 2] + 4 = [-8, 16],$$

а при вычислении по схеме Горнера для представления  $g(x) = (3x - 6)x + 4$ , получаем

$$(3 \cdot [0, 2] - 6) \cdot [0, 2] + 4 = [-8, 4].$$

Для многочлена третьей степени

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 2 \quad (3.3)$$

рассмотренный выше квадратный трёхчлен  $g(x)$  является производной, и, как следует из представления (3.2), она всегда сохраняет положительный знак. Следовательно,  $f(x)$  монотонно возрастает на всей числовой оси, и точная область значений

$\text{ran}(f, [0, 2])$  есть интервал  $[f(0), f(2)] = [2, 6]$ . Естественное интервальное расширение многочлена (3.3) в исходной форме даёт

$$f_{\sharp}([0, 2]) = [0, 2]^3 - 3 \cdot [0, 2]^2 + 4 \cdot [0, 2] + 2 = [-10, 18],$$

а по схеме Горнера на основе представления  $f(x) = ((x - 3)x + 4)x + 2$  получаем

$$(( [0, 2] - 3 ) \cdot [0, 2] + 4) \cdot [0, 2] + 2 = [-2, 10],$$

так что выигрыш в качестве оценивания налицо. ■

## 3.2 Условие Липшица для интервальных функций

Итак, внешние оценки областей значений функций могут быть найдены с помощью их интервальных расширений. Но насколько точны эти оценки? Нашей ближайшей целью является получение результатов о погрешности, в интервальной метрике  $\text{dist}$ , для внешнего оценивания областей значений с помощью естественного интервального расширения. Центральную роль в нашем анализе будет играть известное из математического анализа *условие Липшица*, которое естественным образом распространяется и на интервальнозначные функции.

Говорят, что функция  $f : \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$  удовлетворяет условию Липшица, если для некоторой константы  $L$  имеет место

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

при любых  $x, y \in D$  (см., к примеру, [6]). Для вещественнозначных функций многих переменных вместо модуля разности аргументов  $|x - y|$  можно взять какую-либо её норму, так что соответствующее определение условия Липшица может выглядеть, к примеру, следующим образом:  $|f(x) - f(y)| \leq L\|x - y\|$ . Некоторое техническое неудобство возникает из-за зависимости константы  $L$  от выбора конкретной нормы в пространстве аргументов функции. Его можно преодолеть, взяв константу Липшица векторной, т. е. в виде вектор-строки, которая умножается на вектор-столбец  $|x - y|$  из модулей разностей компонент  $x$  и  $y$ . Мы принимаем следующее

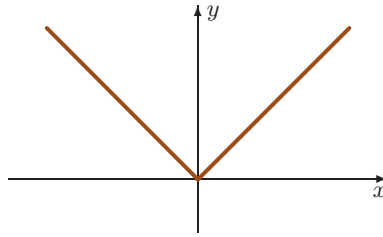
**Определение 3.2.1** *Говорят, что вещественная функция  $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$  является непрерывной по Липшицу (или просто липшицевой), если существует вектор-строка констант  $L_f \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ , такая что*

$$|f(x) - f(y)| \leq L_f |x - y|$$

для любых  $x, y \in D$ . Величину  $L_f$  называют при этом (векторной) константой Липшица функции  $f$  на  $D$ .

Понятие непрерывности по Липшицу формализует интуитивно понятное условие соразмерности изменения функции изменению аргумента. Именно, приращение функции не должно превосходить приращение аргумента (по абсолютной величине или в некоторой заданной метрике) более чем в определённое фиксированное число раз. При этом сама функция может быть и негладкой, как, например, модуль



Рис. 3.3. Негладкая функция  $y = |x|$  является липшицевой.

числа в окрестности нуля. Отметим, что понятие непрерывности по Липшицу является более сильным свойством, чем просто непрерывность или даже равномерная непрерывность, так как влечёт за собой их обоих.

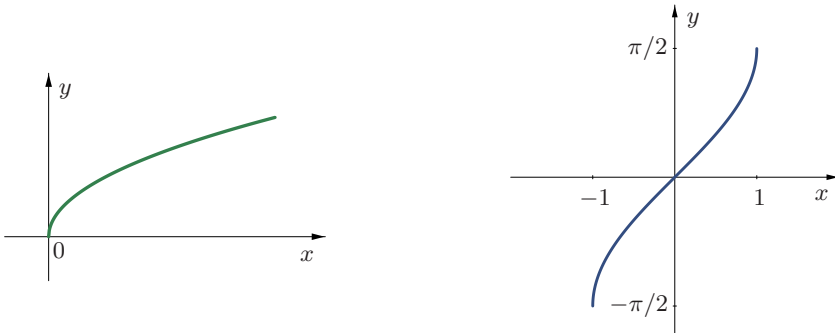
В определении непрерывности функции по Липшицу не оговаривается конструктивный способ задания константы  $L_f$ , но, к примеру, в одномерном случае, когда  $D \subseteq \mathbb{R}$ , для общих функций  $f$  можно считать, что

$$L_f = \sup \left\{ \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \mid x, y \in D, x \neq y \right\}.$$

Если  $f$  — непрерывно дифференцируема, то

$$L_f = \sup \{ |f'(x)| \mid x \in D \},$$

что вытекает из известной в математическом анализе теоремы Лагранжа о среднем значении (см., к примеру, [11]).

Рис. 3.4. Функция  $y = \sqrt{x}$  не является непрерывной по Липшицу в окрестности нуля, а  $y = \arcsin x$  — в окрестностях точек  $\pm 1$ .

Не все элементарные функциональные выражения и даже не все элементарные функции удовлетворяют условию Липшица. Таковы, например,  $\sqrt{x}$  и вообще  $x^\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , в окрестности нуля. Помимо степенной функции с показателем, меньшим единицы, условию Липшица на своих областях определения не удовлетворяют ещё две элементарные функции —  $\arcsin$  и  $\arccos$  в окрестностях точек  $\pm 1$ , крайних для их областей определения.

Совершенно аналогично Определению 3.2.1 следующее

**Определение 3.2.2** *Интервальная функция  $\mathbf{f} : \mathbb{IR}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{IR}$  называется непрерывной по Липшицу на  $D$ , если существует вектор-строка констант  $L_{\mathbf{f}} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ , такая что*

$$\text{dist}(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{y})) \leq L_{\mathbf{f}} \cdot \text{Dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

для любых  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$ .

Идея доказательства оценки точности естественного интервального расширения  $\mathbf{f}_{\natural}$  состоит в том, чтобы установить непрерывность по Липшицу в смысле Определения 3.2.2 для интервальной функции  $\mathbf{f}_{\natural}$ . В свою очередь, доказательство липшицевости  $\mathbf{f}_{\natural}$  основывается на том факте, что арифметические операции с липшицевыми функциями приводят снова к липшицевым функциям, а композиция липшицевых функций также непрерывна по Липшицу (Теорема 3.2.1). Определённую осторожность следует проявить лишь в отношении вышеупомянутых элементарных функций —  $x^{\alpha}$  при  $0 < \alpha < 1$ ,  $\arcsin$  и  $\arccos$  у границ их областей определения. Как результат, требуемая оценка точности естественного интервального расширения получится при этом как лёгкое следствие липшицевости интервальной функции  $\mathbf{f}_{\natural}$  (Теорема 3.2.2).

В качестве первого шага по реализации намеченного плана докажем

**Предложение 3.2.1** *Пусть  $\phi$  — элементарная функция из  $\mathcal{EF}$ , имеющая непрерывную и конечную производную на интервале  $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}$ , и  $\phi'$  — выражение для её производной. Тогда оптимальное интервальное расширение  $\phi$  является непрерывной по Липшицу функцией  $\mathbb{IR} \rightarrow \mathbb{IR}$ , и для любых интервалов  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \subseteq \mathbf{X}$  справедлива оценка*

$$\text{dist}(\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})) \leq |\phi'(\mathbf{X})| \cdot \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

где под  $\phi'(\mathbf{X})$  понимается внешняя интервальная оценка области значений  $\phi'$  на  $\mathbf{X}$ . Для интервального расширения  $\text{abs}$  функции модуля  $\|\cdot\|$  справедливо

$$\text{dist}(\text{abs}(\mathbf{x}), \text{abs}(\mathbf{y})) \leq \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

**Доказательство.** Обозначим  $r := \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . Тогда для любых  $\tilde{x} \in \mathbf{x}$  и  $\tilde{y} \in \mathbf{y}$  в силу свойств расстояния между интервалами  $\tilde{x} - \tilde{y} \in [-r, r]$ .

По теореме Лагранжа о среднем значении

$$\phi(\tilde{x}) = \phi(\tilde{y}) + \phi'(u) (\tilde{x} - \tilde{y}), \quad (3.4)$$

где  $u \in \square\{\tilde{x}, \tilde{y}\} \subseteq \mathbf{X}$ . Интервализуем правую часть выписанного равенства, пользуясь включениями  $\tilde{y} \in \mathbf{y}$ ,  $u \in \mathbf{X}$  и  $\tilde{x} - \tilde{y} \in [-r, r]$ . Получаем  $\phi(\tilde{x}) \in \phi(\mathbf{y}) + \phi'(\mathbf{X}) \cdot [-r, r]$  для произвольного  $\tilde{x} \in \mathbf{x}$ . Следовательно,

$$\phi(\mathbf{x}) \subseteq \phi(\mathbf{y}) + |\phi'(\mathbf{X})| \cdot [-r, r], \quad (3.5)$$

где мы заменили для удобства  $\phi'(\mathbf{X})$  на  $|\phi'(\mathbf{X})|$ .

Совершенно аналогичными рассуждениями, отталкиваясь от представления

$$\phi(\tilde{y}) = \phi(\tilde{x}) + \phi'(v) (\tilde{y} - \tilde{x}), \quad (3.6)$$

где  $v \in \square\{\tilde{x}, \tilde{y}\} \subseteq \mathbf{X}$ , можно получить симметричное к (3.5) включение

$$\phi(\mathbf{y}) \subseteq \phi(\mathbf{x}) + |\phi'(\mathbf{X})| \cdot [-r, r]. \quad (3.7)$$

Снова воспользовавшись основным характеристическим свойством расстояния  $\text{dist}$  (см. Предложение 1.9.2, стр. 68), можем заключить, что в самом деле  $\text{dist}(\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})) \leq |\phi'(\mathbf{X})| \cdot \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .

Для функции модуля числа (абсолютной величины) представления (3.4) и (3.6) на основе теоремы Лагранжа о среднем выписать, конечно, нельзя, но включения, аналогичные (3.5) и (3.7), всё-таки будут иметь место.

В самом деле,  $\tilde{x} - \tilde{y} \in [-r, r]$  равносильно  $\tilde{x} \in \tilde{y} + [-r, r]$ , и поэтому

$$|\tilde{x}| \leq |\tilde{y} + [-r, r]| \leq |\tilde{y}| + |[-r, r]| = |\tilde{y}| + r,$$

что влечёт  $|\tilde{x}| - |\tilde{y}| \leq r$  для любых  $\tilde{x} \in \mathbf{x}$  и  $\tilde{y} \in \mathbf{y}$ . Аналогичными рассуждениями получаем  $|\tilde{y}| - |\tilde{x}| \leq r$ , так что в целом  $|\tilde{x}| - |\tilde{y}| \in [-r, r]$ . Это и означает, что  $\text{dist}(\text{abs}(\mathbf{x}), \text{abs}(\mathbf{y})) \leq \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . ■

Доказанный результат важен по той причине, что при вычислении естественного интервального расширения сложных выражений мы берём для элементарных функций именно оптимальное интервальное расширение, пользуясь их известными свойствами.

Рассмотрим теперь другие операции, образующие сложные выражения. Существует простое достаточное условие того, что естественное интервальное расширение элементарного функционального выражения является непрерывным по Липшицу. Для его формулировки нам потребуется следующее техническое

**Определение 3.2.3** *Элементарное функциональное выражение  $f$ , зависящее от  $n$  переменных, называется липшицевым по форме на брус  $\mathbf{X} \in \mathbb{IR}^n$ , если естественное интервальное расширение  $\mathbf{f}_\pm(\mathbf{X})$  определено и для любых подвыражений  $g$  и  $h$  выражения  $f$  выполнены следующие условия:*

*отношение  $g = h^\alpha$  при  $0 < \alpha < 1$  влечёт  $\mathbf{h}_\pm(\mathbf{X}) > 0$ ,*

*отношение  $g = \arcsin h$  влечёт  $|\mathbf{h}_\pm(\mathbf{X})| < 1$ ,*

*отношение  $g = \arccos h$  влечёт  $|\mathbf{h}_\pm(\mathbf{X})| < 1$ .*

Назначение этого определения — выделить из элементарных функциональных выражений такие, в которых липшицевость отдельных «строительных блоков», образующих выражение в целом, не нарушается плохим поведением элементарных функций с особенностями —  $x^\alpha$  при  $0 < \alpha < 1$ ,  $\arcsin x$  и  $\arccos x$  у границ их областей определения. Проверка того, является ли рассматриваемое элементарное функциональное выражение липшицевым по форме или нет, может быть относительно несложно выполнена, к примеру, в процессе вычисления естественного интервального расширения (а иногда даже просто по виду выражения).

**Теорема 3.2.1** *Пусть  $f$  — элементарное функциональное выражение от  $n$  переменных, и оно является липшицевым по форме на некотором брус  $\mathbf{X} \in \mathbb{IR}^n$ . Тогда естественное интервальное расширение  $\mathbf{f}_\pm$  непрерывно по Липшицу на  $\mathbf{IX}$ . Соответствующая векторная константа Липшица может быть вычислена рекуррентно по дереву Канторовича для  $f$  с помощью следующей таблицы:*

Таблица 3.1. Правила рекуррентного вычисления константы Липшица

Подвыражение	Преобразование константы Липшица
$f$ есть константа	нулевая вектор-строка длины $n$
$f = x_i, i = 1, 2, \dots, n$	$i$ -ая строка единичной $n \times n$ -матрицы
$f = g \pm h$	$L_g + L_h$
$f = g \cdot h$	$ g_{\natural}(\mathbf{X})  L_h + L_g  h_{\natural}(\mathbf{X}) $
$f = g/h$	$\frac{L_g +  f_{\natural}(\mathbf{X})  L_h}{\langle h_{\natural}(\mathbf{X}) \rangle}$
$f = g^\alpha, 1 \leq \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha  g_{\natural}(\mathbf{X}) ^{\alpha-1} L_g$
$f = \phi(g), \phi \in \mathcal{EF}$	$L_\phi(g_{\natural}(\mathbf{X})) \cdot L_g$

Поясним, что в последней строке Табл. 3.1 в клетке справа константа Липшица  $L_\phi$  — это число, т. е. скаляр.

**Доказательство.** Оно является конструктивным и показывает, как строится вектор-строка констант Липшица, преобразуясь в узлах дерева Канторовича аналитического выражения для  $f$ .

Если  $f = g \pm h$ , то

$$\begin{aligned}
 \text{dist}(f_{\natural}(\mathbf{x}), f_{\natural}(\mathbf{y})) &= \text{dist}(g_{\natural}(\mathbf{x}) \pm h_{\natural}(\mathbf{x}), g_{\natural}(\mathbf{y}) \pm h_{\natural}(\mathbf{y})) \\
 &\leq \text{dist}(g_{\natural}(\mathbf{x}), g_{\natural}(\mathbf{y})) + \text{dist}(h_{\natural}(\mathbf{x}), h_{\natural}(\mathbf{y})) \\
 &\leq L_g \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + L_h \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\
 &= L_f \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}).
 \end{aligned}$$

Для композиции функций: если  $f = \phi(g)$ ,  $\phi \in \mathcal{EF}$ , то

$$\begin{aligned}
 \text{dist}(f_{\natural}(\mathbf{x}), f_{\natural}(\mathbf{y})) &= \text{dist}(\phi(g_{\natural}(\mathbf{x})), \phi(g_{\natural}(\mathbf{y}))) \\
 &\leq L_\phi(g_{\natural}(\mathbf{X}))
 \end{aligned}$$

Если  $f = g \cdot h$ , то

$$\begin{aligned}
 \text{dist}(\mathbf{f}_{\natural}(\mathbf{x}), \mathbf{f}_{\natural}(\mathbf{y})) &= \text{dist}(\mathbf{g}_{\natural}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}_{\natural}(\mathbf{x}), \mathbf{g}_{\natural}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{h}_{\natural}(\mathbf{y})) \\
 &\leq \text{dist}(\mathbf{g}_{\natural}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}_{\natural}(\mathbf{x}), \mathbf{g}_{\natural}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}_{\natural}(\mathbf{y})) \\
 &\quad + \text{dist}(\mathbf{g}_{\natural}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}_{\natural}(\mathbf{y}), \mathbf{g}_{\natural}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{h}_{\natural}(\mathbf{y})) \\
 &\leq |\mathbf{g}_{\natural}(\mathbf{x})| \text{dist}(\mathbf{h}_{\natural}(\mathbf{x}), \mathbf{h}_{\natural}(\mathbf{y})) + \text{dist}(\mathbf{g}_{\natural}(\mathbf{x}), \mathbf{g}_{\natural}(\mathbf{y})) |\mathbf{h}_{\natural}(\mathbf{y})| \\
 &\leq |\mathbf{g}_{\natural}(\mathbf{X})| L_h \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + L_g \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) |\mathbf{h}_{\natural}(\mathbf{X})| \\
 &\leq L_f \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}).
 \end{aligned}$$

Если  $f = g/h$ , то  $f = g \cdot h^{-1}$ , а потому

$$\begin{aligned}
 L_f &= L_{g \cdot h^{-1}} = |\mathbf{g}_{\natural}(\mathbf{X})| L_{h^{-1}} + |\mathbf{h}_{\natural}^{-1}(\mathbf{X})| L_g \\
 &= |\mathbf{g}_{\natural}(\mathbf{X})| L_h / \langle \mathbf{h}_{\natural}(\mathbf{X}) \rangle
 \end{aligned}$$

■

**Следствие.** Пусть  $f$  — элементарное функциональное выражение от  $n$  переменных, которое является липшицевым по форме на некотором бруске  $\mathbf{X} \in \mathbb{IR}^n$ . Тогда для ширины естественного интервального расширения  $\mathbf{f}_{\natural}$  на любом бруске  $\mathbf{x} \subseteq \mathbf{X}$  справедлива оценка  $\text{rad } \mathbf{f}_{\natural}(\mathbf{x}) \leq L \cdot \text{rad } \mathbf{x}$  с вектор-строкой постоянных  $L$ , не зависящей от  $\mathbf{x}$ .

Подчеркнём ещё раз содержательный смысл результата Теоремы 3.2.1: он позволяет делать вывод об аналитическом свойстве интервальной функции — непрерывности по Липшицу — по результатам вычисления задающего функцию выражения.

**Теорема 3.2.2** Если  $\mathbf{f}_{\natural}$  — естественное интервальное расширение элементарного функционального выражения, определяющего функцию  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , и оно является липшицевым по форме на  $\mathbf{X} \in \mathbb{IR}^n$ , то

$$\text{dist}(\mathbf{f}_{\natural}(\mathbf{x}), \text{ran}(f, \mathbf{x})) \leq C \|\text{wid } \mathbf{x}\| \quad (3.8)$$

для любого бруска  $\mathbf{x} \subseteq \mathbf{X}$ , некоторой константы  $C$ , не зависящей от  $\mathbf{x}$ , и абсолютной векторной нормы  $\|\cdot\|$ .

Этот факт обычно выражают словами «естественное интервальное расширение имеет первый порядок точности».

**Доказательство.** Если  $f$  липшицево по форме на бруске  $\mathbf{X}$ , то в силу Теоремы 3.2.1 естественное интервальное расширение  $\mathbf{f}_{\natural}$  является непрерывной по Липшицу интервальной функцией на  $\mathbb{IX}$ . Тогда для любого  $\mathbf{x} \in \mathbb{IX}$  и произвольной точки  $\tilde{x} \in \mathbf{x}$  имеет место  $\text{dist}(\mathbf{f}_{\natural}(\mathbf{x}), \text{ran}(f, \mathbf{x})) \leq \text{dist}(\mathbf{f}_{\natural}(\mathbf{x}), f(\tilde{x}))$ , коль скоро  $\mathbf{f}_{\natural}(\mathbf{x}) \supseteq \text{ran}(f, \mathbf{x}) \ni f(\tilde{x})$ . Далее

$$\begin{aligned}
 \text{dist}(\mathbf{f}_{\natural}(\mathbf{x}), f(\tilde{x})) &= \text{dist}(\mathbf{f}_{\natural}(\mathbf{x}), \mathbf{f}_{\natural}(\tilde{x})) \\
 &\leq L_{\mathbf{f}_{\natural}} \cdot \text{Dist}(\mathbf{x}, \tilde{x}) \leq L_{\mathbf{f}_{\natural}} \cdot \text{wid } \mathbf{x},
 \end{aligned}$$

откуда с учётом неравенства Коши-Буняковского можно заключить

$$\text{dist}(\mathbf{f}_i(\mathbf{x}), \text{ran}(f, \mathbf{x})) \leq C \|\text{wid } \mathbf{x}\|_2, \quad C = \|L_{\mathbf{f}_i}\|_2,$$

где  $\|\cdot\|_2$  обозначает евклидову норму вектора — корень квадратный из суммы квадратов компонент. Справедливость неравенства (3.8) для произвольной векторной нормы следует из того, что в конечномерном линейном пространстве все нормы эквивалентны друг другу, так что при переходе к другой норме может лишь измениться величина константы  $C$ . ■

Переходя к рассмотрению общих отображений  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , уместно ввести

**Определение 3.2.4** [63] *Для отображения  $F : \mathbb{R}^n \supseteq D_0 \rightarrow \mathbb{R}^m$  матрица  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  называется интервальной матрицей Липшица на  $D \subseteq D_0$ , если для любых  $x, y \in D$  равенство*

$$F(y) - F(x) = A(y - x)$$

*имеет место с некоторой вещественной  $m \times n$ -матрицей  $A \in A$ .*

Понятие интервальной матрицы Липшица применимо как для дифференцируемых, так и для недифференцируемых функций, обобщая понятия внешней интервальной оценки матрицы Якоби и интервального наклона функции.

### 3.3 Центрированные формы интервальных расширений функций

Можно ли достичь более высокого порядка, чем первый, для точности интервального оценивания? Ответ на этот вопрос положителен и будет рассмотрен в этом параграфе.

**Определение 3.3.1** *Будем говорить, что для функции  $f : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$  интервальное расширение  $\mathbf{f}_c(\mathbf{X})$  на  $\mathbf{X} \subseteq D$  имеет центрированную форму с центром  $c$ , если для некоторой вектор-строки  $\mathbf{g}(\mathbf{X}, c) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ , зависящей от  $\mathbf{X}$  и  $c$ , оно представимо в виде*

$$\mathbf{f}_c(\mathbf{X}) := f(c) + \mathbf{g}(\mathbf{X}, c)(\mathbf{X} - c),$$

*или, развёрнуто,*

$$\mathbf{f}_c(\mathbf{X}) := f(c) + \sum_{i=1}^n g_i(\mathbf{X}, c)(X_i - c_i), \quad (3.9)$$

*где  $g_i(\mathbf{X}, c)$  — некоторые интервалы, зависящие от  $\mathbf{X}$  и  $c$ .*

Конструкция центрированной формы является реализацией второй из идей интервального оценивания, изложенных в начале предшествующего параграфа: исходное выражение для функции заменяется линейной формой (3.9), для которой интервальная оценка области значений несложно вычисляется и является точной. Интервал области определения  $\mathbf{X}$  при этом центрируется относительно точки  $c$ , а коэффициенты  $g_i(\mathbf{X}, c)$  могут быть определены, к примеру, следующим способом.

Пусть  $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$  — дифференцируемая функция, заданная на области  $D$  пространства  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{X} \in ID$ ,  $x, c$  — точки из бруса  $\mathbf{X}$ . В силу известной из математического анализа теоремы о среднем [11]

$$f(x) - f(c) = f'(\xi)(x - c),$$

где  $\xi$  — некоторая точка, лежащая на отрезке прямой, который соединяет  $x$  и  $c$ , и

$$f'(\xi) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\xi) \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\xi) \right)$$

— вектор-строка частных производных функции  $f$  в точке  $\xi$ .<sup>2</sup> В частности,  $\xi \in \mathbf{X}$ . Следовательно,

$$f(x) = f(c) + f'(\xi)(x - c),$$

и, беря интервальное расширение правой части этого равенства по  $\xi \in \mathbf{X}$  и  $x \in \mathbf{X}$ , получим

$$f(x) \in f(c) + \mathbf{f}'(\mathbf{X})(\mathbf{X} - c).$$

Здесь под  $\mathbf{f}'(\mathbf{X})$  понимается внешняя интервальная оценка для производной  $f'$  на интервале  $\mathbf{X}$ .

Ясно, что  $\mathbf{f}_{mv}(x) = f(x)$  для любых вещественных  $x$ , и потому выражением

$$\mathbf{f}_{mv}(\mathbf{X}) := f(c) + \mathbf{f}'(\mathbf{X})(\mathbf{X} - c), \quad (3.10)$$

где  $c \in \mathbf{X}$ , задаётся интервальное расширение функции  $f$  на  $\mathbf{X}$ . Фактически, оно имеет вид (3.9), в котором

$$\mathbf{g}_i(\mathbf{X}, c) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{X}), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

и никак не зависят от центра  $c$ .

Является ли интервальная функция  $\mathbf{f}_{mv}(\mathbf{x})$  монотонной по включению? Этот факт не вполне тривиален и составляет содержание следующего результата:

**Теорема 3.3.1** (теорема Капрани-Мадсена) *Если  $c = \text{mid } \mathbf{X}$ , т. е. центр  $c$  берётся серединой интервала  $\mathbf{X}$ , а интервальная оценка производной  $\mathbf{f}'(\mathbf{X})$  монотонна по включению, то выражение  $\mathbf{f}_{mv}(\mathbf{X})$ , задаваемое посредством (3.10), также монотонно по включению:*

$$\mathbf{X} \subseteq \mathbf{Y} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f}_{mv}(\mathbf{X}) \subseteq \mathbf{f}_{mv}(\mathbf{Y}).$$

**Доказательство.** Пусть  $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{IR}^n$  и  $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{Y}$ . Обозначим для краткости  $\check{x} = \text{mid } \mathbf{X}$  и  $\check{y} = \text{mid } \mathbf{Y}$ .

Воспользуемся теоремой Лагранжа о среднем значении для функции  $f$  между точками  $\check{x}$  и  $\check{y}$  и монотонностью интервальной функции  $\mathbf{f}'(\mathbf{X})$  по включению:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{mv}(\mathbf{X}) &= f(\check{x}) + \mathbf{f}'(\mathbf{X})(\mathbf{X} - \check{x}) \\ &= f(\check{y}) + f'(\xi)(\check{x} - \check{y}) + \mathbf{f}'(\mathbf{X})(\mathbf{X} - \check{x}) \\ &\subseteq f(\check{y}) + f'(\xi)(\check{x} - \check{y}) + \mathbf{f}'(\mathbf{Y})(\mathbf{X} - \check{x}) \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Для функций одного переменного этот результат называется «теоремой Лагранжа о среднем значении» или же «теоремой Лагранжа о конечных приращениях».

с некоторой точкой  $\xi$ , которая находится на отрезке, соединяющем  $x$  и  $y$ . Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} |\mathbf{f}_{mv}(\mathbf{X}) - f(\check{y})| &\leq |\mathbf{f}'(\mathbf{Y})| \cdot |\check{x} - \check{y}| + |\mathbf{f}'(\mathbf{Y})| \cdot |\mathbf{X} - \check{x}| \\ &= |\mathbf{f}'(\mathbf{Y})| \cdot (|\check{x} - \check{y}| + \text{rad } \mathbf{X}) \\ &\leq |\mathbf{f}'(\mathbf{Y})| \cdot \text{rad } \mathbf{Y}. \end{aligned}$$

Так как  $f(\check{x})$  — точное и  $\text{mid}(\mathbf{Y} - \check{y}) = 0$ , то имеем

$$\begin{aligned} \text{mid}(\mathbf{f}_{mv}(\mathbf{Y})) &= f(\check{y}) + \text{mid}(\mathbf{f}'(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{y} - \check{y})) = f(\check{y}), \\ \text{rad}(\mathbf{f}_{mv}(\mathbf{Y})) &= \text{rad}(\mathbf{f}'(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{y} - \check{y})) = |\mathbf{f}'(\mathbf{y})| \cdot \text{rad } \mathbf{y}. \end{aligned}$$

Следовательно, объединяя результаты проведённых выкладок, получим

$$|\mathbf{f}_{mv}(\mathbf{x}) - \text{mid } \mathbf{f}_{mv}(\mathbf{y})| \leq \text{rad } \mathbf{f}_{mv}(\mathbf{y}),$$

и потому, привлекая свойство включения

$$\mathbf{a} \subseteq \mathbf{b} \Leftrightarrow |\mathbf{a} - \text{mid } \mathbf{b}| \leq \text{rad } \mathbf{b},$$

можем заключить утверждение теоремы. ■

Мы будем называть выражение  $\mathbf{f}_{mv}(\mathbf{x})$  *дифференциальной центрированной формой* интервального расширения функций. Его часто называют также *среднезначной формой*, имея в виду происхождение от теоремы о среднем значении, но этот термин двусмыслен и хуже отражает суть конструкции.<sup>3</sup>

**Теорема 3.3.2** (теорема Кравчика-Ноймайера)

Пусть  $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$  — вещественнозначная функция,  $\mathbf{X} \in \mathbb{I}D$ ,  $c \in \mathbf{X}$ . Предположим, что  $\mathbf{g} \in \mathbb{I}\mathbb{R}^{1 \times n}$  — такая интервальная вектор-строка, что для любого  $x \in \mathbf{X}$  имеет место

$$f(x) = f(c) + \mathbf{g} \cdot (x - c) \quad \text{с некоторым } \mathbf{g} \in \mathbf{g}. \quad (3.11)$$

Тогда интервал  $f(c) + \mathbf{g} \cdot (\mathbf{X} - c)$  содержит область значений  $\text{ran}(f, \mathbf{X})$  функции  $f$  на  $\mathbf{X}$  и справедлива оценка

$$\text{dist}(f(c) + \mathbf{g} \cdot (\mathbf{X} - c), \text{ran}(f, \mathbf{X})) \leq \text{wid } \mathbf{g} \cdot |\mathbf{X} - c|. \quad (3.12)$$

**Доказательство.** Отметим, что интервальный вектор  $\mathbf{g}$  можно интерпретировать как интервальную оценку вектора «средних скоростей», по отдельным переменным, при изменении функции от  $c$  до  $x$ .

Определим точки  $x_*$ ,  $x^* \in \mathbb{R}^n$  следующим образом:

$$\begin{cases} (x_*)_i = \underline{\mathbf{X}}_i, & (x^*)_i = \overline{\mathbf{X}}_i, & \text{если } \mathbf{g}_i > 0, \\ (x_*)_i = \overline{\mathbf{X}}_i, & (x^*)_i = \underline{\mathbf{X}}_i, & \text{если } \mathbf{g}_i < 0, \\ (x_*)_i = (x^*)_i = c_i, & & \text{если } \mathbf{g}_i \ni 0. \end{cases}$$

<sup>3</sup>«Mean value theorem» по-английски, откуда и происходит нижний индекс  $mv$  в обозначении этой формы.



Ясно, что  $x_*, x^* \in \mathbf{X}$ . Опираясь на значения функции  $f$  в этих точках, мы будем изнутри оценивать всю её область значений на  $\mathbf{X}$ . Компоненты точек  $x_*$  и  $x^*$  специально подобраны так, чтобы учесть характер монотонности «в среднем» функции  $f$  по её отдельным переменным, который может быть определён на основе знания вектора  $\mathbf{g}$ .

Из самого построения точки  $x_*$  следует, что компоненты разности  $(x_* - c)$  либо нулевые, либо противоположны по знакам соответствующим компонентам  $\mathbf{g}$ . Аналогично, из построения точки  $x^*$  следует, что компоненты разности  $(x^* - c)$  либо нулевые, либо совпадают со знаками соответствующих компонент  $\mathbf{g}$ . Ненулевые компоненты разностей  $(x_* - c)$  и  $(x^* - c)$  равны разностям концов интервальных компонент бруса  $\mathbf{X}$  и компонент  $c$ , т. е.  $(\underline{\mathbf{X}} - c)$  или  $(\overline{\mathbf{X}} - c)$ . Поэтому если обозначить посредством  $\langle \mathbf{g} \rangle$  вектор с компонентами  $\langle \mathbf{g}_i \rangle$ , мигнитудами  $\mathbf{g}_i$ , то (3.11) для подходящего  $g_* \in \mathbf{g}$  влечёт справедливость соотношений

$$\begin{aligned} f(x_*) &= f(c) + g_*(x_* - c) = f(c) - |g_*(x_* - c)| \\ &= f(c) - |g_*| |x_* - c| = f(c) - |g_*| |\mathbf{X} - c| \\ &\leq f(c) - \langle \mathbf{g} \rangle |\mathbf{X} - c|, \end{aligned}$$

коль скоро мигнитуда — это минимум модулей точек из интервала. Аналогичными рассуждениями обосновывается неравенство

$$f(x^*) \geq f(c) + \langle \mathbf{g} \rangle |\mathbf{X} - c|.$$

Поэтому в целом

$$\begin{aligned} f(c) + \langle \mathbf{g} \rangle |\mathbf{X} - c| \cdot [-1, 1] &= [f(c) - \langle \mathbf{g} \rangle |\mathbf{X} - c|, f(c) + \langle \mathbf{g} \rangle |\mathbf{X} - c|] \\ &\subseteq [f(x_*), f(x^*)] \subseteq \text{ran}(f, \mathbf{X}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} f(c) + \mathbf{g} \cdot (\mathbf{X} - c) &\subseteq f(c) + |\mathbf{g}(\mathbf{X} - c)| \cdot [-1, 1] \\ &= f(c) + |\mathbf{g}| |\mathbf{X} - c| \cdot [-1, 1] \\ &\subseteq f(c) + (\langle \mathbf{g} \rangle + \text{wid } \mathbf{g}) |\mathbf{X} - c| \cdot [-1, 1] \\ &= f(c) + \langle \mathbf{g} \rangle |\mathbf{X} - c| \cdot [-1, 1] + \text{wid } \mathbf{g} \cdot |\mathbf{X} - c| \cdot [-1, 1] \\ &\subseteq \text{ran}(f, \mathbf{X}) + \text{wid } \mathbf{g} \cdot |\mathbf{X} - c| \cdot [-1, 1]. \end{aligned}$$

С другой стороны, беря для (3.11) интервальное расширение по  $g \in \mathbf{g}$  и  $x \in \mathbf{X}$ , получим включение

$$\text{ran}(f, \mathbf{X}) \subseteq f(c) + \mathbf{g}(\mathbf{X} - c).$$

Теперь неравенство (3.12) вытекает из свойства (1.88) расстояния между интервалами как хаусдорфова расстояния. ■

Произвольные центрированные формы, описываемые Определением 3.3.1, не обязательно монотонны по включению, но если центр  $c$  фиксирован, то монотонность

по включению становится тривиальным следствием определения. Все центрированные формы удовлетворяют оценке точности (3.12), которая может быть вычислена a posteriori, после нахождения внешней оценки области значений функции. Отметим, что если интервальная вектор-строка  $\mathbf{g}$  в (3.11) вычисляется так, что  $\|\text{wid } \mathbf{g}\| \leq C \|\text{wid } \mathbf{X}\|$ , то центрированная форма обеспечивает второй порядок точности оценивания области значений функции. Это имеет место, к примеру, при естественном интервальном расширении производных в дифференциальной центрированной форме (3.10).

Какие центрированные формы существуют помимо дифференциальной?

Пусть  $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$  — вещественнозначная функция от  $n$  переменных. Нередко нам удаётся найти для произвольных значений аргументов  $x, y \in D$  разложение вида

$$f(x) = f(y) + f^\zeta(x, y)(x - y) \quad (3.13)$$

с некоторой функцией  $f^\zeta(\cdot, \cdot) : D \times D \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times n}$ .

**Определение 3.3.2** *Фигурирующая в представлении (3.13) вектор-строка  $f^\zeta(x, y)$  называется наклоном функции  $f$  между точками  $x$  и  $y$ .*

Если разложение (3.13) справедливо для всех  $x$  из некоторой области  $\mathbf{X}$ , а наклон  $f^\zeta(\cdot, \cdot)$  представим в виде некоторого конечного выражения от своих аргументов, то мы можем найти внешнюю оценку области значений функции  $f$  на  $\mathbf{X}$  в виде

$$f(y) + \mathbf{f}^\zeta(\mathbf{X}, y)(\mathbf{X} - y),$$

где  $\mathbf{f}^\zeta(\mathbf{X}, y)$  — какая-то интервальная оценивающая функция для  $f^\zeta(x, y)$  по  $x \in \mathbf{X}$ .

**Определение 3.3.3** *Интервальная функция*

$$\mathbf{f}_{sl}(\mathbf{X}, c) := f(c) + \mathbf{f}^\zeta(\mathbf{X}, c)(\mathbf{X} - c). \quad (3.14)$$

*называется наклонной формой интервального расширения функции  $f$  на  $\mathbf{X}$  с центром в точке  $c$  (нижний индекс «sl» означает «slope»).*

Отметим, что это определение, как и данное выше Определении 3.3.1 для общих центрированных форм, не налагают никаких условий на положение центра — точки  $c$ . Она может даже не принадлежать интервалу  $\mathbf{X}$ , на котором рассматривается интервальное расширение. В случае, когда центр формы лежит на интервале оценивания, оценка точности следует из теоремы Кравчика-Ноймайера:

$$\text{dist}(\mathbf{f}_{sl}(\mathbf{X}, c), \text{ran}(f, \mathbf{X})) \leq \text{wid}(\mathbf{f}^\zeta(\mathbf{X}, x)) |\mathbf{X} - c|.$$

Использование наклонной формы интервальных расширений имеет практический смысл лишь при условии, что мы располагаем эффективными способами вычисления наклонов функций. Один из возможных систематических способов вычисления производных и наклонов, а также их интервальных оценок будет рассмотрен в следующем параграфе. Пока же отметим, что в одномерном случае ( $n = 1$ ) при  $x \neq y$

$$f^\zeta(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}, \quad (3.15)$$

т. е. наклон функции совпадает с её разделённой разностью первого порядка. Таким образом, наклон как функция от  $x$  и  $y$  непрерывен по совокупности своих аргументов при  $x \neq y$ . Если же  $x = y$ , то выражение (3.15) теряет смысл, но мы можем доопределить наклон и в этом случае, постулируя его непрерывность при всех значениях аргументов. Именно, для дифференцируемой функции  $f$  можно положить

$$f^{\sphericalangle}(y, y) = f'(y).$$

**Предложение 3.3.1** Наклон  $f^{\sphericalangle}(x, y)$  не меняется при перестановке точек  $x$  и  $y$ , между которыми он берётся.

Доказательство очевидно.

Для полиномов в стандартном представлении в виде суммы степеней переменной коэффициенты наклона  $f^{\sphericalangle}(x, y)$  как полинома от  $x$  находятся как побочный продукт вычисления значения  $f(y)$  по схеме Горнера. При аналитическом вычислении наклонов полиномов можно опираться на хорошо известную из элементарной алгебры формулу

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1},$$

в также на факт линейности операции взятия наклона. Более точно, для любых функций  $f, g$  и для любых скаляров  $\alpha, \beta$  справедливо

$$(\alpha f + \beta g)^{\sphericalangle} = \alpha f^{\sphericalangle} + \beta g^{\sphericalangle} \quad (3.16)$$

при одинаковых точках, по которым берётся наклон.

Для функций многих переменных наклон не определяется однозначно. Например, для  $f(x_1, x_2) = x_1x_2$  имеем

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) - f(y_1, y_2) &= x_1x_2 - y_1y_2 = x_1x_2 - x_1y_2 + x_1y_2 - y_1y_2 \\ &= y_2(x_1 - y_1) + x_1(x_2 - y_2) = (y_2 \ x_1) \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

так что наклоном  $f^{\sphericalangle}(x, y)$  функции  $f$  между точками  $x = (x_1, x_2)$  и  $y = (y_1, y_2)$  является вектор  $(y_2, x_1)$ . С другой стороны,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) - f(y_1, y_2) &= x_1x_2 - y_1y_2 = x_1x_2 - y_1x_2 + y_1x_2 - y_1y_2 \\ &= x_2(x_1 - y_1) + y_1(x_2 - y_2) = (x_2 \ y_1) \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

и потому вектор  $(x_2, y_1)$  также является наклоном рассматриваемой функции между  $x = (x_1, x_2)$  и  $y = (y_1, y_2)$ , хотя ситуация тут, казалось бы, совершенно симметрична относительно обеих равноправных переменных.

Более того, справедливо

**Предложение 3.3.2** Для функции  $n$  переменных множество наклонов между двумя фиксированными точками есть аффинное пространство<sup>4</sup> размерности  $(n - 1)$ .

<sup>4</sup>Часто используется также равносильный термин *линейное многообразие*.

**Доказательство.** Пусть  $s', s'' \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  — две вектор-строки наклона функции  $f$  между точками  $x$  и  $y$ , так что

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= s' \cdot (x - y), \\ f(x) - f(y) &= s'' \cdot (x - y). \end{aligned}$$

Если  $\lambda$  — произвольное вещественное число, то, домножая эти равенства на  $\lambda$  и  $(1 - \lambda)$  и складывая между собой, получим

$$f(x) - f(y) = (\lambda s' + (1 - \lambda)s'') \cdot (x - y).$$

Получается, что вектор  $\lambda s' + (1 - \lambda)s''$  также является наклоном функции  $f$  между точками  $x$  и  $y$ . ■

Как видим, взятые по отдельности и вне связи друг с другом, компоненты вектора наклона *не характеризуют* свойства функции от нескольких переменных, а реальный «физический» смысл имеет лишь весь вектор наклона целиком. В этом заключается принципиальное отличие наклона от градиента функции, жестко определённого и в самом деле отражающего, хотя бы и локально, свойства функции.

Отображение  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , которое для данной функции  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ставит в соответствие точкам  $x, y \in \mathbb{R}^n$  наклон функции  $f$  между ними, в действительности, является *многозначной функцией* из  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  во множество  $(n - 1)$ -мерных аффинных пространств. Как следствие, прямая интервализация наклона, которая была проделана нами при конструировании наклонной формы интервального расширения (3.14), в многомерном случае невозможна. Создавшееся затруднение можно преодолеть следующим простым способом.

**Определение 3.3.4** *Интервальным наклоном функции  $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$  на бруссе  $\mathbf{X} \in \mathbb{I}D$  относительно точки  $y$  называется интервальный  $n$ -вектор, который будем обозначать  $\mathbf{f}^\angle(\mathbf{X}, y) \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n$  и такой, что для любого  $x \in \mathbf{X}$  существует  $s \in \mathbf{f}^\angle(\mathbf{X}, y)$ , являющийся наклоном функции  $f$  между точками  $x$  и  $y$ .*

Таким образом, интервальный наклон не есть интервальное расширение обычного наклона (корректно определить которое и невозможно), а внешняя интервальная оценка некоторой коллекции всех представителей наклонов функции между точками  $x$  и  $y$ , когда  $x$  пробегает заданный брус  $\mathbf{X}$ . Например, вектор наклона функции  $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$  на бруссе  $([1, 2], [1, 2])^\top$ , взятый относительно точки  $x_1 = x_2 = 0$ , можно с одинаковым успехом взять равным

$$\begin{pmatrix} [1, 2] \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{либо} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ [1, 2] \end{pmatrix}.$$

**Пример 3.3.1** Пусть  $\mathbf{x} = [0, 2]$ , так что  $\text{mid } \mathbf{x} = 1$ . Для многочлена

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 2,$$

рассмотренного выше в Примере 3.1.1, производная и наклон равны соответственно

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 6x + 4, \\ f^\angle(x, y) &= x^2 + xy + y^2 - 3(x + y) + 4. \end{aligned}$$

Так как  $f'(x) = 3(x-1)^2 + 1$ , то легко найти точную область значений производной на рассматриваемом интервале:

$$\text{ran}(f', [0, 2]) = 3([0, 2] - 1)^2 + 1 = 3 \cdot [-1, 1]^2 + 1 = [1, 4].$$

Ниже мы обозначаем её как  $\mathbf{f}'([0, 2])$ . Как следствие, дифференциальная центрированная (среднезначная) форма интервального расширения равна в рассматриваемом случае

относительно центра  $c = 0$

$$\mathbf{f}_{mv}([0, 2]) = f(0) + \mathbf{f}'([0, 2]) \cdot ([0, 2] - 0) = [2, 10],$$

относительно центра  $c = 1$

$$\mathbf{f}_{mv}([0, 2]) = f(1) + \mathbf{f}'([0, 2]) \cdot ([0, 2] - 1) = [0, 8],$$

относительно центра  $c = 2$

$$\mathbf{f}_{mv}([0, 2]) = f(2) + \mathbf{f}'([0, 2]) \cdot ([0, 2] - 2) = [-2, 6].$$

Займёмся теперь вычислением наклонных форм интервальных расширений функции. Поскольку

$$f^\angle(x, 0) = x^2 - 3x + 4 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4},$$

то относительно левого конца интервала оценивания

$$\mathbf{f}^\angle([0, 2], 0) := \text{ran}(f^\angle, [0, 2] \times 0) = ([0, 2] - \frac{3}{2})^2 + \frac{7}{4} = [\frac{7}{4}, 4].$$

Поэтому

$$\mathbf{f}_{sl}([0, 2], 0) = f(0) + \mathbf{f}^\angle([0, 2], 0) \cdot ([0, 2] - 0) = 2 + [\frac{7}{4}, 4] \cdot [0, 2] = [2, 10].$$

Аналогично, относительно середины интервала

$$f^\angle(x, 1) = x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1,$$

$$\mathbf{f}^\angle([0, 2], 1) := \text{ran}(f^\angle, [0, 2] \times 1) = ([0, 2] - 1)^2 + 1 = [1, 2].$$

Поэтому

$$\mathbf{f}_{sl}([0, 2], 1) = f(1) + \mathbf{f}^\angle([0, 2], 1) \cdot ([0, 2] - 1) = 4 + [1, 2] \cdot [-1, 1] = [2, 6].$$

Наконец, относительно правого конца

$$f^\angle(x, 2) = x^2 - x + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4},$$

$$\mathbf{f}^\angle([0, 2], 2) := \text{ran}(f^\angle, [0, 2] \times 2) = ([0, 2] - \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4} = [0, \frac{9}{4}] + \frac{7}{4} = [\frac{7}{4}, 4].$$

Поэтому

$$\mathbf{f}_{sl}([0, 2], 2) = f(2) + \mathbf{f}^\angle([0, 2], 2) \cdot ([0, 2] - 2) = 6 + [\frac{7}{4}, 4] \cdot [-2, 0] = [-2, 6].$$

Итак,

$$\begin{aligned} f_{mv}(\mathbf{x}, \text{mid } \mathbf{x}) &= [0, 8], & f_{sl}(\mathbf{x}, \text{mid } \mathbf{x}) &= [2, 6], \\ f_{mv}(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{x}}) &= [2, 10], & f_{sl}(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{x}}) &= [2, 10], \\ f_{mv}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) &= [-2, 6], & f_{sl}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) &= [-2, 6]. \end{aligned}$$

Точная область значений рассматриваемого многочлена, как было установлено в Примере 3.1.1, равна  $[2, 6]$ . Естественно, что на практике мы, скорее всего, не сможем столь точно оценивать области значений производных и наклонов, и потому получающиеся результаты не будут столь эффектными. Тем не менее, наш пример даёт хорошее представление о сравнительном качестве интервальных оценок, получаемых с помощью центрированных форм. ■

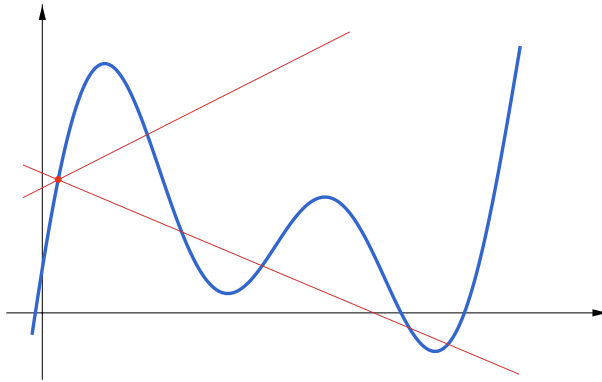


Рис. 3.5. Наглядная иллюстрация взаимоотношения производной и наклона.

Как видим, интервальная внешняя оценка области значений существенно зависит от центра разложения. Но при одном и том же центре, взятом из интервала оценивания, наклонная центрированная форма приводит к более качественным результатам, чем дифференциальная центрированная (среднезначная) форма, поскольку всегда имеет место включение

$$f^{\angle}(\mathbf{x}, c) \subseteq f'(\mathbf{x}).$$

В самом деле, для любого  $x$  в силу теоремы Лагранжа о конечном приращении [11]

$$f(x) - f(c) = f'(\xi)(x - c),$$

где  $\xi$  — некоторая точка из внутренности интервала  $\square\{x, c\}$ . Следовательно,

$$\min_{\xi \in \square\{x, c\}} f'(\xi) \leq \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq \max_{\xi \in \square\{x, c\}} f'(\xi),$$

и потому для любых  $x \in \mathbf{x}$  справедливо

$$f^{\angle}(x, c) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \in \left[ \min_{\xi \in \mathbf{x}} f'(\xi), \max_{\xi \in \mathbf{x}} f'(\xi) \right] = f'(\mathbf{x}). \quad (3.17)$$

При этом ширина интервальной оценки наклона функции равна, в среднем, примерно половине ширины от интервального расширения производной (градиента); см. §1.3.1 в книге [49]. Поэтому ширина внешней оценки при помощи наклонной формы примерно в два раза уже, чем ширина внешней оценки с помощью среднезначной формы.

Ещё одно полезное наблюдение, касающееся Примера 3.3.1, состоит в том, что точная область значений функции, равная  $[2, 6]$ , может быть получена путём пересечения внешних оценок  $f_{sl}(x, \underline{x})$  и  $f_{sl}(x, \bar{x})$ , даваемых наклонными формами относительно двух разных центров. Пересечение различных интервальных результатов для улучшения внешнего оценивания — это общий приём, который можно применять почти всегда, хотя, конечно, нельзя надеяться, что вычисляемые с его помощью интервалы всегда будут давать точную область значений функции. Вместе с теоретическим результатом об оптимальном выборе центров разложений, идея пересечения интервальных оценок служит основой так называемой бицентрированной формы интервального расширения функций, которую мы рассмотрим ниже в §3.5.

## 3.4 Алгоритмическое дифференцирование и вычисление наклонов

*Алгоритмическим дифференцированием* называют методику нахождения численных значений производных для функций, которые заданы некоторыми конечными выражениями или компьютерными программами, которая основана на пошаговом разборе алгоритма их вычисления.<sup>5</sup> В контексте интервального оценивания функций мы вспомнили об алгоритмическом дифференцировании потому, что его можно адаптировать для вычисления интервальных расширений производных и наклонов функций, необходимых при оценивании областей значений функций с помощью центрированных форм (см. предшествующий параграф). Изложим кратко идею алгоритмического дифференцирования.

Пусть  $u = u(x)$  и  $v = v(x)$  — некоторые выражения от переменной  $x$ , из которых далее с помощью сложения, вычитания, умножения или деления конструируется более сложное выражение. Согласно правилам дифференцирования выражений, образованных с помощью элементарных арифметических операций

$$(u + v)' = u' + v', \quad (3.18)$$

$$(u - v)' = u' - v', \quad (3.19)$$

$$(uv)' = u'v + uv', \quad (3.20)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \quad (3.21)$$

Из них следует, что численное значение производной от суммы, разности, произведения и частного функций  $u$  и  $v$  может быть вычислено на основе числовых значений этих функций и их производных.

<sup>5</sup>Для обозначения этого способа дифференцирования часто употребляют также термин *автоматическое дифференцирование*, который менее удачен, но исторически появился первым.

Сделанное наблюдение подсказывает идею ввести на множестве пар вида  $(u, u')$ , которые составлены из значений выражения и его производной, арифметические операции по правилам, следующим из формул (3.18)–(3.21):

$$(u, u') + (v, v') = (u + v, u' + v'), \quad (3.22)$$

$$(u, u') - (v, v') = (u - v, u' - v'), \quad (3.23)$$

$$(u, u') \cdot (v, v') = (uv, u'v + uv'), \quad (3.24)$$

$$\frac{(u, u')}{(v, v')} = \left( \frac{u}{v}, \frac{u'v - uv'}{v^2} \right). \quad (3.25)$$

Первые члены пар преобразуются просто в соответствии с применяемой арифметической операцией, а операции над вторыми членами пар — это в точности копии правил (3.18)–(3.21). Если для заданного выражения мы начнём вычисления по выписанным формулам (3.22)–(3.25), заменив исходную переменную  $x$  на пары  $(x, 1)$ , а константы  $c$  — на пары вида  $(c, 0)$ , то на выходе получим пару, состоящую из численного значения выражения и производной от него в точке  $x$ . Это рассуждение очевидно обобщается на случай, когда функция зависит от нескольких переменных.

Помимо арифметических операций интересующее нас выражение может содержать вхождения каких-то других элементарных функций. Для них в соответствии с формулами дифференциального исчисления можем определить действия над парами вида  $(u, u')$  следующим образом

$$\exp((u, u')) = (\exp u, u' \exp u),$$

$$\ln((u, u')) = (\ln u, u'/u),$$

$$\sin((u, u')) = (\sin u, u' \cos u),$$

$$\cos((u, u')) = (\cos u, -u' \sin u),$$

$$((u, u'))^2 = (u^2, 2uu'),$$

$$((u, u'))^3 = (u^3, 3u^2u')$$

и так далее.

Арифметику пар вида  $(u, u')$  с операциями (3.22)–(3.25) называют *дифференциальной арифметикой*, а основанный на её использовании способ вычисления значений производных носит название *алгоритмического дифференцирования*. Нередко используют также термин «автоматическое дифференцирование». Как дифференциальная арифметика, так и арифметика наклонов, определяемая далее, применимы к разложимым функциям, удовлетворяющим Определению 3.1.7. С точки зрения абстрактной алгебры дифференциальная арифметика представляет собой множество *дуальных чисел* [32], которое, в свою очередь, является простым частным случаем так называемых алгебр Клиффорда, давно известных в абстрактной алгебре.

Предположим теперь, что функции  $u$  и  $v$  зависят от нескольких аргументов. Тогда их производные — градиенты  $\nabla u$  и  $\nabla v$ , являются векторами, а для распространения техники алгоритмического дифференцирования на функции многих переменных



нужно оперировать не парами  $(u, u')$ , а структурами вида  $(u, \nabla u)$ . Дифференциальная арифметика на множестве таких структур должна основываться на правилах оперирования с градиентами:

$$\begin{aligned}\nabla(u + v) &= \nabla u + \nabla v, \\ \nabla(u - v) &= \nabla u - \nabla v, \\ \nabla(uv) &= \nabla u v + u \nabla v, \\ \nabla\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{\nabla u v - u \nabla v}{v^2}.\end{aligned}$$

Для начала работы алгоритмического дифференцирования в листах дерева Канторовича следует назначить переменным  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , значения в виде структур

$$(x_i, (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)),$$

где на втором месте у вектор-строки все элементы — нули за исключением места  $i$ , где стоит единица.

Предположим теперь, что входные аргументы интервальны, так что имеются интервалы значений переменных  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . В выписанных выше формулах эта интервальность по мере выполнения алгоритма проникнет и во вторые элементы структур, над которыми оперирует дифференциальная арифметика. При завершении такого алгоритма мы получим интервальную оценку производной функции.

Выше мы рассмотрели один из возможных способов организации алгоритмического дифференцирования, который называют *прямым режимом*. Его несложно обобщить для вычисления производных более высоких порядков, если оперировать не парами, а тройками  $(u, u', u'')$ , четвёрками  $(u, u', u'', u''')$  и т. д. Существует также *обратный режим* алгоритмического дифференцирования, и в его основе лежат следующие соображения.

Программа, вычисляющая значения выходных переменных  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$  по входным переменным  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  математически эквивалентна композиции функций

$$Y = F_s(F_{s-1}(\dots F_1(X) \dots)),$$

где  $Z_p \leftarrow F_p(Z_{p-1})$  — функции, представляющие промежуточные шаги программы, а  $Z_p$ ,  $p = 1, 2, \dots, s$ , — наборы промежуточных переменных, причём  $Z_0 = X$ ,  $Z_s = Y$ . Поставим задачу о нахождении частных производных  $\partial y_i / \partial x_j$ , иными словами, матрицы якобиана  $\partial Y / \partial X = (\partial y_i / \partial x_j)$  при заданных значениях аргументов функции  $x_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Согласно правилу дифференцирования функций от сложного аргумента, справедливо матричное равенство

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = \frac{\partial F_s}{\partial Z_{s-1}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial F_1}{\partial Z_0}, \quad (3.26)$$

т. е. искомый якобиан равен матричному произведению якобианов промежуточных функций  $F_p$  из композиции, определяющей итоговую функцию. Два возможных способа вычисления правой части формулы (3.26) — справа налево или слева направо,

соответствуют двум различным способам вычисления производных, которые называются *прямым* и *обратным* режимами алгоритмического дифференцирования (по-английски называемые forward mode и reverse modes соответственно).

Выше был рассмотрен прямой режим алгоритмического дифференцирования (при вычислении правой части в (3.26) справа налево), где наряду с исполнением исходного кода программы происходит вычисление производных промежуточных результатов по независимым переменным  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Вычисление производных следует потоку управления исходной программы. Если обозначить  $n$  — число переменных,  $T$  — время исполнения исходной программы,  $M$  — используемую ею память, то сложность выполнения прямого режима равна  $T' = n \cdot T$ , а его объёмная (ёмкостная) сложность составляет  $M' = n \cdot M$ . Плюсы прямого режима состоят в том, что

- его выполнение следует исходному потоку управления и, как следствие, отличается простотой реализации,
- допускает распараллеливание, если исходная программа допускает распараллеливание,
- естественно распространяется на производные второго и более высоких порядков.

Минусом прямого режима является то обстоятельство, что сложность его выполнения и требуемая память растут с числом переменных  $n$ , будучи пропорциональными  $n^k$  для производных  $k$ -го порядка.

В обратном режиме алгоритмического дифференцирования производные выходных переменных  $Y$  вычисляются по вспомогательным промежуточным переменным в обратном порядке и, в конечном итоге, по входным переменным  $X$ . Для реализации алгоритма требуется обращение потока управления исходной программы, а также сохранение (или перевычисление) всех промежуточных значений, влияющих на результат.

Временная сложность обратного режима алгоритмического дифференцирования равна  $T' = t \cdot T$  и не зависит от числа переменных  $n$ . Объёмная (ёмкостная) сложность составляет  $M' = O(N)$ , где  $N$  — число операций исходной программы.

Итак, основное преимущество обратного режима алгоритмического дифференцирования — независимость времени вычислений от числа переменных  $n$ , что особенно ценно при вычислении градиентов функций от большого числа переменных. Недостаток обратного режима заключается в том, что для сохранения вспомогательных значений, переходов и т. п. он требует память, которая в худшем случае пропорциональна числу операций исходной программы.

В вычислительной практике активно используются оба режима алгоритмического дифференцирования. В последнее время много исследований посвящено минимизации требований на память обратного режима алгоритмического дифференцирования. В частности, была предложена так называемая checkpointing scheme [40], где в некоторых случаях хранение промежуточных значений заменяется их перевычислением.

Наряду с различными режимами алгоритмического дифференцирования существуют два основных способа их реализации на компьютере:

- 1) с помощью переопределения операторов (иногда неудачно называемой также «перегрузкой») и

2) с помощью автоматизированного преобразования программ.

Их подробное рассмотрение можно найти в работе

Техника, аналогичная алгоритмическому дифференцированию, может быть применена также для вычисления наклонов функций и их интервальных оценок, что является ключевым этапом построения наклонных центрированных форм для интервальных расширений функций.

Зафиксируем точки  $x$  и  $\tilde{x}$  в области определения функций  $u(x)$  и  $v(x)$ . В общем случае  $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ . Обозначим для краткости посредством  $u, v$  и  $\tilde{u}, \tilde{v}$  значения рассматриваемых функций в этих точках. По определению

$$u - \tilde{u} = u^\zeta(x - \tilde{x}), \quad v - \tilde{v} = v^\zeta(x - \tilde{x}),$$

где  $u^\zeta$  и  $v^\zeta$  — вектор-строки соответствующих наклонов. Тогда

$$\begin{aligned} (u + v) - (\tilde{u} + \tilde{v}) &= (u - \tilde{u}) + (v - \tilde{v}) = u^\zeta(x - \tilde{x}) + v^\zeta(x - \tilde{x}) \\ &= (u^\zeta + v^\zeta)(x - \tilde{x}) = (u + v)^\zeta(x - \tilde{x}) \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} (u - v) - (\tilde{u} - \tilde{v}) &= (u - \tilde{u}) - (v - \tilde{v}) = u^\zeta(x - \tilde{x}) - v^\zeta(x - \tilde{x}) \\ &= (u^\zeta - v^\zeta)(x - \tilde{x}) = (u - v)^\zeta(x - \tilde{x}) \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} uv - \tilde{u}\tilde{v} &= uv - \tilde{u}v + \tilde{u}v - \tilde{u}\tilde{v} \\ &= (u - \tilde{u})v + \tilde{u}(v - \tilde{v}) = u^\zeta(x - \tilde{x})v + \tilde{u}v^\zeta(x - \tilde{x}) \\ &= (u^\zeta v + \tilde{u}v^\zeta)(x - \tilde{x}) = (uv)^\zeta(x - \tilde{x}), \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{u}{v} - \frac{\tilde{u}}{\tilde{v}} &= \frac{u\tilde{v} - \tilde{u}v}{v\tilde{v}} = \frac{u\tilde{v} - \tilde{u}\tilde{v} + \tilde{u}\tilde{v} - \tilde{u}v}{v\tilde{v}} \\ &= \frac{(u - \tilde{u})v - \tilde{u}(v - \tilde{v})}{v\tilde{v}} = \frac{u^\zeta(x - \tilde{x})v - \tilde{u}v^\zeta(x - \tilde{x})}{v\tilde{v}} \\ &= \frac{u^\zeta v - \tilde{u}v^\zeta}{v\tilde{v}}(x - \tilde{x}) = \left(\frac{u}{v}\right)^\zeta(x - \tilde{x}). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Для умножения и деления выписанные выкладки можно провести другим способом, получив несколько другие результаты:

$$\begin{aligned} uv - \tilde{u}\tilde{v} &= uv - u\tilde{v} + u\tilde{v} - \tilde{u}\tilde{v} \\ &= u(v - \tilde{v}) + (u - \tilde{u})\tilde{v} = u^\zeta(x - \tilde{x})\tilde{v} + u\tilde{v}^\zeta(x - \tilde{x}) \\ &= (u^\zeta\tilde{v} + u\tilde{v}^\zeta)(x - \tilde{x}) = (uv)^\zeta(x - \tilde{x}), \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{u}{v} - \frac{\tilde{u}}{\tilde{v}} &= \frac{u\tilde{v} - \tilde{u}v}{v\tilde{v}} = \frac{u\tilde{v} - uv + uv - \tilde{u}v}{v\tilde{v}} \\ &= \frac{(u - \tilde{u})v - u(v - \tilde{v})}{v\tilde{v}} = \frac{u^\zeta(x - \tilde{x})v - uv^\zeta(x - \tilde{x})}{v\tilde{v}} \\ &= \frac{u^\zeta v - uv^\zeta}{v\tilde{v}}(x - \tilde{x}) = \left(\frac{u}{v}\right)^\zeta(x - \tilde{x}). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Таким образом, вычисление наклонов может быть проведено неединственным способом, что, впрочем, не приводит к большим неудобствам.

Арифметика наклонов — это, в отличие от дифференциальной, арифметика упорядоченных троек вида  $(\tilde{u}, u, u^\angle)$ , а не пар (см. [49, 52, 67]). Они образованы двумя значениями функции, между аргументами которых берётся наклон, а также самим значением наклона. Для функций одной переменной это значение является числом, а для функций многих переменных — вектор-строкой.

Расчётные формулы арифметики наклонов, вытекающие из результатов выкладки (3.27)–(3.30), имеют следующий вид

$$(\tilde{u}, u, u^\angle) + (\tilde{v}, v, v^\angle) = (\tilde{u} + \tilde{v}, u + v, u^\angle + v^\angle), \quad (3.33)$$

$$(\tilde{u}, u, u^\angle) - (\tilde{v}, v, v^\angle) = (\tilde{u} - \tilde{v}, u - v, u^\angle - v^\angle), \quad (3.34)$$

$$(\tilde{u}, u, u^\angle) \cdot (\tilde{v}, v, v^\angle) = (\tilde{u}\tilde{v}, uv, u^\angle v + \tilde{u}v^\angle), \quad (3.35)$$

$$(\tilde{u}, u, u^\angle) / (\tilde{v}, v, v^\angle) = \left( \frac{\tilde{u}}{\tilde{v}}, \frac{u}{v}, \frac{u^\angle v - uv^\angle}{v\tilde{v}} \right). \quad (3.36)$$

Расчётные формулы для умножения и деления могут иметь альтернативные варианты, вытекающие из (3.31)–(3.32).

Для запуска алгоритмического вычисления наклонов по описанным выше правилам необходимо задать начальные значения троек вида  $(\tilde{u}, u, u^\angle)$  в листьях дерева Канторовича. Очевидно, первые два члена этих троек должны быть равны значениям аргумента, между которыми берётся наклон, т. е.  $\tilde{x}$  и  $x$ . Третий член можно найти из определения наклона: так как

$$x_i - \tilde{x}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_i - \tilde{x}_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

где в правой части в вектор-строке и вектор-столбце единственные ненулевые элементы стоят на  $i$ -ых местах. Итак, начальной тройкой в листе дерева Канторовича, который соответствует переменной  $x_i$ , должна быть  $(\tilde{x}_i, x_i, (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0))$ .

Как можно найти интервальный наклон функции между двумя точками, одна из которых пробегает какой-то интервал? Именно это нужно для построения наклонной формы интервальных расширений функций. Формулы (3.27)–(3.30) и их альтернативные варианты (3.31)–(3.32) остаются справедливыми даже при замене одного из аргументов  $\tilde{x}$ ,  $x$  на интервал. Начальные тройки тоже нужно взять интервальными по тому аргументу, который изменяется

Что делать с функциями, выражения для которых помимо арифметических операций содержат вхождения других элементарных функций? Например, синуса, косинуса, экспоненты и др.? В точечном случае численное значение наклонов для них

можно находить просто по определению, как разделённую разность между заданными точками.

В работе [73] для нахождения интервальных наклонов в таких случаях предлагается комбинировать арифметику наклонов с оценками наклонов через производные согласно (3.17). С другой стороны, в некоторых случаях можно непосредственно вычислять наклоны элементарных функций, основываясь на знании их поведения в зависимости от изменения аргументов, как это предлагается в работе [51].

Отметим также, что альтернативный подход к конструированию наклонных разложений приводится в книге [26], Глава 7.

### 3.5 Бицентрированные формы

В Примере 3.3.1 наилучшая внешняя оценка для области значений функции — интервал  $[2, 6]$  — получается в результате пересечения интервалов  $f_{sl}(x, \underline{x})$  и  $f_{sl}(x, \overline{x})$ , полученных при разложении относительно разных центров. Разобранный пример приводит к вопросу о том, можно ли выбирать точку разложения (центр) оптимальным образом. Сначала мы ответим на него для дифференциальных центрированных форм интервальных расширений, имеющих вид (3.10) или, развёрнуто,

$$f_{mv}(\mathbf{X}) = f(c) + \sum_{i=1}^n f'_i(\mathbf{X})(\mathbf{X}_i - c_i),$$

где

$$f'_i(\mathbf{X}) := \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{X})$$

— интервальная оценка области значений частной производной функции  $f$  по  $i$ -ой переменной.

Для того, чтобы дать формулировку результата об оптимальности, нам потребуется функция *обрезки*

$$\text{cut} : \mathbb{R} \times \mathbb{IR} \rightarrow \mathbb{R},$$

которая действует следующим образом:

$$\text{cut}(x, \mathbf{x}) := \begin{cases} \underline{x}, & \text{если } x < \underline{x}, \\ x, & \text{если } x \in \mathbf{x}, \\ \overline{x}, & \text{если } x > \overline{x}. \end{cases}$$

Аргументами этой функции являются точка  $x$  вещественной оси и некоторый интервал, а значением — точка этого интервала, ближайшая к  $x$ .

**Теорема 3.5.1** (теорема Бауманна) *Для вещественнозначной функции  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  обозначим*

$$p_i := \text{cut} \left( \frac{\text{mid } f'_i(\mathbf{X})}{\text{rad } f'_i(\mathbf{X})}, [-1, 1] \right),$$

$$(c_*)_i := \text{mid } \mathbf{X}_i - p_i \cdot \text{rad } \mathbf{X}_i, \quad (c^*)_i := \text{mid } \mathbf{X}_i + p_i \cdot \text{rad } \mathbf{X}_i,$$

$i = 1, 2, \dots, n$ . Тогда

$\underline{f}_{mv}(\mathbf{X}, c)$  достигает своего максимума по  $c$  при  $c = c_*$ ,

$\text{rad } \underline{f}_{mv}(\mathbf{X}, c)$  достигает своего минимума по  $c$  при  $c = \text{mid } \mathbf{X}$ ,

$\overline{f}_{mv}(\mathbf{X}, c)$  достигает своего минимума по  $c$  при  $c = c^*$ .

**Доказательство.** Для произвольного вектора  $c = (c_i)$  из бруса  $\mathbf{X}$  справедливо представление для компонент

$$c_i = \text{mid } \mathbf{X}_i - \gamma_i \cdot \text{rad } \mathbf{X}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

с коэффициентами  $\gamma_i$ , удовлетворяющими  $|\gamma_i| \leq 1$ . Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_i - c_i &= (\text{mid } \mathbf{X}_i + [-\text{rad } \mathbf{X}_i, \text{rad } \mathbf{X}_i]) - (\text{mid } \mathbf{X}_i - \gamma_i \cdot \text{rad } \mathbf{X}_i) \\ &= \text{rad } \mathbf{X}_i \cdot [\gamma_i - 1, \gamma_i + 1] \ni 0 \end{aligned}$$

при всех  $i$ . Тогда

$$\begin{aligned} \underline{f}_{mv}(\mathbf{X}, c) &= f(c) + \underline{f}'(\mathbf{X})(\mathbf{X} - c) = f(c) + \sum_i \underline{f}'_i(\mathbf{X})(\mathbf{X}_i - c_i) \\ &= f(c) + \sum_i \underline{f}'_i(\mathbf{X}) \cdot \text{rad } \mathbf{X}_i \cdot [\gamma_i - 1, \gamma_i + 1] \\ &= f(c) + \sum_i \text{rad } \mathbf{X}_i \cdot \min \left\{ \underline{f}'_i(\mathbf{X}) (\gamma_i + 1), \overline{f}'_i(\mathbf{X}) (\gamma_i - 1) \right\} \end{aligned}$$

из определения умножения интервалов, так как  $[\gamma_i - 1, \gamma_i + 1] \ni 0$ . Коль скоро все  $\text{rad } \mathbf{X}_i$  неотрицательны, то для обоснования первого утверждения теоремы остаётся лишь показать, что величины

$$\alpha_i := \min \left\{ \underline{f}'_i(\mathbf{X}) \cdot (\gamma_i + 1), \overline{f}'_i(\mathbf{X}) \cdot (\gamma_i - 1) \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

при условии  $|\gamma_i| \leq 1$  принимают наибольшие значения при  $\gamma_i = p_i$ .

Если  $\underline{f}'_i(\mathbf{X}) \geq 0$ , то  $\alpha_i \leq 0$  с равенством для  $\gamma_i = 1 = p_i$ , а если  $\overline{f}'_i(\mathbf{X}) \leq 0$ , то  $\alpha_i \leq 0$  с равенством для  $\gamma_i = -1 = p_i$ . В остающемся случае  $\underline{f}'_i(\mathbf{X}) < 0 < \overline{f}'_i(\mathbf{X})$  мы имеем

$$p_i = \frac{\text{mid } \underline{f}'_i(\mathbf{X})}{\text{rad } \underline{f}'_i(\mathbf{x})} = \frac{\overline{f}'_i(\mathbf{X}) + \underline{f}'_i(\mathbf{X})}{\overline{f}'_i(\mathbf{X}) - \underline{f}'_i(\mathbf{X})}.$$

Следовательно,  $\gamma_i \leq p_i$  тогда и только тогда, когда

$$(\overline{f}'_i(\mathbf{X}) - \underline{f}'_i(\mathbf{X})) \gamma_i \leq \overline{f}'_i(\mathbf{X}) + \underline{f}'_i(\mathbf{X}),$$

что, в свою очередь, равносильно

$$\overline{f}'_i(\mathbf{X}) (\gamma_i - 1) \leq \underline{f}'_i(\mathbf{X}) (\gamma_i + 1).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \overline{f'_i(\mathbf{X})}(\gamma_i - 1) \leq \overline{f'_i(\mathbf{X})}(p_i - 1) && \text{для } \gamma_i \leq p_i, \\ \alpha_i &= \underline{f'_i(\mathbf{X})}(\gamma_i + 1) \leq \underline{f'_i(\mathbf{X})}(p_i + 1) && \text{для } \gamma_i > p_i.\end{aligned}$$

Наконец, так как  $\alpha_i = \underline{f'_i(\mathbf{X})} \cdot (p_i + 1) = \overline{f'_i(\mathbf{X})} \cdot (p_i - 1)$  для  $\gamma_i = p_i$ , то максимум  $\alpha_i$  действительно достигается при  $\gamma_i = p_i$ . Соответственно,  $\inf \mathbf{f}_{mv}(\mathbf{X}, c)$  принимает максимальное значение при  $c = \text{mid } \mathbf{X} - p \cdot \text{rad } \mathbf{X}$ .

Третье утверждение теоремы следует из первого, если сменить знаки функции, её производных и координат точки  $p$  на противоположные.

Второе утверждение теоремы следует из того, что

$$\begin{aligned}\text{rad } \mathbf{f}_{mv}(\mathbf{X}, c) &= \text{rad} (f(c) + \mathbf{f}'(\mathbf{X})(\mathbf{X} - c)) \\ &= \text{rad} (\mathbf{f}'(\mathbf{X})(\mathbf{x} - c)) \\ &\geq |\mathbf{f}'(\mathbf{X})| \cdot \text{rad} (\mathbf{X} - c) \quad \text{в силу левого неравенства (1.29)} \\ &= |\mathbf{f}'(\mathbf{X})| \cdot \text{rad } \mathbf{X} \\ &= \text{rad } \mathbf{f}_{mv}(\mathbf{X}, \text{mid } \mathbf{X}),\end{aligned}$$

и равенство в этой цепочке выкладок достигается при  $c = \text{mid } \mathbf{X}$ . ■

Тщательный анализ доказательства теоремы Бауманна показывает, что среднезначная (дифференциальная центрированная) форма имеет минимальный радиус для всех центров  $c$  из интервала  $\square\{c_*, c^*\}$ , а не только для единственного центра, равного середине интервала.

Далее, хотя среднезначная форма, взятая относительно середины интервала, имеет наименьший радиус среди всех других среднезначных форм, мы можем получить более узкую оценку области значений, взяв пересечение

$$\mathbf{f}_{bic}(\mathbf{X}) := \mathbf{f}_{mv}(\mathbf{X}, c_*) \cap \mathbf{f}_{mv}(\mathbf{X}, c^*).$$

Еще лучше сразу брать наклоны вместо производных и вычислить наклонные формы относительно точек  $c_*$  и  $c^*$ . Естественно, уточнение достигается ценой дополнительных трудозатрат.

**Определение 3.5.1** Будем называть выражение  $\mathbf{f}_{bic}(\mathbf{X})$  бицентрированной среднезначной формой функции  $f(\mathbf{X})$  на бруссе  $\mathbf{X}$ .

В частном случае, когда  $0 \notin f_i(\mathbf{X})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , и функция  $f(\mathbf{X})$  является монотонной по всем переменным, мы имеем  $p_i \in \{-1, 1\}$ . При этом  $c_*$  и  $c^*$  суть угловые точки бруса  $\mathbf{X}$  и, как легко проверить,

$$\mathbf{f}_{mv}(\mathbf{X}, c_*) \cap \mathbf{f}_{mv}(\mathbf{X}, c^*) = \square\{f(c_*), f(c^*)\} = \text{ran} (f, \mathbf{X}).$$

Таким образом, бицентрированная форма в этом важном частном случае даёт точную область значений, тогда как центрированные формы интервального расширения всё-таки огрубляют результат.

## 3.6 Интервальные методы глобальной оптимизации

Этот параграф посвящён применению интервальных методов оценивания областей значений функций к решению задачи глобальной оптимизации. Эпитет «глобальный» означает в данном контексте, что ищется наилучшее значение целевой функции *на всей* рассматриваемой области, а не только в некоторой её ограниченной части (локально), скажем, в окрестности начального приближения применяемого алгоритма и т. п. При этом целевая функция может иметь весьма общий вид, не удовлетворяя требованиям выпуклости, унимодальности и др., которые нередко накладываются на целевую функцию в задачах оптимизации.

Для простоты будем рассматривать задачу глобальной оптимизации вещественнозначной функции  $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$  на прямоугольном брусе  $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}^n$  с гранями, параллельными координатным осям:

$$\text{найти } \min_{x \in \mathbf{X}} f(x). \quad (3.37)$$

Предполагая, что  $\min f(x)$  достигается, будем обозначать его как  $f^*$  и называть «глобальным минимумом». Требуется найти  $f^*$  численно, т. е. мы хотим построить алгоритм, способный вычислить с любой наперёд заданной точностью приближение  $y^*$  для  $f^*$ , а также его погрешность  $|f^* - y^*|$ .

В случае, когда у нас нет априорной информации о характере глобального поведения целевой функции и структуре её локальных экстремумов, для решения задачи (3.37), по-видимому, неизбежно применение методов, в том или ином виде осуществляющих перебор и сравнение «всех» точек области определения. Это подтверждается и теоретическими результатами о сложности решения соответствующей задачи, которые можно найти в [5, 53, 54]. В частности, теорема Крейнвича-Кирфотта [53] утверждает, что за пределами класса выпуклых функций задача нахождения глобального минимума является труднорешаемой (NP-трудной).

При построении интервальных методов глобальной оптимизации мы будем опираться на знание какого-либо интервального расширения  $\mathbf{f}$  для целевой функции  $f$ . Как было показано ранее в этой главе, конструирование и использование интервальных расширений функций не вызывает больших проблем при использовании для вычислений на компьютере интервальной арифметики, дополненной, возможно, дифференциальной арифметикой и арифметикой наклонов. Эти инструменты позволяют автоматически выполнять все необходимые построения и преобразования, получая при этом гарантированные нижние и верхние границы значений функций. К технике интервальных расширений функций очень близки методы мажоризации, основанные на знании констант Липшица, и методы неравномерных покрытий (см. [7, 9, 10, 25]). Тем не менее, интервальные методы нередко более предпочтительны в силу их большей универсальности: подходящее интервальное расширение функции можно построить почти всегда, и даже тогда, когда функция не удовлетворяет условию Липшица или вообще не является непрерывной.



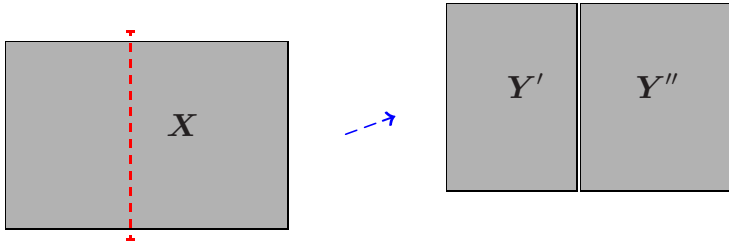


Рис. 3.6. Дробление области определения на два подбруса.

### 3.6а Основная идея

Из теории §§3.1 и 3.3 следует, что, при прочих равных условиях, абсолютная погрешность интервального оценивания области значений функции тем более мала, чем меньше ширина бруса, по которому это оценивание производится (Теорема 3.2.2 и Теорема 3.3.2). Основываясь на этих результатах, мы можем построить простую процедуру для уточнения внешней оценки области значений функций.

Разобьём брус  $\mathbf{X}$  пополам на брусы  $\mathbf{Y}'$  и  $\mathbf{Y}''$  (см. Рис. 3.6а) и затем вычислим для них интервальные оценки областей значений. Новую и более точную оценку искомого минимума можно взять в виде  $\min \{ \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{Y}'), \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{Y}'') \}$

Затем этот приём можно применить ещё раз и ещё, ... столько, сколько нужно для уточнения оценки минимума. Естественно, необходимо оформить этот процесс необходимым образом, чётко прописав алгоритмическую схему, структуры данных и т. п.

Впервые это сделал Р.Е. Мур в книге [57], предложив дробить исходный брус по каждой компоненте на несколько равных частей. Более точно, зафиксируем натуральное число  $N$  и рассмотрим равномерное разбиение каждой компоненты  $\mathbf{X}_i$  исходного бруса  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n)$  на  $N$  подбрусов  $\mathbf{X}_{i,j}$ , т. е. такое что

$$\mathbf{X}_{i,j} := \left[ \underline{\mathbf{X}}_i + \frac{j-1}{N} \cdot \text{wid } \mathbf{X}_i, \underline{\mathbf{X}}_i + \frac{j}{N} \cdot \text{wid } \mathbf{X}_i \right],$$

$i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, N$ . Таким образом, в целом

$$\mathbf{X}_i = \bigcup_{j=1}^N \mathbf{X}_{i,j},$$

и весь исходный брус может быть представлен в виде

$$\mathbf{X} = \bigcup_{j_1=1}^N \bigcup_{j_2=1}^N \dots \bigcup_{j_n=1}^N (\mathbf{X}_{1,j_1}, \mathbf{X}_{2,j_2}, \dots, \mathbf{X}_{n,j_n}),$$

т. е. как объединение  $N^n$  штук подбрусов одинакового размера. Если  $\mathbf{f}$  — интервальное расширение целевой функции  $f$ , то множество

$$\bigcup_{j_1=1}^N \bigcup_{j_2=1}^N \dots \bigcup_{j_n=1}^N \mathbf{f}(\mathbf{X}_{1,j_1}, \mathbf{X}_{2,j_2}, \dots, \mathbf{X}_{n,j_n})$$

содержит область значений функции  $f$  на исходном брусе, но погрешность этой новой оценки будет, вообще говоря, меньше, чем у  $f(\mathbf{X})$ , поскольку диаметры брусков, по которым производится теперь интервальное оценивание, уменьшились.

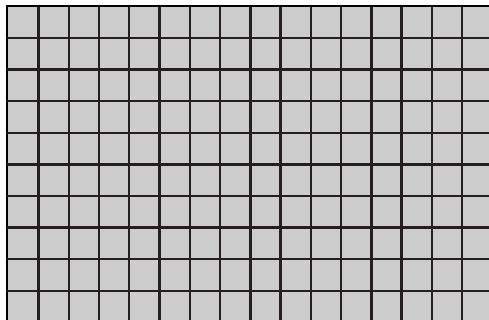


Рис. 3.7. Дробление бруса области определения функции в приёме Мура.

Вышеописанный приём Р.Е. Мура для уточнения оценки области значений функции имеет, скорее, теоретическое значение, так как его трудоёмкость, пропорциональная  $N^n$ , чрезмерно высока для большинства приложений. Вместе с тем, приём Мура может быть радикально усовершенствован за счёт модификации процесса дробления и оценивания в соответствии со стратегией «метода ветвей и границ», хорошо известного в комбинаторной оптимизации. Это приводит к весьма практичным вычислительным алгоритмам.

### 3.6б Общая схема методов

Заметим, что в приёме Мура дробление исходной области определения на подбрусы и следующее затем интервальное оценивание целевой функции по этим подбрусам связаны друг с другом односторонним образом: результаты оценивания уже никак не влияют на дробление. Можно ли ввести в этот процесс «обратную связь» и дробить брус области определения, подстраиваясь под текущие результаты оценивания?

Ответ на этот вопрос положителен, но он подразумевает смену стратегии дробления и оценивания. Для уменьшения общих вычислительных затрат она должна стать такой, чтобы интервальные оценки областей значений вычислялись лишь тогда, когда это действительно необходимо. Вычисления могут быть остановлены в случае достижения «достаточной узости» интервала, оценивающего  $f^*$ . Итак,

- для улучшения оценки области значений функции не нужно дробить все подбрусы исходного бруса  $\mathbf{X}$ , достаточно рассечь лишь те из них, на которых достигаются нижний и верхний концы интервальной оценки области значений функции;
- отсекаемые брусы не обязательно дробить по всем компонентам сразу (что делает высокой цену каждого отдельного шага работы алгоритма), важно лишь,

чтобы размеры получающихся после дробления брусов были меньше размера рассекаемого бруса.

Таблица 3.2. Простейший интервальный адаптивный алгоритм глобальной оптимизации GlobOpt

<p>Вход</p> <p>Интервальное расширение <math>f : \mathbb{I}X \rightarrow \mathbb{IR}</math> целевой функции <math>f</math>. Заданная точность <math>\epsilon &gt; 0</math>.</p>
<p>Выход</p> <p>Оценка <math>y^*</math> глобального минимума <math>f^*</math> функции <math>f</math> на брусе <math>X</math>.</p>
<p>Алгоритм</p> <p><math>Y \leftarrow X</math> ;          вычисляем <math>f(Y)</math> и присваиваем <math>y \leftarrow \underline{f}(Y)</math> ;          инициализируем список <math>\mathcal{L} := \{ (Y, y) \}</math> ;          DO WHILE ( <math>\text{wid}(f(Y)) \geq \epsilon</math> )              выбираем компоненту <math>l</math>, по которой брус <math>Y</math> имеет              наибольшую ширину, т. е. <math>\text{wid } Y_l = \max_i \text{wid } Y_i</math> ;              рассекаем брус <math>Y</math> по <math>l</math>-ой координате пополам              на брусы <math>Y'</math> и <math>Y''</math> такие что              <math>Y' := (Y_1, \dots, Y_{l-1}, [\underline{Y}_l, \text{mid } Y_l], Y_{l+1}, \dots, Y_n)</math>,              <math>Y'' := (Y_1, \dots, Y_{l-1}, [\text{mid } Y_l, \overline{Y}_l], Y_{l+1}, \dots, Y_n)</math> ;              вычисляем <math>f(Y')</math> и <math>f(Y'')</math> ;              присваиваем <math>v' \leftarrow \underline{f}(Y')</math> и <math>v'' \leftarrow \underline{f}(Y'')</math> ;              удаляем запись <math>(Y, y)</math> из списка <math>\mathcal{L}</math> ;              помещаем записи <math>(Y', v')</math> и <math>(Y'', v'')</math> в список <math>\mathcal{L}</math>              в порядке возрастания второго поля ;              обозначаем первую запись списка через <math>(Y, y)</math> ;          END DO  <math>y^* \leftarrow y</math> ;</p>

Переходя к строгим определениям, ограничим себя задачей нахождения  $\min f(x)$ , так как алгоритм вычисления  $\max f(x)$  строится и исследуется совершенно аналогично.

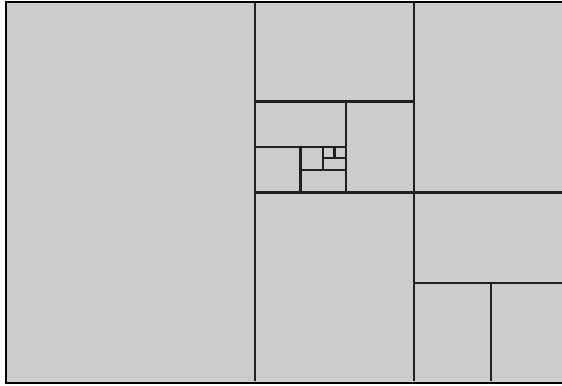


Рис. 3.8. Типичная конфигурация бруса области определения функции в результате её дробления в алгоритме Табл. 3.2.

Представляемый в Табл. 3.2 алгоритм для глобальной минимизации функции (названный нами условно `GlobOpt`) оперирует с *рабочим списком*  $\mathcal{L}$ , в котором будут храниться все брусы, получающиеся в результате дробления исходного бруса области определения на более мелкие подбрусы. Одновременно с самими подбрусами мы будем хранить в рабочем списке и нижние оценки областей значений целевой функции по этим подбрусам, так что элементами списка  $\mathcal{L}$  будут записи-пары вида  $(\mathbf{Y}, y)$ , где  $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{X}$ ,  $y = \underline{f}(\mathbf{Y})$ . Первоначально в рабочий список помещается одна запись  $(\mathbf{X}, \underline{f}(\mathbf{X}))$ , и далее каждый шаг алгоритма состоит в следующем:

извлекаем из этого списка брус, который обеспечивает рекордную (т. е. наименьшую) на данный момент оценку минимума снизу,  
 дробим его на более мелкие подбрусы,  
 оцениваем на них целевую функцию,  
 заносим результаты обратно в рабочий список.

На  $k$ -ом шаге алгоритма рабочий список  $\mathcal{L}$  состоит из  $k$  штук записей-пар вида  $(\mathbf{Y}^{i,k}, y^{i,k})$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , и для удобства обработки мы будем считать записи в  $\mathcal{L}$  упорядоченными по возрастанию значений второго поля, т. е.

$$\mathcal{L} = \{ (\mathbf{Y}^{1,k}, y^{1,k}), \dots, (\mathbf{Y}^{k,k}, y^{k,k}) \},$$

где

$$\mathbf{Y}^{i,k} \subseteq \mathbf{X}, \quad y^{i,k} = \underline{f}(\mathbf{Y}^{i,k}), \quad y^{i,k} \leq y^{j,k} \text{ при } i < j.$$

При этом особую роль в исполнении алгоритма играет первая запись списка  $\mathcal{L}$ , с наименьшим значением второго поля, которую мы называем *ведущей записью*. Брус  $\mathbf{Y}$  из этой записи будет называться *ведущим брусом*, а соответствующая оценка  $y$ , наименьшая в рабочем списке, — *ведущей оценкой* для данного шага алгоритма. Ведущая оценка является наилучшей гарантированной оценкой минимума целевой функции снизу, достигнутой алгоритмом к данному шагу.

### 3.6в Исследование сходимости

**Предложение 3.6.1** Пусть даны брус  $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ , целевая функция  $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$  и её интервальная оценивающая функция  $\mathbf{f} : \mathbb{I}\mathbf{X} \rightarrow \mathbb{I}\mathbb{R}$ . Тогда для всех ведущих брусов  $\mathbf{Y}$  алгоритма `GlobalOpt` имеет место включение  $f^* \in \mathbf{f}(\mathbf{Y})$ .

**Доказательство.** На  $k$ -ом шаге алгоритма

$$\mathbf{X} = \bigcup_{i=1}^k \mathbf{Y}^{i,k},$$

и потому

$$\text{ran}(f, \mathbf{X}) = \bigcup_{i=1}^k \text{ran}(f, \mathbf{Y}^{i,k}) \subseteq \bigcup_{i=1}^k \mathbf{f}(\mathbf{Y}^{i,k}).$$

Беря минимум от обеих частей этого включения и учитывая определение ведущего бруса  $\mathbf{Y}$ , получим  $f^* \geq \underline{\mathbf{f}(\mathbf{Y})}$ . В то же время, для любого  $y \in \mathbf{Y}$  справедливо

$$\overline{\mathbf{f}(\mathbf{Y})} \geq f(y) \geq f^*,$$

откуда действительно следует включение  $f^* \in \mathbf{f}(\mathbf{Y})$ . ■

Как видно из Табл. 3.2, алгоритм `GlobalOpt` останавливается, когда ведущим брусом делается такой брус  $\mathbf{Y}$ , что  $\text{wid } \mathbf{f}(\mathbf{Y}) < \epsilon$ . В этом случае результатом  $y^*$  работы алгоритма является нижняя граница для  $f^*$ , а ширина интервальной оценки целевой функции по последнему ведущему брусу, т.е. последняя достигнутая величина  $\text{wid } \mathbf{f}(\mathbf{Y})$ , может служить верхней границей погрешности  $(f^* - y^*)$ , что следует из доказанного предложения.

**Теорема 3.6.1** В алгоритме `GlobalOpt` суммы ширин компонент ведущих брусов стремятся к нулю.

**Доказательство.** Мы покажем, что последовательность  $\{\vartheta^{(k)}\}$  сумм ширин компонент ведущих брусов мажорируется некоторой последовательностью  $\{\Theta^{(k)}\} \rightarrow 0$ .

Пусть

$\vartheta(\mathbf{Z})$  — сумма ширин компонент бруса  $\mathbf{Z}$ , т.е.  $\vartheta(\mathbf{Z}) = \sum_{i=1}^n \text{wid } \mathbf{Z}_i$ ,

$\mathcal{B}^{(k)}$  — множество всех таких брусов  $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{X}$ , что пара  $(\mathbf{Z}, \mathbf{f}(\mathbf{Z}))$  содержится в рабочем списке  $\mathcal{L}$  с  $k$ -го шага алгоритма и затем становится ведущей парой на шаге с некоторым номером  $\geq k$ .

Нетрудно видеть, что если

$$\Theta^{(k)} := \max\{\vartheta(\mathbf{Z}) \mid \mathbf{Z} \in \mathcal{B}^{(k)}\},$$

то  $\Theta^{(k)} > 0$ , и последовательность  $\{\Theta^{(k)}\}$  является невозрастающей.

Действительно, множество  $\mathcal{B}^{(k+1)}$  содержит все брусы из  $\mathcal{B}^{(k)}$  за исключением бруса  $\tilde{\mathbf{Z}}$ , который был ведущим на  $k$ -м шаге: вместо  $\tilde{\mathbf{Z}}$  множество  $\mathcal{B}^{(k+1)}$  может содержать или не содержать его потомков  $\mathbf{Z}'$  и  $\mathbf{Z}''$ . Поскольку

$$\vartheta(\tilde{\mathbf{Z}}) > \vartheta(\mathbf{Z}') \quad \text{и} \quad \vartheta(\tilde{\mathbf{Z}}) > \vartheta(\mathbf{Z}''),$$

мы можем заключить, что

$$\Theta^{(k)} = \max\{\vartheta(\mathbf{Z}) \mid \mathbf{Z} \in \mathcal{B}^{(k)}\} \geq \max\{\vartheta(\mathbf{Z}) \mid \mathbf{Z} \in \mathcal{B}^{(k+1)}\} = \Theta^{(k+1)} > 0.$$

Чему же равен  $\lim_{k \rightarrow \infty} \Theta^{(k)}$ , предел, который должен существовать в силу хорошо известной из математического анализа теоремы Вейерштрасса?

Если  $\lim \Theta^{(k)} = \zeta > 0$ , то найдётся положительное целое число  $m$ , такое что

$$\frac{2n}{2n-1} \zeta > \Theta^{(k)} \geq \zeta$$

при условии  $k > m$  ( $n$  обозначает размерность), и поэтому

$$\frac{2n}{2n-1} \zeta > \vartheta(\mathbf{Z})$$

для всех  $\mathbf{Z} \in \mathcal{B}^{(k)}$ ,  $k > m$ . Зафиксировав  $\gamma > m$ , рассмотрим какой-нибудь брус  $\mathbf{Z} \in \mathcal{B}^{(\gamma)}$ . Предположим, что наибольший член в сумме  $\vartheta(\mathbf{Z})$  соответствует  $j$ -й компоненте  $\mathbf{Z}$ . По самому определению  $\mathcal{B}^{(\gamma)}$  существует такое положительное целое  $m_{\mathbf{Z}}$ ,  $m_{\mathbf{Z}} > \gamma > m$ , что  $\mathbf{Z}$  сделается ведущим брусом на  $m_{\mathbf{Z}}$ -м шаге алгоритма `GlobalOpt`. Тогда же он будет рассечён по своей  $j$ -й компоненте, а для каждого из потомков  $\mathbf{Z}'$  от  $\mathbf{Z}$  справедлива оценка

$$\vartheta(\mathbf{Z}') \leq \vartheta(\mathbf{Z}) - \vartheta(\mathbf{Z})/2n = \frac{2n-1}{2n} \vartheta(\mathbf{Z}) < \zeta. \quad (3.38)$$

Если обозначить  $M := \max\{m_{\mathbf{Z}} \mid \mathbf{Z} \in \mathcal{B}^{(\gamma)}\}$ , то неравенство (3.38) остаётся верным для всех брусков из множества  $\mathcal{B}^{(M+1)}$ . Но это противоречит допущению о том, что  $\Theta^{(k)} \geq \zeta > 0$ . Следовательно,  $\lim \Theta^{(k)} = 0$ , как и требовалось доказать. ■

**Теорема 3.6.2** Пусть интервальное расширение  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  целевой функции  $f(\mathbf{x})$  удовлетворяет условию

$$\text{wid } \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \text{wid } \mathbf{x} \rightarrow 0, \quad (3.39)$$

а  $\{\mathbf{Y}^k\}_{k=1}^{\infty}$  — последовательности ведущих брусков алгоритма `GlobalOpt`. Тогда последовательность  $\{\mathbf{f}(\mathbf{Y}^k)\}_{k=1}^{\infty}$  сходится к глобальному минимуму  $f^*$ . В частности, последовательность порождаемых алгоритмом `GlobalOpt` ведущих оценок сходится к  $f^*$  снизу.

**Доказательство.** Поскольку  $\text{wid } \mathbf{Y}^k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$  в силу Теоремы 3.6.1, то из условия (3.39) следует  $\text{wid } \mathbf{f}(\mathbf{Y}^k) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Воспользовавшись теперь Предложением 3.6.1, утверждающим, что  $f^* \in \mathbf{f}(\mathbf{Y}^k)$  при всех  $k$ , можем заключить, что и  $\mathbf{f}(\mathbf{Y}^k)$ , и  $\underline{\mathbf{f}}(\mathbf{Y}^k)$  сходятся к глобальному минимуму  $f^*$ . ■

Хотя последовательность ширин ведущих брусов  $\{\text{wid } \mathbf{Y}^k\}_{k=1}^{\infty}$  сходится в алгоритме `GlobOpt` к нулю, сама последовательность ведущих брусов  $\{\mathbf{Y}^k\}_{k=1}^{\infty}$  в общем случае не обязана сходиться. Если целевая функция  $f$  имеет на области определения  $\mathbf{X}$  единственную точку глобального минимума  $x^*$ , то  $\lim \mathbf{Y}^k = x^*$ , но если глобальных минимумов у  $f$  на  $\mathbf{X}$  много, то последовательность  $\{\mathbf{Y}^k\}_{k=1}^{\infty}$  может не иметь предела.

**Теорема 3.6.3** *Если интервальное расширение  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  целевой функции  $f(x)$  удовлетворяет условию*

$$\text{wid } \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \text{wid}(\text{ran}(f, \mathbf{x})) \rightarrow 0 \quad \text{при } \text{wid } \mathbf{x} \rightarrow 0, \quad (3.40)$$

*то последовательность порождаемых алгоритмом `GlobOpt` ведущих оценок сходится к  $f^*$  снизу.*

**Доказательство.** Последовательность  $\{\text{wid } \mathbf{Y}^k\}_{k=1}^{\infty}$  сходится к нулю в силу Теоремы 3.6.1. Следовательно, из условия (3.40) можем заключить, что  $\text{wid } \mathbf{f}(\mathbf{Y}^k) - \text{wid}(\text{ran}(f, \mathbf{Y}^k)) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . В свою очередь, если обозначить через  $\{y_k\}$  последовательность ведущих оценок, то из  $\text{ran}(f, \mathbf{Y}^k) \subseteq \mathbf{f}(\mathbf{Y}^k)$  вытекает, что

$$\underline{\text{ran}(f, \mathbf{Y}^k)} - y_k \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Вместе с соотношением  $y_k \leq f^* \leq \underline{\text{ran}(f, \mathbf{Y}^k)}$  это обосновывает утверждение теоремы. ■

В условиях Теоремы 3.6.3, несмотря на сходимость последовательности ведущих оценок к глобальному оптимуму, последовательность  $\{\mathbf{f}(\mathbf{Y}^k)\}$  к нему может и не сходиться. Дело в том, что в отличие от ситуации, описываемой Теоремой 3.6.2, интервалы  $\mathbf{f}(\mathbf{Y}^k)$  могут содержать скачки целевой функции  $f$ .

### 3.6г Модификации

Представленный выше простейший алгоритм глобальной оптимизации едва ли может быть с успехом применён к решению серьёзных практических задач. Фактически, при уменьшении размеров области, подозрительной на глобальный минимум, основной упор в нём делается на бисекцию, эффект от которой при увеличении размерности становится всё менее и менее ощутимым.

Полезна следующая простая численная прикидка. При рассечении пополам единичного квадрата в  $\mathbb{R}^2$  евклидова норма получающихся половинок уменьшается с  $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$  до  $\sqrt{1^2+(1/2)^2} = \sqrt{5}/4$ , т.е. примерно на 21%. Но в десятимерном пространстве  $\mathbb{R}^{10}$  в результате дробления одной компоненты единичного бруса пополам евклидова норма ширины бруса уменьшается с  $\sqrt{10}$  до  $\sqrt{37}/4$ , т.е. всего на 3.8%. Соизмеримым образом происходит уточнение интервальных оценок областей значений целевой функции от двух и от десяти переменных.

Обычно в методы подобного типа вводят ряд усовершенствований, значительно ускоряющих их сходимость. Как правило, их перечень (не претендующий на полноту) включает в себя следующие модификации (см., в частности, [9, 26, 35, 46, 49, 66]):

- 1) посредством выявления монотонности целевой функции на брусах из списка  $\mathcal{L}$  по тем или иным переменным добиваются уменьшения размерности этих брусов;
- 2) строят более качественное интервальное расширение для целевой функции;
- 3) на основе специфических локальных свойств целевой функции в соответствующих брусах применяют более эффективные, чем бисекция, процедуры минимизации (например, методы градиентного спуска в тех брусах  $\mathbf{Y}$ , где  $f$  гладкая и выпуклая);
- 4) с помощью вычисления значений целевой функции в каких-то точках брусов отслеживают верхнюю границу искомого глобального минимума, что позволяет чистить рабочий список  $\mathcal{L}$  от записей, заведомо не могущих быть ведущими.

Поясним, что имеется в виду в последнем пункте. Обозначим символом  $\square \mathbf{Y}$  операцию взятия какой-то фиксированной точки из  $\mathbf{Y}$  и предположим, что для брусов  $\mathbf{Y}$ , порождаемых алгоритмом `GlobalOpt`, наряду с оцениванием  $\underline{f}(\mathbf{Y})$  мы вычисляем ещё и величины  $f(\square \mathbf{Y})$ . Очевидно, что  $f(\square \mathbf{Y}) \geq \underline{f}(\mathbf{Y})$  и значения  $f(\square \mathbf{Y})$  приближают искомым  $\min_{x \in \mathbf{X}} f(x)$  сверху: если для каждого шага алгоритма мы определим величину

$$\omega = \min f(\square \mathbf{Y}), \quad (3.41)$$

где минимум берётся по всем таким брусам  $\mathbf{Y}$ , что соответствующая пара когда-либо побывала в списке  $\mathcal{L}$  до текущего шага, то всегда

$$\min_{x \in \mathbf{X}} f(x) \leq \omega.$$

Следовательно, пара  $(\mathbf{Y}, \underline{f}(\mathbf{Y}))$ , которая на некотором шаге алгоритма удовлетворяет неравенству

$$\underline{f}(\mathbf{Y}) > \omega \quad (3.42)$$

никогда не станет ведущей и удаление её из списка  $\mathcal{L}$  не окажет никакого влияния на выполнение алгоритма `GlobalOpt`. Посредством условия (3.42) мы должны тестировать все вновь порождаемые пары на каждом шаге алгоритма, но полную чистку списка  $\mathcal{L}$  — просмотр всех его записей и удаление записей, удовлетворяющих (3.42) — имеет смысл делать лишь после того как параметр  $\omega$  изменился (т. е. уменьшился). Описанную выше процедуру проверки областей «на перспективность» будем кратко называть *отбраковкой по значению*.

Идеальным выбором для  $\square \mathbf{Y}$  было бы, конечно,

$$\square \mathbf{Y} \in \text{Arg min } \{ f(x) \mid x \in \mathbf{Y} \}.$$

Но в общем случае такое удачное нахождение  $\square \mathbf{Y}$  является не менее простым чем решение исходной задачи, и потому мы будем брать  $\square \mathbf{Y} = \text{mid } \mathbf{Y}$  для того, чтобы минимизировать возможные отклонения  $\square \mathbf{Y}$  от точек множества  $\text{Arg min } \{ f(x) \mid x \in \mathbf{Y} \}$ .

К сказанному можно добавить, что введение в алгоритм `GlobalOpt` вычислений  $f(\square \mathbf{Y})$  позволяет получить ещё один критерий его остановки. Если  $\mathbf{Y}$  — ведущий брус, то

$$\underline{f}(\mathbf{Y}) \leq \min_{x \in \mathbf{X}} f(x) \leq \omega.$$



Следовательно, останавливая итерации, когда разность  $(\omega - \underline{f}(\mathbf{Y})) \leq \epsilon$  для заданного порога  $\epsilon$ , мы получим точность вычисления глобального минимума не хуже  $\epsilon$ .

### 3.6д Способы обработки списка

В алгоритме Табл. 3.2 мы упорядочивали список  $\mathcal{L}$  по возрастанию оценки  $\Omega(\mathbf{P})$ , так что первая запись списка являлась одновременно и ведущей. Мы следовали в этом С. Скульбоэ [74], Р.Е. Муру с соавторами [35], Х. Рачеку [64] и некоторым другим исследователям. Но существует и конкурирующий подход: в работах Е. Хансена [44, 45, 26] и П.С. Панкова [16, 17, 18], также посвящённых интервальным алгоритмам глобальной оптимизации на основе стратегии «ветвей и границ», список  $\mathcal{L}$  вообще никак не структурируется, т. е. он реализуется в виде так называемой «кучи» [3].

Весьма сложно сравнивать два этих возможных способа организации рабочего списка  $\mathcal{L}$ . С одной стороны, совсем нетрудно добавить дополнительную запись к неупорядоченному списку, но зато, чтобы найти в нём ведущую запись, требуется просмотреть весь список целиком. В то же время, простота обращения к ведущей записи упорядоченного списка достигается ценой определённых затрат на каждом шаге алгоритма, необходимых для поддержания этой упорядоченности: мы должны всё равно просматривать список  $\mathcal{L}$  хотя бы частично. Кроме того, дополнив алгоритм процедурой чистки списка  $\mathcal{L}$  от бесперспективных записей, мы вновь сталкиваемся с необходимостью просмотра всего  $\mathcal{L}$  (хотя и не на каждом шаге).

Тем не менее, просматривать *весь* неупорядоченный список  $\mathcal{L}$  приходится на всех без исключения шагах алгоритма вне зависимости от хода его выполнения. Если же список  $\mathcal{L}$  упорядочен, то при занесении в него записей-потомков в худшем случае его нужно просмотреть целиком, в лучшем он вообще не нуждается в просмотре, а в среднем на каждом шаге мы должны будем просматривать список  $\mathcal{L}$  всё-таки не весь, т. е. в меньшей мере, чем для неупорядоченного варианта. Этим и объясняется наш выбор упорядоченного  $\mathcal{L}$ .

Некоторое ускорение обработки списка  $\mathcal{L}$  может быть достигнуто с помощью следующего приёма, предложенного П.С. Панковым [17]. В его основе — задание и корректировка по текущим нижней и верхней оценкам глобального минимума,  $\Omega(\mathbf{Q})$  и  $\omega$ , соответственно, вспомогательной «пороговой константы»  $\gamma$ , такой что

$$\Omega(\mathbf{Q}) < \gamma < \omega,$$

и «подсписка активных записей»

$$\mathcal{L}_\gamma = \{ (\mathbf{P}, \Omega(\mathbf{P})) \in \mathcal{L} \mid \Omega(\mathbf{P}) < \gamma \} \subseteq \mathcal{L}.$$

В случае неупорядоченного  $\mathcal{L}$  (кучи записей) ясно, что именно в  $\mathcal{L}_\gamma$  (при  $\mathcal{L}_\gamma \neq \emptyset$ ) находится ведущая запись всего  $\mathcal{L}$ , и потому при её поиске нам достаточно, сэкономив машинное время, ограничиться лишь просмотром  $\mathcal{L}_\gamma$ . Если же мы придерживаемся варианта упорядоченного рабочего списка  $\mathcal{L}$ , то по аналогичным причинам эту упорядоченность достаточно поддерживать только в  $\mathcal{L}_\gamma$ , организовав дополнение  $\mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_\gamma$  в виде кучи. В процессе работы алгоритма подмножество  $\mathcal{L}_\gamma$  не возрастает, и если на некотором шаге оно сделается пустым, то тогда же перевычисляется пороговая константа  $\gamma$ , и из  $\mathcal{L}$  заново выделяется  $\mathcal{L}_\gamma$ .

Совершенно строгих рецептов по выбору величины  $\gamma$  дать, по-видимому, невозможно. С одной стороны, с уменьшением  $\gamma$  уменьшается и  $\mathcal{L}_\gamma$ , и тем большим должен быть наш выигрыш в трудоёмкости на каждом отдельном шаге алгоритма. С другой стороны, если  $\gamma$  слишком мало, то подвыбор  $\mathcal{L}_\gamma$  быстро исчерпывается, и мы вынуждены часто перевычислять  $\gamma$  и перестраивать  $\mathcal{L}$ . Руководствуясь отчасти эмпирическими, а отчасти эвристическими соображениями можно, к примеру, взять  $\gamma = \frac{1}{3}(\omega + 2\Omega(Q))$ .

Отметим также, что, будучи реализованным, приём П.С.Панкова не позволяет производить «чистку» всего списка  $\mathcal{L}$  от бесперспективных записей в промежутках между перевычислениями «пороговой константы»  $\gamma$ , так что определённый выигрыш в быстродействии достигается им ценой дополнительной оперативной памяти.

### 3.6e Способ дробления

В рассмотренных выше интервальных алгоритмах глобальной оптимизации мы дробили брус по самой длинной компоненте. Но этот способ дробления, обеспечивая сходимость размеров ведущих брусов к нулю, может быть не самым выгодным с точки зрения скорости улучшения оценок искомого оптимума. В самом деле, если вдоль рассекаемой грани целевая функция изменяется слабо, то и дробление этой грани не приведёт к улучшению искомой оценки оптимума.

Более выгодным выбором рассекаемой грани может быть такой, при котором учитывается скорость изменения функции, и мы стремимся максимизировать произведение

$$\left| \frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial x_i} \right| \cdot \text{wid } \mathbf{X}_i \quad (3.43)$$

ширины компоненты бруса на модуль интервальной оценки частной производной целевой функции вдоль этого координатного направления. Тогда в силу формулы конечных приращений оценка сверху для изменения целевой функции на бруске будет уменьшена наиболее сильно. Вычислительный опыт работы с интервальными алгоритмами глобальной оптимизации подтверждает этот вывод и эффективность выбора компоненты дробления, которая максимизирует (3.43).

## 3.7 Интервальные методы дробления графика

В этом параграфе мы продолжим исследование задачи глобальной оптимизации вещественнозначной функции  $f : \mathbb{R}^n \supseteq \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$  на прямоугольном бруске  $\mathbf{X}$  с гранями, параллельными координатным осям:

$$\text{найти } \min_{x \in \mathbf{X}} f(x). \quad (3.44)$$

Выше мы рассмотрели различные интервальные методы решения этой задачи, которые позволяют надёжно находить гарантированные двусторонние границы для величины оптимума. Основой этих методов является адаптивное, в соответствии со стратегией «ветвей и границ», дробление области определения минимизируемой функции

и интервальное оценивание областей значений по получающимся подобластям. Цель настоящего параграфа — представить другой перспективный интервальный подход к решению задачи (3.44), основанный на совместном адаптивном дроблении как области определения функции, так и области её значений.

Известно, что любая функция  $f : \mathbb{R}^n \supseteq \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$ , будучи, по определению, некоторым специальным подмножеством декартова произведения  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ , является  $(n+1)$ -мерным объектом. Обычно его называют *графиком* функции  $f$ ,

$$\text{graph } f = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in \mathbf{X} \subset \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}, y = f(x) \}.$$

Но рассмотренные ранее в этой главе интервальные методы глобальной оптимизации осуществляют активные действия — адаптивное дробление — лишь в отношении первых  $n$  координат этого множества. Последняя  $(n+1)$ -я координата функции, представленной своим графиком, обрабатывается существенно иначе, пассивно, и то же самое верно и для подавляющего большинства классических методов оптимизации.

Как можно исправить эту ситуацию и что при этом получится?

### 3.7а Оптимизация функций одной переменной

Начнём с простейшего случая и на интервале  $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}$  рассмотрим функцию одной переменной  $y = f(x)$ , т.е.  $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$ , для которой требуется решить задачу минимизации (3.44).

Пусть  $l$  — вещественное число, не превосходящее максимум функции  $f(x)$  на  $\mathbf{X}$ , т.е. такое, что на интервале  $\mathbf{X}$  существует точка  $\tilde{x}$ , в которой значение функции больше или равно  $l$ :

$$f(\tilde{x}) \geq l \quad \text{для некоторого } \tilde{x} \in \mathbf{X}.$$

Предположим также, что в плоскости  $0xy$  задана прямая, параллельная первой координатной оси и имеющая уравнение  $y = l$ . Мы можем узнать, пересекает ли график функции  $y = f(x)$  эту прямую, решив на  $\mathbf{X}$  уравнение

$$f(x) - l = 0 \tag{3.45}$$

или же убедившись в его несовместности. Более точно, достаточно просто выяснить, имеет ли уравнение решения или нет. Как нетрудно понять, ответ на этот вопрос в случае непрерывной функции  $f(x)$  даёт нам информацию об искомом минимуме (3.44): если прямая  $y = l$  пересекает график функции  $y = f(x)$ , то

$$\min_{x \in \mathbf{X}} f(x) \leq l.$$

Иначе  $\min_{x \in \mathbf{X}} f(x) > l$ .

Более того, для произвольной функции  $f(x)$  на  $\mathbf{X}$  справедливо

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbf{X}} f(x) &= \min \left\{ l \in \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{прямая } y = l \text{ пересекает} \\ \text{график функции } y = f(x) \end{array} \right\} \\ &= \min \{ l \in \mathbb{R} \mid \text{уравнение } f(x) - l = 0 \text{ совместно} \}. \end{aligned}$$

Следовательно, варьируя величину «уровня»  $l$  и повторяя процесс решения уравнения (3.45), мы можем уточнять оценку для искомого минимума (3.44). Например, удобно организовать этот процесс как бисекцию (половинное деление) какого-то исходного интервала, который даёт двусторонние оценки для уровня минимума.

Вместо решения уравнений вида  $f(x) = l$  можно использовать для нахождения минимума решение неравенств вида  $f(x) \leq l$ , так как для произвольной функции  $f(x)$  на  $\mathbf{X}$  справедливо

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbf{X}} f(x) &= \min \left\{ l \in \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{полуплоскость } y \leq l \text{ пересекает} \\ \text{график функции } y = f(x) \end{array} \right\} \\ &= \min \{ l \in \mathbb{R} \mid \text{неравенство } f(x) - l \leq 0 \text{ совместно} \}. \end{aligned}$$

Решение неравенств — исследование их совместности или несовместности — нередко бывает более удобным, чем уравнений.

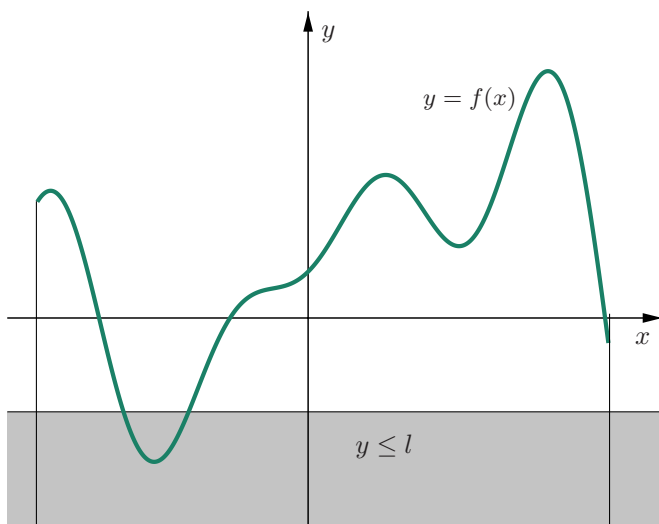


Рис. 3.9. Пересекает ли полуплоскость график функции?...

Описанную выше процедуру можно существенно модифицировать с помощью идей и методов интервального анализа.

Во-первых, интервальные методы позволяют легко найти для области значений  $f$  на  $\mathbf{X}$  грубые оценки сверху и снизу, которые нужны для определения границ варьирования величины «уровня»  $l$  в процессе уточнения минимума.

Во-вторых, имеет смысл исследовать пересечение графика функции  $y = f(x)$  не с одиночными прямыми, а с целыми пучками прямых, параллельных оси  $0x$  и задаваемых уравнениями  $y = l$ , где  $l$  — интервал в  $\mathbb{R}$ . Тем самым мы сможем оценивать

искомый глобальный минимум (3.44) как сверху, так и снизу:

$$\min_{x \in X} f(x) \text{ больше или равен минимуму левых концов и меньше или равен минимуму правых концов всех таких интервалов } \mathbf{l}, \text{ что пучок } y = \mathbf{l} \text{ пересекается с графиком функции } y = f(x). \quad (3.46)$$

В-третьих, интервальные методы решения уравнений (интервальный метод Ньютона, его модификации и др.; см. Главу 9 нашей книги) позволяют при минимальных требованиях на гладкость функции  $f$  в общем случае более эффективно исследовать вопрос о разрешимости как вещественного уравнения (3.45), так и интервального уравнения  $f(x) - \mathbf{l} = 0$ . Разрешимость (совместность) интервального уравнения понимается здесь, как существование некоторого  $l \in \mathbf{l}$ , для которого совместно (3.45).

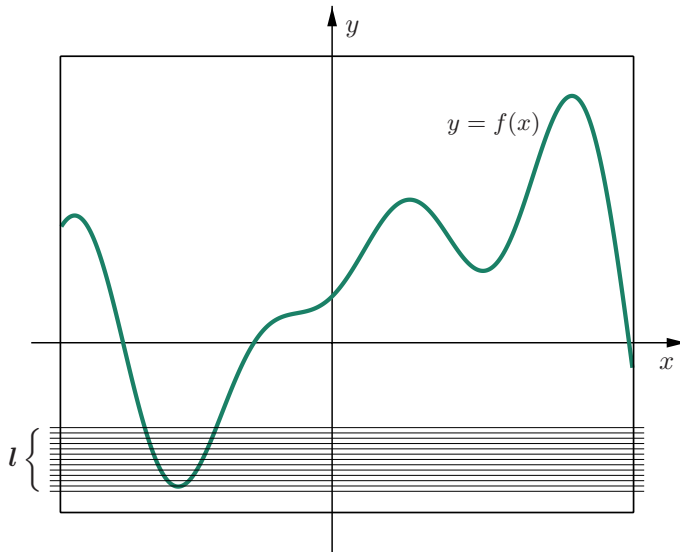


Рис. 3.10. Пересекает ли пучок прямых график функции?...

Ответ, выдаваемый интервальными методами решения уравнений, может иметь одну из следующих форм:

- 1) Уравнение не имеет решений, т. е. *несовместно* на рассматриваемом интервале.
- 2) Уравнение гарантированно имеет решения на рассматриваемом интервале. В этом случае будем говорить, что уравнение *совместно*.
- 3) Применение решающей процедуры не позволяет определённо судить о том, есть ли на рассматриваемом интервале корни уравнения или нет. В этом случае будем говорить, что уравнение *возможно совместно*.

Третий исход является самым неблагоприятным с точки зрения конструируемой нами процедуры уточнения искомого глобального минимума  $\min_X f(x)$ , но в своих построениях нам всё же следует аккуратно принимать во внимание неопределённость

подобного сорта: она весьма часто имеет место в случае наличия у уравнения (3.45) кратных корней. Важно заметить, что интервальные методы никогда не «теряют» корней и в принципе не могут выдавать сообщение о несовместности уравнения, если оно имеет корни.

Наконец, вместо не вполне строгого «варьирования уровня»  $l$  мы будем применять дробление интервала области значений. Начнём с какого-нибудь широкого интервала, который гарантированно содержит область значений функции, а затем начнём дробить его на половинки, исследуя, пересекают ли получающиеся «полосы» график функции  $y = f(x)$  (см. Рис. 3.10). В целом, интервальная версия процедуры уточнения глобального минимума одномерной функции  $f(x)$  на интервале  $\mathbf{X}$  может выглядеть следующим образом. Сначала мы находим грубую внешнюю интервальную оценку  $\mathbf{Y}$  области значений функции  $f(x)$  на  $\mathbf{X}$  (например, как естественное интервальное расширение  $f$  на  $\mathbf{X}$ ). Далее

рассекаем интервал  $\mathbf{Y}$  на подинтервалы  $\mathbf{Y}' := [\underline{\mathbf{Y}}, \text{mid } \mathbf{Y}]$  и  $\mathbf{Y}'' := [\text{mid } \mathbf{Y}, \overline{\mathbf{Y}}]$ ;

проверяем совместность интервальных уравнений  $f(x) - \mathbf{Y}' = 0$  и  $f(x) - \mathbf{Y}'' = 0$ :

- если какое-либо из этих уравнений несовместно, то отбрасываем соответствующий интервал и больше не рассматриваем его;
- совместность или возможная совместность уравнения означает, что нижняя и/или верхняя оценки глобального минимума могут быть скорректированы в соответствии с рецептом (3.46).

Процедуру улучшения оценки для минимума (3.44) посредством дробления интервала области значений  $\mathbf{Y}$  можно повторить по отношению к его потомкам  $\mathbf{Y}'$  и  $\mathbf{Y}''$ , затем снова разбить потомков от  $\mathbf{Y}'$  и  $\mathbf{Y}''$  и снова повторить уточнение и т. д. до тех пор, пока вычисленные верхняя и нижняя границы минимума не окажутся достаточно близкими друг к другу. Отметим, что в этом процессе мы должны сохранять все подинтервалы области значений  $\mathbf{y}$  исходного интервала  $\mathbf{Y}$ , для которых соответствующие уравнения  $f(x) - \mathbf{y} = 0$  совместны или возможно совместны, так как даже в случае возможной совместности они могут соответствовать пучкам прямых, имеющим непустое пересечение с графиком целевой функции (см. Рис. 3.10).

Отметим, что вместо решения уравнений (3.45) мы можем решать неравенство

$$f(x) - l \leq 0.$$

Информация о его совместности (существовании решений) или несовместности (отсутствии решений) также может служить основой для уточнения оценки минимума функции. Решение неравенств нередко является более удобным, чем уравнений. Именно в таком виде методы дробления графика применяются в работах [30, 31].

### 3.76 Оптимизация функций нескольких переменных

Вычислительная схема алгоритма одномерной глобальной оптимизации, развитая в предыдущем разделе, вполне применима к функциям нескольких переменных, т. е. когда  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  и

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Теперь мы лишь должны уметь устанавливать факт пересечения или непересечения графика функции  $y = f(x)$  с гиперплоскостью  $y = l$  или с полупространством  $y \leq l$ . Иными словами, нам нужно уметь исследовать совместность уравнений  $f(x) = l$  или неравенств  $f(x) \leq l$ . Это действительно может быть сделано, например, если мы имеем в своём распоряжении какую-либо процедуру для выяснения разрешимости уравнений или неравенств с несколькими неизвестными переменными и способны легко применять её. В частности, так сделано в работе [30] для решения важной задачи максимизации распознающего функционала допускового множества решений.

Но во многих случаях практическая реализация этой идеи сталкивается с большими трудностями. Дело в том, что в общем случае решение уравнения или неравенства с несколькими неизвестными — выяснение его совместности или несовместности — является не более лёгкой задачей, чем глобальная оптимизация. Теперь, в отличие от одномерной ситуации, мы уже не располагаем для её решения простыми и эффективными подходами, как традиционными точечными, так и интервальными. Выход из создавшегося затруднения может состоять в том, что мы всё-таки будем подвергать дроблению область определения функции — брус  $\mathbf{X}$  — по некоторым (но не по всем!) избранным координатным направлениям, количество и конкретный выбор которых зависят от решаемой задачи и её целевой функции.

Координатные направления, по которым область определения не будет дробиться, мы назовём *немыми* и рассмотрим сначала простейшие методы, в которых выделено всего лишь одно немое направление с номером  $\mu \in \{1, 2, \dots, n\}$ . В пространстве  $\mathbb{R}^{n+1}$ , где находится график целевой функции, рассмотрим прямую, параллельную  $\mu$ -ой координатной оси, и имеющую параметрическое уравнение

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = r_1, \\ \vdots \\ x_{\mu-1} = r_{\mu-1}, \\ x_\mu = t, \\ x_{\mu+1} = r_{\mu+1}, \\ \vdots \\ x_n = r_n, \\ y = l, \end{array} \right. \quad (3.47)$$

где  $t$  — параметр, пробегающий всю числовую ось, а  $r_1, \dots, r_{\mu-1}, r_{\mu+1}, \dots, r_n, l$  — некоторые константы, причём  $l$  не превосходит максимума  $f(x)$  на  $\mathbf{X}$ . Аналогично одномерному случаю, для произвольных функций  $f$  справедливо

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbf{X}} f(x) &= \min \left\{ l \in \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{прямая (3.47) пересекает график} \\ \text{функции } y = f(x) \text{ для некоторых} \\ \text{значений } r_1, \dots, r_{\mu-1}, r_{\mu+1}, \dots, r_n \end{array} \right\} \\ &= \min \left\{ l \in \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{уравнение } f(r_1, \dots, r_{\mu-1}, t, r_{\mu+1}, \dots, r_n) - l = 0 \\ \text{имеет решения по } t \text{ для некоторых } r_1, \dots, r_n \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Следовательно, мы будем способны «нащупывать» график минимизируемой функции одномерными прямыми и уточнять на основе полученной информации значение

глобального минимума. Для проверки совместности элементарных уравнений вида

$$f(r_1, \dots, r_{\mu-1}, t, r_{\mu+1}, \dots, r_n) - l = 0$$

с неизвестным  $t$  можно применять разнообразные методы решения уравнений одной переменной, аналогично тому, как было сделано в §3.7а. В частности, для этой цели хорошо подойдут интервальный метод Ньютона и его модификации, см. Главу 8. Но вот организация процедуры уточнения глобального минимума, которая опиралась бы на представление (3.48), в обычном неинтервальном варианте затруднительна.

Обращаясь к построению интервальной оптимизационной процедуры, обозначим для удобства

$$\mathbf{Z} = (\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_n) := (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{\mu-1}, \mathbf{X}_{\mu+1}, \dots, \mathbf{X}_n, \mathbf{Y}), \quad (3.49)$$

$$\phi(\mathbf{Z}, t) := f(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{\mu-1}, t, \mathbf{X}_{\mu+1}, \dots, \mathbf{X}_n) - \mathbf{Y}. \quad (3.50)$$

Здесь  $n$ -мерные брусы  $\mathbf{Z}$  — это пучки отрезков прямых, параллельных  $\mu$ -ой координатной оси и «нащупывающих» график функции  $y = f(x)$ , тогда как результат пересечения или непересечения пучка с графиком будет определяться из решения относительно  $t$  одномерного интервального уравнения

$$\phi(\mathbf{Z}, t) = 0,$$

в котором брус  $\mathbf{Z}'$  задаёт интервальные параметры уравнения. Хранение всех пересекающих график функции бруссов является залогом того, что мы не упустим искомый глобальный минимум.

В целом мы оформим процесс последовательного улучшения оценок глобального минимума (3.44) аналогично тому, как это делается в «методе ветвей и границ», из комбинаторной оптимизации и как это было адаптировано для рассмотренных ранее интервальных методов глобальной оптимизации:

- организуем все брусы, которые возникают в процессе дробления ; исходного бруса  $\mathbf{Z}$ , в некоторый *рабочий список*  $\mathcal{L}$
- дроблению каждый раз будем подвергать лишь тот брус из списка  $\mathcal{L}$ , который имеет наименьший левый конец последней компоненты, т. е. доставляет рекордную гарантированную оценку снизу для искомого глобального минимума;
- в подвергаемом дроблению брусе будем делить пополам лишь самую широкую компоненту.

Кроме того, брусы вида (3.49), из которых составлен список  $\mathcal{L}$ , будут упорядочены по возрастанию левого конца последней  $n$ -ой компоненты (представляющей область значений функции), а первую запись списка мы будем называть *ведущей* на данном шаге. Полный псевдокод получающегося нового алгоритма, который мы назовём *методом дробления графика*, представлен в Табл. 3.3.

На его вход подаются

брус  $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^n$  и целевая функция  $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  
точность  $\epsilon > 0$ ,



Таблица 3.3. Простейший интервальный алгоритм дробления графика для глобальной оптимизации функций (одна немая координата)

```

вычисляем внешнюю оценку  $\mathbf{Y}$  области значений  $f$  на  $\mathbf{X}$ ;
присваиваем  $\mathbf{Z} \leftarrow (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{\mu-1}, \mathbf{X}_{\mu+1}, \dots, \mathbf{X}_n, \mathbf{Y})$ ;
присваиваем  $z \leftarrow \underline{\mathbf{Y}}$  и  $\bar{y} \leftarrow \overline{\mathbf{Y}}$ ;
инициализируем рабочий список  $\mathcal{L} := \{(\mathbf{Z}, z)\}$ ;
DO WHILE ( $\bar{y} - z \geq \epsilon$ )
    выбираем компоненту  $k$ , по которой брус  $\mathbf{Z}$  имеет
        наибольшую ширину, т. е.  $\text{wid } \mathbf{Z}_k = \max_{1 \leq i \leq n} \text{wid } \mathbf{Z}_i$ ;
    рассекаем брус  $\mathbf{Z}$  по  $k$ -ой координате пополам
        на брусы  $\mathbf{Z}'$  и  $\mathbf{Z}''$ , такие что
        
$$\mathbf{Z}' := (\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_{k-1}, [\underline{\mathbf{Z}}_k, \text{mid } \mathbf{Z}_k], \mathbf{Z}_{k+1}, \dots, \mathbf{Z}_n),$$

        
$$\mathbf{Z}'' := (\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_{k-1}, [\text{mid } \mathbf{Z}_k, \overline{\mathbf{Z}}_k], \mathbf{Z}_{k+1}, \dots, \mathbf{Z}_n);$$

    если уравнение  $\phi(\mathbf{Z}', t) = 0$  на  $\mathbf{X}_\mu$  совместно или
        возможно совместно и  $\underline{\mathbf{Z}}'_n \leq \bar{y}$ , то присваиваем
         $z' \leftarrow \underline{\mathbf{Z}}'_n$  и помещаем запись  $(\mathbf{Z}', z')$  в список  $\mathcal{L}$ 
        в порядке возрастания значений второго поля;
    если уравнение  $\phi(\mathbf{Z}', t) = 0$  на  $\mathbf{X}_\mu$  совместно, то
        присваиваем  $\bar{y} \leftarrow \min\{\bar{y}, \overline{\mathbf{Z}}'_n\}$ ;
    если уравнение  $\phi(\mathbf{Z}'', t) = 0$  на  $\mathbf{X}_\mu$  совместно или
        возможно совместно и  $\underline{\mathbf{Z}}''_n \leq \bar{y}$ , то присваиваем
         $z'' \leftarrow \underline{\mathbf{Z}}''_n$  и помещаем запись  $(\mathbf{Z}'', z'')$  в список  $\mathcal{L}$ 
        в порядке возрастания значений второго поля;
    если уравнение  $\phi(\mathbf{Z}'', t) = 0$  на  $\mathbf{X}_\mu$  совместно, то
        присваиваем  $\bar{y} \leftarrow \min\{\bar{y}, \overline{\mathbf{Z}}''_n\}$ ;
    удаляем бывшую ведущую запись  $(\mathbf{Z}, z)$  из списка  $\mathcal{L}$ ;
    обозначаем новую ведущую запись через  $(\mathbf{Z}, z)$ ;
END DO
 $\underline{y} := z$ ;

```

номер  $\mu$  немой компоненты,  $1 \leq \mu \leq n$ ,

метод выяснения совместности одномерных интервальных уравнений  $\phi(\mathbf{Z}, t) = 0$  для  $\phi$  и  $\mathbf{Z}$ , определённых в (3.49)–(3.50).

На выходе при успешном завершении алгоритма получаем нижнюю  $\underline{y}$  и верхнюю  $\bar{y}$  оценки с точностью  $\epsilon$  для глобального минимума функции  $f$  на брус  $\mathbf{X}$ .

Рис. 3.11 иллюстрирует процесс оптимизации, описываемый алгоритмом Табл. 3.3, для функции  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Немой переменной является  $x_2$ , а дробление исходного бру-

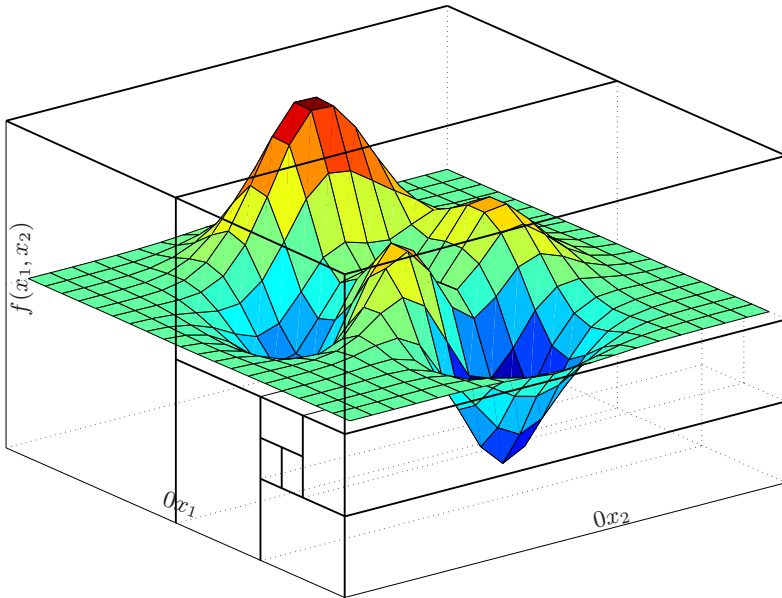


Рис. 3.11. Процесс глобальной оптимизации с помощью метода дробления графика для целевой функции  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

са, содержащего график целевой функции  $y = f(x_1, x_2)$ , выполняется по переменным  $x_1$  и  $y$ .

Перейдём теперь к рассмотрению более общей ситуации, в которой немymi объявлены  $s$ ,  $1 \leq s \leq n$ , координатных направлений. Не умаляя общности наших рассмотрений можно считать, что номера этих координат суть  $1, 2, \dots, s$ . Пусть в пространстве  $\mathbb{R}^{n+1}$  задана плоскость, параллельная этим координатным направлениям, и имеющая, таким образом, параметрическое уравнение

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = t_1, \\ \vdots \\ x_{s-1} = t_{s-1}, \\ x_s = t_s, \\ x_{s+1} = r_{s+1}, \\ \vdots \\ x_n = r_n, \\ y = l, \end{array} \right. \quad (3.51)$$

где  $t_1, \dots, t_s$  — параметры, пробегающие всю числовую ось  $\mathbb{R}$ , а  $r_{s+1}, \dots, r_n, l$  — некоторые константы. Аналогично одномерному случаю, если  $f$  непрерывна на  $X$ , то

$$\min_{x \in X} f(x) = \min \left\{ l \in \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{плоскость (3.51) пересекает} \\ \text{график функции } y = f(x) \end{array} \right\}.$$

Обозначим

$$\mathbf{Z} = (\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_{n-s+1}) := (\mathbf{X}_{s+1}, \dots, \mathbf{X}_n, \mathbf{Y}), \quad (3.52)$$

$$\varphi(\mathbf{Z}, t) := f(t_1, \dots, t_s, \mathbf{X}_{s+1}, \dots, \mathbf{X}_n) - \mathbf{Y}. \quad (3.53)$$

Брусы  $\mathbf{Z}$  размерности  $(n-s+1)$  — это прямоугольные куски пучков плоскостей вида (3.51), тогда как результат пересечения или непересечения таких пучков с графиком целевой функции будет определяться из решения относительно  $t = (t_1, t_2, \dots, t_s)$  интервальных уравнений вида

$$\phi(\mathbf{Z}, t) = 0.$$

Следовательно, плоскостями (3.51) мы сможем «нащупывать» график минимизируемой функции, если будем уметь эффективно проверять совместность этих уравнений от  $s$  неизвестных.

Наконец, мы снова оформим процесс последовательного улучшения оценок глобального минимума согласно стратегии «метода ветвей и границ», так что полный псевдокод получающегося нового алгоритма, приведённый в Табл. 3.4, совершенно аналогичный случаю одного немого направления. На вход ему подаются

брус  $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^n$  и целевая функция  $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

точность  $\epsilon > 0$ ,

номера немых компонент —  $1, 2, \dots, s$ , где  $1 \leq s \leq n$ .

Кроме того, мы фиксируем метод выяснения совместности интервального уравнения  $\varphi(\mathbf{Z}, t) = 0$  для  $t = (t_1, \dots, t_s)$  и  $\varphi, \mathbf{Z}$ , определённых в (3.52)–(3.53). На выходе алгоритма получаются нижняя  $\underline{y}$  и верхняя  $\overline{y}$  оценки с точностью  $\epsilon$  для глобального минимума функции  $f$  на бресе  $\overline{\mathbf{X}}$ .

Представленные в Табл. 3.3 и Табл. 3.4 алгоритмы предназначены, очевидным образом, для вычисления лишь величины глобального минимума (3.44), но путём несложной модификации можно сделать так, чтобы они находили и значения переменных, доставляющих этот минимум. Именно, для этого нам нужно отслеживать и хранить все корни (как гарантированные, так и возможные) «уравнений уровня»  $\phi(\mathbf{Z}, t) = 0$  помимо информации об их разрешимости. Это потребует удлинения записей, образующих рабочий список  $\mathcal{L}$  с тем, чтобы хранить в них информацию о двусторонних границах корней «уравнений уровня».

Что можно сказать о сходимости методов дробления графика? Известно, что в традиционных интервальных методах глобальной оптимизации из §3.6, которые выполняют адаптивное дробление области определения функции и имеют в алгоритмической основе «метод ветвей и границ», диаметры ведущих брусков стремятся к нулю (Теорема 3.6.1). Этот факт необходимо верен и для методов дробления графика, так как их логическая схема совершенно совпадает с логической схемой традиционных интервальных методов глобальной оптимизации. Следовательно, «уравнения уровня»  $\phi(\mathbf{Z}, t) = 0$ , определяемые посредством (3.50) и (3.53), стремятся к точечным (неинтервальным) уравнениям в том смысле, что их интервальные коэффициенты неограниченно сужаются по мере работы алгоритма. Если целевая функция  $f$  такова, что корни уравнения  $\phi(\mathbf{Z}, t) = 0$  непрерывно зависят от параметра  $\mathbf{Z}$ , то мы можем ожидать сходимости метода дробления графика к глобальному оптимуму.

Таблица 3.4. Простейший интервальный алгоритм дробления графика для глобальной оптимизации функций (случай  $s$  немых координат)

```

вычисляем внешнюю оценку  $\underline{Y}$  области значений  $f$  на  $\mathbf{X}$ ;
присваиваем  $\mathbf{Z} := (\mathbf{X}_{s+1}, \dots, \mathbf{X}_n, \underline{Y})$ ;
присваиваем  $z \leftarrow \underline{Y}$  и  $\bar{y} := \bar{Y}$ ;
инициализируем рабочий список  $\mathcal{L} := \{(\mathbf{Z}, z)\}$ ;
DO WHILE ( $\bar{y} - z \geq \epsilon$ )
    выбираем компоненту  $k$ , по которой брус  $\mathbf{Z}$  имеет
        наибольшую ширину, т. е.  $\text{wid } \mathbf{Z}_k = \max \text{wid } \mathbf{Z}_i$ ;
    рассекаем брус  $\mathbf{Z}$  по  $k$ -ой координате пополам
        на брусы  $\mathbf{Z}'$  и  $\mathbf{Z}''$ , такие что
         $\mathbf{Z}' := (\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_{k-1}, [\underline{Z}_k, \text{mid } \mathbf{Z}_k], \mathbf{Z}_{k+1}, \dots, \mathbf{Z}_{n-s+1})$ ,
         $\mathbf{Z}'' := (\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_{k-1}, [\text{mid } \mathbf{Z}_k, \bar{Z}_k], \mathbf{Z}_{k+1}, \dots, \mathbf{Z}_{n-s+1})$ ;
    если уравнение  $\varphi(\mathbf{Z}', t) = 0$  на брусе  $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_s)$ 
        совместно или возможно совместно и  $\underline{Z}'_n \leq \bar{y}$ , то
        присваиваем  $z' \leftarrow \underline{Z}'_{n-s+1}$  и помещаем запись  $(\mathbf{Z}', z')$ 
        в  $\mathcal{L}$  в порядке возрастания второго поля;
    если уравнение  $\varphi(\mathbf{Z}', t) = 0$  на  $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_s)$ 
        совместно, то присваиваем  $\bar{y} \leftarrow \min\{\bar{y}, \bar{Z}'_{n-s+1}\}$ ;
    если уравнение  $\varphi(\mathbf{Z}'', t) = 0$  на брусе  $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_s)$ 
        совместно или возможно совместно и  $\underline{Z}''_n \leq \bar{y}$ , то
        присваиваем  $z'' \leftarrow \underline{Z}''_{n-s+1}$  и помещаем запись
         $(\mathbf{Z}'', z'')$  в  $\mathcal{L}$  в порядке возрастания второго поля;
    если уравнение  $\varphi(\mathbf{Z}'', t) = 0$  на  $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_s)$ 
        совместно, то присваиваем  $\bar{y} \leftarrow \min\{\bar{y}, \bar{Z}''_{n-s+1}\}$ ;
    удаляем бывшую ведущую запись  $(\mathbf{Z}, z)$  из списка  $\mathcal{L}$ ;
    обозначаем новую ведущую запись через  $(\mathbf{Z}, z)$ ;

END DO
y  $\leftarrow z$ ;

```

### 3.7в Градиентные тесты

Вынесенным в заголовок общим термином мы называем тесты, основанные на использовании градиента целевой функции, между тем как их содержательный смысл может быть весьма различен.

Если  $f$  — дифференцируемая функция, то во внутренней для  $\mathbf{X}$  точке глобального минимума её градиент зануляется. Следовательно, если внешняя интервальная

оценка градиента по некоторому внутреннему для  $\mathbf{X}$  интервальному вектору  $\mathbf{x}$  не содержит нуля, то в  $\mathbf{x}$  не может быть экстремумов функции  $f$ . Исключение интервала  $\mathbf{x}$  из области определения минимизируемой функции не окажет поэтому никакого влияния на результаты поиска. Если же подинтервал  $\mathbf{x}$  не является внутренним для  $\mathbf{X}$ , то просто так исключить его нельзя. Хотя внутренность  $\mathbf{x}$  действительно не может содержать экстремумов  $f$ , обязательно требуется дополнительное исследование той части  $\mathbf{x}$ , которая выходит на границу исходной области определения  $\mathbf{X}$ . Основанный на описанных соображениях приём исследования брусков очень популярен в упоминавшихся нами интервальных методах глобальной оптимизации из [26, 49, 66], но применение его в методах дробления графика имеет свою специфику.

В методах дробления графика область определения дробится не по всем координатным направлениям: по немым направлениям все брусы из рабочего списка выходят на границу области определения, а потому никогда и не сделаются внутренними. Это обстоятельство нужно принимать во внимание при порождении новых записей. Пусть, к примеру, в процессе исполнения алгоритма Табл. 3.3 мы выявили запись  $(\mathbf{Z}, z) \in \mathcal{L}$  с  $\mathbf{Z} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{\mu-1}, \mathbf{x}_{\mu+1}, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y})$ , такую что на брусе  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{\mu-1}, \mathbf{X}_\mu, \mathbf{x}_{\mu+1}, \dots, \mathbf{x}_n)$  градиент целевой функции не содержит нуля. Следовательно, искомым экстремум может достигаться лишь в тех точках из  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{\mu-1}, \mathbf{X}_\mu, \mathbf{x}_{\mu+1}, \dots, \mathbf{x}_n)$ , которые выходят на границу  $\partial\mathbf{X}$  исходного бруса  $\mathbf{X}$ , т. е. на пересечении

$$\mathbf{X} \cap (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{\mu-1}, \mathbf{X}_\mu, \mathbf{x}_{\mu+1}, \dots, \mathbf{x}_n). \quad (3.54)$$

Таким образом, в лучшем случае мы должны оставить для рассмотрения два  $(n-1)$ -мерных бруса

$$\begin{aligned} &(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{\mu-1}, \underline{\mathbf{X}}_\mu, \mathbf{x}_{\mu+1}, \dots, \mathbf{x}_n), \\ &(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{\mu-1}, \overline{\mathbf{X}}_\mu, \mathbf{x}_{\mu+1}, \dots, \mathbf{x}_n), \end{aligned}$$

получающихся из бруса  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{\mu-1}, \mathbf{X}_\mu, \mathbf{x}_{\mu+1}, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y})$  отбрасыванием внутренности, а в худшем —  $(2n-1)$  или даже  $2n$  штук граней бруса пересечения (3.54).

## 3.8 Рандомизированные алгоритмы в интервальной оптимизации

Интервальные методы глобальной оптимизации, описанные в §3.6, получили значительное развитие в последние десятилетия XX века. С их помощью было решено немало число трудных практических задач, а соответствующая теория вошла неотъемлемой частью во все энциклопедии и справочники по оптимизации (в частности, в капитальный многотомный труд [37]). Резюмируя практический опыт, можно сказать, что эти интервальные методы глобальной оптимизации хорошо работают для задач малой и средней размерности (когда  $n$  не превосходит нескольких десятков) и «не слишком плохих» целевых функций.

Вместе с тем, эксплуатация интервальных методов глобальной оптимизации выявила и ряд проблем. Если размерность задачи велика и/или целевая функция имеет большое количество локальных экстремумов, то за практически приемлемое время

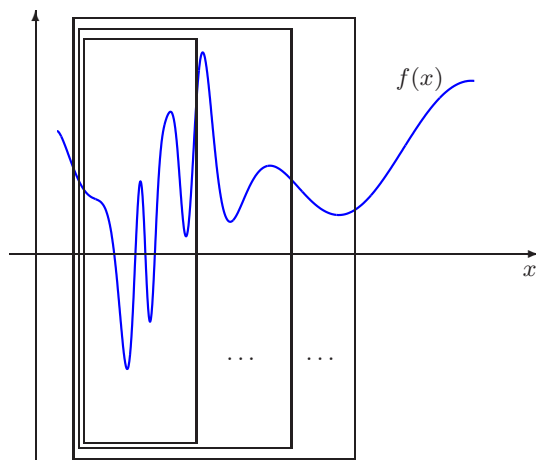


Рис. 3.12. Явление «застаивания» интервальной оценки: при значительном уменьшении ширины бруса качество интервальной оценки области значений целевой функции улучшается несущественно.

размеры ведущих брусков из рабочего списка уже не удаётся уменьшить решающим образом, они остаются сравнимыми с размером начального бруса области определения, что обуславливает немалую погрешность интервального алгоритма в целом.

Отмеченное затруднение усугубляется и нередким явлением «застаивания интервальной оценки» (см. Рис. 3.12). Дело в том, что, несмотря на наличие верхних оценок (3.8) и (3.12), погрешность интервального оценивания целевой функции может вести себя весьма сложным образом для брусков конечных размеров. В частности, она совсем не обязана монотонно убывать в той же мере, что и уменьшение размеров бруса, и если такой брус делается ведущим, то выявление его бесперспективности приведёт к большим потерям времени.

Отметим следующие характерные черты интервальных оптимизационных методов рассмотренного типа:

- 1) Доказательность результата (называемую также «гарантированностью»): получаемая оценка значений глобального минимума гарантированно приближает его снизу (можно даже одновременно оценивать оптимум снизу и сверху, см. §3.6г).
- 2) Чисто детерминистский характер алгоритма: каждый шаг его исполнения однозначно определяется результатами предшествующих шагов и свойствами целевой функции.

Доказательность (гарантированность) обеспечивается свойствами интервальных расширений функций и находимых с их помощью оценок, а также вычислительной схемой алгоритмов, имеющих в своей основе псевдокод Табл. 3.2. Таким образом, обе отмеченных выше особенности оказываются тесно связанными друг с другом.

Доказательность результатов современных интервальных методов глобальной оптимизации является, несомненно, весьма ценным качеством, и среди неинтервальных

методов встречается весьма редко. С другой стороны, в жертву этой доказательности принесено очень многое, даже вычислительная эффективность, которая у интервальных методов оказывается заметно хуже, чем у их классических неинтервальных собратьев.

Возникает естественный вопрос: нельзя ли, поступившись в той или иной степени доказательностью и/или детерминизмом интервальных методов, выиграть в их вычислительной эффективности либо в каких-то других полезных качествах? Именно этот вопрос явился стимулом к пересмотру традиционной вычислительной схемы интервальных алгоритмов глобальной оптимизации, и ниже мы постараемся обосновать положительный ответ на него.

Можно наметить несколько основных путей реализации высказанной идеи.

Во-первых, для оценивания областей значений функции  $f(x)$  по подмножествам области определения  $D$  вместо использования полноценных интервальных расширений можно использовать непрерывные интервальные продолжения, т. е. такие интервальные функции  $\mathbf{f}$ , что  $\mathbf{f}(x) = f(x)$  на  $D$  и  $\text{wid } \mathbf{f}(\mathbf{Y}) \rightarrow 0$  при  $\text{wid } \mathbf{Y} \rightarrow 0$ . Доказательность получаемых интервальных оценок, конечно, пострадает, но это может быть скомпенсировано уменьшением трудозатрат на вычисление интервальных оценок  $\mathbf{f}(\mathbf{Y})$ , а также увеличением их точности. Например, в алгоритме из Табл. 3.2 результирующая оценка  $f^*$  при замене интервального расширения  $\mathbf{f}$  на непрерывное интервальное продолжение не будет уже приближать глобальный минимум снизу, но «состоятельность» этой оценки, т. е. свойство стремиться к искомому глобальному минимуму, успешно сохранится.

Во-вторых, при конструировании интервальных оптимизационных алгоритмов мы можем отказаться от чисто детерминистской вычислительной схемы и допустить в той или иной мере стохастические переходы, т. е. рандомизировать алгоритм. Этот путь мы и рассмотрим подробно в оставшейся части параграфа.

### 3.8a Стохастические методы оптимизации

Стохастические методы оптимизации функций — большая и интенсивно развивающаяся область знаний со своими специфическими подходами и ценностями (см., к примеру, [10, 24, 37] и указанные там источники). Простейший стохастический оптимизационный алгоритм — это случайный пассивный поиск, который заключается в повторяющемся случайном бросании точки на области определения. Мы рассмотрим его здесь по чисто дидактическим причинам, как модельный пример и прототип для простейшего стохастического интервального метода оптимизации.

Ещё один популярный вероятностный алгоритм оптимизации — это «имитация отжига» (simulated annealing), — моделирующий одноимённый физический процесс и предложенный в современном виде в работе [50]. В русской литературе можно встретить такие его названия как «симулированный отжиг», «процедура отпуска» [1], «имитация затвердевания» [10]. Псевдокод этого алгоритма приведён в Табл. 3.5, а теоретические результаты, касающиеся его сходимости, и дальнейшие ссылки можно найти, к примеру, в [1, 10, 33].

С алгоритмом связывается неотрицательный вещественный параметр  $T$ , называемый «температурой» и аналогичный физической температуре в реальном отжиге. В процессе работы алгоритма величина  $T$  постепенно уменьшается от некоторого

Таблица 3.5. Псевдокод алгоритма «имитации отжига».

<b>Вход</b> Брус $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}^n$ . Целевая функция $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$ . Начальное $T_0$ и конечное $T_{\text{fin}}$ значения «температуры».
<b>Выход</b> Оценка $f^*$ глобального минимума функции $f$ на $\mathbf{X}$ .
<b>Алгоритм</b> присваиваем $T \leftarrow T_0$ ; выбираем начальное приближение $y = x_0 \in \mathbf{X}$ ; назначаем целочисленную величину $N_T$ — количество испытаний на один температурный уровень; <b>DO WHILE</b> ( $T > T_{\text{fin}}$ ) <b>DO FOR</b> $j = 1$ <b>TO</b> $N_T$ случайно выбираем новую точку $z \in \mathbf{X}$ по правилу $\mathcal{R}(y)$ ; принимаем $z$ , присваивая $y \leftarrow z$ , с вероятностью $P_T(y, z)$ ; <b>END DO</b> уменьшаем значение температуры $T \leftarrow \alpha T$ ; <b>END DO</b> $f^* \leftarrow f(y)$ ;

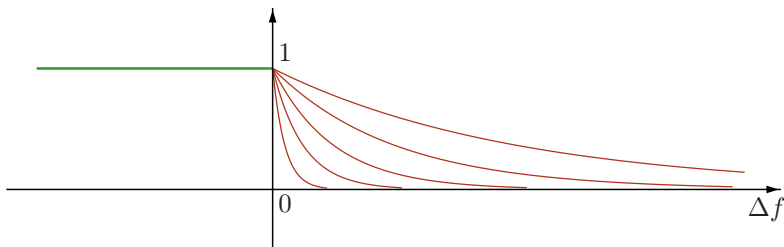
начального значения  $T_0$  до конечного  $T_{\text{fin}}$ . Мы для определённости будем считать последовательность значений  $T$  геометрической прогрессией с некоторым знаменателем  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , хотя в общем случае выбор способа уменьшения  $T$ , обеспечивающего сходимость метода к глобальному оптимуму, является, строго говоря, не столь простым [1].

Правило  $\mathcal{R}(y)$  выбора новой точки  $z$  — это обычно случайное бросание с плотностью вероятности, симметричной относительно  $y$ . Фигурирующую в алгоритме вероятность  $P_T(y, z)$  принятия нового приближения  $z$  полагают равной

$$P_T(y, z) = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta f \leq 0, \\ \exp\left(-\frac{\Delta f}{kT}\right), & \text{если } \Delta f \geq 0, \end{cases}$$

где через  $\Delta f$  обозначено приращение значения функции в сравнении со старым приближением, т. е.  $\Delta f = f(z) - f(y)$ . Графики функции  $P_T(y, z)$  в зависимости от  $\Delta f$  для различных температур  $T$  изображены на Рис. 3.13. Здесь константа  $k$  в знаменателе аргумента экспоненты служит для масштабирования и играет роль постоянной Больцмана в физических формулах, описывающих реальный процесс отжига (см. [1, 50]).



Рис. 3.13. Графики функций  $P_T(y, z)$  для различных температур  $T$ .

В алгоритме «имитации отжига» новое приближение безусловно принимается, если оно обеспечивает лучшее значение целевой функции. Но даже если новое приближение не лучше старого, ненулевая (и зависящая от температуры) вероятность его принятия всё равно существует. Случайные «рысканья» по области определения, которые совершает «имитация отжига», помогают ей выбираться из впадин вокруг локальных минимумов и обеспечивают тем самым глобальность поиска решения задачи (3.37). По мере уменьшения температуры  $T$  амплитуда случайных блужданий имитации отжига делается всё меньше и меньше, а алгоритм Табл. 3.5 превращается при этом в случайный локальный поиск.

Отметим, что, в действительности, со сходной проблемой — как выбираться из участков обширных «плато» — мы сталкиваемся и в интервальных методах глобальной оптимизации типа представленного в Табл. 3.2, когда в силу «застаивания» интервальной оценки на протяжении многих шагов алгоритма ведущая оценка достигается на некоторых брусах, не содержащих искомого оптимума. Нельзя ли применить основную идею «имитации отжига» для борьбы с «застаиванием» оценки в интервальных алгоритмах глобальной оптимизации?

### 3.86 Стохастические интервальные методы

При конструировании стохастических интервальных оптимизационных процедур будем считать известным интервальное расширение целевой функции: именно из него, а не из значений в отдельных точках, будет черпаться информация о минимизируемой функции. Отдельным статистическим испытанием станет случайный выбор подбруса из области определения и последующее оценивание по нему области значений целевой функции с помощью интервального расширения.

Во-первых, стремясь обеспечить глобальность поиска оптимума, мы должны позаботиться о том, чтобы случайно выбираемые в области определения  $X$  подбрусы в совокупности покрывали бы весь исходный брус  $X$ . Во-вторых, пересечение подбрусов, на которых мы оцениваем целевую функцию, по множеству ненулевой меры — это ненужное дублирование усилий, нежелательное в экономно спроектированном алгоритме. В-третьих, учитывая, что интервальное расширение функции даёт тем более точную оценку области значений, чем меньше размеры бруса оценивания, мы должны также позаботиться об уменьшении размеров подбрусов, случайно выбираемых в области определения целевой функции.

Как компромисс сформулированных выше требований, имеет смысл оставить некоторые приёмы организации данных и порядок работы с ними, которые сформир-

Таблица 3.6. Псевдокод метода случайного интервального дробления.

<p>Вход</p> <p>Брус <math>\mathbf{X} \subset \mathbb{R}^n</math>. Количество испытаний <math>N</math>.          Интервальное расширение целевой функции <math>f : \mathbb{I}\mathbf{X} \rightarrow \mathbb{I}\mathbb{R}</math>.</p>
<p>Выход</p> <p>Оценка <math>f^*</math> глобального минимума функции <math>f</math> на <math>\mathbf{X}</math>.</p>
<p>Алгоритм</p> <p><math>\mathbf{Y} \leftarrow \mathbf{X}</math>;          вычисляем <math>f(\mathbf{Y})</math> и присваиваем <math>f^* \leftarrow \underline{f(\mathbf{Y})}</math>;          инициализируем рабочий список <math>\mathcal{L} \leftarrow \{\mathbf{Y}\}</math>;          DO FOR <math>j = 1</math> TO <math>N</math>              случайным образом выбираем из списка <math>\mathcal{L}</math> брус <math>\mathbf{Z}</math>;              рассекаем брус <math>\mathbf{Z}</math> по самой широкой компоненте                  пополам на брусы-потомки <math>\mathbf{Z}'</math> и <math>\mathbf{Z}''</math>;              вычисляем оценки <math>\phi' \leftarrow \underline{f(\mathbf{Z}')}</math> и <math>\phi'' \leftarrow \underline{f(\mathbf{Z}'')}</math>;              IF ( <math>\mathbf{Z} = \mathbf{Y}</math> ) THEN                  присваиваем <math>f^* \leftarrow \min\{\phi', \phi''\}</math>;              ELSE                  присваиваем <math>f^* \leftarrow \min\{f^*, \phi', \phi''\}</math>              END IF              удаляем из списка <math>\mathcal{L}</math> брус <math>\mathbf{Z}</math>, помещаем в <math>\mathcal{L}</math> брусы <math>\mathbf{Z}'</math> и <math>\mathbf{Z}''</math>;              если <math>f^*</math> изменилась, то через <math>\mathbf{Y}</math> обозначаем тот брус                  из списка <math>\mathcal{L}</math>, который обеспечил новую оценку <math>f^*</math>;          END DO</p>

ровались в традиционных интервальных алгоритмах глобальной оптимизации, описанных выше в §3.6. Более точно,

- все оцениваемые подбрусы будут получаться как результат последовательного дробления бруса области определения  $\mathbf{X}$ ,
- всякий получающийся в результате дробления и подвергаемый оцениванию подбрус, если он не признан бесперспективным с помощью каких-либо специальных средств, должен сохраняться в процессе работы алгоритма.

Иными словами, мы, фактически, будем оперировать с некоторой дискретной конфигурацией на брусе исходной области определения  $\mathbf{X}$  (наглядно изображённой на Рис. 3.8). Для дальнейшего развития нашей идеи оптимизировать функцию посредством подходящего разбиения области определения вкупе с интервальным оцениванием особенно ценными окажутся, таким образом, идеи дискретной стохастической

оптимизации.

Одним из возможных аналогов простейшего оптимизационного метода случайного поиска можно считать при этом алгоритм, псевдокод которого представлен в Табл. 3.6. Мы будем называть его «случайным интервальным дроблением», так как каждое испытание состоит в нём в дроблении пополам случайно выбранного бруса из покрытия области определения  $\mathbf{X}$ . Все брусы, получающиеся в процессе работы алгоритма, хранятся в рабочем списке  $\mathcal{L}$  (который теперь неупорядочен), и, кроме того, запоминается брус  $\mathbf{Y}$ , обеспечивающий рекордную оценку минимума целевой функции.

При отсутствии априорной информации о целевой функции  $f(x)$  случайный выбор того бруса  $\mathbf{Z}$  из списка  $\mathcal{L}$ , который будет подвержен очередному дроблению, естественно было бы осуществлять по равновероятному правилу, т. е. полагая вероятности выбора всех брусов одинаковыми. Но такой выбор плох тем, что получающийся алгоритм оказывается *пассивным*: каждый последующий его шаг никак не использует информацию, полученную на предыдущих шагах (см. Определение 9.1.1). Кроме того, по мере исполнения подобного алгоритма и роста длины рабочего списка вероятность выбора брусов, содержащих глобальный минимум, будет только уменьшаться.

Для преодоления этого недостатка нужно ввести в алгоритм какие-либо процедуры отсеивания бесперспективных брусов. Кроме того, по предложению Н.В. Панова имеет смысл динамически назначать более высокую вероятность выбора из списка  $\mathcal{L}$  для тех брусов, которые обеспечивают меньшую оценку целевой функции. Эта модификация алгоритма Табл. 3.6 получила рабочее название «случайного интервального дробления с приоритетом».

Вычислительная эффективность «случайного интервального дробления» невысока, но его применение может быть оправданным в некоторых практических ситуациях (см., к примеру, обоснование целесообразности традиционного случайного поиска в [10, 24]). Наконец, отправляясь от случайного интервального дробления, можно строить более совершенные алгоритмы, реализующие те или иные схемы адаптации к целевой функции.

Вычислительная схема интервального аналога метода «имитации отжига» приведена в Табл. 3.7. При этом вероятность дробления выбранного бруса  $\mathbf{Z}$ , аналогичная «принятию» очередного приближения в классическом методе «имитации отжига», задаётся формулой

$$P_T(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta \underline{f} \leq 0, \\ \exp\left(-\frac{\Delta \underline{f}}{kT}\right), & \text{если } \Delta \underline{f} \geq 0, \end{cases}$$

где

$$\Delta \underline{f} = \underline{f}(\mathbf{Z}) - \underline{f}(\mathbf{Y})$$

— приращение оценки оптимума, обеспечиваемое брусом нового приближения. Семейство графиков этой функции для различных температур  $T$  имеет тот же вид, что на Рис. 3.13 с единственным отличием: по оси абсцисс откладываются значения  $\Delta \underline{f}$ .

Правило  $\mathcal{R}(\mathbf{Y})$  в алгоритме Табл. 3.7 — это случайный выбор бруса  $\mathbf{Z}$  из рабочего списка. Оно зависит от ведущего бруса  $\mathbf{Y}$  (и ведущей оценки), но может быть органи-

Таблица 3.7. Простейший интервальный алгоритм «имитации отжига»

<p>Вход</p> <p>Брус области определения <math>\mathbf{X} \subset \mathbb{R}^n</math>.</p> <p>Интервальное расширение <math>\mathbf{f} : \mathbb{I}\mathbf{X} \rightarrow \mathbb{I}\mathbb{R}</math> целевой функции <math>f</math>.</p> <p>Начальное <math>T_0</math> и конечное <math>T_{\text{fin}}</math> значения «температуры».</p>
<p>Выход</p> <p>Оценка <math>f^*</math> глобального минимума функции <math>f</math> на <math>\mathbf{X}</math>.</p>
<p>Алгоритм</p> <p>присваиваем <math>\mathbf{Y} \leftarrow \mathbf{X}</math> и <math>T \leftarrow T_0</math>;</p> <p>назначаем целочисленную величину <math>N_T</math></p> <p>— «количество испытаний на один температурный уровень»;</p> <p>вычисляем <math>\mathbf{f}(\mathbf{Y})</math> и инициализируем список <math>\mathcal{L} \leftarrow \{(\mathbf{Y}, \mathbf{f}(\mathbf{Y}))\}</math>;</p> <p>DO WHILE (<math>T &gt; T_{\text{fin}}</math>)</p> <p>  DO FOR <math>j = 1</math> TO <math>N_T</math></p> <p>    выбираем из <math>\mathcal{L}</math> запись <math>(\mathbf{Z}, \mathbf{f}(\mathbf{Z}))</math> по правилу <math>\mathcal{R}(\mathbf{Y})</math>;</p> <p>    DO (с вероятностью <math>P_T(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})</math>)</p> <p>      рассекаем <math>\mathbf{Z}</math> по самой широкой компоненте</p> <p>        пополам на брусы-потомки <math>\mathbf{Z}'</math> и <math>\mathbf{Z}''</math>;</p> <p>      вычисляем <math>\mathbf{f}(\mathbf{Z}')</math> и <math>\mathbf{f}(\mathbf{Z}'')</math>;</p> <p>      удаляем запись <math>(\mathbf{Z}, \mathbf{f}(\mathbf{Z}))</math> из списка <math>\mathcal{L}</math>;</p> <p>      помещаем записи <math>(\mathbf{Z}', \mathbf{f}(\mathbf{Z}'))</math> и <math>(\mathbf{Z}'', \mathbf{f}(\mathbf{Z}''))</math> в <math>\mathcal{L}</math>;</p> <p>      обозначаем через <math>(\mathbf{Y}, \mathbf{f}(\mathbf{Y}))</math> ту из записей <math>(\mathbf{Z}', \mathbf{f}(\mathbf{Z}'))</math></p> <p>        и <math>(\mathbf{Z}'', \mathbf{f}(\mathbf{Z}''))</math>, которая имеет меньшее значение</p> <p>        второго поля;</p> <p>    END DO</p> <p>  END DO</p> <p>  уменьшаем значение температуры <math>T \leftarrow \alpha T</math></p> <p>END DO</p> <p><math>f^* \leftarrow \mathbf{f}(\mathbf{Y})</math>;</p>

зовано самым различным образом в зависимости от наличия априорной информации о целевой функции.

Вычислительные эксперименты с интервальным методом «имитации отжига» на задачах малой размерности, показали, что он работает заметно хуже детерминированных алгоритмов интервальной глобальной оптимизации, если целевая функция  $f(x)$  имеет не очень сложную структуру. Если же  $f(x)$  имеет много локальных экстремумов и сложный рельеф, то преимущество детерминированных оптимизационных методов делается малоощутимым либо исчезает вовсе. В частности, на ряде тестовых задач из [21] «интервальная имитация отжига» показала своё превосходство в скорости сходимости над традиционными интервальными методами глобальной оптимизации, основанными на адаптивном дроблении области определения (см. §3.6). По-видимому, при повышении размерности задачи  $n$  интервальные стохастические методы оптимизации должны демонстрировать всё более благоприятное поведение.

Практические варианты стохастических интервальных методов оптимизации, в частности, «случайного интервального дробления» и «интервальной имитации отжига», могут быть получены из модельных алгоритмов Табл. 3.6 и Табл. 3.7 путём встраивания в них различных модификаций, аналогичных тем, что применяются для детерминированных интервальных оптимизационных методов. Но недостаток места уже не позволяет рассмотреть здесь эти интересные вопросы.

В заключение темы отметим «интервальный генетический алгоритм», впервые предложенный в работе [22] и далее развитый в диссертации [20].

## Комментарий к Главе 3

В этой главе рассматривалось внешнее оценивание областей значений функций, как наиболее популярное и являющееся более трудным для неинтервальных методов. Но другие способы оценивания областей значений также востребованы и подчас не менее важны. Внутреннее оценивание областей значений функций начало развиваться лишь в 80-е годы XX века, и это объясняется, скорее, субъективными причинами. Из работ последних лет по этой теме отметим [39, 61]. Внутреннее оценивание областей значений функций с помощью арифметики Каухера и её обобщений рассматривается в работах [55, 62].

**К §3.1** Понятия интервального расширения и естественного интервального расширения функции были введены Р.Е. Муром, но принятые нами в §3.1 определения являются плодом позднейшего развития. Английские термины, соответствующие «внешней оценивающей функции» — inclusion function, enclosing function.

Мы выбрали для обозначения естественного интервального расширения элементарного функционального выражения  $f$  символ  $f_1$ , так как в нотном письме знак « $\natural$ » — так называемый «бекар» — означает переход к естественной тональности звучания.

Круг вопросов, связанный с исследованием точности естественного интервального расширения для оценивания областей значений функций, впервые был исследован Р.Е. Муром в [57] (см. также [59]), но используемая им методика, на наш взгляд, грешит некоторой искусственностью. Кроме того, соответствующая терминология

Р.Е. Мура (широко подхваченная многими авторами, пишущими на интервальные темы) фактически конфликтует с терминологией математического анализа и способна привести к недоразумениям. По этой причине мы не следуем им.

**К §3.4** Литература по алгоритмическому (автоматическому) дифференцированию обширна и весьма разнообразна (см. [41, 42]).

В нашей стране фундаментальные результаты по этой теме получены Ю.Г. Евтушенко и его сотрудниками (см., к примеру, [2, 8, 38]).

**К §3.6** Развитию интервальных методов глобальной оптимизации, которые имеют в основе адаптивное дробление области определения целевой функции (алгоритм Табл. 3.2), посвящено большое количество работ. В значительной части из них рассматриваются способы ускорения сходимости алгоритма путём выбора тех или иных интервальных расширений функций, и список соответствующих ссылок можно найти, например, в [65, 66, 56]. Существуют также работы, исследующие саму стратегию дробления и её связь с выбором интервальных расширений. Это работы Р.Е. Мура [57, 58, 59], С. Скельбоэ [74], Э. Хансена [44, 45, 26], Н. Асаитамби, Шен Жуя и Р.Е. Мура [35], Х. Рачека и Дж. Рокне [65, 66]. Представленный в Табл. 3.2 алгоритм глобальной минимизации является незначительной модификацией алгоритмов С. Скельбоэ [74] и Р.Е. Мура [59].

Идея использовать интервальное оценивание функций совместно с измельчением области определения для вычисления глобальных экстремумов впервые была высказана Р.Е. Муром в его классической книге [57]. Следующий шаг в развитии этого подхода сделал С. Скельбоэ [74], указавший эффективную стратегию дробления (измельчения области определения), заимствованную из «метода ветвей и границ». Тем самым качественно повысилась вычислительная эффективность нового метода, что превратило его в инструмент практических вычислений. Впоследствии Р.Е. Мур [59], Н. Асаитамби, Шен Жуй и Р.Е. Мур [35], Э. Хансен [44, 45, 26], Х. Янссон [47] и другие авторы внесли в стратегию дробления и общую схему метода дальнейшие усовершенствования. В частности, Э. Хансен предложил ряд модификаций, с помощью которых стало возможным находить аргументы функции, доставляющие ей глобальные экстремумы.

Предложение 3.6.1 и итоговые Теоремы 3.6.2 и 3.6.3 впервые сформулированы и доказаны Х. Рачеком в работе [64]. Результат, аналогичный Теореме 3.6.1, был впервые получен также Х. Рачеком [64], но совершенно другим способом.

В заключение стоит упомянуть ещё одну методику оценивания областей значений функций и выражений, основанную на применении так называемой *аффинной арифметики* [75]. Аналогично классической интервальной арифметике, она позволяет отслеживать ошибки округления и усечения, но помимо этого аффинная арифметика позволяет также учитывать взаимную зависимость между величинами, возникающими в процессе вычислений. Благодаря этой возможности с помощью аффинной арифметики, как правило, получаются более качественные оценки областей значений, чем, скажем, с помощью естественного интервального расширения.

В аффинной арифметике неопределённая величина  $x$  представляется *аффинной формой*  $\hat{x} = x_0 + x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \dots + x_n\varepsilon_n$ , где  $x_i \in \mathbb{R}$ , а  $\varepsilon_i$  — некоторые вещественные

переменные со значениями в интервале  $[-1, 1]$ . Число  $x_0$  называют *центром* аффинной формы  $\hat{x}$ , коэффициенты  $x_i$  — *частичными отклонениями*, а  $\varepsilon_i$  — *символами шума*.

Аффинные формы неявно выражают зависимости между величинами. Когда две аффинные формы совместно используют общие символы шума, то это означает, что величины, ими представляемые, по крайней мере частично зависят одна от другой. Учёт таких зависимостей позволяет аффинной арифметике существенно повысить точность оценок по сравнению с интервальной. Особенно сильно это проявляется в длинных вычислительных цепочках, когда результаты одних операций становятся входными параметрами для других. Конечно, аффинная арифметика более трудоёмка, но многочисленные примеры показывают, что эта повышенная трудоёмкость почти всегда окупается точностью поставляемых оценок. Дальнейшим обобщением аффинной арифметики является предложенная Р.Р. Ахмеровым интервально-аффинная арифметика [34].

**К §3.7** Методы дробления графика для глобальной оптимизации были предложены автором в работах [27, 70] и далее развиты в [71].

**К §3.8** Рандомизированные интервальные методы глобальной оптимизации были впервые предложены автором в 2005 году в [28], и далее в [29]. Дальнейшее развитие они получили в серии работ [21, 19, 22] и в диссертации Н.В. Панова [20].

В этой главе мы никак не касались задач поиска минимаксов и максиминов, т. е. смешанных экстремумов функций многих переменных. По-видимому, впервые подобная задача была рассмотрена в работе [72], где предложен также алгоритм её решения на основе классической интервальной арифметики и адаптивного дробления области определения. Перспективным инструментом вычисления минимаксов и максиминов является полная интервальная арифметика Каухера, которая как раз и реализует эти операции на элементарном арифметическом уровне. Первые результаты в этом направлении представлены в книге [68].

## Литература к Главе 3

- [1] Азенкотт Р. Процедура «отпуска» // *Труды семинара Н. Бурбаки за 1988 год*. — Москва: Мир, 1990. — С. 235–251.
- [2] Айда-Заде К.Р., Евтушенко Ю.Г. Быстрое автоматическое дифференцирование // *Математическое моделирование*. — 1989. — Т. 1, №1. — С. 121–139.
- [3] БАУЭР Ф.Л., ГООЗ Г. *Информатика. В 2-х ч.* — Москва: Мир, 1990.
- [4] Волков Е.А. *Численные методы*. — Москва: Наука, 1987.
- [5] ГАГАНОВ А.А. О сложности вычисления интервала значений полинома от многих переменных // *Кибернетика*. — 1985. — №4. — С. 6–8.
- [6] ГУТЕР Р.С., КУДРЯВЦЕВ Л.Д., ЛЕВТАН Б.М. *Элементы теории функций. Функции действительного переменного. Приближение функций. Почти-периодические функции*. — Москва: Физматгиз, 1963. — (Справочная математическая библиотека)

- [7] Евтушенко Ю.Г. Численный метод поиска глобального экстремума функций (перебор на неравномерной сетке) // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. – 1971. – Т. 11, №6. – С. 1390–1403.
- [8] Евтушенко Ю.Г., Засухина Е.С., Зубов В.И. *Вычисление вторых производных сложной функции с помощью обобщённой БАД-методологии.* – Москва: ВЦ РАН, 2005. – 110 с.
- [9] Евтушенко Ю.Г., Ратькин В.А. Метод половинных делений для глобальной оптимизации функции многих переменных // *Известия АН СССР. Техническая кибернетика.* – 1987. – №1. – С. 119–128.
- [10] Жиглявский А.А., Жилинскас А.Г. *Методы поиска глобального экстремума.* – Москва: Наука, 1991.
- [11] Зорич В.А. *Математический анализ.* Т. 1. – Москва: Наука, 1981. Т. 2. – Москва: Наука, 1984, а также более поздние издания.
- [12] Канторович Л.В. О проведении численных и аналитических вычислений на машинах с программным управлением // *Известия АН Армянской ССР, сер. физ.-мат. наук.* – 1957. – Т. 10, №2. – С. 3–16.
- [13] Колев Л.В. Применение интервального анализа в теории цепей // *Известия вузов. Радиоэлектроника.* – 1986. – Т. 29, №7. – С. 11–19.
- [14] Кулиш У., Рац Д., Хаммер Р., Хокс М. *Достоверные вычисления. Базовые численные методы.* – Москва-Ижевск: Издательство «РХД», 2005.
- [15] Оре О. *Теория графов.* – Москва: Мир, 1980.
- [16] Панков П.С. Алгоритм доказательного поиска экстремума с использованием миноранты по области // *Известия АН Киргизской ССР.* – 1979. – №6. – С. 12–13.
- [17] Панков П.С. Алгоритмы доказательства устойчивых утверждений и глобальной оптимизации в ограниченной области. – Фрунзе, 1984. – 13 с. – Депонировано в ВИНТИ, №5250-84Деп.
- [18] Панков П.С. *Доказательные вычисления на ЭВМ.* – Фрунзе: Илим, 1986.
- [19] Панов Н.В. Объединение стохастических и интервальных подходов для решения задач глобальной оптимизации функций // *Вычислительные Технологии.* – 2009. – Т. 14, №5. – С. 49–65.
- [20] Панов Н.В. Разработка рандомизированных алгоритмов в интервальной глобальной оптимизации. – Новосибирск, 2012. Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.07 «вычислительная математика».
- [21] Панов Н.В., Шарый С.П. Стохастические подходы в интервальных методах глобальной оптимизации // Всероссийское (с международным участием) совещание по интервальному анализу и его приложениям ИНТЕРВАЛ-06, 1–4 июля 2006 года, Петергоф, Россия. Расширенные тезисы докладов. – Санкт-Петербург: ВВМ, 2006. – С. 101–105.
- [22] Панов Н.В., Шарый С.П. Интервальный эволюционный алгоритм для поиска глобального оптимума // *Известия Алтайского государственного университета.* – 2011. – №1(69), том 2. – С. 108–113.
- [23] Пападимитриу Х., Стайглиц К. *Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность.* – Москва: Мир, 1985.
- [24] Растрингин Л.А. *Статистические методы поиска.* – М.: Наука, 1968.



- [25] СЕРГЕЕВ Я.Д., КВАСОВ Д.Е. *Диагональные методы глобальной оптимизации*. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2008.
- [26] ХАНСЕН Э., УОЛСТЕР ДЖ. У. *Глобальная оптимизация с помощью методов интервального анализа*. – Ижевск-Москва: Издательство «РХД», 2012.
- [27] ШАРЫЙ С.П. Новый подход в интервальной глобальной оптимизации // Труды XII Байкальской международной конференции «Методы оптимизации и их приложения», Иркутск, Байкал, 24 июня–1 июля 2001 года. Том 1 «Математическое программирование». – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2001. – С. 289–295.
- [28] ШАРЫЙ С.П. Стохастические подходы в интервальной глобальной оптимизации // Труды XIII Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения», Иркутск-Северобайкальск, 2–8 июля 2005 года. Том 4 «Интервальный анализ». – Иркутск: ИСЭМ, 2005. – С. 85–105.
- [29] ШАРЫЙ С.П. Рандомизированные алгоритмы в интервальной глобальной оптимизации // *Сибирский журнал вычислительной математики*. – 2008. – Т. 11, №4. – С. 457–474.
- [30] ШАРЫЙ С.П., ЖИЛИН С.И. Простые, быстрые и надежные способы максимизации распознающего функционала // *Вычислительные технологии*. – 2023. – Т. 28, №5. – С. 87–100.
- [31] ШАРЫЙ С.П., ШАШКИНА Е.П. Методы восстановления дробно-линейных зависимостей по данным с интервальной неопределённостью // *Вычислительные технологии*. – 2024. – Т. 29, №2. – С. XX–XX.
- [32] ЯГЛОМ И.М. *Комплексные числа и их применение в геометрии*. – Москва: Физматлит, 1963.
- [33] AARTS E., KORST J. *Simulated annealing and Boltzmann machines: A stochastic approach to combinatorial optimization and neural computing*. – Chichester: J. Wiley & Sons, 1989.
- [34] АКХМЕРОВ R.R. Interval-affine Gaussian algorithm for constrained systems // *Reliable Computing*. – 2005. – Vol. 11, No. 5. – P. 323–341.
- [35] ASAITHAMBI N.S., SHEN ZUHE, MOORE R.E. On computing the range of values // *Computing*. – 1982. – Vol. 28, No. 3. – P. 225–237.
- [36] BISCHOF CH., CARLE A., CORLISS G., GRIEWANK A., HOVLAND P. ADIFOR – generating derivative codes from Fortran programs // *Scientific Programming*. – 1992. – Vol. 1. – P. 11–29.
- [37] *Encyclopedia of Optimization*. C.A. Floudas and P.M. Pardalos, eds. Volumes I–VI. – Dordrecht: Kluwer, 2001.
- [38] EVTUSHENKO YU. Computation of exact gradients in distributed dynamic systems // *Optimization Methods and Software*. – 1998. – Vol. 9, No. 1–3. – P. 45–75.
- [39] GOLDSZTEJN A., JAULIN L. Inner approximation of the range of vector-valued functions // *Reliable Computing*. – 2010. – Vol. 14. – P. 1–23.
- [40] GRIEWANK A. Achieving logarithmic growth of temporal and spatial complexity in reverse automatic differentiation // *Optimization Methods and Software*. – 1992. – Vol. 1. – P. 35–54.
- [41] GRIEWANK A. On automatic differentiation // *Mathematical Programming: Recent Developments and Applications* / Iri M. and Tanabe K., eds. – Dordrecht: Kluwer, 2001. – P. 83–108.
- [42] GRIEWANK A., CORLISS G.F., EDS. *Automatic differentiation of algorithms. Theory, implementation and application*. – Philadelphia: SIAM, 1991.

- [43] Handbook on Randomized Computing. S. Rajasekaran, P.M. Pardalos, J.H. Reif and J. Rolim, eds. Volumes I–II. – Dordrecht: Kluwer, 2001.
- [44] HANSEN E.R. Global optimization using interval analysis — the one-dimensional case // *Journal of Optimization Theory and Applications*. – 1979. – Vol. 29. – P. 331–344.
- [45] HANSEN E.R. Global optimization using interval analysis — the multidimensional case // *Numerische Mathematik*. – 1980. – Vol. 34, No. 3. – P. 247–270.
- [46] HANSEN E., WALSTER G.W. *Global optimization using interval analysis*. – New York: Marcel Dekker, 2003.
- [47] JANSSON C. A global minimization method using interval arithmetic // *Computer Arithmetic and Enclosure Methods* / Atanassova L. and Herzberger J., eds. – Amsterdam: Elsevier, 1992. – P. 259–267. – (*IMACS Annals of Computing and Applied Mathematics*).
- [48] JANSSON C. On self-validating methods for optimization problems // *Topics in Validated Computations* / J. Herzberger, ed. – Amsterdam: North-Holland–Elsevier, 1994. – P. 381–438. – (*Studies in computational mathematics*; 5).
- [49] KEARFOTT R.B. *Rigorous global search: continuous problems*. – Dordrecht: Kluwer, 1996.
- [50] KIRKPATRICK S., GELATT C.D., VECCHI M.P. Optimization by simulated annealing // *Science*. – 1983. – Vol. 220. – P. 671–680.
- [51] KOLEV L.V. Use of interval slopes for the irrational part of factorable functions // *Reliable Computing*. – 1997. – Vol. 3, Issue 1. – P. 83–93.
- [52] KRAWCZYK R., NEUMAIER A. Interval slopes for rational functions and associated centered forms // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1985. – Vol. 22, No. 3. – P. 604–616
- [53] KREINOVICH V., KEARFOTT R.B. Beyond convex? Global optimization is feasible only for convex objective functions: a theorem // *Journal of Global Optimization*. – 2005. – Vol. 33, Issue 4. – P. 617–624.
- [54] KREINOVICH V., LAKEYEV A.V., ROHN J., KAHL P. *Computational complexity and feasibility of data processing and interval computations*. – Dordrecht: Kluwer, 1997.
- [55] KREINOVICH V., NESTEROV V.M., ZHELUDEVA N.A. Interval methods that are guaranteed to underestimate (and the resulting new justification of Kaucher arithmetic) // *Reliable Computing*. – 1996. – Vol. 2 (2). – P. 119–124.
- [56] KUBICA B. *Interval methods for solving nonlinear constraint satisfaction, optimization and similar problems: from inequalities systems to game solutions*. – Cham: Springer Nature, 2019.
- [57] MOORE R.E. *Interval analysis*. – Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1966.
- [58] MOORE R.E. On computing the range of a rational function of  $n$  variables over a bounded region // *Computing*. – 1976. – Vol. 16. – P. 1–15.
- [59] MOORE R.E. *Methods and applications of interval analysis*. – SIAM, Philadelphia, 1979.
- [60] MOORE R.E., KEARFOTT R.B., CLOUD M.J. *Introduction to interval analysis*. – Philadelphia: SIAM, 2009.
- [61] MULLIER O., GOUBAULT E., KIEFFER M., PUTOT S. General inner approximation of vector-valued functions // *Reliable Computing*. – 2013. – P. 117–143.
- [62] NESTEROV V.M. Interval and twin-arithmetics // *Reliable Computing*. – 1997. – Vol. 3, Issue 4. – P. 369–380.
- [63] NEUMAIER A. *Interval methods for systems of equations*. – Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

- [64] RATSCHEK H. Inclusion functions and global optimization // *Mathematical Programming.* – 1985. – Vol. 33. – P. 300–317.
- [65] RATSCHEK H., ROKNE J. *Computer methods for the range of functions.* – Chichester, New York: Ellis Horwood, Halsted Press, 1984.
- [66] RATSCHEK H., ROKNE J. *New computer methods for global optimization.* – Chichester, New York: Ellis Horwood, Halsted Press, 1988.
- [67] RUMP S.M. Verification methods for dense and sparse systems of equations // *Topics in Validated Numerics* / Herzberger J., ed. – Amsterdam: Elsevier, 1994. – P. 63–135. – (Studies in computational mathematics; vol. 5)
- [68] SAINZ M.A., ARMENGOL J., CALM R., HERRERO P., JORBA L., VEHI J. *Modal interval analysis. New tools for numerical information.* – Cham-Heidelberg-New York: Springer, 2014. – (Lecture Notes in Mathematics; vol. 2091).
- [69] SHARY S.P. On optimal solution of interval linear equations // *SIAM Journal on Numerical Analysis.* – 1995. – Vol. 32, No. 2. – P. 610–630.
- [70] SHARY S.P. A surprising approach in interval global optimization // *Reliable Computing.* – 2001. – Vol. 7, No. 6. – P. 497–505.
- [71] SHARY S.P. Graph subdivision methods in interval global optimization // *Constraint Programming and Decision Making. Studies in Computational Intelligence*, vol. 539 / Ceberio M., Kreinovich V. (eds). – Cham: Springer, 2014. – P. 153–170.
- [72] SHEN ZUHE, A. NEUMAIER AND M. C. EIERMANN, Solving minimax problems by interval methods // *BIT.* – 1990. – Vol. 30. – P. 742–751.
- [73] SHEN ZUHE, WOLFE M.A. On interval enclosures using slope arithmetic // *Applied Mathematics and Computation.* – 1990. – Vol. 39, Issue 1. – P. 89–105.
- [74] SKELBOE S. Computation of rational interval functions // *BIT.* – 1974. – Vol. 14. – P. 87–95.
- [75] STOLFI J., DE FIGUEIREDO L.H. *Self-validated numerical methods and applications.* – Brazilian Mathematical Society, 1997.

## Глава 4

# Постановки интервальных задач

Предметом этой главы являются математические вопросы моделирования систем в условиях неопределённости и неоднозначности, заданных в интервальной форме. Но практические постановки используются как повод для более широкого обсуждения и уточнения таких понятий как «интервальная задача», «решение интервальной задачи», а также некоторых других фундаментальных концепций интервального анализа, которые будут далее интенсивно использоваться во всей книге. Мы вводим, в частности, понятия множеств кванторных решений и множеств АЕ-решений для интервальных систем уравнений, неравенств и более общих задач удовлетворения ограничений. В этой главе рассматриваются интервальные статические системы с зависимостью вход-выход самого общего вида, хотя далее в книге детально исследуется более простой линейный случай. Наконец, последний параграф главы посвящён обзору результатов по трудоёмкости решения различных постановок интервальных задач.

### 4.1 Анализ интервально заданных систем

#### 4.1a Описание практической ситуации

Основным практическим примером нам будет служить так называемая *обратная задача* системного анализа для статических (в описании которых не присутствует явно переменная времени) систем, заданных зависимостью вход-состояние-выход:

*Для заданных входов и выходов системы  
найти (или как-то оценить) её состояние.*

Особенность ситуации, с которой мы будем иметь дело, заключается в том, что входы и выходы системы не являются заданными точно. Для них будут известны лишь границы их возможных значений (изменений), верхняя и нижняя, или, что

эквивалентно, нам будут даны только интервалы, в пределах которых могут находиться значения входов и выходов.

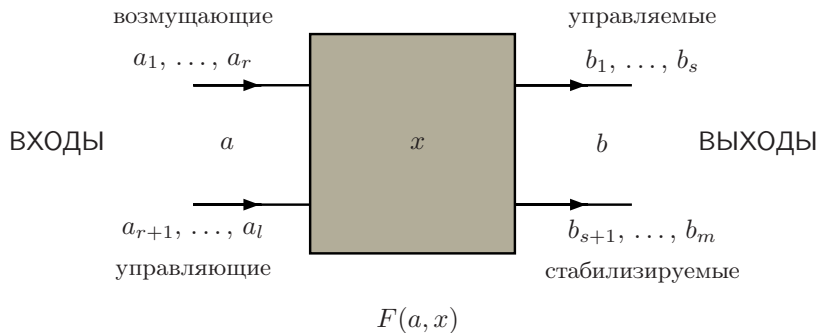


Рис. 4.1. Структурная схема статической системы управления.

Перейдём к формальным определениям. Пусть внутреннее состояние  $x$  системы, входной сигнал  $a$  и выходной отклик  $b$  описываются вещественными векторами  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $a \in \mathbb{R}^l$  и  $b \in \mathbb{R}^m$  соответственно (Рис. 4.1). Во множестве всех входных воздействий мы будем выделять

- *возмущения*  $a_1, \dots, a_r$ , которые действуют независимо от нашей воли в пределах интервалов  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$ , и
- *управления*  $a_{r+1}, \dots, a_l$ , значения которых мы сами можем устанавливать в интервалах  $\mathbf{a}_{r+1}, \dots, \mathbf{a}_l$ .

Возмущения — это те воздействия на систему, которые стремятся вывести её из заданного режима — «дестабилизируют», в то время как подходящими управлениями мы стремимся компенсировать влияние этих возмущений и способствовать достижению системой требуемых характеристик функционирования. В классической теории управления выходы системы, для которых требуется поддержание сигнала на некотором заранее заданном уровне или же его изменение в соответствии с предопределённым планом, называются, как известно, *регулируемыми выходами*. Но присутствие интервальности в описании конечного назначения системы вносит дополнительную специфику в рассматриваемую ситуацию. Именно, множество всех выходов системы естественно разбивается на

- компоненты  $b_1, b_2, \dots, b_s$ , которые мы должны быть способны перевести в любое значение из заранее заданных интервалов  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_s$  (будем называть их *интервалами достижимости*),
- и
- компоненты  $b_{s+1}, \dots, b_m$ , для которых мы должны обеспечить гарантированное попадание их значений в интервалы  $\mathbf{b}_{s+1}, \dots, \mathbf{b}_m$  (будем называть их *интервалами стабилизации*).

В последнем случае конкретные значения  $b_{s+1}, \dots, b_m$  в пределах  $\mathbf{b}_{s+1}, \dots, \mathbf{b}_m$  не столь важны, принципиален лишь сам факт принадлежности  $b_{s+1} \in \mathbf{b}_{s+1}, \dots, b_m \in \mathbf{b}_m$ . Соответственно, выходы первого типа мы будем называть *управляемыми*, тогда как выходы второго типа будут называться *стабилизируемыми*.

Примером управляемого выхода системы является координата «механической руки» робота-манипулятора. Обычно требуют, чтобы положение этой руки гарантированно «накрывало» каждую точку некоторой заданной рабочей области. Если это накрытие имеет место, то обычно не возражают и против того, чтобы манипулятор мог дополнительно достигать некоторые другие позиции вне рабочей области.

Типичным примером стабилизируемого выхода системы может служить температура внутри химического реактора в ряде химико-технологических процессов. Она не должна отличаться от номинальной  $\tilde{T}$  больше, чем на некоторую предписанную величину  $\delta T$ , но при этом любая температура из интервала  $[\tilde{T} - \delta T, \tilde{T} + \delta T]$  в равной степени приемлема для нас. Иными словами, конкретное значение этой температуры  $T$  не столь уж и важно при условии, что выполнено включение  $T \in [\tilde{T} - \delta T, \tilde{T} + \delta T]$ . В частности, некоторые значения температуры из интервала  $[\tilde{T} - \delta T, \tilde{T} + \delta T]$  могут оказаться недостижимыми реальным процессом.

Предположим, что зависимость вход-состояние-выход в рассматриваемой системе имеет вид

$$F(a, x) = b \quad (4.1)$$

с некоторым отображением  $F: \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,

$$F = \begin{pmatrix} F_1(a, x) \\ F_2(a, x) \\ \vdots \\ F_m(a, x) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad F_i(a, x) = F_i(a_1, a_2, \dots, a_l, x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$i = 1, 2, \dots, m.$$

В самом общем случае отображение  $F$  может иметь очень сложный вид, но в значительной части нашей книги мы будем считать, что все компоненты  $F_i(a, x)$  являются *элементарными функциональными выражениями* в смысле Определения 3.1.5, т. е. конечными комбинациями некоторых констант, переменных  $a_1, a_2, \dots, a_l, x_1, x_2, \dots, x_n$  и элементарных функций с четырьмя основными арифметическими операциями — сложением, вычитанием, умножением и делением. Будем также предполагать, что все  $F_i$  определены и непрерывны на своих областях задания, т. е. в пределах рассматриваемых интервалов  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l$  и области значений  $x$ . В целом ситуация описывается структурной схемой, представленной на Рис. 4.1.

Уместно отметить, что в описанной выше ситуации наше использование терминов «управление», «регулирование», «управляемый» и т. п. не вполне совпадает с тем, которое принято в классической теории автоматического управления и технической кибернетике, где обычно исследуются динамические системы с непрерывным либо дискретным временем. Тем не менее, развитие общей теории систем привело к пониманию того, что зависимость от временной переменной является второстепенной при определении «управления» и «управляемости» (см., например, [26]). Это обстоятельство делается особенно прозрачным при абстрактной математической постановке задач управления, когда фазовые траектории, фазовые ограничения, управляющие

воздействия и т. п. представляются как элементы некоторых функциональных пространств. В наиболее общей форме понятие «управляемости системы» (или, более общо, «управляемости параметризованного отображения») тесно связано с понятием «достижимости».

М. Месарович и Я. Такахара [26], в частности, определяют «управляемость» как условие того, что всякий элемент из некоторого выделенного подмножества множества прибытия рассматриваемого отображения может быть достигнут (накрыт) при условии подходящего выбора параметров и аргументов рассматриваемого отображения. Более точно, пусть отображением

$$g : M \times U \rightarrow V,$$

описывается результат  $g(m, u)$  функционирования системы (т.е., её выход) в зависимости от некоторого управляющего параметра  $m \in M$  и внешнего воздействия  $u \in U$ . Множество  $V' \subseteq V$  называется *вполне управляемым* относительно  $g$  тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие (Определение 1.2 из Главы VII книги [26]):

$$(\forall v)(\forall u)((v \in V' \text{ и } u \in U) \Rightarrow (\exists m \in M)(g(m, u) = v)).$$

Это равносильно

$$(\forall v \in V')(\forall u \in U)(\exists m \in M)(g(m, u) = v),$$

т.е. тому, что для любого состояния  $v$  из некоторого выделенного множества  $V' \subseteq V$  и любого внешнего воздействия  $u \in U$  существует значение управляющего параметра  $m$  из допустимой области  $M$ , такое что  $g(m, u) = v$ . Но в подобном виде понятие управляемости в равной мере применимо также и к статическим (безынерционным) системам, в которых переменная времени и временной интервал вообще не фигурируют (см. §5.4).

Отметим также, что теория автоматического управления не является единственной дисциплиной, имеющей дело с «управлениями». В частности, смысл, в котором мы используем термин «управление» (и ему родственные) находится в хорошем согласии с терминологией такой математической дисциплины как исследование операций. Напомним следующее повсеместно принятое определение [2, 18]: *операцией* называется целенаправленное действие, которое может быть количественно описано как

$$Z = f(X, Y),$$

где  $Z$  есть «полезность» или значение критерия, характеризующего качество функционирования системы,  $X$  — вектор переменных, которыми можно *управлять*, а  $Y$  — вектор переменных (и постоянных), не поддающихся управлению (т.е. *неуправляемых*), или, иначе, *возмущающих*. Таким образом, наше употребление слов «управление», «управляемый» и т. п. вполне законно в этом контексте.

Другое замечание. Термин «неопределённость», который мы используем в связи с управляющими входами системы, строго говоря, не вполне адекватен практическому смыслу, который вкладывается в интервальность возможных значений некоторых параметров. Например, не совсем корректно говорить о «неопределённости» по отношению к интервалам, представляющим множества возможных положений

рулей и закрылков в самолёте. Тем не менее, для единообразия терминологии мы далее используем все-таки слово «неопределённость», имея в виду как наше незнание (недостаток информации), так и неединственность (неоднозначность) возможных значений (альтернатив), аналогично тому, как это имеет место в приведённом выше примере с самолётом.

## 4.16 Предварительная постановка задачи

В связи с описанной в предшествующем разделе управляемой системой могут возникать вопросы различного сорта. Далее мы будем исследовать следующую математическую постановку — задачу гарантированного оценивания внутреннего состояния системы по значениям её входов и выходов:

Для каких состояний  $x$  системы при любых внешних возмущениях  $a_1 \in \mathbf{a}_1, \dots, a_r \in \mathbf{a}_r$  и любых *a priori* заданных значениях  $b_1 \in \mathbf{b}_1, \dots, b_s \in \mathbf{b}_s$ , мы можем выбрать соответствующие управления  $a_{r+1} \in \mathbf{a}_{r+1}, \dots, a_l \in \mathbf{a}_l$  так, чтобы выходной отклик системы  $F(a, x)$  был бы в точности равен  $b_1, \dots, b_s$  на управляемых выходах и находился бы внутри  $\mathbf{b}_{s+1}, \dots, \mathbf{b}_m$  на стабилизируемых выходах?

(4.2)

Если все входы и выходы системы были бы определены точно, то решение задачи (4.2) свелось бы к решению относительно  $x$  уравнения (4.1). В рассматриваемом нами случае, когда входы и выходы системы имеют интервальную неопределённость, мы в соответствии с терминологической традицией интервального анализа также будем говорить по поводу задачи (4.2), что «задана интервальная система уравнений»

$$F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b} \quad (4.3)$$

с интервальными параметрами  $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_l)^\top \in \mathbb{I}R^l$  и  $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m)^\top \in \mathbb{I}R^m$ . Но необходимо подчеркнуть, что интервальную систему (4.3) саму по себе следует понимать лишь как формальную запись, обозначающую семейство точечных систем  $F(a, x) = b$  с коэффициентами  $a \in \mathbf{a}$  и  $b \in \mathbf{b}$ , не более. В частности, мы даже не имеем права выполнять с (4.3) какие-либо преобразования (приводить подобные члены, переносить члены из одной части в другую и т. п.), пока не определены точный смысл «решения» системы и то, как следует понимать эквивалентность преобразований системы (4.3). Таким образом, некоторое уточнение постановки задачи совершенно необходимо, и первоначально мы определим понятие «множества решений» системы уравнений (4.3).

Начнем с того, что переформулируем словесную постановку основной задачи (4.2) в математически строгих терминах. Для этого мы воспользуемся языком *исчисления предикатов* первого порядка с логическими кванторами « $\forall$ » (квантор всеобщности, «для всех») и « $\exists$ » (квантор существования, «существует») [21]. При этом условие

для любых  $a_1 \in \mathbf{a}_1, \dots, a_r \in \mathbf{a}_r$  и для любых  $b_1 \in \mathbf{b}_1, \dots, b_s \in \mathbf{b}_s$ , существуют  $a_{r+1} \in \mathbf{a}_{r+1}, \dots, a_l \in \mathbf{a}_l$  такие что  $F_1(a, x), \dots, F_s(a, x)$  равны  $b_1, \dots, b_s$  и  $F_{s+1}(a, x), \dots, F_m(a, x)$  находятся в  $\mathbf{b}_{s+1}, \dots, \mathbf{b}_m$ ,



которое является сердцевинной постановки задачи (4.2), должно быть эквивалентным образом переформулировано как следующий предикат (логическая формула):

$$\begin{aligned}
 & (\forall a_1 \in \mathbf{a}_1) \cdots (\forall a_r \in \mathbf{a}_r) (\forall b_1 \in \mathbf{b}_1) \cdots (\forall b_s \in \mathbf{b}_s) \\
 & (\exists a_{r+1} \in \mathbf{a}_{r+1}) \cdots (\exists a_l \in \mathbf{a}_l) (\exists b_{s+1} \in \mathbf{b}_{s+1}) \cdots (\exists b_m \in \mathbf{b}_m) \\
 & (F(a, x) = b). \quad (4.4)
 \end{aligned}$$

Множество всех состояний  $x$ , отвечающих на вопрос (4.2), мы будем обозначать посредством  $\Xi$ , и оно описывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \Xi := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid & \\
 & (\forall a_1 \in \mathbf{a}_1) \cdots (\forall a_r \in \mathbf{a}_r) (\forall b_1 \in \mathbf{b}_1) \cdots (\forall b_s \in \mathbf{b}_s) \\
 & (\exists a_{r+1} \in \mathbf{a}_{r+1}) \cdots (\exists a_l \in \mathbf{a}_l) (\exists b_{s+1} \in \mathbf{b}_{s+1}) \cdots (\exists b_m \in \mathbf{b}_m) \\
 & (F(a, x) = b) \}. \quad (4.5)
 \end{aligned}$$

Соответственно, рассматриваемая нами основная задача (4.2) может быть переформулирована так:

*Найти (или как-нибудь оценить)  
множество  $\Xi$ , определённое (4.5).*

Определение (4.5), математически наиболее корректное, организовано в соответствии с так называемой *аксиомой выделения* формальной теории множеств Цермело-Френкеля.<sup>1</sup> Именно, точка  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$  принадлежит множеству (4.5) тогда и только тогда, когда подстановка её значения вместо переменной  $x$  в предикате (4.4) приводит к истинному высказыванию. Иными словами, свойство (4.4), которое указано в виде предиката после вертикальной черты в записи (4.5), «выделяет» некоторые значения  $x$ , которые и образуют множество решений.

**Определение 4.1.1** *Логическая формула, выписанная после вертикальной черты в определении множества решений (4.5) и задающая характеристическое свойство точек этого множества, будет называться выделяющим предикатом соответствующего множества решений интервальной системы уравнений (4.3).*

Подчеркнём, что, помимо задания функциональной зависимости  $F$  и интервальных векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , ключевым моментом в определении (4.5) является указание нами кванторов « $\forall$ » и « $\exists$ » при различных параметрах  $a$  и  $b$  системы (4.3). При этом множество  $\Xi$ , определяемое посредством (4.5), имеет полное право также быть названным *множеством решений* интервальной системы уравнений (4.3), наряду, например, с множеством всевозможных решений точечных систем  $F(a, x) = b$  с  $a \in \mathbf{a}$

<sup>1</sup>Иногда её также называют формальной теорией множеств ZFC по заглавным буквам фразы *Zermelo-Fraenkel-axiom of Choice*. См. [21, 22] и другие пособия по теории множеств.

и  $b \in \mathbf{b}$ . По существу,  $\Xi$  есть множество решений для (4.3) в некотором обобщённом смысле, который мы обсудим в следующих параграфах. Поэтому впредь, имея дело с множествами решений, задаваемыми определением (4.5) и другими ему аналогичными, в которых встречаются вхождения различных логических кванторов при интервальных параметрах, мы будем говорить о *множествах кванторных решений* интервальных систем уравнений, неравенств и т. п.

## 4.2 Множества решений интервальных уравнений

### 4.2а Кванторный формализм

Подытожим сделанное в §4.1. Взяв в качестве практического примера обратную задачу системного анализа (4.2), мы пришли к необходимости рассмотрения множества решений (4.5). При этом мы применили логические кванторы всеобщности и существования по отношению к интервально заданным входам системы  $a_j$ , чтобы выразить принципиальное различие между

входными воздействиями, которые не зависят от нашей воли и являются внешними неконтролируемыми возмущениями (это соответствует записи « $\forall a_j \in \mathbf{a}_j$ »), и

входными воздействиями, которые мы сами можем варьировать в пределах некоторых заданных интервалов, т. е. управлять ими по нашему желанию (это соответствует записи « $\exists a_j \in \mathbf{a}_j$ »).

По отношению к интервально заданным выходам системы  $b_i$  логические кванторы были применены для того, чтобы различать

коридоры стабилизации системы, в пределах которых требуется обеспечить функционирование системы вне зависимости от значений возмущений (это соответствует записи « $\exists b_i \in \mathbf{b}_i$ »), и

множества достижимости системы, каждое значение из которых должно быть «накрыто» в результате подходящего выбора управляющих воздействий (это соответствует записи « $\forall b_i \in \mathbf{b}_i$ »).

Но математический объект, описываемый определением (4.5), имеет и самостоятельное значение, а к введению общего определения множеств решений (4.5) можно было бы прийти также с совершенно абстрактной точки зрения, не привлекая практические соображения из анализа интервально заданных систем из §4.1.

Заметим, что любой интервал, представляющий неопределённость (неоднозначность) некоторой вещественной величины, может быть интерпретирован двояко в соответствии с двойственной природой, присущей самой интервальной неопределённости. Дело в том, что в реальных практических задачах интервалы редко интересуют нас сами по себе, как самостоятельные целостные и внутренне нерасчленимые

объекты без внутренней структуры. Не существует «интервальной массы», «интервальной скорости», так же, как и интервальных температуры, зарплаты и т. п. И масса, и скорость, и температура, и величина нашей зарплаты суть величины неинтервальные, — вещественные или целые, — так как соответствующие им измерительные шкалы имеют смысл только для вещественных или целых значений этих величин. Весы, спидометр, термометр, кассовый аппарат и т. п. являются устройствами, отображающими вещественные числа (целые в случае кассового аппарата), а отнюдь не интервалы. Интервалы возникают уже потом, когда мы рассматриваем *семейства* показаний этих вышеупомянутых приборов. Таким образом, «интервальная масса» и «интервальная зарплата» суть только лингвистические обороты, обозначающие «интервал значений массы тела», «интервал значений моей зарплаты» и т. п.

Так или иначе, в подавляющем большинстве случаев мы привлекаем для описания практической ситуации тот или иной интервал  $v$  лишь потому, что он содержит *точки*, представляющие вещественные или целые значения, для которых и имеют смысл реальные свойства и отношения окружающего нас мира. Математически эти свойства и отношения могут выражаться, например, точечными уравнениями, неравенствами и т. п. Обозначая, к примеру, такое свойство через  $P(v)$ , нетрудно видеть, что в этих условиях могут представиться следующие две принципиально различные ситуации:

- 1) Рассматриваемое свойство  $P(v)$  имеет место *для всех* точек  $v$  из заданного интервала  $v$ . Условимся говорить при этом, что  $P(v)$  — *сильное свойство*.
- 2) Свойство  $P(v)$  выполняется лишь *для некоторых* точек  $v$  из интервала  $v$ , не обязательно всех. Мы будем называть тогда  $P(v)$  *слабым свойством*.

Сказанное означает, в частности, что в первом случае интервал  $v$  отождествляется с совокупностью всех своих точек, тогда как во втором он представляет собой лишь границы, «вместилище» для некоторой неизвестной величины, которая может и не принимать некоторых значений из заданного интервала (возможно, что она принимает даже только одного значение из  $v$ ). Это различие между двумя типами интервальной неопределённости особенно выпукло проявляется в тех ситуациях, когда рассматриваемая система имеет несколько интервальных параметров, описывающих воздействия различной природы, которые, возможно, конфликтуют друг с другом (как возмущения и управления в §4.1а).

В формальной записи очерченное выше различие выражается использованием логических кванторов — либо квантора всеобщности « $\forall$ », либо квантора существования « $\exists$ »:

- в первом случае мы пишем « $(\forall v \in v) P(v)$ » и будем говорить о  $\forall$ -*типе* ( $A$ -*типе*) *неопределённости*,
- во втором случае мы пишем « $(\exists v \in v) P(v)$ » и станем говорить о  $\exists$ -*типе* ( $E$ -*типе*) *неопределённости*.

Для краткости вполне уместно употреблять обороты вроде *интервальная A-неопределённость*, *интервальная E-неопределённость* и т. п.

Следует подчеркнуть, что наши рассуждения, мотивирующие использование логических кванторов и кванторного языка в отношении интервально неопределённых

параметров, в равной мере приложимы не только к интервальным алгебраическим системам вида (4.3), но также к интервальным неравенствам, интервальным дифференциальным и интегральным уравнениям и т. п. В частности, при определении для них «решений» и «множеств решений» мы должны аккуратно принимать во внимание различие между указанными типами интервальной неопределённости.

Рассмотрим конкретные примеры. Пусть некоторый объект описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u), \quad (4.6)$$

$$t \in [0, T], \quad x(0) = x_0, \quad (4.7)$$

где  $t$  — переменная времени,

$x(t)$  — вектор-функция фазового состояния,

$u(t)$  — вектор-функция управления.

Будем предполагать, что управление  $u(t)$  — кусочно непрерывная функция с областью определения  $[0, T] \subset \mathbb{R}$ , значения которой принадлежат некоторому брусу  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^l$ , т. е.  $u(t) \in \mathbf{U}$  для любого  $t \in [0, T]$ . Мы обозначим множество всех таких функций через  $C([0, T], \mathbf{U})$ .

Напомним, что *множеством достижимости* рассматриваемой системы (4.6)–(4.7) для момента  $t = T$  называется множество всех концов  $x(T)$  траекторий системы (4.6)–(4.7), исходящих из точки  $x_0$  и соответствующих всевозможным управлениям  $u(t)$  [19, 25], т. е. множество

$$\{ x(T) \mid (x(0) = x_0) \& (\exists u(t) \in C([0, T], \mathbf{U})) (\dot{x} = f(t, x(t), u(t))) \}.$$

Усложним ситуацию, предположив, что рассматриваемый объект подвержен воздействию внешнего ограниченного неконтролируемого возмущения (шума), описываемого функцией  $v(t) \in C([0, T], \mathbf{V})$ ,  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^r$ , так что математической моделью объекта становится система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u, v), \quad (4.8)$$

$$t \in [0, T], \quad x(0) = x_0, \quad (4.9)$$

а не (4.6)–(4.7). Как известно, управление динамическим объектом, направленное на достижение некоторых целей и/или оптимизацию критерия качества, может быть выполнено одним из двух следующих способов. Именно,

- управляющее воздействие может иметь вид заранее определённой *программы*, вычисленной по информации о системе, которая известна нам *a priori* (это называется *программным управлением*),

либо

- управляющее воздействие может формироваться *a posteriori*, основываясь на информации о системе и её поведении, которую мы приобретаем уже в течение наблюдаемой части процесса (в этом случае говорят о *позиционном управлении*).

Практически первая из этих альтернатив соответствует управлению по жёстко заданному плану, а вторая — регулированию «с обратной связью». Исследование и конструирование позиционных управлений в динамических системах является предметом теории *дифференциальных игр* (см. [1, 18]), интересной и развитой математической дисциплины, останавливаться подробнее на которой в нашей книге мы не имеем возможности. Тем не менее, в рамках позиционного подхода часто требуется ответить на следующий вопрос:

*Каково множество концов траекторий  $x(T)$  рассматриваемого объекта, в которые, независимо от конкретной реализации возмущений  $v(t) \in C([0, T], \mathbf{V})$ , начальные положения объекта  $x(0)$  могут быть переведены с помощью подходящего выбора управлений  $u(t) \in C([0, T], \mathbf{U})$ ?*

Множеством точек, удовлетворяющих выписанному требованию, является в точности

$$\left\{ x(T) \mid (x(0) = x_0) \ \& \ (\forall v(t) \in C([0, T], \mathbf{U})) \right. \\ \left. (\exists u(t) \in C([0, T], \mathbf{U})) (\dot{x} = f(t, x(t), u(t), v(t))) \right\}, \quad (4.10)$$

которое может быть охарактеризовано, как некоторое «множество решений» интервальной системы дифференциальных уравнений (4.8)–(4.9) в том смысле, как мы определяли их для общей ситуации в §4.1.

Другим примером естественного возникновения «множеств кванторных решений» для интервальных дифференциальных задач является *задача о живучести*, в которой требуется переведение траектории динамической системы (4.8)–(4.9) в некоторое заранее заданное множество конечных состояний или же в заданную трубку траекторий [33, 34].

Как видим, задача исследования управления может быть эквивалентным образом переформулирована как задача нахождения точек из множества (4.10), образованного решениями, в некотором обобщённом смысле, и которое строится с использованием кванторного формализма. Рассмотренные нами идеи кванторной формализации постановок в применении к интервальным дифференциальным уравнениям всё ещё ожидают более детальной разработки и претворения в практику. Но опыт исследования интервальных неравенств и интервальных оптимизационных задач с различными типами неопределённости уже имеется (см. [7, 14, 30]).

Для интервальных линейных неравенств

$$\mathbf{A}x \leq \mathbf{b}, \quad (4.11)$$

А.П. Воцинин и Г.Р. Сотиров [9], по-видимому, были первыми, кто рассматривал множества решений

$$\begin{aligned} & \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (x \geq 0) \ \& \ (\forall A \in \mathbf{A})(\forall b \in \mathbf{b})(Ax \leq b) \}, \\ & \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (x \geq 0) \ \& \ (\exists A \in \mathbf{A})(\forall b \in \mathbf{b})(Ax \leq b) \}, \\ & \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (x \geq 0) \ \& \ (\forall A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(Ax \leq b) \}, \\ & \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (x \geq 0) \ \& \ (\exists A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(Ax \leq b) \} \end{aligned}$$

в связи с линейными задачами условной оптимизации с интервальной неопределённостью. Позднее И. Рон и Я. Креслова [75] изучали понятия *слабой разрешимости* и *сильной разрешимости* для интервальных неравенств (4.11):

- интервальная система (4.11) называется *слабо разрешимой*, если для каждого  $A \in \mathbf{A}$ ,  $b \in \mathbf{b}$  точечная система  $Ax \leq b$  имеет решение (которое в общем случае зависит от  $A$  и  $b$ );
- интервальная система (4.11) называется *сильно разрешимой* если найдется решение, удовлетворяющее всем вещественным системам  $Ax \leq b$  для каждого  $A \in \mathbf{A}$  и  $b \in \mathbf{b}$ .

Нетрудно видеть, что сильная разрешимость интервальной системы линейных неравенств  $Ax \leq b$  эквивалентна непустоте её множества решений

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \mathbf{A})(\forall b \in \mathbf{b})(Ax \leq b)\},$$

которое может являться одним из множеств кванторных решений интервальной системы неравенств  $Ax \leq b$ .

В целом, математический объект, определяемый записью (4.5), имеет самостоятельное значение, и потому целесообразно выделить его в отдельное понятие. Но, прежде чем делать это, следует отметить, что определение (4.5) всё же не является самым общим. Так как кванторы различного типа не коммутируют друг с другом, то мы можем формировать и другие множества решений для интервальных систем уравнений путём сочетания « $\forall$ » и « $\exists$ » с интервальными параметрами и комбинирования их порядка!

Например, для одномерного интервального уравнения

$$\phi(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, x) = b$$

с тремя интервальными параметрами в левой части можно рассмотреть в качестве множеств решений

$$\{x \in \mathbb{R} \mid (\exists a_2 \in \mathbf{a}_2)(\forall a_1 \in \mathbf{a}_1)(\forall b \in \mathbf{b})(\exists a_3 \in \mathbf{a}_3)(\phi(a_1, a_2, a_3, x) = b)\},$$

или

$$\{x \in \mathbb{R} \mid (\forall a_1 \in \mathbf{a}_1)(\forall a_2 \in \mathbf{a}_2)(\exists b \in \mathbf{b})(\exists a_3 \in \mathbf{a}_3)(\phi(a_1, a_2, a_3, x) = b)\},$$

и т. д.

Прежде чем дать строгое определение, напомним, что наиболее глубоким обобщением классического понятия системы уравнений (неравенств и т. п.) является так называемая *задача удовлетворения ограничений* возникшая в исследованиях по искусственному интеллекту в конце 70-х годов прошлого века [61]. Нам потребуется несколько модифицированное определение *численной задачи удовлетворения ограничений* [60]:

**Определение 4.2.1** Численной задачей удовлетворения ограничений станем называть тройку  $P = (V, D, C(x))$ , в которой

$V = \{x_1, \dots, x_n\}$  — множество переменных,

$D = \{D_1, \dots, D_n\}$  — множество областей, таких что  $D_i \subseteq \mathbb{R}$  представляет множество возможных числовых значений переменной  $x_i$ ,

$C(x) = \{C_1(x), \dots, C_m(x)\}$  — множество ограничений, где  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , а ограничение  $C_i(x)$  определяется некоторым числовым отношением (равенством, неравенством и т. п.), связывающим рассматриваемые переменные.

Решение численной задачи удовлетворения ограничений  $P = (V, D, C(x))$  — это множество

$$\{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in D, C(x) \text{ удовлетворено}\},$$

образованное всеми такими значениями переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , что они содержатся в соответствующих областях  $D_1, D_2, \dots, D_n$  и удовлетворяют всем ограничениям из  $C(x)$ .

Усложним ситуацию. Пусть фигурирующие в Определении 4.2.1 ограничения  $C_i(x)$  зависят от некоторых параметров  $p_1, p_2, \dots, p_l$ , о которых известно лишь то, что они могут принадлежать интервалам  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_l$ . Мы имеем, следовательно, зависящую от интервальных параметров систему ограничений

$$C(\mathbf{p}, x) = \{C_1(\mathbf{p}, x), \dots, C_m(\mathbf{p}, x)\},$$

$\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_l)^\top$ , и, как следствие, интервальную задачу удовлетворения ограничений  $(V, D, C(\mathbf{p}, x))$ . При этом, принимая во внимание двойственную интерпретацию интервальной неопределённости, наиболее общим определением множества решений интервальной задачи удовлетворения ограничений должно быть признано множество

$$\{x \in D \mid (Q_1 p_{x_1} \in \mathbf{p}_{x_1})(Q_2 p_{x_2} \in \mathbf{p}_{x_2}) \cdots (Q_l p_{x_l} \in \mathbf{p}_{x_l}) \\ (C(\mathbf{p}, x) \text{ удовлетворено})\}, \quad (4.12)$$

где  $Q_i$  — логические кванторы « $\forall$ » или « $\exists$ »,

$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_l)$  — вектор параметров рассматриваемой системы ограничений  $C(\mathbf{p}, x)$ ,

$\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_l)$  — интервальный вектор возможных значений этих параметров,

$\varkappa = (\varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_l)$  — некоторая перестановка натуральных чисел  $1, 2, \dots, l$ .

**Определение 4.2.2** Множества вида (4.12) будем называть множествами кванторных решений интервальной задачи удовлетворения ограничений  $(V, D, C(\mathbf{p}, x))$ .

В частности, для интервальных систем уравнений (4.3) мы принимаем

**Определение 4.2.3** Для интервальной системы уравнений

$$F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$$

множествами кванторных решений будем называть множества вида

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid (Q_1 p_{x_1} \in \mathbf{p}_{x_1})(Q_2 p_{x_2} \in \mathbf{p}_{x_2}) \cdots (Q_{l+m} p_{x_{l+m}} \in \mathbf{p}_{x_{l+m}})(F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b})\},$$

где  $Q_1, Q_2, \dots, Q_{l+m}$

— логические кванторы « $\forall$ » или « $\exists$ »,

$$(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_{l+m}) := (a_1, \dots, a_l, b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^{l+m}$$

— агрегированный (составной) вектор параметров системы уравнений,

$$(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_{l+m}) := (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m) \in \mathbb{IR}^{l+m}$$

— агрегированный вектор интервалов возможных значений параметров,

$$(\varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_{l+m})$$

— некоторая перестановка натуральных чисел  $1, 2, \dots, l+m$ .

Определения 4.2.2 и 4.2.3 являются очень общими. Каждому интервальному параметру в них соответствует одно из двух возможных значений логического квантора — « $\forall$ » или « $\exists$ » — и порядок кванторов в выделяющем предикате также существен. Следовательно, общее число множеств решений, которые, к примеру, охватываются Определением 4.2.3 для интервальной системы уравнений (4.3), далеко превосходит  $2^{l+m}$ , т. е. 2 в степени «количество интервальных параметров системы». В общем случае эти множества решений можно интерпретировать как решения некоторых *игр* или *многошаговых процессов принятия решений* в условиях интервальной неопределённости (см. следующий пункт), а также как решения некоторых минимаксных задач исследования операций [32, 80].

Рассмотрим, наконец, важный вопрос об эквивалентности преобразований с интервальными системами. Именно, какие преобразования интервальных систем уравнений сохраняют неизменными их множества решений?

Из Определения 4.2.3 следует, что если с точечным прототипом  $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$  интервальной системы уравнений (4.3) мы осуществляем какие-то эквивалентные преобразования (вроде замены переменных), не изменяющие символы переменных  $x$  и параметров  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ , множество истинности выделяющего предиката относительно  $x$  остаётся неизменным. Следовательно, если в процессе этих преобразований мы приходим к системе уравнений  $\tilde{F}(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$ , интервализацией которой является некоторая новая система уравнений

$$\tilde{F}(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b},$$

то множества решений систем  $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$  и  $\tilde{F}(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$  совпадают. Отсюда, в частности, вытекает привычная возможность переносить интервальные члены из одной части уравнения в другую «с переменной знака».



## 4.26 Теоретико-игровая интерпретация множеств решений

Известно, что одним из подходов к анализу логики взаимодействия двух или более рациональных субъектов является теория игр. Как математическая дисциплина теория игр занимается конструированием и исследованием моделей конфликтных явлений, в которых задействованы участники (называемые *игроками*), преследующие различные цели путём использования некоторых *стратегий*.

В теории игр (и, более общо, в теории многошаговых процессов принятия решений) мы должны не только описать какие параметры являются управляемыми, но также и то, кто конкретно ими управляет и в каком порядке. Напомним, что *конечной позиционной игрой* (в *нормальной форме*) называется [18] четвёрка

$$(I, X, \mathcal{R}, \{h_i\}_{i \in I}),$$

где  $I$  — конечное множество игроков;

$X$  — конечное дерево игры, узлы которого называются *позициями*, а корень называется *начальной позицией*, причём для позиций определено отношение *следования*; позиция, следующая за позицией  $x$  называется *альтернативой*  $x$ ; позиции, не имеющие альтернатив — это *завершающие позиции*, а пути, которые ведут к ним, называются *партиями*; множество завершающих позиций обычно обозначают  $X^*$ ;

$\mathcal{R}$  — разбиение множества  $X \setminus X^*$  на *подмножества приоритета*  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , такие, что  $i$ -ый игрок делает ход в позиции из  $X_i$ ;

$h_i$  — *платёжные функции* игры, т. е. функции, назначающие платёж  $i$ -ого игрока в каждой из завершающих позиций.

Вышеприведённое определение, в действительности, в полном объёме нам даже не потребуется. Для интерпретации множеств кванторных решений интервальных систем уравнений достаточно ограничиться простейшей игрой двух лиц, в которой

дерево игры является *простой цепью* [29],

платёжные функции булевозначны, т. е. принимают значения 0 или 1,

интересы игроков (т. е. получаемые ими значения платёжных функций) диаметрально противоположны.

Такие игры называются *антагонистическими*. Мы, следовательно, можем считать, что множество возможных исходов игры —  $\{0, 1\}$  — это просто состояния «выигрыш-проигрыш», причём проигрыш одного игрока означает выигрыш другого и наоборот.

Рассмотрим подобную игру между игроками  $\Pi$  (*Природа*) и  $M$  (*Мы*), в которой ходы делаются поочерёдно, один за другим, так что дерево игры есть простая цепь, и его возможные виды представлены на Рис. 4.2 в зависимости от того, кто из игроков делает первый ход. При этом в руках игрока  $\Pi$  находятся параметры, которым приписывается А-неопределённость, а игрок  $M$  делает ходы путём выбора значений параметров, которым приписана Е-неопределённость. Результат игры определяется

тем, достигнуто ли в конце концов равенство  $F(a, x) = b$  или нет: если игроку  $M$  удаётся его обеспечить, то он выиграл игру. Иначе, когда равенство  $F(a, x) = b$  не достигнуто, игрок  $M$  проиграл, а победителем является  $\Pi$ .

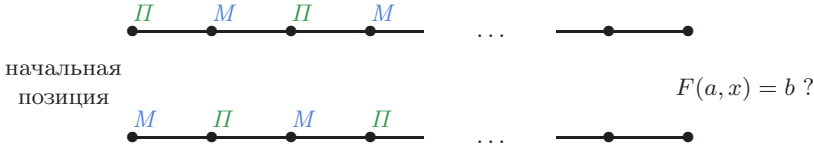


Рис. 4.2. Деревья игры, интерпретирующей множества кванторных решений

К примеру, множество решений

$$\{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists a_2 \in \mathbf{a}_2)(\forall a_1 \in \mathbf{a}_1)(\forall a_3 \in \mathbf{a}_3) (\exists a_4 \in \mathbf{a}_4)(\forall b_2 \in \mathbf{b}_2) \cdots (F(a, x) = b) \}$$

может быть проинтерпретировано следующим образом: у игрока  $M$  (который начинает игру) существует такой первый ход  $a_2$ , что вне зависимости от ответного хода игрока  $\Pi$ , на котором тот выбирает последовательно значения  $a_1$  из  $\mathbf{a}_1$  и  $a_2$  из  $\mathbf{a}_2$ , игрок  $M$  снова найдет подходящий ответ в виде  $a_4$  из  $\mathbf{a}_4$  и т. д., так что равенство  $F(a, x) = b$  будет в конечном итоге достигнуто.

В заключение отметим, что в книге [53] В. Крейнович с соавторами дают краткий критический обзор развиваемого нами кванторного формализма и указывают на некоторые его достоинства и недостатки.

### 4.2в Множества АЕ-решений

Введённое в предыдущих пунктах понятие кванторных множеств решений интервальных систем уравнений отличаются чрезвычайной общностью, и, чтобы не потонуть в огромном многообразии охватываемых им множеств решений, имеет смысл как-то структурировать или даже ограничить наши рассуждения. Далее в нашей книге мы собираемся исследовать лишь множества решений вида (4.5), у которых в выделяющем предикате все вхождения квантора всеобщности « $\forall$ » предшествуют вхождениям квантора существования « $\exists$ ». Переформулируя это условие в терминах алгебры логики, можно сказать, что соответствующий выделяющий предикат должен иметь АЕ-форму.

**Определение 4.2.4** Множествами АЕ-решений (или, иначе, АЕ-множествами решений) называются множества решений интервальных уравнений (неравенств и т. п.) для которых выделяющий предикат имеет АЕ-форму.

Рассмотрим для множеств АЕ-решений возможные способы описания того, как распределены различные типы неопределённости по интервальным параметрам системы уравнений.

1. Поскольку порядок логических кванторов в выделяющем предикате фиксируется теперь Определением 4.2.4, то простейший способ описания типов неопределённости — прямое указание кванторов, соответствующих тем или иным элементам интервальной системы. Именно, введём  $n$ -вектор  $\alpha = (\alpha_i)$  и  $m$ -вектор  $\beta = (\beta_i)$ , составленные из логических кванторов и такие, что

$$\alpha_i := \begin{cases} \forall, & \text{если } \mathbf{a}_i \text{ имеет А-неопределённость,} \\ \exists, & \text{если } \mathbf{a}_i \text{ имеет Е-неопределённость,} \end{cases} \quad (4.13)$$

$$\beta_i := \begin{cases} \forall, & \text{если } \mathbf{b}_i \text{ имеет А-неопределённость,} \\ \exists, & \text{если } \mathbf{b}_i \text{ имеет Е-неопределённость.} \end{cases} \quad (4.14)$$

Указание, наряду с самой интервальной системой (4.3), векторов  $\alpha$  и  $\beta$  полностью определяет соответствующее множество АЕ-решений.

2. Другой способ представления типов неопределённости, соответствующих элементам интервальной системы, состоит в задании разбиений индексных множеств компонент векторов  $\mathbf{a}$  и правой части  $\mathbf{b}$ . Более точно, пусть все множество индексов  $i$  компонент  $a_i$ , т. е. множество  $\{1, 2, \dots, l\}$ , разбито на две непересекающиеся части  $\hat{\Gamma} := \{\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_p\}$  и  $\check{\Gamma} := \{\check{\gamma}_1, \dots, \check{\gamma}_q\}$ ,  $p + q = l$ , так, что

$$\begin{aligned} a_i &\text{ имеет интервальную А-неопределённость при } i \in \hat{\Gamma}, \\ a_i &\text{ имеет интервальную Е-неопределённость при } i \in \check{\Gamma}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом введём непересекающиеся множества натуральных индексов  $\hat{\Delta} := \{\hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_s\}$  и  $\check{\Delta} := \{\check{\delta}_1, \dots, \check{\delta}_t\}$ ,  $\hat{\Delta} \cup \check{\Delta} = \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $s + t = m$ , так, что в векторе правых частей системы уравнений

$$\begin{aligned} b_i &\text{ имеет интервальную А-неопределённость при } i \in \hat{\Delta}, \\ b_i &\text{ имеет интервальную Е-неопределённость при } i \in \check{\Delta}. \end{aligned}$$

Мы допускаем также естественную возможность того, что некоторые из множеств  $\hat{\Gamma}$ ,  $\check{\Gamma}$ ,  $\hat{\Delta}$ ,  $\check{\Delta}$  пусты.

Очевидно, что если  $\alpha = (\alpha_i)$  и  $\beta = (\beta_i)$  — кванторные векторы, определённые в предшествующем пункте нашего списка, то

$$\alpha_i = \begin{cases} \forall, & \text{если } i \in \hat{\Gamma}, \\ \exists, & \text{если } i \in \check{\Gamma}, \end{cases} \quad \beta_i = \begin{cases} \forall, & \text{если } i \in \hat{\Delta}, \\ \exists, & \text{если } i \in \check{\Delta}, \end{cases}$$

и поэтому задание  $\hat{\Gamma}$ ,  $\check{\Gamma}$ ,  $\hat{\Delta}$ ,  $\check{\Delta}$  приводит к полному описанию множества АЕ-решений для интервальной системы уравнений.

3. Третий способ описания распределения типов неопределённости по интервальным параметрам системы заключается в указании дизъюнктивных (взаимнодополнительных) разложений векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . Именно, определим интервальные

векторы  $\mathbf{a}^\forall = (\mathbf{a}_i^\forall)$  и  $\mathbf{a}^\exists = (\mathbf{a}_i^\exists)$  и интервальные векторы  $\mathbf{b}^\forall = (\mathbf{b}_i^\forall)$  и  $\mathbf{b}^\exists = (\mathbf{b}_i^\exists)$ , тех же размеров, что  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  соответственно, следующим образом:

$$\mathbf{a}_i^\forall := \begin{cases} \mathbf{a}_i, & \text{если } \alpha_i = \forall, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad \mathbf{a}_i^\exists := \begin{cases} \mathbf{a}_i, & \text{если } \alpha_i = \exists, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (4.15)$$

$$\mathbf{b}_i^\forall := \begin{cases} \mathbf{b}_i, & \text{если } \beta_i = \forall, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad \mathbf{b}_i^\exists := \begin{cases} \mathbf{b}_i, & \text{если } \beta_i = \exists, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (4.16)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{a}^\forall + \mathbf{a}^\exists, & \mathbf{a}_i^\forall \cdot \mathbf{a}_i^\exists &= 0, \\ \mathbf{b} &= \mathbf{b}^\forall + \mathbf{b}^\exists, & \mathbf{b}_i^\forall \cdot \mathbf{b}_i^\exists &= 0 \end{aligned}$$

для любого  $i$ . В векторах  $\mathbf{a}^\forall$  и  $\mathbf{b}^\forall$  оказываются сосредоточенными все интервальные элементы системы, соответствующие А-неопределённости, тогда как в векторах  $\mathbf{a}^\exists$  и  $\mathbf{b}^\exists$  хранятся все элементы, соответствующие интервальной Е-неопределённости.

Следует отметить, что три рассмотренные группы объектов, возникающих в связи с множествами АЕ-решений интервальных систем уравнений, именно

- 1) кванторные векторы  $\alpha$  и  $\beta$ ,
- 2) разбиения индексных множеств векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  на непересекающиеся подмножества  $\hat{\Gamma}, \check{\Gamma}, \hat{\Delta}, \check{\Delta}$ ,
- 3) дизъюнктные разложения интервальных векторов  $\mathbf{a} = \mathbf{a}^\forall + \mathbf{a}^\exists$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{b}^\forall + \mathbf{b}^\exists$ ,

находятся во взаимно однозначном соответствии, таком что указание любого одного из пунктов этой триады немедленно определяет два других. Далее мы будем интенсивно использовать все три способа описания и переходить от одного из них к другому без специальных разъяснений.

Подытоживая сказанное, мы можем дать следующее

**Определение 4.2.5** Пусть для интервальной системы уравнений  $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$  распределение типов неопределённости по интервальным элементам параметров  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  задаётся кванторными векторами  $\alpha$  и  $\beta$ , указанными в (4.13)–(4.14), или, что эквивалентно, соответствующими разбиениями индексных множеств векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , или же дизъюнктными разложениями  $\mathbf{a} = \mathbf{a}^\forall + \mathbf{a}^\exists$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{b}^\forall + \mathbf{b}^\exists$ . Множество

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \begin{aligned} &(\forall a_{\hat{\gamma}_1} \in \mathbf{a}_{\hat{\gamma}_1}) \cdots (\forall a_{\hat{\gamma}_p} \in \mathbf{a}_{\hat{\gamma}_p}) (\forall b_{\check{\delta}_1} \in \mathbf{b}_{\check{\delta}_1}) \cdots (\forall b_{\check{\delta}_s} \in \mathbf{b}_{\check{\delta}_s}) \\ &(\exists a_{\check{\gamma}_1} \in \mathbf{a}_{\check{\gamma}_1}) \cdots (\exists a_{\check{\gamma}_q} \in \mathbf{a}_{\check{\gamma}_q}) (\exists b_{\hat{\delta}_1} \in \mathbf{b}_{\hat{\delta}_1}) \cdots (\exists b_{\hat{\delta}_t} \in \mathbf{b}_{\hat{\delta}_t}) \\ &(F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}) \end{aligned} \right\}$$

мы будем называть множеством АЕ-решений типа  $\alpha\beta$  для интервальной системы уравнений  $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$  (либо АЕ-множеством решений типа  $\alpha\beta$ ) и обозначать через  $\Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ .

Таким образом, в соответствии в новой терминологией множество (4.5), возникшее в §4.1б в связи с задачей системной идентификации, является множеством АЕ-решений для соответствующей интервальной системы уравнений. Крайними частными случаями данного определения являются следующие три множества решений, имеющие свои собственные названия:

- *Объединённое множество решений*

$$\Xi_{uni}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists a \in \mathbf{a})(\exists b \in \mathbf{b})(F(a, x) = b) \}, \quad (4.17)$$

образованное решениями всех точечных систем  $F(a, x) = b$  с  $a \in \mathbf{a}$  и  $b \in \mathbf{b}$ . Оно является, несомненно, наиболее популярным из множеств решений, и часто называется просто *множеством решений*. Его аналогом для динамических систем является хорошо известное *множество достижимости* (см. [19, 25]).

- *Допусковое множество решений*

$$\Xi_{tol}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall a \in \mathbf{a})(\exists b \in \mathbf{b})(F(a, x) = b) \}, \quad (4.18)$$

образованное всеми точечными векторами  $x$ , такими что образ  $F(a, x)$  попадает в правую часть  $\mathbf{b}$  для любого  $a \in \mathbf{a}$  (см. Главу 6).

- *Управляемое множество решений*

$$\Xi_{ctl}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall b \in \mathbf{b})(\exists a \in \mathbf{a})(F(a, x) = b) \}, \quad (4.19)$$

образованное точечными векторами  $x$ , такими что для любого желаемого  $b \in \mathbf{b}$  мы можем найти подходящий параметр  $a \in \mathbf{a}$ , удовлетворяющий  $F(a, x) = b$  (см. §5.4).

В качестве примера возникновения множеств АЕ-решений рассмотрим проблему управления качеством продукции на промышленном предприятии. Похожая модель была рассмотрена в интервальном контексте С. Хаджихасан, Э. Вальтером и Л. Пронцато [43], но в более упрощённом виде. Именно, в [43] рассмотрено управление качеством только на этапе проектирования, тогда как мы собираемся исследовать более полную и реалистичную модель, которая учитывает неопределённость (незнание) как на этапе проектирования, так и на этапе собственно производства.

Развивая идеи японского исследователя Г. Тагучи (см., например, [43]), естественно разделить множество всех факторов (параметров), влияющих на выходные характеристики производства некоторой продукции, на следующие три подмножества:

- *проектируемые факторы*  $x \in \mathbb{R}^n$ , значения которых выбираются на этапе проектирования продукции,
- *факторы помех*  $v \in \mathbb{R}^q$ , значения которых мы не можем ни предсказать на стадии проектирования, ни изменить в процессе производства, и

- факторы управления производством  $u \in \mathbb{R}^p$ , которые мы можем и должны использовать на стадии производства для компенсации влияний факторов помех, чтобы обеспечить желаемые выходные характеристики производства.

Типичная задача управления качеством продукции состоит в требовании достичь определённых целевых значений  $y_i^*$  рассматриваемых характеристик функционирования  $y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , в то время как зависимость  $y_i$  от факторов  $u$ ,  $v$ ,  $x$  описывается некоторой математической моделью

$$y_i = F_i(u, v, x), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

с известными функциями  $F_i : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

При этом мы предполагаем, что единственная доступная информация о значениях факторов помех выражена в виде интервалов их возможных значений:  $v_i \in \mathbf{v}_i = [\underline{v}_i, \bar{v}_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, q$ . Аналогично, производственные факторы  $u_i$  также не могут быть совершенно произвольными. Как правило, границы их изменений тоже конечны, т. е. мы можем выбирать их из некоторых интервалов  $u_i \in [\underline{u}_i, \bar{u}_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ . Наконец, существенной модификацией нашей модели в сравнении с рассмотренной в [43], является то, что на выходе производственного процесса вместо точечных целевых значений  $y_i^*$  мы назначаем для допустимых характеристик функционирования интервалы ненулевой ширины  $\mathbf{y}_i = [\underline{y}_i, \bar{y}_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , — допуски, — попадание в которые разрешается в соответствии со спецификацией процесса и/или критериями качества. В частности, если  $\underline{y}_i = \bar{y}_i = y_i^*$ , мы приходим к упрощённой модели из [43].

В описанной ситуации основная задача управления качеством формулируется следующим образом:

*Как следует выбрать проектируемые параметры  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , чтобы для любых возмущающих факторов  $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_q$ , лежащих в пределах интервалов  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q$  соответственно, могли бы быть найдены такие факторы управления производством  $\tilde{u}_1 \in \mathbf{u}_1, \dots, \tilde{u}_p \in \mathbf{u}_p$ , что результирующие выходные характеристики  $F_i(\tilde{u}, \tilde{v}, x)$  будут оставаться в пределах  $\mathbf{y}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , заданных спецификацией производственного процесса?*

Нетрудно понять, что все такие проекты  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$  образуют множество

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall v_1 \in \mathbf{v}_1) \cdots (\forall v_q \in \mathbf{v}_q) (\exists u_1 \in \mathbf{u}_1) \cdots (\exists u_p \in \mathbf{u}_p) \right. \\ \left. (F_1(u, v, x) \in \mathbf{y}_1 \ \& \ \cdots \ \& \ F_m(u, v, x) \in \mathbf{y}_m) \right\},$$

или, если мы положим,  $y = (y_1, \dots, y_m)^\top$ ,

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall v_1 \in \mathbf{v}_1) \cdots (\forall v_q \in \mathbf{v}_q) (\exists u_1 \in \mathbf{u}_1) \cdots (\exists u_p \in \mathbf{u}_p) \right. \\ \left. (\exists y_1 \in \mathbf{y}_1) \cdots (\exists y_m \in \mathbf{y}_m) (F(u, v, x) = y) \right\},$$

что в точности является некоторым множеством АЕ-решений, как они были опреде-

лены выше, для интервальной системы уравнений

$$\begin{cases} F_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}, x) = \mathbf{y}_1, \\ \vdots \\ F_m(\mathbf{u}, \mathbf{v}, x) = \mathbf{y}_m, \end{cases}$$

с  $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p)^\top$  и  $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p)^\top$ .

Практический пример возникновения более сложного множества АЕ-решений в задаче управления многомерным объектом можно найти в работе Р.С. Ивлева и С.П. Соколовой [17].

Завершая параграф, необходимо сделать следующее замечание. Все наши рассуждения и построения, касающиеся кванторного формализма, носят весьма общий характер, но всё-таки ориентированы на интервальные системы уравнений определённого вида (4.3) —

$$F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b},$$

— в котором неизвестные переменные присутствуют в составе некоторых выражений лишь в левой части уравнения, а в правой части находится ненулевой свободный член. Но нередко возникает необходимость рассмотрения интервальных систем уравнений и других видов.

Например, иногда более естественной может быть запись системы уравнений в виде  $F(\mathbf{a}, x) = 0$ . Для случая, когда количество переменных совпадает с количеством уравнений (т. е.  $m = n$ ), часто имеет смысл перейти к так называемой рекуррентной форме системы уравнений, когда вектор неизвестной переменной выделен в одной из частей «в чистом виде»:

$$x = G(\mathbf{a}, x), \tag{4.20}$$

где  $G(\mathbf{a}, x) = (G_1(\mathbf{a}, x), G_2(\mathbf{a}, x), \dots, G_n(\mathbf{a}, x))^\top$  и  $G : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . В этой ситуации для описания интервальной неопределённости в системе применяется один интервальный вектор  $\mathbf{a}$ , что, по крайней мере формально, не укладывается в выстроенную выше схему «множеств АЕ-решений типа  $\alpha\beta$ » и пр.

С другой стороны, определения множеств кванторных решений и множеств АЕ-решений не несут никакой специфики вида рассматриваемой интервальной системы уравнений и формулируются для (4.20) и прочих форм интервальных систем уравнений совершенно так же, как и для (4.3). В частности, что касается рекуррентной формы, то её единственная особенность будет состоять в том, что, говоря о величине и характере интервальной неопределённости, мы должны будем задействовать *один* буквенный идентификатор, который соответствует одному вектору интервальной неопределённости. Иными словами, нужно говорить не о «множествах АЕ-решений типа  $\alpha\beta$ », а о «множествах АЕ-решений типа  $\alpha$ », употребляя, к примеру, обозначение  $\Xi_\alpha(G, \mathbf{a})$ :

$$\Xi_\alpha(G, \mathbf{a}) := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{\mathbf{a}} \in \mathbf{a}^\forall)(\exists \check{\mathbf{a}} \in \mathbf{a}^\exists)(x = G(\hat{\mathbf{a}} + \check{\mathbf{a}}, x)) \}.$$

## 4.3 Детализация постановки задачи

### 4.3а Обсуждение

Теперь, после того, как мы определили, что является множествами решений для интервальных систем уравнений, неравенств и т.п., настало время решить, что делать с ними дальше.

Это отнюдь не праздный вопрос. Фундаментальный факт, касающийся окружающей нас реальности, состоит в том, что мы можем наблюдать, исследовать и использовать объекты, которые не просто *конечны*, но ещё и *не слишком сложны*. Конечность наших восприятий, рассмотрений, рассуждений, вычислений и т.п. широко осознана людьми и обычно не встречает возражений. Но какое обстоятельство является столь специфичным в интервальных задачах, что мы должны наложить второе требование — «быть не слишком сложным»?

Ответ заключается в том, что, вступая в царство множеств, рассматриваемых как существенно структурированные, составные объекты, образованные из различных элементарных частей, мы сталкиваемся с растущей (и даже доминирующей) ролью комбинаторных эффектов, которые едва ли обнаруживают себя в традиционной «точной» математике. Но комбинаторика — это, как известно, основной источник больших, очень больших и огромных чисел, которые могут превзойти любую реальную физическую величину, и уж тем более количество операций, которое способны выполнить для решения практических задач любые настоящие и будущие вычислительные устройства.

Всё сказанное в полной мере относится к множествам кванторных решений и множествам АЕ-решений интервальных задач, введённым в §4.2а и §4.2в. Они являются неоднородными, сложно структурированными (иногда даже составными) объектами, так что уже в простейших практических ситуациях прямое вычисление и описание этих множеств решений оказывается, как правило, трудоёмким, утомительным, а часто и просто невозможным.

Например, для интервальных линейных систем уравнений вида  $Ax = b$  с  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  и  $b \in \mathbb{R}^m$  длина полного описания множеств АЕ-решений в общем случае может расти быстрее, чем  $2^n$ , т.е. чем количество ортантов пространства  $\mathbb{R}^n$ . Это следует из того, что множества решений могут пересекать все ортанты в  $\mathbb{R}^n$ , а каждое из таких пересечений является выпуклым полиэдральным множеством, описание которого требует перечисления всех ограничивающих его гиперплоскостей и т.п. (см. §5.26). То же самое утверждают теоретические результаты А.В. Лакеева [59], В. Крейнвича, А.В. Лакеева и И. Рона [53] и многие другие: задача распознавания и оценивания множеств АЕ-решений интервальных линейных систем принципиально труднорешаема (NP-трудна) при условии, что мы не накладываем никаких ограничений на интервальную матрицу системы. Таким образом, сложность прямого и исчерпывающего описания множеств решений становится заведомо большей знаменитого «шахматного числа» ( $2^{64} - 1$ ), если размерность интервальной системы равна всего лишь 64. Когда же эта размерность достигает нескольких сотен, то длина точного и исчерпывающего описания для множеств решений интервальных линейных систем делается сравнимой с количеством элементарных частиц во всей наблюдаемой Вселенной. Э. Борель в книге [6], к примеру, указывает величину  $10^{200}$  как максимально число микрособытий, которое могло произойти со всеми элементарными частицами



во Вселенной после так называемого Большого Взрыва, который считается началом цикла развития Вселенной. И эта оценка не увеличилась принципиально со времени выхода цитируемой книги в середине XX века.

Заметим, что упомянутые выше размерности интервальных систем уравнений — десятки и сотни — являются не столь уж и большими. Для сравнения, современные экономики вовлекают тысячи взаимодействующих объектов и участников, и даже в агрегированных балансовых моделях могут рассматриваться сотни отраслей и подотраслей промышленности.

Практическим следствием этих фактов является неизбежная необходимость как-то округлять точные описания множеств решений, т. е. заменять эти множества, полные описания которых слишком сложны, на более простые множества — их *приближения* (или оценки) с меньшей сложностью описания. И делать это нужно способом, который вытекает из смысла решаемой практической задачи. В целом такая процедура приближения множества решений должна быть введена как составная часть в формализованную постановку задачи, которой занимаются математики.

Что касается выбора конкретного критерия приближения и приближающих множеств, то имеет смысл определять их также сообразно решаемой практической задаче. Кроме того, в рассмотрение уместно ввести меру (метрику)  $\varrho$  для измерения отклонения, в некотором заданном смысле, оценивающего множества от множества решений. Но главной отличительной особенностью рассматриваемых нами интервальных задач, которая делает их столь непохожими, например, на классические задачи теории приближения, состоит в присутствии помимо метрики  $\varrho$  некоторого качественного (не количественного!) требования, которому должен удовлетворять ответ к задаче и которое совсем не связано с  $\varrho$ . Это качественное требование является, как правило, условием на взаимное расположение множества решений и оценивающего множества. Например, при вычислении области значений функции нам часто нужны не просто какие-то оценки этой области значений, сколь бы близки они к ней ни были, но лишь такие оценки, которые гарантированно приближают эту область значений *снизу* и *сверху*. Дальнейшие примеры — в следующем разделе.

### 4.36 Что такое «интервальная задача оценивания»?

Подытоживая обсуждение, мы приходим к следующей формализации понятия одного из широко распространённых классов интервальных задач, которые мы будем называть *интервальными задачами оценивания*:

**Определение 4.3.1** *Массовой интервальной задачей оценивания  $P$  назовём упорядоченную четверку вида  $(S, \mathcal{E}, M, \varrho)$ , где*

$S$  — семейство множеств решений — отображение некоторого подмножества  $\Pi$  интервального пространства  $\mathbb{IR}^P$  в множество подмножеств  $\mathbb{R}^q$ , причём  $\Pi$  описывает возможные значения интервалов параметров задачи  $P$ , так что индивидуальная задача оценивания  $I$  выделяется из  $P$  путём присвоения переменным в  $S$  некоторых конкретных значений, которые определяют (в результате процесса решения или каким-нибудь другим способом) индивидуальное множество решений  $\Xi \in S$ ;

$\mathcal{E}$  — класс оценивающих множеств, являющийся каким-то множеством интервалов (брусом, шаром определённой нормы и т. п.), посредством которых мы собираемся приближать множества решений из  $\mathcal{S}$ ;

$\mathcal{M}$  — способ оценивания множеств решений, т. е. бинарное отношение между множествами  $\mathcal{S}$  и  $\mathcal{E}$ , которое должно удовлетворяться в соответствии с содержательным смыслом решаемой задачи;

$\rho$  — неотрицательный функционал на  $\mathcal{S} \times \mathcal{E}$  (метрика), который определяется постановкой задачи и указывает «погрешность» результата, т. е. меру близости оценивающего множества к множеству решений  $\Xi$ .

Под решением индивидуальной задачи  $I$  будем понимать такое оценивающее множество  $\Omega \in \mathcal{E}$ , что удовлетворено отношение  $\Xi \mathcal{M} \Omega$  и, возможно, дополнительно выполняется некоторое условие на величину  $\rho(\Xi, \Omega)$ .

В современном интервальном анализе популярными способами оценивания являются (см. Рис. 4.3)

*внешнее интервальное оценивание*, когда ищется брус  $\mathbf{E} \in \mathbb{IR}^n$ , объёмлющий множество решений  $\Xi$ , т. е. такой что  $\mathbf{E} \supseteq \Xi$ ,

*внутреннее интервальное оценивание*, когда ищется брус  $\mathbf{E} \in \mathbb{IR}^n$ , содержащийся во множестве решений  $\Xi$ , т. е. такой что  $\mathbf{E} \subseteq \Xi$ .

Внешние и внутренние оценки, встречаясь в большом количестве практически важных интервальных задач не являются, конечно же, единственно возможными. В реальной жизни очень часто приходится иметь дело с различными другими способами оценивания множеств решений.

Например, нередко необходимо минимизировать или максимизировать на множестве решений некоторый функционал. В случае линейного функционала, задаваемого скалярным произведением вида  $c^T x$ , такая оптимизация имеет ясный геометрический смысл: она показывает, насколько далеко простирается оцениваемое множество решений в направлении вектора  $c$ , причём за единицу длины ответа принимается значение  $\|c\|_2^{-1}$ .

Другой пример. Если  $\mathcal{E} = \mathbb{IR}^n$ , т. е. оценивающими множествами являются  $n$ -мерные брусы (интервальные векторы), то внешнее интервальное оценивание множества решений  $\Xi$  брусом  $\mathbf{E}$  эквивалентно тому, что

$$\text{pr}_i \Xi \subseteq \mathbf{E}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где  $\text{pr}_i$  — операция взятия проекции множества на  $i$ -ую координатную ось. Требуя для оценивающих брусом обратные включения

$$\text{pr}_i \Xi \supseteq \mathbf{E}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

мы получаем способ оценивания, который может быть назван «слабым внешним оцениванием» (см. Рис. 4.3). Этот тип оценивания используется в ряде задач идентификации [9], а также когда необходимо знать точность внешнего интервального оценивания множеств решений [76].

Нередко мы должны гарантировать включение  $\text{pr}_i \Xi \subseteq \mathbf{E}_i$  не для всех, а только для некоторых компонент  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , тогда как для остальных  $i$  требуется

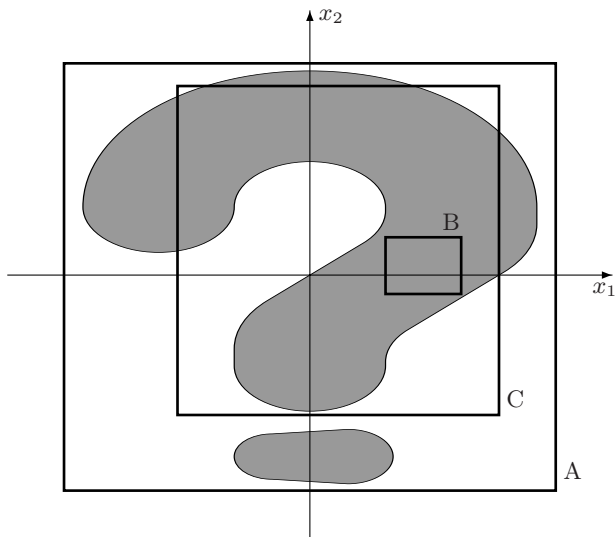


Рис. 4.3. Оценка множества решений (затенённый вопросительный знак) «внешним» брусом (A), «внутренним» брусом (B) и «слабым внешним» брусом (C).

обратное включение  $\text{pr}_i \Xi \supseteq E_i$ . Иными словами, для некоторых индексов  $i$  при этом нужны нижние по координатным оценкам для  $\min\{x_i \mid x \in \Xi\}$  и верхние — для  $\max\{x_i \mid x \in \Xi\}$ , а для остальных индексов  $i$  необходимо получить для этих же величин по координатным оценкам противоположного смысла. Задаваемый таким образом способ оценивания естественно назвать «смешанным оцениванием».

Наконец, в некоторых практических задачах требуется оценивать не всё множество решений задачи, а лишь некоторую его часть, интересующую пользователя в силу каких-то содержательных (физических, экономических и т. п.) соображений. Например, так происходит в случае, когда множество решений неограниченно, и потому не имеет смысла оценивать его целиком. Это может быть в случае, когда нас по каким-то причинам интересует лишь некоторое подмножество всего множества решений, которое только и реализуется на практике. Математически подобные постановки задач могут быть сформулированы, к примеру, как задачи нахождения оценок для пересечения множества решений с каким-то заранее заданным брусом. Мы будем говорить при этом о *локальном оценивании* множества решений (см. §7.8).

Обратимся теперь к рассмотрению классов оценивающих множеств. На практике помимо обычных интервалов одномерными оценивающими множествами могут быть мультиинтервалы (см. §1.11б) или «интервалы» арифметики Кэхэна (см. §1.11а). В многомерном случае кроме традиционных прямых произведений вещественных интервалов в качестве оценивающих множеств используются

- параллелепипеды с гранями, не обязательно параллельными координатным осям [41],
- параллелотопы (иногда называемые зонотопами) и выпуклые полиэдры [48, 54],

- эллипсоиды (популярные в дифференциальных задачах, см. [31, 42, 55] и указанные там ссылки),
- шары относительно некоторой нормы в  $\mathbb{R}^n$  [8],

и т. п. На комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  наряду с интервалами в виде кругов и прямоугольников (см. §1.8) широко используются круговые кольца [68], круговые секторы [46] и даже «полумесяцы» в  $\mathbb{C}$ .

В случае небольших размерностей (2, 3 или 4) нередко практикуют «исчерпывающее оценивание» множества решений объединением брусков локальных оценок (Рис. 4.4). Исчерпывающее оценивание может быть как внешним, так и внутренним. Оно может оказаться очень полезным, например, при наглядном представлении областей устойчивости систем управления [15], при описании их множеств управляемости [37], а также во многих других практических задачах.

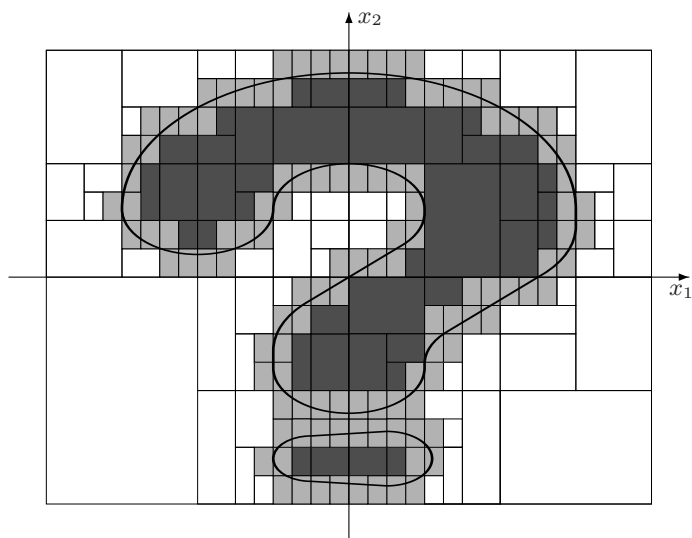


Рис. 4.4. Исчерпывание, внутреннее и внешнее, множества решений (вопросительный знак) объединением брусков.

Суммируя вышесказанное, можно констатировать существование огромного многообразия как оценивающих множеств, так и способов оценивания множеств решений, что имеет следствием огромное разнообразие постановок интервальных задач.

Отметим совершенно специфическую роль третьего члена четверки  $(\mathcal{S}, \mathcal{E}, \mathcal{M}, \rho)$ , — способа оценивания  $\mathcal{M}$ . Можно сказать, что именно присутствие отношения  $\mathcal{M}$  в первую очередь обуславливает своеобразие и особенность формы интервальных задач оценивания. Как мы уже упоминали, решение этих задач должно прежде всего удовлетворять некоторому *качественному условию*, выраженному способом оценивания  $\mathcal{M}$ , а лишь потом принимаются во внимание ошибка, близость к идеальному множеству решений и т. п. Решение задачи внешнего оценивания, к примеру, обязано оценивать множество решений извне, т. е. давать его внешние оценки, а иначе оно

просто не является решением этой задачи!

Завершая обсуждение, следует сказать, что ответ на вопрос «что делать с множеством решений?» зависит от конкретной рассматриваемой практической задачи, т. е., к примеру, от конечных целей анализа системы в применении к нашей задаче (4.2).

Конечно, в интервальном анализе существуют задачи, не укладывающиеся в выписанную выше схему «задачи оценивания». Таковы, например, задачи проверки особенности или неособенности интервальной матрицы, других её свойств (Глава 2), задача вычисления формального решения интервальной системы уравнений (Глава 12), а также ряд других. Но Определением 4.3.1 выделяется широкий и практически важный класс задач, которые специфичны именно для интервального анализа, тогда как остальные постановки традиционны для математики вообще. К примеру, задачи проверки неособенности, устойчивости и т. п. свойств матрицы — это типичные задачи распознавания, а задача нахождения формального решения — это не что иное, как задача вычисления решения уравнения в некоторой специальной алгебраической системе.

### 4.3в Задачи, которые будут рассматриваться

В оставшейся части нашей книги мы собираемся рассмотреть две наиболее популярные интервальные задачи оценивания — *внутреннюю* и *внешнюю*, т. е. задачи оценивания множеств решений  $\Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$  *подмножествами* и *объемлющими множествами*. Они являются также теми простейшими постановками, которые могут входить составной частью в более сложные интервальные задачи.

Оценивание подмножествами важно нам в тех случаях, когда ответ к задаче, т. е. оцениваемое множество, должно состоять лишь из точек, для которых справедливо определяющее условие (4.2). Оценивающие множества, которые находятся в любом другом отношении с оцениваемым множеством решений, могут содержать точки, для которых неверно (4.2), что нередко неприемлемо для практики. Короче говоря, лишь для подмножеств  $\Pi \subseteq \Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$  ответ на вопрос (4.2) остаётся справедливым для всех точек  $x \in \Pi$ .

Выбирая более простыми оценочными множествами брусы с гранями, параллельными координатным осям (т. е. интервальные векторы), мы приходим к задаче внутреннего интервального оценивания множеств решений (см. Рис. 4.5):

Для интервальной системы уравнений  $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$  и кванторных векторов  $\alpha$  и  $\beta$  того же размера, что векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  соответственно, найти брусы содержащийся во множестве решений  $\Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ .

(4.21)

Ниже мы для краткости иногда будем называть эту задачу *внутренней задачей* для интервальной системы уравнений  $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$  с распределением типов интервальной неопределённости, задаваемым квантификаторами  $\alpha$  и  $\beta$ , или, что эквивалентно, дизъюнктивными разложениями  $\mathbf{a} = \mathbf{a}^{\forall} + \mathbf{a}^{\exists}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{b}^{\forall} + \mathbf{b}^{\exists}$ .

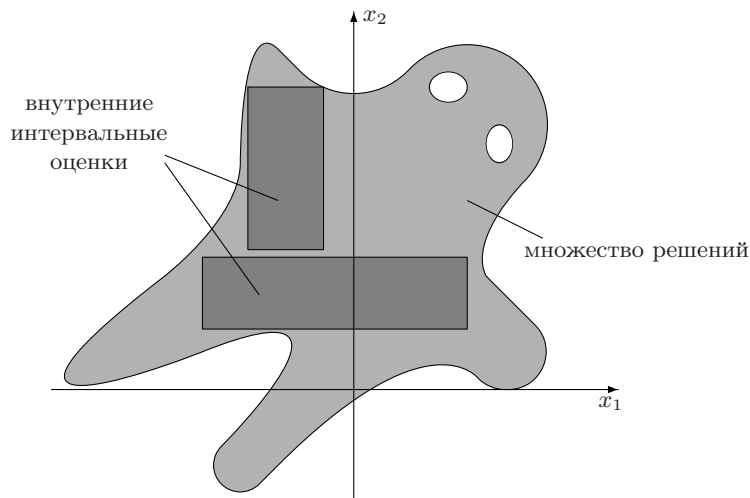


Рис. 4.5. «Внутренние задачи» — это задачи *внутреннего* интервального оценивания множеств решений.

Полезно проследить те конкретные формы, которые принимает задача (4.21) в различных практических ситуациях. Если в качестве множества решений в постановке (4.21) берётся допустимое множество решений  $\Xi_{tol}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ , то соответствующая задача — это известная *задача о допусках* (см. Главу 6), которая имеет многочисленные плодотворные приложения. Задача о допусках есть, по существу, задача стабилизации системы в пределах заданного выходного коридора  $\mathbf{b}$  для случая, когда *все* параметры системы  $a_i$  подвержены некоторым ограниченными возмущениям.

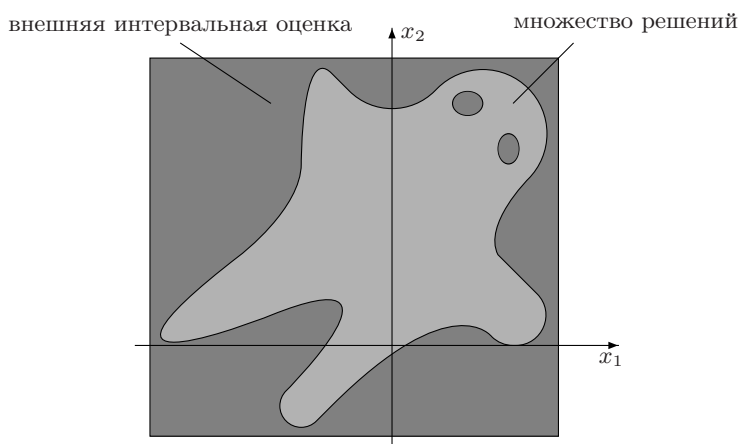


Рис. 4.6. «Внешние задачи» — это задачи *внешнего* интервального оценивания множеств решений.

Пусть неопределённость параметров  $a_i$  носит смешанный характер, т. е. часть из них имеют А-неопределённость, а остальные Е-неопределённость, что соответствует ситуации, когда некоторые входные параметры являются возмущающими, а некоторые — управляющими. Если при этом все компоненты вектора правой части имеют Е-неопределённость, то есть  $\beta_i = \exists, i = 1, 2, \dots, m$ , мы приходим к задаче стабилизации системы, имеющей возможность управления, которую ряд авторов называет «задача обеспечения устойчивости функционирования при крупномасштабных возмущениях» [16]. Такой же является задача управления качеством продукции, рассмотренная нами в §4.2в. В методической работе [4] задача обеспечения «устойчивости функционирования» иллюстрируется на конкретных практических примерах из кораблестроения, токсикологии, экономики и электроэнергетики. В литературе интенсивно используется и другое название этого типа задач: «задача обеспечения живучести системы» [4]. Напротив, если параметры  $a_i$  имеют смешанную неопределённость (часть А-неопределённость, а остальная часть — Е-неопределённость), тогда как все  $\beta_i = \forall, i = 1, 2, \dots, m$ , то перед нами задача управления в условиях ограниченных возмущений.

Очень часто практический смысл имеет внешнее (Рис. 4.6) оценивание множеств решений  $\Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ , но это уже другая задача, отличная от (4.21), и её мы тоже рассмотрим в нашей книге:

Для интервальной системы уравнений  $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$  и кванторных векторов  $\alpha$  и  $\beta$  того же размера, что векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  соответственно, найти брус содержащий множество решений  $\Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ .

(4.22)

Задача (4.22) — это, по существу, интервальная форма хорошо известной задачи о параметрической чувствительности системы управления, когда и вариации параметров, и оценки вариаций решения рассматриваются в виде интервалов. Частный случай этой задачи, требующий внешнего оценивания объединённого множества решений, является одной из старейших и практически наиболее важных задач интервального анализа, а различным аспектам её решения с начала 60-х годов и по настоящее время посвящены несколько монографий и сотни статей. Мы занимаемся решением внешней задачи в Главах 7, 9 и 10 нашей книги.

Часто встречается и покомпонентная форма рассмотренной задачи:

Для интервальной системы уравнений  $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$  и кванторных векторов  $\alpha$  и  $\beta$  того же размера, что  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  соответственно, найти (по-возможности, более точные) оценки для  $\min\{x_k \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})\}$  снизу и  $\max\{x_k \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})\}$  сверху,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

(4.23)

Ниже мы иногда будем называть задачи (4.22) и (4.23) *внешними задачами* для интервальной системы  $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$  с распределением интервальных неопределённостей, описываемых кванторами  $\alpha$  и  $\beta$ , или, что эквивалентно, дизъюнктивными разложениями  $\mathbf{a} = \mathbf{a}^\vee + \mathbf{a}^\exists$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{b}^\vee + \mathbf{b}^\exists$ .

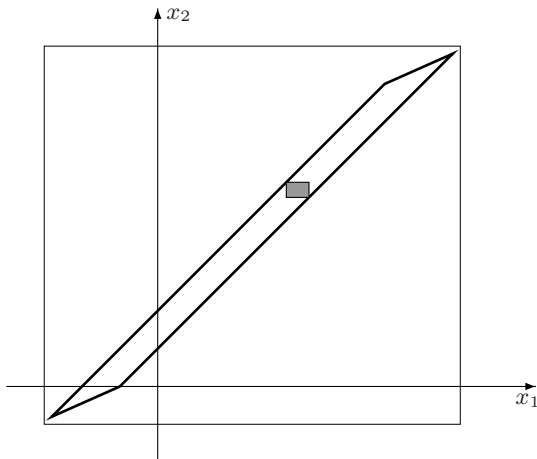


Рис. 4.7. Иногда интервальное оценивание множества решений (косой параллелограмм) может оказаться малоинформативным.

До сих пор задачи вида (4.21) и (4.22) решались лишь минимаксными методами математического программирования (см., в частности, [4, 16]). Одним из итогов нашей книги является развитие новых вычислительно эффективных *интервальных* подходов к анализу статических систем с интервальной неопределённостью, т. е. к решению задач (4.21) и (4.22).

В настоящее время существуют по крайней мере три различных парадигмы интервальных вычислений, ориентированные на различные классы задач с интервальными данными и различные требования к математической строгости получаемого ответа:

1. Пошаговая парадигма, являющаяся модификацией и дальнейшим развитием «наивного интервального анализа». При этой модели вычислений доказательность (гарантированность) конечного интервального результата является следствием того, что мы поддерживаем её на каждом шаге вычислений.
2. Апостериорное оценивание, при котором гарантированная интервальная оценка ответа получается после нахождения его приближённого точечного значения, как результат некоторой специальной процедуры. При этом само точечное приближение может вычисляться неинтервальными методами. Идея апостериорного оценивания впервые была высказана Дж. Уилкинсоном в работе [84], где один из создателей современной теории погрешностей численных методов, в частности, писал: «In general it is the best in algebraic computations to leave the use of interval arithmetic as late as possible so that it effectively becomes an *a posteriori* weapon.»



3. Формально-алгебраический подход, при котором решение исходной интервальной задачи заменяется на решение задачи о нахождении формального решения некоторого вспомогательного интервального уравнения (и далее, возможно, на решение неинтервальной задачи).

Следует в связи с этим отметить, что наличие постоянного и неотключаемого внешнего направленного округления в компьютерной интервальной арифметике необходимо только тогда, когда пользователь хочет быть уверенным в математической корректности каждого шага своих вычислений. По существу, это родовый признак пошаговой парадигмы интервальных вычислений.

Но это совсем не требуется при апостериорном оценивании, при котором некоторый промежуточный ответ мы можем получать дешево и быстро, а математическая корректность результата обеспечивается применением специальных завершающих процедур. В таких вычислениях постоянное направленное округление является совершенно излишним, так как не требуется по сути алгоритмов и приводит к ненужным трудозатратам.

Пошаговая парадигма является простой, хорошо понятной и легко реализуемой, но по качеству (избытку ширины) получаемых решений она нередко проигрывает апостериорному оцениванию, которое в настоящее время является очень развитым направлением интервального анализа. Следует только упомянуть такие хорошие апостериорные алгоритмы для решения различных интервальных задач как E-методы Румпа и Каухера, многочисленные работы Румпа, Добронца и др.

Мы развиваем, в частности, *формальный подход* к решению вышеупомянутых задач, и краеугольным камнем многих наших построений является понятие *формального решения* интервального уравнения (называемое также иногда *алгебраическим решением*):

**Определение 4.3.2** *Интервал (интервальные вектор, матрица и т. п.) будем называть формальным решением интервального уравнения (системы уравнений, неравенств, ...), если подстановка этого интервала в рассматриваемое уравнение (систему уравнений, неравенств, ...) и выполнение всех интервальных арифметических, аналитических и т. п. операций и отношений приводят к истинному соотношению.*

Например, интервал  $[0, 1]$  является формальным решением интервального квадратного уравнения  $[1, 2] \mathbf{x}^2 + [-1, 1] \mathbf{x} = [-1, 3]$ . Интервальная функция вещественного аргумента  $\mathbf{x}(t) = 10.5 [e^t, e^{2t}]$  есть формальное решение интервального дифференциального уравнения

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = [1, 2] \mathbf{x}(t).$$

Интервальная функция  $\mathbf{x}(t) = [0, 2t]$  на  $[0, 1]$  — это формальное решение интервального интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$\mathbf{x}(t) + \int_0^1 (1.5s + t) \mathbf{x}(s) ds = [0, 3t + 1].$$

Последние два (чисто иллюстративных) примера показывают главный недостаток термина «алгебраическое решение»: он подчёркивает алгебраическую природу опе-

раций, которые образуют рассматриваемое интервальное уравнение, так что говорить об «алгебраическом» решении интервальных дифференциальных, интегральных и т. п. уравнений по меньшей мере некорректно.

Понятие формального решения соответствует обычному общематематическому пониманию решения уравнения, и выделение для него отдельного термина имеет исторические причины. Впервые подобные решения рассмотрел румынский математик С. Берти [36], который не дал им никакого имени и исследовал лишь случай одного квадратного интервального уравнения. Впоследствии К. Никель [64] и Х. Рачек и В. Зауэр [70] изучали такого рода решения для интервальных линейных систем уравнений, причём в [70] и был введён термин «алгебраическое решение».

Тем не менее, большого резонанса упомянутые работы не получили, и для интервальных уравнений и систем уравнений формальные (алгебраические) решения долгое время считались малосодержательными и почти не изучались. При этом фраза «решение интервальной задачи» стала обозначать, главным образом, некоторую *оценку* (приближение, аппроксимацию) того или иного *множества решений* задачи в смысле Определения 4.3.1, либо процесс получения такой оценки. В этом смысле рассматриваемые нами «внешняя задача» (4.22) и «внутренняя задача» (4.21) являются типичными интервальными задачами оценивания: под их «решениями» имеются в виду внешняя и внутренняя интервальные оценки некоторых множеств решений.

Но в последние годы положение формального решения в интервальном анализе радикально изменилась. В основном трудами отечественных исследователей были обнаружены глубокие и практически важные приложения формальных решений. В частности, сущностью развиваемого нами в Главах 7, 10 и 11 так называемого *формального подхода* является замена исходной задачи оценивания (4.2) множества решений (внутреннего или внешнего) на задачу нахождения формального решения некоторого специального вспомогательного уравнения в полной интервальной арифметике Каухера  $\mathbb{KR}$ . Тем самым первоначальная задача, по существу, сводится к традиционной задаче численного анализа. Такое сведение является чрезвычайно привлекательным с вычислительной точки зрения, хотя и обладает тем недостатком, что формальное решение вспомогательного интервального уравнения может не существовать даже в случае существования решения у исходной задачи (4.21), т. е. когда  $\Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$  пусто.

Условимся, что в задачах нахождения формальных решений интервальных уравнений и систем уравнений неизвестная переменная будет обозначаться уже жирным шрифтом, как объект интервального типа данных.

## 4.4 Трудоемкость интервальных задач

Часто на практике нас может удовлетворить не всякое решение конкретной задачи оценивания, а лишь *оптимальное*, т. е. лучшее в том или ином смысле. Требование оптимальности особенно характерно для задач, в которых интервальная неопределённость изначально присутствует во входных данных и которые не являются «интервализациями» каких-то точечных задач. В настоящее время в интервальном анализе имеется несколько подходов к определению оптимальности решения, но все они, по существу, единообразны: на множестве всех решений задачи оценивания (или на

семействе оценочных множеств) вводится некоторый частичный порядок, а минимальные и наименьшие относительно него элементы объявляются, соответственно, оптимальными и наилучшими решениями данной задачи. Конкретные способы упорядочения решений могут быть весьма разнообразными (см., например [47]). Применительно к сформулированному нами в этой главе общему определению интервальной задачи оценивания можно указать следующие конструкции.

Во-первых, упорядочение в семействе оценочных множеств  $\mathcal{E}$  может быть индуцировано способом оценивания  $\mathcal{M}$ , принятым в решаемой задаче, причём неединственным способом. Пусть  $\mathcal{M}^{-1}(\cdot)$  — операция взятия прообраза при отношении  $\mathcal{M}$ . Естественно считать, что решение  $\Xi'$  «не хуже» решения  $\Xi''$  и записывать это как  $\Xi' \preceq \Xi''$ , если совокупность оцениваемых посредством  $\Xi''$  множеств решений из  $\mathcal{S}$  не уже совокупности множеств, оцениваемых посредством  $\Xi'$ , т. е.

$$\Xi' \preceq \Xi'' \iff \mathcal{M}^{-1}(\Xi') \subseteq \mathcal{M}^{-1}(\Xi'').$$

Тривиально проверяется, что введённое таким образом бинарное отношение « $\preceq$ » на классе оценочных множеств  $\mathcal{E}$  удовлетворяет всем аксиомам порядка. Для многих интервальных задач оценивания это упорядочение оценочных множеств совпадает с естественным ранжированием интервальных решений по качеству. К примеру, для задачи внешнего оценивания множеств решений интервальных уравнений решение  $V'$  «лучше» (качественнее) решения  $V''$ , если  $V' \subseteq V''$  в теоретико-множественном смысле. Для задач внутреннего оценивания множеств решений ситуация обратная: решение  $U'$  качественнее решения  $U''$ , если  $U' \supseteq U''$ .

Далее, при некоторых дополнительных условиях на способ оценивания  $\mathcal{M}$  рефлексивное отношение  $(\mathcal{M}^{-1} \circ \mathcal{M})$  на семействе оценочных множеств  $\mathcal{E}$  (где  $\circ$  — знак композиции отношений [5]) может быть ещё антисимметричным и транзитивным, и, следовательно, также служить порядком на  $\mathcal{E}$ , индуцированным способом оценивания.

Во-вторых, интервальные решения можно сравнивать по степени их удаленности (в метрике  $\rho$  из Определения 4.3.1) от точного множества решений.

В-третьих, нередко требуется минимизировать радиус (ширину) или какой-либо другой функционал от решения (безотносительно к точному множеству решений интервальной задачи).

Но здесь мы сталкиваемся со следующим обстоятельством: в частично упорядоченных множествах нужно различать минимальные/максимальные элементы и наименьшие/наибольшие. Если первые лучше всех сравнимых с ними, то вторые превосходят все остальные элементы множества. В интервальных задачах оценивания могут встретиться обе ситуации.

Критерий качества интервальных решений в задачах оценивания — это степень близости (в том или ином смысле) полученной интервальной оценки к идеальному множеству решений. Ясно, что задачи внутреннего интервального оценивания могут иметь много максимальных по включению, но несравнимых между собой решений, так что наилучшего в смысле «представительности» интервального решения среди них выбрать в принципе нельзя. Но для задач внешнего интервального оценивания естественным образом определяется понятие наилучшего по включению решения.

**Определение 4.4.1** *Внешняя интервальная оценка множества решений, совпадающая с его интервальной оболочкой, называется оптимальным (или наилучшим)*

решением задачи внешнего интервального оценивания (4.22).

Получение оптимальных или гарантированно близких к оптимальным решений в задачах внешнего оценивания множеств решений интервальных систем является идеальной целью, относительно которой обычно судят о качестве решения задачи (4.22)–(4.23) тем или иным методом.

Необходимость и важность разработки алгоритмов, дающих именно оптимальные и наилучшие решения интервальных задач настойчиво пропагандировалась многими авторами (см., к примеру, [65]). Для обозначения подобных алгоритмов был даже введен специальный термин *bound conserving algorithm* (немецкий эквивалент — *schrantentreue Algorithm*, а буквальный русский перевод — «правильно передающий границы алгоритм»), который, учитывая крайнюю смысловую перегруженность эпитета «оптимальный», следует признать не лишённым смысла.

К. Никель в [63] проводит аналогию между *bound conserving* алгоритмами и устойчивыми алгоритмами классической вычислительной математики, предсказывая, что «в будущем новое свойство “правильной передачи границ” будет играть столь же важную роль в вычислительном интервальном анализе», как и другие ключевые характеристики алгоритмов. Е. Нудинг в оптимистичной работе [66] приводит уже довольно внушительный список *bound conserving* алгоритмов, призванный, видимо, продемонстрировать существующую в интервальном анализе некую мощную тенденцию по непрерывному возникновению эффективных алгоритмов подобного сорта. При этом всеми упомянутыми авторами как-то обходился вопрос о той цене, которую приходится платить за оптимальность результатов. Иначе говоря, каково неизбежное увеличение трудоемкости алгоритмов, необходимое для получения оптимальных или хотя бы гарантированно близких к оптимальным решений интервальных задач оценивания?

Вопросы такого сорта сделались предметом интенсивного исследования лишь в 90-е годы XX века, и серьёзные продвижения в этом направлении стали одним из наиболее впечатляющих достижений в интервальном анализе того десятилетия. Большинство из известных к настоящему времени результатов о сложности решения интервальных задач мы обязаны исследованиям А.А. Гаганова [10], А.В. Лакеева и С.И. Носкова [23, 24], В. Крейнвича, А.В. Лакеева и И. Рона [53, 50, 51, 56, 57, 52, 58, 69, 73, 74, 45], Г. Коксона [38, 39], Х. Янссона [44].

Изложим конспективно основные полученные к настоящему моменту результаты по теории сложности интервальных алгебраических задач:

- задача оценивания области значений полинома от многих переменных на брус является NP-трудной [10];
- задача нахождения глобального минимума для невыпуклых целевых функций на брус является труднорешаемой [49];
- задачи распознавания (проверки непустоты) объединённого множества решений ИСЛАУ и задачи его внешнего оценивания являются NP-трудными [50, 51, 53, 58], причём они остаются NP-трудными даже в том случае, если матрица системы сильно неособенна, или если мы накладываем условия на знаки элементов матрицы, или ограничимся неплотно заполненными матрицами (в

частности, NP-полны задачи распознавания и оценивания объединённого множества решений ИСЛАУ с трёхдиагональными матрицами и с неотрицательными матрицами);

- задачи распознавания и оценивания множеств АЕ-решений интервальных линейных систем являются NP-трудными [59];
- задача нахождения формального решения интервальной линейной системы является NP-трудными [56, 57];
- задача распознавания решения нелинейной системы уравнений в заданном брусе является NP-трудной [44, 53].

Напомним, что свойство задачи быть NP-трудной или NP-полной означает на современном этапе развития теории сложности вычислений, что, скорее всего, эта задача не может быть решена легче, чем за время, которое является экспонентой от длины кодировки задачи. Хороший обзор теории сложности и теории NP-полноты читатель может найти в книге [11].

Таким образом, вывод, к которому приводят нас результаты теории сложности, малоутешителен и заключается в том, что принятие требования оптимальности решения или же заданной близости получаемого интервального решения к оптимальному в общем случае делает интервальную задачу оценивания *труднорешаемой*. Тем самым даётся теоретическое объяснение того факта, что за последние полвека (в течение которых интервальный анализ развивался скорее вширь, чем вглубь) достижения в деле создания «bound conserving» алгоритмов были достаточно скромными. Несмотря на многочисленные плодотворные применения интервальных методов в современном математическом моделировании и внутри самой математики алгоритмы для оптимального решения многих интервальных задач либо не найдены, либо по трудоёмкости они в худшем случае оказываются не намного лучшими полного перебора.

В частности, задаче (5.24) внешнего оценивания объединённых множеств решений интервальных линейных систем посвящено очень большое количество работ (см. Главу 7 и библиографию к ней). Все разработанные на данный момент методики позволяют вычислять интервальный вектор  $\mathbf{V}$ , гарантированно содержащий множество решений  $\Xi_{uni}$ , но оптимальность  $\mathbf{V}$  обеспечивают лишь очень немногие методы переборного типа с большой трудоёмкостью исполнения.

Было бы, очевидно, чересчур категоричным выводить из вышесказанного невозможность или бесполезность решать на практике интервальные задачи оценивания в постановках, которые требуют оптимальных ответов. Но несомненно, что специфическая форма интервальных задач оценивания, формализованная нами в §4.3, должна быть особо учтена как при выборе алгоритмов, решающих эти «оптимальные» постановки, так и при организации вычислений. Мы ещё вернемся к подробному обсуждению этого важного вопроса в §9.8.

## Комментарий к Главе 4

**К §4.1a** Обратную задачу системного анализа часто называют также *задачей идентификации*.

Возможность теоретико-игровой интерпретации множеств кванторных решений впервые была отмечена, по-видимому, в [7].

Исторически первая постановка для интервальных систем уравнений — это задача внешнего покоординатного оценивания множества всевозможных решений точечных систем, получающихся при варьировании параметров в заданных интервалах, т. е. задача о внешнем оценивании объединённого множества решений этих интервальных систем уравнений. Фактически, она является интервальной формой задачи о чувствительности решения системы уравнений к конечным возмущениям. Нередко, имея в виду именно эту задачу, говорят о «решении интервальной системы уравнений», что, конечно, не вполне корректно.

Допусковое множество решений впервые было рассмотрено в 1972-м году немецкими математиками Е. Нудингом и Й. Вильхельмом [67], работа которых была по достоинству оценена уже в 90-е годы. В ней, в действительности, продемонстрирована возможность варьирования логических кванторов в выделяющем предикате при определении множества решений интервальной задачи. Следующий шаг на этом пути был сделан лишь в 1991–92 годах, когда несколькими российскими исследователями независимо и почти одновременно было введено множество решений

$$\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall b \in \mathbf{b})(\exists A \in \mathbf{A})(Ax = b) \},$$

образованное такими векторами  $x \in \mathbb{R}^n$ , что для любой правой части  $b \in \mathbf{b}$  мы можем подобрать матрицу  $A \in \mathbf{A}$ , удовлетворяющую  $Ax = b$ . Впоследствии выяснилось, что это множество решений, фактически, рассматривал А. Дейф в книге [40], хотя он определял его не с помощью модификации логической формулы выделяющего предиката, а через теоретико-множественные отношения. Название *управляемое множество решений* предложено для  $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  автором этой книги в [77] (в англоязычной версии — в работе [82]).

Заметим, что символическое обозначение  $(\forall A \in \mathbf{A})$  означает

$$(\forall a_{11} \in \mathbf{a}_{11})(\forall a_{12} \in \mathbf{a}_{12}) \dots (\forall a_{mn} \in \mathbf{a}_{mn}),$$

и аналогичное верно в отношении символических записей  $(\exists A \in \mathbf{A})$ ,  $(\forall b \in \mathbf{b})$  и  $(\exists b \in \mathbf{b})$ . Кроме того, логические кванторы « $\forall$ » и « $\exists$ » не перестановочны друг с другом. Следовательно, дальнейшее обобщение понятия множества решений интервальной линейной системы можно получить, разделив действие логических кванторов по отдельным элементам матрицы и правой части и далее комбинируя кванторы « $\forall$ » и « $\exists$ » с различными интервальными элементами и меняя их порядок. Мы видели, что такие множества решений не являются чисто теоретическим курьёзом, но могут быть проинтерпретированы как решения некоторых игр или многошаговых процессов принятия решений в условиях интервальной неопределённости, т. е. как решения минимаксных задач исследования операций.

Для задачи линейного программирования с интервальными данными постановка этого круга вопросов впервые была осуществлена А.А. Ватолиным в [7].

**К §4.2а** Термины «сильный» и «слабый» в отношении каких-либо свойств, выполняющихся на интервалах, сделались общеупотребительными (см., к примеру, [30]), перейдя уже в разряд фольклора. Но впервые эти понятия рассмотрел И.И. Ерёмин в книге [14].

По поводу «интервальной температуры» и т. п. оборотов речи необходимо отметить следующее. Интервалы в математических моделях — это, как правило, объекты, которые находятся на ином, более высоком, уровне абстракции по отношению к реальности, нежели привычные «точечные» типы данных — вещественные, целые и т. п. И нужно эти уровни абстракции (которые суть уровни рассмотрения) не смешивать друг с другом во избежание нелепых ошибок. К примеру, мы привычно не смешиваем употребление натуральных чисел и дробных при счёте и измерениях, и т. п.

В качестве курьёза можно привести такой пример. Если в накладной на получение товара на складе экспедитору будет указано интервальное количество упаковок, то заказ выполнен в точности не будет. Экспедитор привезет, в лучшем случае, то целое количество, которое находится в указанных нами пределах, но это будет совершенно определенное неинтервальное количество! А в исходной постановке наше задание экспедитору будет диким и невыполнимым.

**К §4.2в** До 70-х годов XX века объединённое множество решений было единственным объектом внимания исследователей, работавших с интервальными системами уравнений. Первой публикацией, где рассматривалось допусковое множество решений ИСЛАУ, стала работа Е. Нудинга и Й. Вильгельма [67]. В ней также ставилась задача нахождения внутренней оценки допускового множества решений (которая называлась «внутренним решением») и были указаны некоторые из возможных приложений новой задачи.

В конце 70-х И. Рон [71] обратился к интервальной задаче о допусках в связи с анализом линейных балансовых экономических моделей с интервальной неопределённостью (интервального аналога уравнения В. Леонтьева). В 80-е годы XX века в нашей стране практические приложения допускового множества решений и линейной задачи о допусках в автоматическом управлении исследовались в работах Н.А. Хлебалина, и далее допусковое множество решений нашло важные применения в теории идентификации и задаче восстановления зависимостей по интервальным данным (см. комментарии к Главе 6).

Из других важных работ, посвящённых допусковому множеству решений и интервальной задаче о допусках в последующие годы, отметим книгу А. Дейфа [40] (особенно её раздел 2.6), заметку И. Рона [72] и обзор А. Ноймайера [62].

**К §4.3б** Для обозначения способа оценивания множества решений, который помечен на Рис. 4.3 как (С) З. Румп в работе [76] использует термин «внутреннее включение» (inner inclusion). Он, на наш взгляд, алогичен и не адекватен ситуации.

**К §4.3в** Термины «живучесть», «условие живучести» давно и широко применяется в отечественной научной литературе для обозначения условия принадлежности выходов системы к некоторому а priori заданному множеству режимов [4]. Но этот же термин иногда применяется для совершенно других целей. Французский математик Ж.-П. Обэн и его последователи (см. [27, 28, 33, 34]) говорят об «условии живучести» (viability condition), «задаче о живучести» и т. п. в контексте некоторого специального раздела теории дифференциальных включений, вкладывая в эти понятия смысл, имеющий весьма отдаленное отношение к рассматриваемым нами вопросам.

## Литература к Главе 4

- [1] Айзекс Р. *Дифференциальные игры*. – Москва: Мир, 1967.
- [2] Акоф Р., Сасиени М. *Основы исследования операций*. – Москва: Мир, 1971.
- [3] Алефельд Г., Херцбергер Ю. *Введение в интервальные вычисления*. – Москва: Мир, 1987.
- [4] Ащепков Л.Т. К проблеме повышения живучести управляемых систем // *Модели и методы исследования операций*, под ред. Б.А. Бельтюкова и В.П. Булатова. – Новосибирск: Наука, 1988. – С. 69–85.
- [5] Биркгоф Г., Барти Т. *Современная прикладная алгебра*. – Москва: Мир, 1976.
- [6] Борель Э. *Вероятность и достоверность*. – Москва: Физматгиз, 1961.
- [7] Ватолин А.А. О задачах линейного программирования с интервальными коэффициентами // *Журнал Вычисл. Математики и Матем. Физики*. – 1984. – Т. 24. – С. 1629–1637.
- [8] Вербицкий В.И., Горбань А.Н., Утюбаев Г.Ш., Шокин Ю.И. Эффект Мура в интервальных пространствах // *Доклады Академии Наук*. – 1989. – Т. 304, №1. – С. 17–22.
- [9] Воцинин А.П., Сотиров Г.Р. *Оптимизация в условиях неопределенности*. – Москва–София: Издательство МЭИ–Техника, 1989.
- [10] Гаганов А.А. О сложности вычисления интервала значений полинома от многих переменных // *Кибернетика*. – 1985. – №4. – С. 6–8.
- [11] Гэри М., Джонсон Д. *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи*. – Москва: Мир, 1982.
- [12] Добронев Б.С., Шайдуров В.В. *Двусторонние численные методы*. – Новосибирск: Наука, 1990.
- [13] Евланов Л.Г. *Контроль динамических систем*. – Москва: Наука, 1972.
- [14] Ерёмин И.И. *Противоречивые модели оптимального планирования*. – Москва: Наука, 1984.
- [15] Жолен Л., Кифер М., Дидри О., Вальтер Э. *Прикладной интервальный анализ*. – Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005.
- [16] Зоркальцев В.И. *Методы прогнозирования и анализа эффективности функционирования системы топливоснабжения*. – Москва: Наука, 1988.
- [17] Ивлев Р.С., Соколова С.П. Построение векторного управления многомерным интервально-заданным объектом // *Вычислительные Технологии*. – 1999. – Том 4, №4. – С. 3–13.
- [18] *Исследование операций. Методологические основы и математические методы* / под ред. Моудера Дж., Элмаграби С. – Москва: Мир, 1981.
- [19] Калман Р., Фаль П., Арбиб М. *Очерки по математической теории систем*. – Москва: Мир, 1971.
- [20] Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. *Методы интервального анализа*. – Новосибирск: Наука, 1986.
- [21] Клини С.К. *Математическая логика*. – Москва: Мир, 1973.
- [22] Куратовский К., Мостовский А. *Теория множеств*. – Москва: Мир, 1970.



- [23] ЛАКЕЕВ А.В., НОСКОВ С.И. Описание множества решений линейного уравнения с интервально заданными оператором и правой частью // *Доклады Академии Наук.* – 1993. – Т. 330, №4. – С. 430–433.
- [24] ЛАКЕЕВ А.В., НОСКОВ С.И. О множестве решений линейного уравнения с интервально заданными оператором и правой частью // *Сибирский Математический Журнал.* – 1994. – Т. 35, №5. – С. 1074–1084.
- [25] ЛИ Э.Б., МАРКУС Л. *Основы теории оптимального управления.* – Москва: Наука, 1972.
- [26] МЕСАРОВИЧ М., ТАКАХАРА Я. *Общая теория систем: математические основы.* – Москва: Мир, 1978.
- [27] ОБЭН Ж.-П. *Нелинейный анализ и его экономические приложения.* – Москва: Мир, 1988.
- [28] ОБЭН Ж.-П., ЭКЛАНД И. *Прикладной нелинейный анализ.* – Москва: Мир, 1988.
- [29] ОРЕ О. *Теория графов.* – Москва: Мир, 1980.
- [30] ФИДЛЕР М., НЕДОМА Й., РАМИК И., РОН И., ЦИММЕРМАНН К. *Задачи линейной оптимизации с неточными данными.* – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований – Издательство «РХД», 2008.
- [31] ЧЕРНОУСЬКО Ф.Л. *Оценивание фазового состояния динамических систем.* – Москва: Наука, 1988.
- [32] ШАРЫЙ С.П. Новый подход к анализу статических систем с интервальной неопределённостью в данных // *Вычислительные Технологии.* – 1997. – Т. 2, №1. – С. 84–102.
- [33] AUBIN J.-P. *Viability theory.* – Boston: Birkhäuser, 1991.
- [34] AUBIN J.-P., FRANKOWSKA H. *Set-valued analysis.* – Boston: Birkhäuser, 1990.
- [35] BEAUMONT O. Solving interval linear systems with oblique boxes // IRISA Publication Interne №PI-1315. – IRISA, 2000. – 17 p.  
(см. <http://www.irisa.fr/bibli/publi/pi/2000/1315/1315.html>)
- [36] BERTI S. The solution of an interval equation // *Mathematica.* – 1969. – Vol. 11 (34), No. 2. – P. 189–194.
- [37] BURGMEIER P., JAHN K.-U., PLOCHOV A.G. An interval computational method for approximating controllability sets // *Computing.* – 1990. – Vol. 44. – P. 35–44.
- [38] COXSON G., DE MARCO C. The computational complexity of approximating the minimal perturbation scaling to achieve instability in an interval matrix // *Mathematics of Control, Signals and Systems.* – 1995. – Vol. 7. – P. 279–291.
- [39] COXSON G.E. Computing exact bounds on elements of an inverse interval matrix is NP-hard // *Reliable Computing.* – 1999. – Vol. 5. – P. 137–142.
- [40] DEIF A.S. *Sensitivity analysis in linear systems.* – Berlin: Springer-Verlag, 1986.
- [41] DOBRONETS B.S. On some two-sided methods for solving systems of ordinary differential equations // *Interval Computations.* – 1992. – No. 1(3). – P. 6–21.
- [42] FILIPPOV A.F. Ellipsoidal estimates for a solution of a system of differential equations // *Interval Computations.* – 1992. – No. 2(4). – P. 6–17.
- [43] HADJIHASSAN S., WALTER E., PRONZATO L. Quality improvement via optimization of tolerance intervals during the design stage // *Applications of Interval Computations /* Kearfott R.B. and Kreinovich V., eds. – Dordrecht: Kluwer, 1996. – P. 91–131.

- [44] JANSSON C. An NP-hardness result for nonlinear systems // *Reliable Computing*. – 1998. – Vol. 4. – P. 345–350.
- [45] HEINDL G., KREINOVICH V., LAKEYEV A. Solving linear interval systems is NP-hard even if we exclude overflow and underflow // *Reliable Computing*. – 1998. – Vol. 4. – P. 383–388.
- [46] KLATTE P., ULLRICH CH. Complex sector arithmetic // *Computing*. – 1980. – Vol. 24. – P. 139–148.
- [47] KOLACZ H. On the optimality of inclusion algorithms // *Interval Mathematics 1985* / Nickel K., ed. – New York: Springer Verlag, 1986. – P. 67–80. – (*Lecture Notes in Computer Science*; vol. 212).
- [48] KOSTOUSOVA E.K. State estimation for dynamic systems via parallelotopes: optimization and parallel computing // *Optimization Methods and Software*. – 1998. – Vol. 9. – P. 269–306.
- [49] KREINOVICH V., KEARFOTT R.B. Beyond convex? Global optimization is feasible only for convex objective functions: a theorem // *Journal of Global Optimization*. – 2005. – Vol. 33, No. 4. – P. 617–624.
- [50] KREINOVICH V., LAKEYEV A.V., NOSKOV S.I. Optimal solution of interval linear systems is intractable (NP-hard) // *Interval Computations*. – 1993. – No. 1. – P. 6–14.
- [51] KREINOVICH V., LAKEYEV A.V., NOSKOV S.I. Approximate linear algebra is intractable // *Linear Algebra and its Applications*. – 1996. – Vol. 232. – P. 45–54.
- [52] KREINOVICH V., LAKEYEV A.V. Linear interval equations: computing enclosures with bounded relative or absolute overestimation is NP-hard // *Reliable Computing*. – 1996. – Vol. 2 (4). – P. 341–350.
- [53] KREINOVICH V., LAKEYEV A.V., ROHN J., KAHL P. *Computational complexity and feasibility of data processing and interval computations*. – Dordrecht: Kluwer, 1997.
- [54] KÜHN W. Rigorously computed orbits of dynamical systems without the wrapping effect // *Computing*. – 1998. – Vol. 61. – P. 47–67.
- [55] KURZHANSKI A.B., VALYI I. Ellipsoidal techniques for dynamic systems: the problem of control synthesis // *Dynamics and Control*. – 1991. – Vol. 1. – P. 357–378.
- [56] LAKEYEV A.V. Linear algebraic equations in Kaucher arithmetic // *Reliable Computing, 1995, Supplement* (Extended Abstracts of APIC'95: International Workshop on Applications of Interval Computations, El Paso, TX, Febr. 23–25, 1995). – P. 130–133.
- [57] LAKEYEV A.V. On the computational complexity of the solution of linear systems with moduli // *Reliable Computing*. – 1996. – Vol. 2, No. 2. – P. 125–131.
- [58] LAKEYEV A.V., KREINOVICH V. NP-hard classes of linear algebraic systems with uncertainties // *Reliable Computing*. – 1997. – Vol. 3, No. 1. – P. 51–81.
- [59] LAKEYEV A.V. Computational complexity of estimation of generalized solution sets for interval linear systems // *Вычислительные Технологии*. – 2003. – Т. 8, No. 1. – С. 12–23.
- [60] LHOMME O. Consistency techniques for numeric CSPs // *IJCAI'93*. – Chambéry, France, August 1993. – P. 232–238.
- [61] MACKWORTH A.K. Consistency in network of relations // *Artificial Intelligence*. – 1977. – Vol. 8. – P. 99–119.
- [62] NEUMAIER A. Tolerance analysis with interval arithmetic // *Freiburger Intervall-Berichte*. – 1986. – No. 86/9. – S. 5–19.

- [63] NICKEL K. Interval-Analysis // *The state of the art in numerical analysis: Proceedings of the Conference on the State of Art in Numerical Analysis, University of York, April 12–15, 1976* / Jacobs D., ed. – York: University of York, 1977. – P. 193–225.
- [64] NICKEL K. Die Auflösbarkeit linearer Kreisscheiben- und Intervall-Gleichungssystemen // *Linear Algebra and its Applications*. – 1982. – Vol. 44. – P. 19–40.
- [65] NUDING E. Intervallrechnung und Wirklichkeit // *Interval Mathematics* / Nickel K., ed. – Berlin: Springer Verlag, 1975. – P. 263–269. – (*Lecture Notes in Computer Science*; vol. 29).
- [66] NUDING E. Schrankentreue Algorithmen // *Beiträge zur Numerische Mathematik*. – 1983. – Vol. 11. – P. 115–137.
- [67] NUDING E., WILHELM W. Über Gleichungen und über Lösungen // *ZAMM*. – 1972. – B. 52. – P. T188–T190.
- [68] PETKOVIC M.S., MITROVIC Z.M., PETKOVIC L.B. Arithmetic of circular rings // *Interval Mathematics 1985* / Nickel K., ed. – New York: Springer Verlag, 1986. – P. 133–142. – (*Lecture Notes in Computer Science*; vol. 212).
- [69] POLJAK S., ROHN J. Checking robust nonsingularity is NP-hard // *Mathematics of Control, Signals & Systems*. – 1993. – Vol. 6. – P. 1–9.
- [70] RATSCHKE H., SAUER W. Linear interval equations // *Computing*. – 1982. – Vol. 28, No. 2. – P. 105–115.
- [71] ROHN J. Input-output planning with inexact data // *Freiburger Intervall-Berichte*. – 1978. – No. 9/78. – S. 1–16.
- [72] ROHN J. Inner solutions of linear interval systems // *Interval Mathematics 1985* / Nickel K., ed. – New York: Springer Verlag, 1986. – P. 157–158. – (*Lecture Notes in Computer Science*; vol. 212).
- [73] ROHN J. NP-hardness results for linear algebraic problems with interval data // *Topics in Validated Numerics* / Herzberger J., ed. – Amsterdam: North-Holland, 1994. – P. 463–471.
- [74] ROHN J., KREINOVICH V. Computing exact componentwise bounds on solutions of linear system is NP-hard // *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. – 1995. – Vol. 16. – P. 415–420.
- [75] ROHN J., KRESLOVÁ J. Linear interval inequalities // *Linear and Multilinear Algebra*. – 1994. – Vol. 38. – P. 41–43.
- [76] RUMP S.M. Verification methods for dense and sparse systems of equations // *Topics in Validated Numerics* / Herzberger J., ed. – Amsterdam: Elsevier, 1994. – P. 63–135. – (*Studies in computational mathematics*; 5).
- [77] SHARY S.P. On controlled solution set of interval algebraic systems // *Interval Computations*. – 1992. – No. 4(6). – P. 66–75.
- [78] SHARY S.P. Solving the tolerance problem for interval linear systems // *Interval Computations*. – 1994. – No. 2. – P. 6–26.
- [79] SHARY S.P. On optimal solution of interval linear equations // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1995. – Vol. 32, No. 2. – P. 610–630.
- [80] SHARY S.P. Linear static systems under interval uncertainty: Algorithms to solve control and stabilization problems // *International Journal of Reliable Computing. Supplement. Extended Abstracts of APIC'95, International Workshop on Applications of Interval Computations*, El Paso, TX, 1995. – P. 181–184.
- [81] SHARY S.P. Solving the linear interval tolerance problem // *Mathematics and Computers in Simulation*. – 1995. – Vol. 39. – P. 53–85.

- [82] SHARY S.P. Controllable solution sets to interval static systems // *Applied Mathematics and Computation*. – 1997. – Vol. 86, No. 2-3. – P. 185–196.
- [83] SHARY S.P. A new technique in systems analysis under interval uncertainty and ambiguity // *Reliable Computing*. – 2002. – Vol. 8, No. 5. – P. 321–418.
- [84] WILKINSON J.H. Modern error analysis // *SIAM Review*. – 1971. – Vol. 13, No. 4. – P. 548–568.

## Глава 5

# Множества решений интервальных систем уравнений

В этой главе представлены результаты по характеристике, геометрическим и топологическим свойствам множеств решений интервальных систем уравнений, как для общего нелинейного случая, так и для интервальных линейных систем.

Глава начинается параграфом, посвящённым теоретико-множественной и аналитической характеристикам множеств АЕ-решений интервальных систем общих нелинейных уравнений. Хотя полученные результаты практически не используются далее в книге, они имеют методологическое значение, вскрывая «минимаксную» природу множеств АЕ-решений и связанных с ними задач.

Опираясь на свойства арифметики Каухера, мы выводим в §5.2 аналитические характеристики множеств АЕ-решений интервальных линейных систем уравнений, которые, фактически, являются мостом от кванторного формализма исходных определений к технике вычисления оценок этих множеств решений. В следующих §§5.3–5.5 подробно обсуждаются топологические свойства множеств решений интервальных линейных систем уравнений и способы распознавания их пустоты и непустоты.

Последний §5.8 излагает способы быстрого предварительного внешнего оценивания объединённого множества решений ИСЛАУ.

## 5.1 Характеризации множеств АЕ-решений

### Теорема 5.1.1

$$\Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \bigcap_{\hat{\mathbf{a}} \in \mathbf{a}^\forall} \bigcap_{\hat{\mathbf{b}} \in \mathbf{b}^\forall} \bigcup_{\check{\mathbf{a}} \in \mathbf{a}^\exists} \bigcup_{\check{\mathbf{b}} \in \mathbf{b}^\exists} \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(\hat{\mathbf{a}} + \check{\mathbf{a}}, x) = \hat{\mathbf{b}} + \check{\mathbf{b}}\}.$$

**Доказательство.** По определению операций пересечения и объединения множеств

$$\begin{aligned}
& \Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \\
&= \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{a} \in \mathbf{a}^\forall)(\forall \check{b} \in \mathbf{b}^\forall)(\exists \check{a} \in \mathbf{a}^\exists)(\exists \hat{b} \in \mathbf{b}^\exists)(F(\hat{a} + \check{a}, x) = \hat{b} + \check{b}) \} \\
&= \bigcap_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\forall} \bigcap_{\check{b} \in \mathbf{b}^\forall} \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists \check{a} \in \mathbf{a}^\exists)(\exists \hat{b} \in \mathbf{b}^\exists)(F(\hat{a} + \check{a}, x) = \hat{b} + \check{b}) \} \\
&= \bigcap_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\forall} \bigcap_{\check{b} \in \mathbf{b}^\forall} \left( \bigcup_{\check{a} \in \mathbf{a}^\exists} \bigcup_{\hat{b} \in \mathbf{b}^\exists} \{ x \in \mathbb{R}^n \mid F(\hat{a} + \check{a}, x) = \hat{b} + \check{b} \} \right).
\end{aligned}$$

■

Дадим теперь для множеств АЕ-решений интервальных систем уравнений аналитическое описание, использующее операции «min», «max» и отношения « $\leq$ », « $\geq$ »:

**Теорема 5.1.2** Если интервальная система уравнений

$$F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$$

такова, что отображение  $F : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  непрерывно по первому аргументу на бресе  $\mathbf{a} \in \mathbb{I}\mathbb{R}^l$  при любых значениях второго аргумента, то принадлежность точки  $x \in \mathbb{R}^n$  множеству АЕ-решений  $\Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$  влечёт справедливость следующей системы  $2m$  неравенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \min_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\forall} \max_{\check{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_i(\hat{a} + \check{a}, x) \geq \bar{\mathbf{b}}_i, \\ \max_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\forall} \min_{\check{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_i(\hat{a} + \check{a}, x) \leq \underline{\mathbf{b}}_i, \end{array} \right. \\ \quad \text{— для компонент } \mathbf{b}_i, \text{ имеющих} \\ \quad \text{интервальную А-неопределённость,} \\ \left\{ \begin{array}{l} \min_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\forall} \max_{\check{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_i(\hat{a} + \check{a}, x) \geq \underline{\mathbf{b}}_i, \\ \max_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\forall} \min_{\check{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_i(\hat{a} + \check{a}, x) \leq \bar{\mathbf{b}}_i, \end{array} \right. \\ \quad \text{— для компонент } \mathbf{b}_i, \text{ имеющих} \\ \quad \text{интервальную Е-неопределённость.} \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Если же отображение  $F : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  таково, что каждый из параметров  $a_{r+1}, \dots, a_l$ , соответствующих интервальной Е-неопределённости, входит лишь в одну из компонент  $F_i(a, x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , то принадлежность  $x \in \Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$  равносильна системе неравенств (5.1).

**Доказательство.** Без ограничения общности можно считать, что компоненты вектора правой части  $\mathbf{b}_i$  с А-неопределённостью имеют номера  $i = 1, 2, \dots, s$ , тогда как

компоненты  $\mathbf{b}_i$  с E-неопределённостью имеют номера  $i = s + 1, \dots, m$ . Кроме того, условимся, как и прежде, для краткости обозначать через  $\hat{\mathbf{b}}$  и  $\check{\mathbf{b}}$  такие точечные  $m$ -векторы, что

$$\hat{\mathbf{b}} + \check{\mathbf{b}} = \mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m),$$

а через  $\hat{\mathbf{a}}$  и  $\check{\mathbf{a}}$  — такие точечные  $n$ -векторы, что

$$\hat{\mathbf{a}} + \check{\mathbf{a}} = \mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_m).$$

С выделяющим предикатом рассматриваемого множества АЕ-решений интервальной системы уравнений можно выполнить следующие эквивалентные преобразования:

$$\begin{aligned} & \Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ &= \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{\mathbf{a}} \in \mathbf{a}^\forall)(\forall \hat{\mathbf{b}} \in \mathbf{b}^\forall)(\exists \check{\mathbf{a}} \in \mathbf{a}^\exists)(\exists \check{\mathbf{b}} \in \mathbf{b}^\exists)(F(a, x) = \mathbf{b}) \} \\ &= \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{\mathbf{a}} \in \mathbf{a}^\forall)(\forall \hat{\mathbf{b}} \in \mathbf{b}^\forall)(\exists \check{\mathbf{a}} \in \mathbf{a}^\exists) \\ &\quad ( F_1(a, x) = b_1 \ \& \ \dots \ \& \ F_s(a, x) = b_s \ \& \\ &\quad \quad F_{s+1}(a, x) \in \mathbf{b}_{s+1} \ \& \ \dots \ \& \ F_m(a, x) \in \mathbf{b}_m ) \} \\ &\subseteq \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{\mathbf{a}} \in \mathbf{a}^\forall)(\forall \hat{\mathbf{b}} \in \mathbf{b}^\forall) \\ &\quad ( (\exists \check{\mathbf{a}} \in \mathbf{a}^\exists)(F_1(a, x) = b_1) \ \& \ \dots \ \& \ (\exists \check{\mathbf{a}} \in \mathbf{a}^\exists)(F_s(a, x) = b_s) \ \& \\ &\quad \quad (\exists \check{\mathbf{a}} \in \mathbf{a}^\exists)(F_{s+1}(a, x) \in \mathbf{b}_{s+1}) \ \& \ \dots \ \& \ (\exists \check{\mathbf{a}} \in \mathbf{a}^\exists)(F_m(a, x) \in \mathbf{b}_m) ) \}. \end{aligned}$$

Отметим, что последнее включение обращается в точное равенство, если верны условия, накладываемые на  $F(a, x)$  во второй части условия теоремы. Именно, если каждая переменная, которой соответствует ненулевой элемент в векторе  $\mathbf{a}^\exists$ , входит лишь в одну из компонент функции  $F(a, x)$ , то мы имеем право «проносить» кванторы существования « $\exists$ » к отдельным членам конъюнкций [8].

Далее, для любой функции  $f$ , определённой и непрерывной на некотором интервале  $\mathbf{a}$ , имеют место следующие эквивалентности:

$$(\exists a \in \mathbf{a})(f(a) = b) \iff \begin{cases} \min_{a \in \mathbf{a}} f(a) \leq b, \\ \max_{a \in \mathbf{a}} f(a) \geq b, \end{cases} \quad (5.2)$$

$$(\exists a \in \mathbf{a})(f(a) \in \mathbf{b}) \iff \begin{cases} \min_{a \in \mathbf{a}} f(a) \leq \bar{\mathbf{b}}, \\ \max_{a \in \mathbf{a}} f(a) \geq \underline{\mathbf{b}}, \end{cases} \quad (5.3)$$

Поэтому мы можем продолжить наши выкладки с выделяющим предикатом следу-

ющим образом:

$$\begin{aligned} \Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \subseteq & \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{a} \in \mathbf{a}^\forall)(\forall \hat{b} \in \mathbf{b}^\forall) \right. \\ & \left( \left( \max_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_1(a, x) \geq b_1 \right) \& \left( \min_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_1(a, x) \leq b_1 \right) \& \right. \\ & \quad \dots \quad \& \\ & \left. \left( \max_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_s(a, x) \geq b_s \right) \& \left( \min_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_s(a, x) \leq b_s \right) \& \right. \\ & \left. \left( \max_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_{s+1}(a, x) \geq \underline{b}_{s+1} \right) \& \left( \min_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_{s+1}(a, x) \leq \bar{b}_{s+1} \right) \& \right. \\ & \quad \dots \quad \& \\ & \left. \left. \left( \max_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_m(a, x) \geq \underline{b}_m \right) \& \left( \min_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_m(a, x) \leq \bar{b}_m \right) \right) \right\}. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} (\forall b \in \mathbf{b})(g \geq b) & \iff g \geq \bar{b}, \\ (\forall b \in \mathbf{b})(g \leq b) & \iff g \leq \underline{b}, \end{aligned}$$

так что имеем

$$\begin{aligned} \Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \subseteq & \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{a} \in \mathbf{a}^\forall) \right. \\ & \left( \left( \max_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_1(a, x) \geq \bar{b}_1 \right) \& \left( \min_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_1(a, x) \leq \underline{b}_1 \right) \& \right. \\ & \quad \dots \quad \& \\ & \left. \left( \max_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_s(a, x) \geq \bar{b}_s \right) \& \left( \min_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_s(a, x) \leq \underline{b}_s \right) \& \right. \\ & \left. \left( \max_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_{s+1}(a, x) \geq \underline{b}_{s+1} \right) \& \left( \min_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_{s+1}(a, x) \leq \bar{b}_{s+1} \right) \& \right. \\ & \quad \dots \quad \& \\ & \left. \left. \left( \max_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_m(a, x) \geq \underline{b}_m \right) \& \left( \min_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_m(a, x) \leq \bar{b}_m \right) \right) \right\}. \end{aligned}$$

Наконец,

$$\begin{aligned} (\forall a \in \mathbf{a})(f(a) \geq b) & \iff \min_{a \in \mathbf{a}} f(a) \geq b, \\ (\forall a \in \mathbf{a})(f(a) \leq b) & \iff \max_{a \in \mathbf{a}} f(a) \leq b, \end{aligned}$$



и мы получаем

$$\begin{aligned} \Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \subseteq \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \right. \\ & \left( \min_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\forall} \max_{\check{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_1(a, x) \geq \bar{\mathbf{b}}_1 \right) \& \left( \max_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\forall} \min_{\check{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_1(a, x) \leq \underline{\mathbf{b}}_1 \right) \& \\ & \dots \quad \& \\ & \left( \min_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\forall} \max_{\check{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_s(a, x) \geq \bar{\mathbf{b}}_s \right) \& \left( \max_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\forall} \min_{\check{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_s(a, x) \leq \underline{\mathbf{b}}_s \right) \& \\ & \left( \min_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\forall} \max_{\check{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_{s+1}(a, x) \geq \underline{\mathbf{b}}_{s+1} \right) \& \left( \max_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\forall} \min_{\check{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_{s+1}(a, x) \leq \bar{\mathbf{b}}_{s+1} \right) \& \\ & \dots \quad \& \\ & \left. \left( \min_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\forall} \max_{\check{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_m(a, x) \geq \underline{\mathbf{b}}_m \right) \& \left( \max_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\forall} \min_{\check{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_m(a, x) \leq \bar{\mathbf{b}}_m \right) \right\}, \end{aligned}$$

что совпадает с системой неравенств (5.1). При этом справедливость условий второй части теоремы действительно имеет следствием выполнение равенств на всех этапах выкладки. ■

Как видно из доказательства, импликация только в одну сторону в утверждении Теоремы 5.1.2 в общем случае оказывается принципиальной. Результат этой теоремы может быть поэтому интерпретирован как свидетельство того, что кванторный язык описания управляемых систем, основанный на формализме математической логики и исчисления предикатов, обладает большими выразительными возможностями, чем аналитический язык, привлекающий традиционные операции и отношения из математического анализа. Различные аспекты использования этого кванторно-логического языка для описания управляемых систем обсуждаются, например, в работах [40, 42].

Условия на вхождение в уравнения системы параметров с интервальной E-неопределённостью, налагаемые Теоремой 5.1.2, довольно обременительны, но всё-таки они нередко выполняются на практике. Именно таковы, к примеру, интервальные системы уравнений, получающиеся в результате серии измерений параметров какого-либо исследуемого объекта. Как правило, отдельному измерению или наблюдению в них соответствует одно отдельное уравнение, и интервалы, которые возникают в разных измерениях вследствие их погрешностей и неопределённостей, независимы друг от друга. С одной стороны, результаты измерений, выполненных по времени до данного измерения, никак не могут зависеть от него. С другой стороны, перед выполнением следующих измерений (если они не идут непрерывно в реальном времени) приборы и инструменты обычно успевают «забыть» предыдущие измерения и потерять всякие их следы. Соответственно, погрешности и неопределённости измерений, выражаемые интервалами, как бы возникают заново в каждом новом измерении.



Рассмотрим пример возникновения множеств АЕ-решений интервальных линейных систем при математическом моделировании в экономике. Предположим, что некоторая экономика разбита на  $n$  отраслей, группирующих однородные предприятия, и объёмы продукции по этим отраслям образуют вектор  $x \in \mathbb{R}^n$ . Всё, что производится в экономике, потребляется, с одной стороны, в ней самой для целей дальнейшего производства. С другой стороны, результаты производства потребляются и для других целей, идут на поддержание жизни людей, в накопление и т. п. Пусть их соответствующие количественные значения по отдельным отраслям образуют *вектор конечного потребления*  $y \in \mathbb{R}^n$ . Тогда в первом приближении справедливо линейное уравнение межотраслевого экономического баланса

$$x = Ax + y, \quad (5.8)$$

которое называется *уравнением Леонтьева* [11]. В нём предполагается, что объём производственного потребления линейно зависит от объёмов продукции по отраслям, т. е. равен  $Ax$ , где  $A = (a_{ij})$  — некоторая  $n \times n$ -матрица. Её элементы называют *коэффициентами прямых производственных затрат*.

В реальной жизни определение коэффициентов  $a_{ij}$  для всей отрасли является весьма непростым. Как правило, вместо точных значений этих коэффициентов оперируют их оценками, полученными по тем или иным методикам. Разумно даже считать, что коэффициенты прямых производственных затрат известны нам лишь с некоторой неопределённостью, которую мы будем предполагать *интервальной* [41]. Иными словами, пусть  $a_{ij} \in \mathbf{a}_{ij}$  и  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$ .

Аналогичным образом, требование на вектор конечного потребления  $y$  также естественно сформулировать в интервальной форме: нас, как правило, устроит ситуация, когда реальное потребление будет выдерживаться в пределах некоторого интервала  $\mathbf{y} \in \mathbb{IR}^n$ . В вещественном случае решение системы (5.8) относительно  $x$  позволяет спрогнозировать объёмы производства по отраслям, необходимые для получения запланированного конечного потребления  $y$ . В интервальном случае вместо (5.8) мы имеем уравнение

$$x = \mathbf{A}x + \mathbf{y},$$

и формулировка вопроса может быть модифицирована, к примеру, следующим образом: для каких объёмов производства  $x$  при любых значениях коэффициентов прямых производственных затрат  $a_{ij}$  в пределах  $\mathbf{a}_{ij}$  мы всё равно получим конечное потребление из требуемого интервала  $\mathbf{y}$ ?

Нетрудно понять, что множество всех таких векторов  $x$  образует допусковое множество решений интервальной линейной системы

$$(I - \mathbf{A})x = \mathbf{y}. \quad (5.9)$$

Если же интервалы некоторых коэффициентов прямых производственных затрат представляют пределы их возможного управления, скажем, в результате каких-то изменений технологии производства или административных решений, то задача определения объёмов производства  $x$ , которые обеспечивают конечное потребление  $y \in \mathbf{y}$ , приводит уже к рассмотрению множеств АЕ-решений интервальной линейной системы (5.9).

При применении описанной модели и решении интервальной системы уравнений (5.9) следует иметь в виду, что коэффициенты прямых производственных затрат являются, как правило, связанными величинами в том смысле, который обсуждался в §1.3. Изменение способа производства, которое ведёт к изменению отдельного коэффициента  $a_{ij}$ , почти всегда «тянет» за собою изменение и других коэффициентов, так что независимо друг от друга они меняться не могут. Как следствие, при анализе подобных интервальных моделей с помощью каких-либо интервальных методов, которые предполагают независимость интервальных величин в исходных данных (например, тех, что изложены в Главе 6), следует выполнять необходимую корректировку результатов.

Переформулируем понятия и обозначения, введённые нами в §4.2а и §4.2в, на случай интервальных линейных систем вида (5.5).

**Определение 5.2.1** Множества АЕ-решений (или, иначе, АЕ-множества решений) — это множества решений интервальных линейных систем уравнений, для которых выделяющий предикат имеет АЕ-форму, т.е. такой, что все входящие кванторы существования « $\exists$ » предшествуют в нём входящим кванторам всеобщности « $\forall$ ».

Как и в общем случае, рассмотренном в §4.2в, для множеств АЕ-решений интервальных линейных систем уравнений существуют три эквивалентных способа описания соответствия типов неопределённости интервальным элементам системы:

- 1) указание для системы (5.5) кванторной матрицы и кванторного вектора правой части,
- 2) разбиения индексных множеств матрицы и вектора правой части системы (5.5) на подмножества, соответствующие элементам с А- и Е-неопределённостями,
- 3) дизъюнктные разложения интервальной матрицы и правой части на слагаемые, отвечающие А- и Е-неопределённостям системы (5.5).

Обратимся теперь к их подробному описанию:

1. Коль скоро порядок кванторов в выделяющем предикате зафиксирован, то простейший способ описания типов неопределённости заключается в прямом указании того, какие логические кванторы соответствуют тем или иным элементам интервальной системы. Именно, если ввести  $m \times n$ -матрицу  $\mathcal{A} = (\alpha_{ij})$  и  $m$ -вектор  $\beta = (\beta_i)$ , составленные из логических кванторов и такие, что

$$\alpha_{ij} := \begin{cases} \forall, & \text{если } a_{ij} \text{ имеет А-неопределённость,} \\ \exists, & \text{если } a_{ij} \text{ имеет Е-неопределённость,} \end{cases}$$

$$\beta_i := \begin{cases} \forall, & \text{если } b_i \text{ имеет А-неопределённость,} \\ \exists, & \text{если } b_i \text{ имеет Е-неопределённость.} \end{cases}$$

то указание  $\mathcal{A}$  и  $\beta$  полностью определяет конкретное множество АЕ-решений ИСЛАУ.

2. Другой путь представления типов неопределённости, отвечающих различным элементам линейной системы (5.5) — задание разбиения индексных множеств элементов матрицы  $\mathbf{A}$  и правой части  $\mathbf{b}$ . Более точно, пусть множество всех индексных пар  $(i, j)$  элементов матрицы  $\mathbf{A}$ , т. е. множество

$$\{ (1, 1), (1, 2), \dots, (m, n) \},$$

разбито на две непересекающиеся части  $\hat{\Gamma} = \{\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_p\}$  и  $\check{\Gamma} = \{\check{\gamma}_1, \dots, \check{\gamma}_q\}$ ,  $p + q = mn$ , такие что

элемент  $\mathbf{a}_{ij}$  имеет А-неопределённость при  $(i, j) \in \hat{\Gamma}$ , и

элемент  $\mathbf{a}_{ij}$  имеет Е-неопределённость при  $(i, j) \in \check{\Gamma}$ .

Аналогично, пусть  $\hat{\Delta} = \{\hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_r\}$  и  $\check{\Delta} = \{\check{\delta}_1, \dots, \check{\delta}_s\}$ ,  $\hat{\Delta} \cup \check{\Delta} = \{1, 2, \dots, n\}$  — непересекающиеся множества натуральных индексов, такие что в правой части ИСЛАУ

элемент  $\mathbf{b}_i$  имеет А-неопределённость при  $i \in \hat{\Delta}$ , и

элемент  $\mathbf{b}_i$  имеет Е-неопределённость при  $i \in \check{\Delta}$ .

При этом допускается естественная возможность того, что некоторые из множеств  $\hat{\Gamma}$ ,  $\check{\Gamma}$ ,  $\hat{\Delta}$ ,  $\check{\Delta}$  пусты. Ясно, что кванторная матрица  $\mathcal{A}$  и кванторный вектор  $\beta$  образованы элементами

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \forall, & \text{если } (i, j) \in \hat{\Gamma}, \\ \exists, & \text{если } (i, j) \in \check{\Gamma}, \end{cases} \quad \beta_i = \begin{cases} \forall, & \text{если } i \in \hat{\Delta}, \\ \exists, & \text{если } i \in \check{\Delta}, \end{cases}$$

а то или иное конкретное множество АЕ-решений однозначно задаётся указанием разбиений  $\hat{\Gamma} \cup \check{\Gamma}$  и  $\hat{\Delta} \cup \check{\Delta}$ .

3. Наконец, ещё один удобный способ, позволяющий описывать распределения типов неопределённости по интервальным элементам системы уравнений (5.5) состоит в том, чтобы определить интервальные матрицы  $\mathbf{A}^\forall = (\mathbf{a}_{ij}^\forall)$  и  $\mathbf{A}^\exists = (\mathbf{a}_{ij}^\exists)$  и интервальные векторы  $\mathbf{b}^\forall = (\mathbf{b}_i^\forall)$  и  $\mathbf{b}^\exists = (\mathbf{b}_i^\exists)$ , тех же размеров, что  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{b}$  соответственно, следующим образом

$$\mathbf{a}_{ij}^\forall := \begin{cases} \mathbf{a}_{ij}, & \text{если } \alpha_{ij} = \forall, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad \mathbf{a}_{ij}^\exists := \begin{cases} \mathbf{a}_{ij}, & \text{если } \alpha_{ij} = \exists, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (5.10)$$

$$\mathbf{b}_i^\forall := \begin{cases} \mathbf{b}_i, & \text{если } \beta_i = \forall, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad \mathbf{b}_i^\exists := \begin{cases} \mathbf{b}_i, & \text{если } \beta_i = \exists, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

При этом

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}^\forall + \mathbf{A}^\exists, & \mathbf{a}_{ij}^\forall \mathbf{a}_{ij}^\exists &= 0 \\ \mathbf{b} &= \mathbf{b}^\forall + \mathbf{b}^\exists, & \mathbf{b}_i^\forall \mathbf{b}_i^\exists &= 0, \end{aligned}$$

т. е. матрицы  $\mathbf{A}^\forall$ ,  $\mathbf{A}^\exists$  и векторы  $\mathbf{b}^\forall$ ,  $\mathbf{b}^\exists$  образуют *дизъюнктивные* (взаимнодополнительные) разложения для  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{b}$  соответственно. В матрице  $\mathbf{A}^\forall$  и векторе  $\mathbf{b}^\forall$  сосредоточены все интервальные элементы системы (5.5), соответствующие А-типу неопределённости, а в матрице  $\mathbf{A}^\exists$  и векторе  $\mathbf{b}^\exists$  — все интервальные элементы, соответствующие Е-типу неопределённости.

Важно отметить, что между тремя введёнными выше группами объектов, которые порождаются интервальной линейной системой (5.5) и её множеством АЕ-решений, именно, между

- (1) кванторными матрицей  $\mathbf{A}$  и вектором  $\beta$ ,
- (2) разбиением индексных множеств матрицы и вектора правой части системы (5.5) на непересекающиеся подмножества  $\hat{\Gamma}$ ,  $\check{\Gamma}$ ,  $\hat{\Delta}$ ,  $\check{\Delta}$ ,
- (3) дизъюнктивными разложениями интервальной матрицы  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\forall + \mathbf{A}^\exists$  и правой части  $\mathbf{b} = \mathbf{b}^\forall + \mathbf{b}^\exists$

имеется взаимно однозначное соответствие, так что указание любого одного из пунктов этой триады автоматически определяет два других. Ниже мы поэтому будем свободно переходить от одного способа описания к другому без специальных комментариев.

Мы можем дать также следующее

**Определение 5.2.2** Пусть для интервальной  $m \times n$ -системы линейных алгебраических уравнений  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  распределение типов интервальной неопределённости задаётся кванторными  $m \times n$ -матрицей  $\mathbf{A}$  и  $m$ -вектором  $\beta$ , а также ассоциированными с ними разбиениями индексных множеств матрицы и вектора тех же размеров на непересекающиеся подмножества  $\hat{\Gamma} = \{\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_p\}$  и  $\check{\Gamma} = \{\check{\gamma}_1, \dots, \check{\gamma}_q\}$ ,  $p + q = m$ ,  $\hat{\Delta} = \{\hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_r\}$  и  $\check{\Delta} = \{\check{\delta}_1, \dots, \check{\delta}_s\}$ ,  $r + s = m$ .

Множеством АЕ-решений типа  $\mathcal{A}\beta$  интервальной линейной системы  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  назовём множество

$$\begin{aligned} \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) := & \\ \{ x \in \mathbb{R}^n \mid & \\ (\forall a_{\hat{\gamma}_1} \in \mathbf{a}_{\hat{\gamma}_1}) \cdots (\forall a_{\hat{\gamma}_p} \in \mathbf{a}_{\hat{\gamma}_p}) & (\forall b_{\hat{\delta}_1} \in \mathbf{b}_{\hat{\delta}_1}) \cdots (\forall b_{\hat{\delta}_r} \in \mathbf{b}_{\hat{\delta}_r}) \\ (\exists a_{\check{\gamma}_1} \in \mathbf{a}_{\check{\gamma}_1}) \cdots (\exists a_{\check{\gamma}_q} \in \mathbf{a}_{\check{\gamma}_q}) & (\exists b_{\check{\delta}_1} \in \mathbf{b}_{\check{\delta}_1}) \cdots (\exists b_{\check{\delta}_s} \in \mathbf{b}_{\check{\delta}_s}) \\ & (Ax = b) \}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

или, что эквивалентно, множество

$$\begin{aligned} \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{A} \in \mathbf{A}^\forall)(\forall \hat{b} \in \mathbf{b}^\forall) \\ (\exists \check{A} \in \mathbf{A}^\exists)(\exists \check{b} \in \mathbf{b}^\exists)((\hat{A} + \check{A})x = \hat{b} + \check{b}) \}, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\forall + \mathbf{A}^\exists$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{b}^\forall + \mathbf{b}^\exists$  — соответствующие дизъюнктивные разбиения матрицы ИСЛАУ и её правой части.

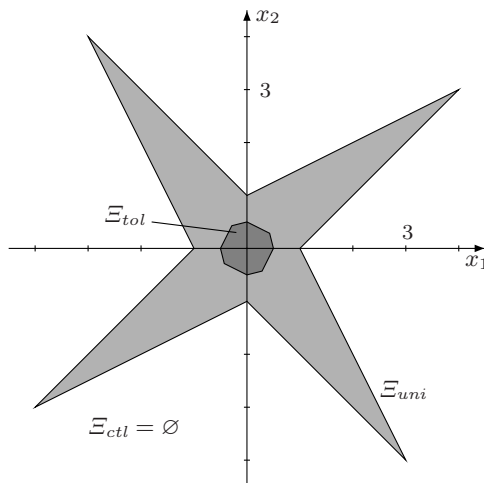


Рис. 5.1. Объединённое множество решений  $\Xi_{uni}$  и допусковое множество решений  $\Xi_{tol}$  интервальной линейной системы (5.12).

Как и ранее, следующие хорошо известные множества решений интервальных линейных систем —

- объединённое множество решений

$$\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(Ax = b) \},$$

- допусковое множество решений (см. Главу 6)

$$\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(Ax = b) \},$$

- управляемое множество решений (см. §5.4)

$$\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall b \in \mathbf{b})(\exists A \in \mathbf{A})(Ax = b) \}$$

— это крайние точки обширного семейства  $2^{m(n+1)}$  всевозможных множеств АЕ-решений для интервальных линейных систем вида (5.5). Четвертой крайней точкой этого семейства является множество

$$\{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \mathbf{A})(\forall b \in \mathbf{b})(Ax = b) \}.$$

Его рассмотрение бессмысленно, хотя по большей части и бессодержательно, так как для уравнений с интервальными параметрами ненулевой ширины это множество решений по большей части пусто. Значительный интерес представляет изучение этого множества решений для интервальных неравенств.

Вообще, пусть  $i$ -ая строка матрицы  $\mathbf{A}$  целиком состоит из кванторов всеобщности « $\forall$ » и соответствующим элементом кванторного вектора  $\beta$  также является « $\forall$ ». Тогда  $\Xi_{A\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \emptyset$ , если среди элементов  $\mathbf{a}_{1j}, \dots, \mathbf{a}_{in}, \mathbf{b}_i$  имеется хотя бы один

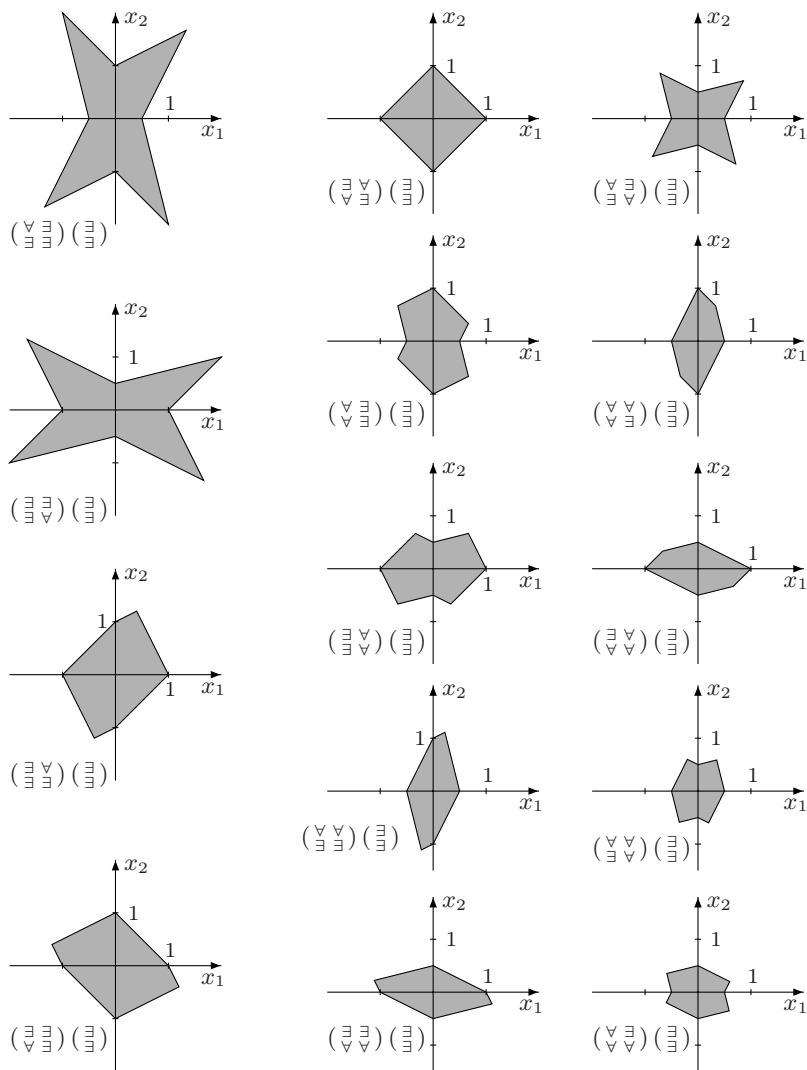


Рис. 5.2. Все другие непустые множества АЕ-решений системы (5.12).



интервал с ненулевой шириной. Из-за этого  $C_m^1 + C_m^2 + \dots + C_m^m = 2^m - 1$  штук множеств АЕ-решений интервальной линейной  $m \times n$ -системы оказываются заведомо пустыми (здесь  $C_m^k$  — это биномиальные коэффициенты). Таким образом, количество «нетривиальных» множеств АЕ-решений для таких систем уравнений уменьшается до  $2^{2^{m(n+1)}} - 2^m + 1 = 2^m(2^{m(n+1)} - 1) + 1$ .

Например, для интервальной линейной  $2 \times 2$ -системы уравнений можно рассмотреть  $2^2(2^4 - 1) + 1 = 61$  множество АЕ-решений. Рис. 5.1 и 5.2 изображают некоторые из множеств решений интервальной линейной системы

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 1] \\ [-1, 2] & [2, 4] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [-2, 2] \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

из работы [33].

Заметим, что всегда  $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \subseteq \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , т. е. объединенное множество решений является наиболее широким в семействе всех множеств АЕ-решений для интервальных систем уравнений, и это наблюдение может быть обобщено. Именно, если на множестве логических кванторов  $\{\forall, \exists\}$  ввести частичный порядок « $\preceq$ », положив

$$\forall \preceq \exists, \quad (5.13)$$

а отношения  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{A}'$ ,  $\beta \preceq \beta'$ ,  $\mathcal{A}\beta \preceq \mathcal{A}'\beta'$  договориться понимать покомпонентно и поэлементно, то для любых  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{b}$  имеет место импликация

$$\mathcal{A}\beta \preceq \mathcal{A}'\beta' \Rightarrow \Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \subseteq \Xi_{\mathcal{A}'\beta'}(\mathbf{A}, \mathbf{b}). \quad (5.14)$$

Наглядной иллюстрацией этого факта служат Рис. 5.1 и 5.2.

Свойство (5.14) может оказаться очень полезным при исследовании множеств кванторных решений интервальных систем уравнений. Если мы уже обнаружили, к примеру, что для системы (5.12)

$$\Xi_{(\exists\exists)}(\forall) = \Xi_{(\exists\forall)}(\exists) = \emptyset,$$

то, посредством «ослабления», в смысле порядка (5.13), кванторов в выделяющем предикате, можно заключить, что управляемое множество решений  $\Xi_{ctl}$  для (5.12) также пусто, и пустыми являются еще 45 множеств решений системы (5.12), получающиеся из вышеупомянутых трёх путем комбинирования кванторов перед элементами матрицы. Рассуждения, использованные нами при выводе свойства (5.14), в равной степени приложимы и к общим нелинейным интервальным системам уравнений, и, по существу, мы ещё не раз используем их далее в книге (например, в Предложениях 11.5.1 и 11.5.2 из Главы 11).

## 5.26 Характеризация и постановки задач

В этом параграфе мы займёмся выводом различных эквивалентных характеристик (описаний) множеств АЕ-решений интервальных линейных систем уравнений.

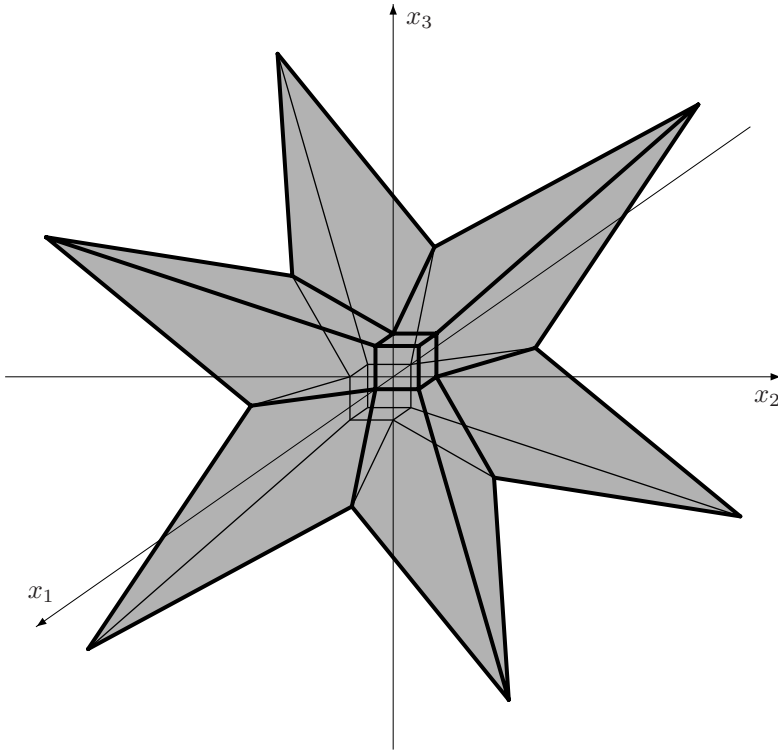


Рис. 5.3. Объединённое множество решений трёхмерной системы Ноймайера.

**Теорема 5.2.1**

$$\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \bigcap_{\hat{A} \in \mathbf{A}^\forall} \bigcap_{\hat{b} \in \mathbf{b}^\forall} \bigcup_{\check{A} \in \mathbf{A}^\exists} \bigcup_{\check{b} \in \mathbf{b}^\exists} \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\hat{A} + \check{A})x = \hat{b} + \check{b}\}$$

В частности, если  $\mathbf{A}$  — неособенная квадратная интервальная матрица, то

$$\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \bigcap_{\hat{A} \in \mathbf{A}^\forall} \bigcap_{\hat{b} \in \mathbf{b}^\forall} \bigcup_{\check{A} \in \mathbf{A}^\exists} \bigcup_{\check{b} \in \mathbf{b}^\exists} (\hat{A} + \check{A})^{-1}(\hat{b} + \check{b}).$$

**Доказательство.** По определению операций пересечения и объединения множеств

$$\begin{aligned} \Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{A} \in \mathbf{A}^\forall)(\forall \hat{b} \in \mathbf{b}^\forall)(\exists \check{A} \in \mathbf{A}^\exists)(\exists \check{b} \in \mathbf{b}^\exists)((\hat{A} + \check{A})x = \hat{b} + \check{b})\} \\ &= \bigcap_{\hat{A} \in \mathbf{A}^\forall} \bigcap_{\hat{b} \in \mathbf{b}^\forall} \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists \check{A} \in \mathbf{A}^\exists)(\exists \check{b} \in \mathbf{b}^\exists)((\hat{A} + \check{A})x = \hat{b} + \check{b})\} \\ &= \bigcap_{\hat{A} \in \mathbf{A}^\forall} \bigcap_{\hat{b} \in \mathbf{b}^\forall} \bigcup_{\check{A} \in \mathbf{A}^\exists} \bigcup_{\check{b} \in \mathbf{b}^\exists} \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\hat{A} + \check{A})x = \hat{b} + \check{b}\}. \end{aligned}$$



Например, для объединённого множества решений ИСЛАУ (5.5) с неособенной квадратной матрицей  $\mathbf{A}$  имеем

$$\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \bigcup_{\mathbf{A} \in \mathbf{A}} \bigcup_{\mathbf{b} \in \mathbf{b}} \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b},$$

что и обуславливает его название.

Обратимся теперь к аналитическим характеристикам множеств АЕ-решений интервальных систем линейных уравнений вида (5.5). Фундаментальным результатом нашей теории является

**Теорема 5.2.2** *Точка  $x$  принадлежит множеству АЕ-решений  $\Xi_{\mathbf{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  тогда и только тогда, когда*

$$\mathbf{A}^{\forall} \cdot x - \mathbf{b}^{\forall} \subseteq \mathbf{b}^{\exists} - \mathbf{A}^{\exists} \cdot x, \quad (5.15)$$

где « $\cdot$ » — интервальное матричное умножение.

**Доказательство.** Привлекая введённые в (5.10) матрицы  $\mathbf{A}^{\forall}$ ,  $\mathbf{A}^{\exists}$  и векторы  $\mathbf{b}^{\forall}$ ,  $\mathbf{b}^{\exists}$ , запишем Определение 5.2.2 множества решений  $\Xi_{\mathbf{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  в следующем виде:

$$\Xi_{\mathbf{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{\mathbf{A}} \in \mathbf{A}^{\forall})(\forall \hat{\mathbf{b}} \in \mathbf{b}^{\forall})(\exists \check{\mathbf{A}} \in \mathbf{A}^{\exists})(\exists \check{\mathbf{b}} \in \mathbf{b}^{\exists})(\hat{\mathbf{A}} + \check{\mathbf{A}})x = (\hat{\mathbf{b}} + \check{\mathbf{b}}) \}.$$

Для завершения доказательства теоремы преобразуем эквивалентным образом выделяющий предикат множества решений:

$$\begin{aligned} \Xi_{\mathbf{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) &= \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{\mathbf{A}} \in \mathbf{A}^{\forall})(\forall \hat{\mathbf{b}} \in \mathbf{b}^{\forall})(\exists \check{\mathbf{A}} \in \mathbf{A}^{\exists})(\exists \check{\mathbf{b}} \in \mathbf{b}^{\exists})(\hat{\mathbf{A}}x - \hat{\mathbf{b}} = \check{\mathbf{b}} - \check{\mathbf{A}}x) \} \\ &= \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{\mathbf{A}} \in \mathbf{A}^{\forall})(\forall \hat{\mathbf{b}} \in \mathbf{b}^{\forall})(\hat{\mathbf{A}}x - \hat{\mathbf{b}} \in \mathbf{b}^{\exists} - \mathbf{A}^{\exists} \cdot x) \} \\ &= \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}^{\forall} \cdot x - \mathbf{b}^{\forall} \subseteq \mathbf{b}^{\exists} - \mathbf{A}^{\exists} \cdot x \}, \end{aligned}$$

поскольку

$$\mathbf{b}^{\exists} - \mathbf{A}^{\exists} \cdot x = \{ \check{\mathbf{b}} - \check{\mathbf{A}}x \mid \check{\mathbf{A}} \in \mathbf{A}^{\exists}, \check{\mathbf{b}} \in \mathbf{b}^{\exists} \}$$

и

$$\mathbf{A}^{\forall} \cdot x - \mathbf{b}^{\forall} = \{ \hat{\mathbf{A}}x - \hat{\mathbf{b}} \mid \hat{\mathbf{A}} \in \mathbf{A}^{\forall}, \hat{\mathbf{b}} \in \mathbf{b}^{\forall} \}$$

на основании свойств интервальных матричных операций. ■

Отметим, что Теорема 5.2.2 обобщает все частные характеристики для различных множеств решений интервальных линейных систем — характеристику Бекка для объединённого множества решений (Предложение 7.1.1, характеристики для допускового множества решений (6.3) и управляемого множества решений (5.4).

Как уже указывалось выше, логические кванторы разного типа в общем случае не перестановочны друг с другом. Не имеем права мы их переставлять и в выделяющем предикате при определении различных множеств решений интервальных систем общего вида.

Введём

**Определение 5.2.3** Интервальные матрицу  $\mathbf{A}^c$  и вектор  $\mathbf{b}^c$ , определяемые посредством

$$\mathbf{A}^c := \mathbf{A}^\vee + \text{dual } \mathbf{A}^\exists, \quad \mathbf{b}^c := \text{dual } \mathbf{b}^\vee + \mathbf{b}^\exists,$$

станем называть характеристическими для множества АЕ-решений ИСЛАУ (5.5), задаваемого дизъюнктными разложениями  $\mathbf{A}$  на  $\mathbf{A}^\vee$  и  $\mathbf{A}^\exists$  и  $\mathbf{b}$  на  $\mathbf{b}^\vee$  и  $\mathbf{b}^\exists$ .

**Теорема 5.2.3** Точка  $x \in \mathbb{R}^n$  принадлежит множеству АЕ-решений  $\Xi_{\mathbf{A}, \mathbf{b}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{A}^c \cdot x \subseteq \mathbf{b}^c \quad (5.16)$$

в полной интервальной арифметике Каухера.

**Доказательство.** Заметим, что

$$\text{opp}(-v) = \text{dual } v$$

для любого интервала  $v \in \mathbb{KR}$ . Следовательно, если к обеим частям включения (5.15) прибавить по  $(\text{dual } \mathbf{b}^\vee + \text{dual } (\mathbf{A}^\exists \cdot x))$ , то придём к эквивалентному включению в полной интервальной арифметике

$$\mathbf{A}^\vee \cdot x + \text{dual } (\mathbf{A}^\exists \cdot x) \subseteq \text{dual } \mathbf{b}^\vee + \mathbf{b}^\exists. \quad (5.17)$$

Но  $\text{dual } (\mathbf{A}^\exists \cdot x) = (\text{dual } \mathbf{A}^\exists) \cdot x$ , так как  $x$  — точечный вектор. Вместо (5.17) мы можем написать поэтому

$$\mathbf{A}^\vee \cdot x + (\text{dual } \mathbf{A}^\exists) \cdot x \subseteq \text{dual } \mathbf{b}^\vee + \mathbf{b}^\exists.$$

Наконец, в левой части можно воспользоваться дистрибутивностью относительно точечной переменной  $x$ , получая вместо (5.15) равносильное включение

$$(\mathbf{A}^\vee + \text{dual } \mathbf{A}^\exists) \cdot x \subseteq \text{dual } \mathbf{b}^\vee + \mathbf{b}^\exists,$$

которое совпадает с (5.16). ■

Введённое Определением 5.2.3 понятие настолько важно в развиваемой нами теории, что на его обсуждении стоит остановиться подробнее. Указание характеристических матрицы и правой части полностью определяют множество АЕ-решений интервальной системы уравнений, наряду с триадой, описанной в §4.2в, т. е. кванторными матрицей  $\mathcal{A}$  и вектором  $\beta$ , разбиением индексных множеств интервальных параметров системы, а также их дизъюнктными разложениями. Кроме того, для интервальных линейных систем задание характеристических матрицы и правой части является очень информативным, одновременно указывая как тип неопределённости, так и сами интервалы параметров в системе. Поэтому будет совершенно корректным говорить, что множество АЕ-решений (некоторой) интервальной системы линейных уравнений задаётся характеристическими матрицей и вектором правой части, и писать  $\Xi(\mathbf{A}^c, \mathbf{b}^c)$ , не указывая явно эту систему и распределение типов неопределённостей в ней. При рассмотрении интервальных линейных систем уравнений мы действительно получим ощутимую выгоду от введения новых понятий и терминологии, например, при выполнении предобуславливания (см. §10.5).

Следующая характеристика множеств АЕ-решений была предложена И. Роном [55] и является переформулировкой условия Теоремы 5.2.2 в виде линейных неравенств с модулями.

**Теорема 5.2.4** (характеризация Рона множеств АЕ-решений) *Точка  $x$  принадлежит множеству АЕ-решений  $\Xi_{A\mathbf{b}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  тогда и только тогда, когда*

$$|(\text{mid } \mathbf{A}) \cdot x - \text{mid } \mathbf{b}| \leq (\text{rad } \mathbf{A}^{\exists} - \text{rad } \mathbf{A}^{\forall}) \cdot |x| + (\text{rad } \mathbf{b}^{\exists} - \text{rad } \mathbf{b}^{\forall}). \quad (5.18)$$

**Доказательство.** Включение  $\mathbf{p} \subseteq \mathbf{q}$  для правильных интервальных векторов  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  равносильно, как известно, покомпонентному неравенству

$$|\text{mid } \mathbf{q} - \text{mid } \mathbf{p}| \leq \text{rad } \mathbf{q} - \text{rad } \mathbf{p}$$

(см. Главу 1). Следовательно, характеристика (5.15) может быть переписана в следующем виде:

$$|\text{mid}(\mathbf{b}^{\exists} - \mathbf{A}^{\exists} \cdot x) - \text{mid}(\mathbf{A}^{\forall} \cdot x - \mathbf{b}^{\forall})| \leq \text{rad}(\mathbf{b}^{\exists} - \mathbf{A}^{\exists} \cdot x) - \text{rad}(\mathbf{A}^{\forall} \cdot x - \mathbf{b}^{\forall}). \quad (5.19)$$

Далее, воспользовавшись свойствами (1.24) и (1.27), можем заключить, что (5.19) выполняется в том и лишь в том случае, если

$$\begin{aligned} & |\text{mid } \mathbf{b}^{\exists} - \text{mid}(\mathbf{A}^{\exists} \cdot x) - \text{mid}(\mathbf{A}^{\forall} \cdot x) + \text{mid } \mathbf{b}^{\forall}| \\ & \leq \text{rad } \mathbf{b}^{\exists} + \text{rad}(\mathbf{A}^{\exists} \cdot x) - \text{rad}(\mathbf{A}^{\forall} \cdot x) - \text{rad } \mathbf{b}^{\forall}. \end{aligned}$$

Это эквивалентно характеристике (5.18), так как

$$\text{mid}(\mathbf{A}^{\exists} \cdot x) = (\text{mid } \mathbf{A}^{\exists}) \cdot x, \quad \text{mid}(\mathbf{A}^{\forall} \cdot x) = (\text{mid } \mathbf{A}^{\forall}) \cdot x$$

и

$$\text{rad}(\mathbf{A}^{\exists} \cdot x) = (\text{rad } \mathbf{A}^{\exists}) \cdot |x|, \quad \text{rad}(\mathbf{A}^{\forall} \cdot x) = (\text{rad } \mathbf{A}^{\forall}) \cdot |x|.$$

■

Частный случай Теоремы 5.2.4 — эквивалентность

$$x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \iff |(\text{mid } \mathbf{A}) x - \text{mid } \mathbf{b}| \leq \text{rad } \mathbf{A} \cdot |x| + \text{rad } \mathbf{b} \quad (5.20)$$

для объединённого множества решений ИСЛАУ — нередко называют *характеризацией Оеттли-Прагера*. Помимо неё для объединённого множества решений интервальных систем линейных алгебраических уравнений существуют другие аналитические характеристики (см. [70]), основанные на операции взятия мигнитуды и которые иногда могут оказаться более удобными.

**Определение 5.2.4** *Выпуклым полиэдральным множеством в  $\mathbb{R}^n$  называется множество, которое можно представить как пересечение конечного числа замкнутых полупространств  $\mathbb{R}^n$ , т. е. как множество решений конечной системы линейных неравенств вида*

$$h_{(i)}^{\top} x \leq \xi_i, \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

где  $h_{(i)} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\xi_i \in \mathbb{R}$  и  $p$  — некоторый натуральный номер.

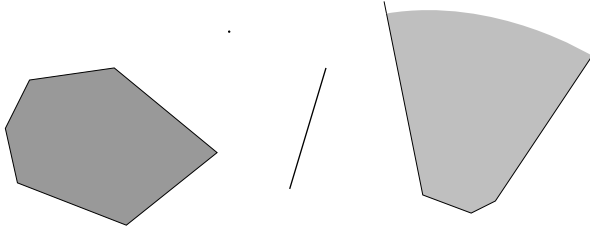


Рис. 5.4. Примеры некоторых выпуклых полиэдральных множеств в  $\mathbb{R}^2$ .

**Теорема 5.2.5** Пересечение множества АЕ-решений  $\Xi_{\mathbf{A}, \mathbf{b}}$  интервальной линейной системы уравнений  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{IR}^m$ , с каждым из ортантов пространства  $\mathbb{R}^n$  для любых квадратной матрицы  $\mathbf{A}$  и вектора  $\mathbf{b}$  является выпуклым полиэдральным множеством. Его вершины — это решения точечных линейных  $m \times n$ -систем  $Ax = b$ , уравнения которых являются либо угловыми (вершинными) линейными уравнениями вида

$$\tilde{a}_{i1}x_1 + \tilde{a}_{i2}x_2 + \dots + \tilde{a}_{in}x_n = \tilde{b}_i, \quad \text{где } (\tilde{a}_{i1}, \tilde{a}_{i2}, \dots, \tilde{a}_{in}) \in \text{vert } \mathbf{A}_i, \tilde{b}_i \in \text{vert } \mathbf{b}_i,$$

либо уравнениями координатных гиперплоскостей вида  $x_i = 0$  для некоторых индексов  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Наглядной иллюстрацией этого результата служат Рис. 5.1, 5.2 и 5.3.

**Доказательство.** Принадлежность точки  $x$  какому-либо ортанту пространства  $\mathbb{R}^n$  определяется указанием знаков её компонент, точнее, неравенств вида  $x_i \leq 0$  или  $x_i \geq 0$  для  $i = 1, 2, \dots, n$ . Далее, напомним определение (1.10) умножения интервала на вещественное число:

$$cx = \begin{cases} [\underline{c}x, \overline{c}x], & \text{если } x \geq 0, \\ [\overline{c}x, \underline{c}x], & \text{если } x \leq 0. \end{cases}$$

Из него следует, что для любой интервальной  $m \times n$ -матрицы  $\mathbf{C}$  компоненты произведения  $\mathbf{C} \cdot x = ((\mathbf{C} \cdot x)_1, (\mathbf{C} \cdot x)_2, \dots, (\mathbf{C} \cdot x)_m)^\top$  могут быть представлены в следующем виде:

$$(\mathbf{C} \cdot x)_i = \sum_{j=1}^n c_{ij}x_j = \left[ \sum_{j=1}^n \underline{c}_{ij}x_j, \sum_{j=1}^n \overline{c}_{ij}x_j \right] = \left[ \sum_{j=1}^n c'_{ij}x_j, \sum_{j=1}^n c''_{ij}x_j \right], \quad (5.21)$$

где  $c'_{ij}$  и  $c''_{ij}$  — некоторые числа (возможно, совпадающие), которые принадлежат множеству концов  $\{\underline{c}_{ij}, \overline{c}_{ij}\}$  интервала  $c_{ij}$  и фиксированы для каждого отдельного ортанта, содержащего точку  $x$ .

Переписывая теперь включения (5.15) покомпонентным образом и заменяя с помощью представления (5.21) каждое из одномерных включений парой неравенств

между концами интервалов, мы получим систему  $2m + n$  линейных неравенств

$$\begin{cases} A'x \geq b', \\ A''x \leq b'', \\ \text{условие на знаки } x_i, i = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (5.22)$$

где  $A', A'' \in \text{vert } \mathbf{A}$  и  $b', b'' \in \text{vert } \mathbf{b}$ . Система неравенств (5.22) определяет выпуклое полиэдральное множество.

Вершины этого множества — точки пересечения по крайней мере  $n$  штук гиперплоскостей, которые ограничивают его. Они задаются линейными уравнениями, получающимися из неравенств системы (5.22) путём замены знаков « $\geq$ » и « $\leq$ » на равенства. ■

Доказательство Теоремы 5.2.5 конструктивно и указывает, как нетрудно понять, способ рисования множеств решений ИСЛАУ в случае двух или даже трех измерений. Действительно, нужно строить эти множества решений «по ортантам», последовательно фиксируя нужным образом знаки компонент точки, соответствующие её принадлежности тому или иному ортанту пространства  $\mathbb{R}^n$ . В отдельно взятом ортанте легко вписать систему неравенств вида (5.22), определяющую пересечение множества решений с этим ортантом, а затем решить её графически. В итоге полная картинка множества решений собирается из получившихся кусков (некоторые из которых могут оказаться пустыми).<sup>1</sup>

Итак, в общем случае  $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  может быть представлено как объединение не более  $2^n$  (по числу ортантов) выпуклых полиэдральных множеств. Для объединённого множества решений ИСЛАУ этот простой, но важный факт был впервые установлен У. Оеттли [50] и впоследствии передоказан другими средствами в [34, 37].

Как следствие, сложность прямого описания множеств АЕ-решений может расти экспоненциально с  $n$  несмотря на приведенные выше простые и геометрически наглядные характеризационные результаты. Подобное описание делается, таким образом, исключительно трудоёмким и практически бесполезным уже для интервальных линейных систем не очень больших размерностей. Это затруднение носит принципиальный характер, так как в общем случае если «достаточно много» элементов в  $\mathbf{A}$  имеют Е-неопределённость, то даже задача распознавания того, пусто или непусто множество АЕ-решений ИСЛАУ является NP-трудной, т. е. не может быть решена легче, чем за время, которое является экспонентой от длины кодировки задачи [45]. Для объединённого множества решений  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  и управляемого множества решений  $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  этот факт был известен ещё с начала 90-х годов [9, 10, 43].

В силу сказанного на практике не имеет смысла нацеливаться на нахождение полного описания множеств решений  $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , такие описания чаще всего не нужны и пользователям. Как и в общем случае, исследованном в §§4.1–4.3, вполне достаточно вычислять некоторые просто устроенные приближения (оценки) для  $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ . В качестве оценочных множеств мы снова рассмотрим интервальные векторы — прямые произведения интервалов вещественной оси, — т. е., геометрически, брусы с гранями, параллельными координатным осям. Подытоживая, можно сформулировать основ-

<sup>1</sup>Именно таким образом рисуются множества решений интервальных линейных систем с помощью пакетов `IntLinIncXX` [19].

ные задачи для интервальных линейных систем уравнений, которые мы собираемся решать:

$$\begin{array}{l} \text{Для интервальной линейной системы уравнений } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \text{и кванторных матрицы } \mathcal{A} \text{ и вектора } \beta \text{ тех же размеров,} \\ \text{что } \mathbf{A} \text{ и } \mathbf{b} \text{ соответственно найти внутреннюю} \\ \text{интервальную оценку множества решений } \Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \end{array} \quad (5.23)$$

и

$$\begin{array}{l} \text{Для интервальной линейной системы уравнений } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \text{и кванторных матрицы } \mathcal{A} \text{ и вектора } \beta \text{ тех же размеров,} \\ \text{что } \mathbf{A} \text{ и } \mathbf{b} \text{ соответственно найти внешнюю} \\ \text{интервальную оценку множества решений } \Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \end{array} \quad (5.24)$$

Ясно, что вышеприведённые постановки задач имеют содержательный смысл лишь в случае  $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$ , и выяснение условий этой непустоты является отдельным важным вопросом.

### 5.3 Дальнейшие свойства множеств решений

Напомним, что множество в топологическом пространстве называется *связным*, если оно не может быть представлено в виде объединения одновременно открытых и замкнутых подмножеств. В противном случае множество называется *несвязным*, а отдельные открыто-замкнутые подмножества, на которые оно распадается, именуется *компонентами связности*. Понятие связности формализует интуитивно понятное свойство множества состоять как бы из «одного куска». В евклидовом пространстве связность множества равносильна *линейной связности* — возможности соединить любые две точки множества непрерывным путём, состоящим только из точек этого множества.

Множество в метрическом пространстве называется *ограниченным*, если оно целиком содержится в шаре некоторого радиуса.

Множества АЕ-решений являются замкнутыми в силу Теоремы 5.2.5. Что можно сказать об их связности и ограниченности? Наиболее важными из множеств решений являются объединённое и допусковое множества решений, и последнему из них посвящена отдельная глава книги. В ней подробно рассматриваются строение и свойства допускового множества решений, а в этом разделе мы рассмотрим детально объединённое множество решений. Это вызвано не только его важностью в прикладных задачах, но и тем, что объединённое множество решений — наибольшее по включению из всех множеств решений. Поэтому из ограниченности объединённого множества решений можно заключить, в частности, что все остальные множества АЕ-решений данного интервального уравнения также ограничены.



Обратимся сначала к интервальным системам линейных алгебраических уравнений, у которых количество уравнений совпадает с числом неизвестных, т. е. имеющим квадратную матрицу коэффициентов.

**Теорема 5.3.1** *Если  $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  — квадратная неособенная интервальная матрица, то для любого вектора правой части  $\mathbf{b} \in \mathbb{IR}^n$  объединённое множество решений  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  интервальной линейной системы  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  связно и компактно.*

**Доказательство.** Отображение из  $\mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}^n$ , сопоставляющее  $n \times n$ -матрице  $A$  и  $n$ -вектору  $b$  решение  $A^{-1}b$  системы линейных уравнений  $Ax = b$ , определено на связном компакте  $\mathbf{A} \times \mathbf{b} \subset \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^n$  и является непрерывным на нём в силу того, что неособенны все  $A \in \mathbf{A}$ . Следовательно, множество  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  также связно и компактно как образ множества  $\mathbf{A} \times \mathbf{b}$  при непрерывном отображении [6]. ■

**Теорема 5.3.2** (альтернатива Янссона) *Пусть для интервальной системы линейных алгебраических уравнений  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  с квадратной интервальной матрицей объединённое множество решений  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  непусто. Тогда верно одно и только одно из следующих утверждений:*

- (I) *множество  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  компактно и связно, а интервальная матрица  $\mathbf{A}$  — неособенная;*
- (II) *множество  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  неограниченно, каждая его компонента связности неограниченна, а интервальная матрица  $\mathbf{A}$  — особенная.*

**Доказательство.** Если множество решений  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  компактно, т.е. ограничено, то, очевидно, (ii) не выполняется.

Предположим, что  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  неограниченно, но существует непустая ограниченная компонента связности  $\tilde{\Xi}$  этого множества. Тогда найдётся матрица  $A' \in \mathbf{A}$  и векторы  $b' \in \mathbf{b}$ ,  $x' \in \tilde{\Xi}$ , такие что  $A'x' = b'$ . При этом матрица  $A'$  обязана быть неособенной, так как в противном случае множество решений системы  $A'x = b'$  было бы неограниченным, а вместе с ним было бы неограниченным и  $\tilde{\Xi}$ .

Если всё множество решений в целом неограниченно, то в силу предыдущей теоремы интервальная матрица  $\mathbf{A}$  является особенной. Обозначим для определённости через  $A''$  ту вещественную матрицу из  $\mathbf{A}$ , которая является особенной. Поскольку множество  $\mathbf{A}$  выпукло, то для любого  $\lambda \in [0, 1]$  матрица

$$A(\lambda) := \lambda A' + (1 - \lambda)A''$$

находится в  $\mathbf{A}$ , и  $A(0) = A'$ ,  $A(1) = A''$ . Обозначим

$$\tilde{\lambda} := \inf \{ \lambda \in [0, 1] \mid A(\lambda) \text{ особенная} \}.$$

Так как  $A(0) = A'$  — неособенная, то все её достаточно малые возмущения также неособенны. Следовательно,  $\tilde{\lambda} > 0$ , а матрица  $A(\tilde{\lambda})$  обязана быть особенной.

Пусть  $x(\lambda)$  — единственное решение системы уравнений

$$A(\lambda)x(\lambda) = b'$$

для  $\lambda \in [0, \tilde{\lambda})$ . Поскольку оно выражается в виде  $x(\lambda) = A^{-1}(\lambda) \cdot b'$ , то вектор  $x(\lambda)$  непрерывно зависит от  $\lambda \in [0, \tilde{\lambda})$ , а множество всех  $x(\lambda)$ ,  $\lambda \in [0, \tilde{\lambda})$  является непрерывным путём. Итак, все  $x(\lambda)$  для  $\lambda \in [0, \tilde{\lambda})$  содержатся в одной компоненте связности  $\tilde{\Xi}$  объединённого множества решений.

Пусть  $\{\lambda_k\}$  — последовательность, сходящаяся к  $\tilde{\lambda}$  снизу:

$$\lambda_k \rightarrow \tilde{\lambda}, \quad \lambda_k \leq \tilde{\lambda}.$$

Из соответствующей последовательности решений  $\{x(\lambda_k)\}$  можно выделить подпоследовательность  $\{x(\lambda_{k_l})\}$ , которая сходится к некоторому пределу  $\tilde{x} \in \tilde{\Xi}$ , коль скоро множество  $\tilde{\Xi}$  замкнуто и предполагается ограниченным. Тогда

$$A(\tilde{\lambda})\tilde{x} = \lim_{\lambda_k \rightarrow \tilde{\lambda}} A(\lambda_k) \cdot \lim_{\lambda_{k_l} \rightarrow \tilde{\lambda}} x(\lambda_{k_l}) = \lim_{\lambda_{k_l} \rightarrow \tilde{\lambda}} (A(\lambda_{k_l})x(\lambda_{k_l})) = b'.$$

Получается, что система  $A(\tilde{\lambda})x = b'$  имеет решение  $\tilde{x} \in \tilde{\Xi}$ .

Но матрица  $A(\tilde{\lambda})$  — особенная, так что множество решений системы уравнений  $A(\tilde{\lambda})x = b'$  неограниченно. Кроме того, оно связано непрерывным путём с множеством  $\tilde{\Xi}$ . Поэтому компонента связности  $\tilde{\Xi}$  объединённого множества решений  $\Xi_{uni}(A, b)$  не может быть ограниченной, что противоречит нашему исходному допущению. ■

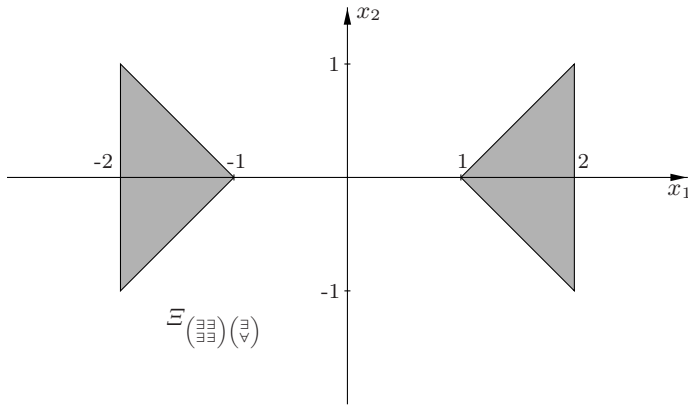


Рис. 5.5. Несвязное множество решений интервальной линейной системы (5.25).

Верны ли доказанные выше утверждения для произвольных множеств АЕ-решений интервальных линейных систем уравнений? Ответ на этот вопрос отрицателен: даже если матрица ИСЛАУ неособенна, некоторые из множеств АЕ-решений этой системы могут оказаться несвязными. Примером может служить система

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [-1, 1] \end{pmatrix} \tag{5.25}$$

и её множество  $(\Xi)(\forall)$ -решений, изображённое на Рис. 5.5. Аналогичный пример, но

с другим распределением типов неопределённостей — система уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ [-2, 2] & [-3, -1] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ 2 \end{pmatrix} \quad (5.26)$$

и её множество решений, которое изображено на Рис. 5.6

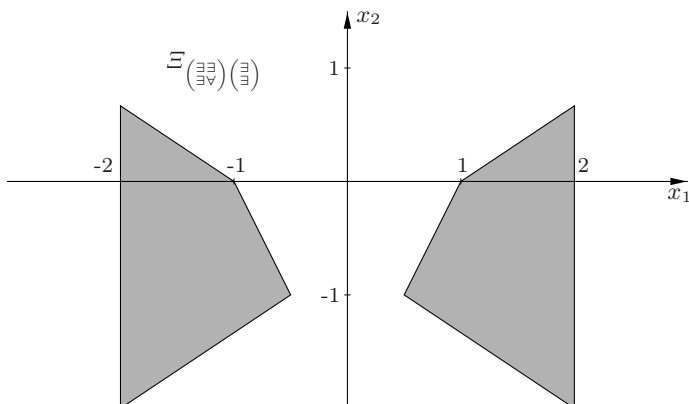


Рис. 5.6. Несвязное множество решений интервальной линейной системы (5.26).

Важным свойством объединённого множества решений интервальных линейных систем уравнений является

**Теорема 5.3.3** (теорема Бекка-Никеля) Пусть  $Ax = b$  — интервальная система линейных алгебраических уравнений с неособенной матрицей  $A \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ . Для любого индекса  $\nu \in \{1, 2, \dots, n\}$  точные покоординатные оценки точек из объединённого множества решений — экстремальные значения  $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(A, b)\}$  и  $\max\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(A, b)\}$  — достигаются на решениях крайних точечных систем уравнений  $Ax = b$ , т. е. таких, что матрица  $A$  и вектор  $b$  образованы концами интервальных элементов из  $A$  и  $b$  соответственно.

**Доказательство.** Вспомним правило Крамера, дающее выражения для компонент вектора решения системы линейных алгебраических уравнений  $Ax = b$  через элементы матрицы и правой части (см., к примеру, [3, 15]):

$$x_\nu = \frac{\det(A_{:1}, \dots, A_{:,\nu-1}, b, A_{:,\nu+1}, \dots, A_{:n})}{\det A}, \quad \nu = 1, 2, \dots, n,$$

где в числителе стоит матрица, полученная из  $A$  заменой её  $\nu$ -го столбца  $A_{:\nu}$  на столбец правой части  $b$ . Какой вид имеет зависимость  $x_\nu$  от какого-то отдельного элемента  $a_{ij}$  из матрицы  $A$  или от элемента  $b_i$  из вектора правой части  $b$ ?

Из свойств определителя можно заключить, что для любых  $i, j = 1, 2, \dots, n$

$$x_\nu = x_\nu(a_{ij}) = \frac{\alpha a_{ij} + \beta}{\gamma a_{ij} + \delta}, \quad (5.27)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  — величины, не зависящие от  $a_{ij}$ . Аналогично, для любых  $i = 1, 2, \dots, n$

$$x_\nu = x_\nu(b_i) = \frac{\zeta b_i + \eta}{\det A}, \quad (5.28)$$

где  $\zeta$  и  $\eta$  уже не зависят от  $b_i$ . Эти соотношения справедливы при любых значениях остальных элементов матрицы и правой части в пределах назначенных им интервалов и при этом  $\gamma a_{ij} + \delta \neq 0$  и  $\det A \neq 0$ .

Утверждение теоремы следует теперь из того, что любая дробно-линейная функция монотонна на множестве значений аргумента, не включающем нуль знаменателя, а любая линейная функция также всегда монотонна. В частности, монотонны функции  $x_\nu(a_{ij})$  и  $x_\nu(b_i)$ , задаваемые с помощью (5.27) и (5.28). ■

Что можно сказать об объединённом множестве решений общих интервальных линейных систем уравнений, у которых количество уравнений не равно числу неизвестных? Иными словами, у которых матрица коэффициентов — не обязательно квадратная? Для аккуратного рассмотрения поставленного вопроса нужно привлечь понятие ранга интервальной матрицы.

Рангом матрицы называется, как известно, максимальное число её линейно независимых строк или столбцов. Как показывается в матричном анализе, эти числа совпадают между собой и равны максимальному из порядков ненулевых миноров рассматриваемой матрицы (см., к примеру, [3, 15] и другие книги по теории матриц и линейной алгебре). Вещественная  $m \times n$ -матрица называется *матрицей полного ранга*, если её ранг равен минимальному из чисел  $m$  и  $n$  (большим он быть не может). Назовём интервальную матрицу *матрицей полного ранга*, если она содержит только точечные матрицы полного ранга. Иначе говорим о том, что данная матрица имеет *неполный ранг*.

**Теорема 5.3.4** *Если интервальная  $m \times n$ -матрица  $\mathbf{A}$ ,  $m \geq n$ , имеет полный ранг, то объединённое множество решений  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  интервальной системы линейных алгебраических уравнений  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  является ограниченным.*

**Доказательство.** Для интервальной линейной системы  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  помимо объединённого множества решений  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  введём также множество

$$\tilde{\Xi}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(A^\top A x = A^\top b) \},$$

образованное решениями всех систем линейных уравнений  $A^\top A x = A^\top b$  для  $A \in \mathbf{A}$  и  $b \in \mathbf{b}$ . Известно, что совместная система уравнений  $Ax = b$  равносильна системе уравнений  $A^\top A x = A^\top b$  (см., к примеру, [3]), и поэтому  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \subseteq \tilde{\Xi}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ . Доказательство теоремы будет заключаться в том, что мы покажем ограниченность этого, в общем случае более широкого, множества  $\tilde{\Xi}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ .

Если  $A$  —  $m \times n$ -матрица полного ранга и  $m \geq n$ , то  $A^\top A$  — неособенная  $n \times n$ -матрица. Поэтому решение  $\check{x}$  системы  $A^\top A x = A^\top b$  даётся формулой

$$\check{x} = (A^\top A)^{-1} A^\top b,$$

результат которой непрерывно зависит от  $A$  и  $b$  для матриц  $A$  полного ранга. Рассмотрим отображение  $\mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , которое задаётся правилом

$$(A, b) \mapsto (A^\top A)^{-1} A^\top b$$

и определено для всех  $m \times n$ -матриц  $A$  полного ранга,  $m \geq n$ , и любых  $n$ -векторов  $b$ . Оно непрерывно, а множество  $\tilde{\Xi}(A, b)$  является образом компакта  $A \times b \subset \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^m$  при этом непрерывном отображении. Как следствие,  $\tilde{\Xi}(A, b)$  также компактно (см., к примеру, [6]), и потому ограничено. По этой причине ограничено и содержащееся в нём исходное множество решений  $\Xi_{uni}(A, b)$  интервальной линейной системы уравнений  $Ax = b$ . ■

Обратное к Теореме 5.3.4 утверждение обусловлено дополнительными свойствами матрицы системы и множества решений и в общем случае может не выполняться. Рассмотрим в качестве примера систему линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [10, 11] \\ [40, 42] \\ [90, 93] \end{pmatrix}, \quad (5.29)$$

в которой интервальность присутствует лишь в правой части. В матрице этой системы все строки пропорциональны, так что матрица имеет неполный ранг 1. Кроме того, система (5.29), очевидно, несовместна, так как три её уравнения задают три параллельные полосы в  $\mathbb{R}^2$ , не пересекающиеся друг с другом. Таким образом, множество решений системы пусто, и поэтому ограничено.

Исследование полноранговости интервальных матриц может быть выполнено, к примеру, с помощью результатов из [22]. Но в общем случае проверка того, имеет ли интервальная матрица полный ранг, представляет собой NP-трудную задачу [56]. Это следует из того, что её частный случай — задача распознавания неособенности интервальной матрицы — также NP-трудна (см. §2.5).

## 5.4 Управляемое множество решений интервальных уравнений

Этот параграф посвящён управляемому множеству решений интервальных линейных систем, т. е. множеству

$$\Xi_{ctl}(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall b \in \mathbf{b})(\exists A \in \mathbf{A})(Ax = b)\}, \quad (5.30)$$

которое в силу Теоремы 5.2.2 эквивалентным образом определяется как

$$\Xi_{ctl}(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x \supseteq b\}.$$

Это множество образовано всеми такими векторами  $x \in \mathbb{R}^n$ , что для любого желаемого  $b \in \mathbf{b}$  мы можем подобрать матрицу  $A \in \mathbf{A}$ , удовлетворяющую  $Ax = b$ . Заметим, что

$$\Xi_{ctl}(A, b) \subseteq \Xi_{uni}(A, b),$$

и если  $\mathbf{A}$  — неособенная интервальная матрица, то  $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  ограничено одновременно с  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  (а также связно).

Содержательную интерпретацию множества решений (5.30) нетрудно дать, исходя из сведений по системному анализу, которые мы привлекли в §4.1. Именно, множество (5.30) является множеством решений задачи нахождения внутренних состояний (4.2) для случая, когда все входы системы — управляющие, а все выходы — управляемые, что и оправдывает выбор названия для (4.19) и (5.30) — *управляемое множество решений*.

Справедлива следующая

**Теорема 5.4.1** (теорема Лакеева-Носкова) *Точка  $x \in \mathbb{R}^n$  принадлежит управляемому множеству решений интервальной линейной системы  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  тогда и только тогда, когда  $x = x' - x''$ , где векторы  $x', x'' \in \mathbb{R}^n$  удовлетворяют системе линейных неравенств*

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{A}}x' - \overline{\mathbf{A}}x'' \leq \underline{\mathbf{b}}, \\ -\overline{\mathbf{A}}x' + \underline{\mathbf{A}}x'' \leq -\overline{\mathbf{b}}, \\ x', x'' \geq 0, \end{cases} \quad (5.31)$$

а также условию дополненности  $(x')^\top x'' = 0$ .

Чтобы сделать наши рассуждения более наглядными обратимся к Рис. 5.7, на котором изображено управляемое множество решений интервальной линейной системы

$$\begin{pmatrix} [-2, 1] & [-1, 1] \\ [-1, 1] & [-1, 2] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-2, 1] \\ [-1, 2] \end{pmatrix}. \quad (5.32)$$

$\Xi_{ctl}$  представляет из себя целую плоскость  $\mathbb{R}^2$  с вырезанной звездообразной областью вокруг начала координат.

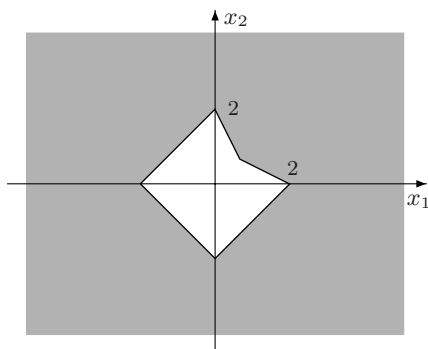


Рис. 5.7. Управляемое множество решений интервальной системы (5.32).

Конфигурация этой картинки является в некотором смысле типичной, поскольку нулевой вектор может принадлежать  $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  лишь в том случае, если  $\mathbf{b} \subseteq \mathbf{A} \cdot 0 = 0$ ,

т. е.  $\mathbf{b} = 0$ . Именно по этой причине управляемое множество решений для ИСЛАУ (5.32) избегает начала координат на Рис. 5.7. Кроме того, следствием Теоремы 5.4.1 является тот факт (уже установленный нами в Теореме 5.2.5), что пересечение  $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  с каждым из ортантов  $\mathbb{R}^n$  — это выпуклое полиэдральное множество. В частности, управляемое множество решений интервальных линейных систем уравнений всегда замкнуто.

Как и допусковое множество решений, управляемое множество решений может оказаться пустым в совершенно обыденных ситуациях, как это, например, имеет место, для одномерного случая с  $\mathbf{A} = [2, 3]$ ,  $\mathbf{b} = [1, 2]$ . Интервальная линейная система (5.12)

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 1] \\ [-1, 2] & [2, 4] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [-2, 2] \end{pmatrix}$$

даёт более сложный пример ИСЛАУ с пустым управляемым множеством решений.

Основным математическим результатом этого параграфа является простой достаточный признак непустоты управляемого множества решений интервальной линейной алгебраической системы уравнений, а также критерии пустоты пересечения управляемого множества решений с некоторыми ортантами. Результаты такого сорта особенно важны с учётом теоретического результата А.В. Лакеева и С.И. Носкова [9, 10] о том, что задача распознавания того, пусто или непуто  $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  в общем случае является NP-полной (труднорешаемой). Но прежде чем продолжить исследование, нам необходимо установить некоторые вспомогательные факты.

Начнем с того, что если  $i$ -ая строка  $\mathbf{A}$  содержит только нулевые элементы, то необходимым условием непустоты управляемого множества решений является равенство  $\mathbf{b}_i = 0$ . В этом случае свойство множества  $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  быть пустым или непустым зависит уже только от других строк  $\mathbf{A}$  и компонент  $\mathbf{b}$ , номера которых отличны от  $i$ . Таким образом, без ущерба для общности мы можем впредь считать, что матрица  $\mathbf{A}$  не имеет нулевых строк.

В наших построениях центральную роль будет играть функционал Рачека  $\chi$  — «относительная узость» ненулевого интервала. Помимо его свойств, уже рассмотренных в §1.6, нам понадобятся ещё два. Первое из них очевидно:

$$\text{если } \mathbf{p} \supseteq \mathbf{q} \text{ и } \chi(\mathbf{q}) \geq 0, \text{ то } \chi(\mathbf{p}) \leq \chi(\mathbf{q}).$$

Кроме того, потребуется и обратное, в некотором смысле, утверждение:

**Предложение 5.4.1** *Если  $\text{mid } \mathbf{p} = \text{mid } \mathbf{q}$  и  $-1 < \chi(\mathbf{p}) \leq \chi(\mathbf{q})$ , то  $\mathbf{p} \supseteq \mathbf{q}$ .*

**Доказательство.** Обозначим  $\mu = \text{mid } \mathbf{p} = \text{mid } \mathbf{q}$ . Если  $-1 < \chi(\mathbf{p}) \leq \chi(\mathbf{q})$ , то  $\mu \neq 0$ , т. е.  $\mu < 0$  или  $\mu > 0$ . Без ограничения общности мы можем рассмотреть вторую возможность, так как случай отрицательного  $\mu$  разбирается совершенно сходным образом. В этих условиях  $|\underline{\mathbf{p}}| < |\overline{\mathbf{p}}|$  и  $|\underline{\mathbf{q}}| < |\overline{\mathbf{q}}|$ , так что  $\chi(\mathbf{p}) \leq \chi(\mathbf{q})$  влечёт

$$\underline{\mathbf{p}} / \overline{\mathbf{p}} \leq \underline{\mathbf{q}} / \overline{\mathbf{q}},$$

или

$$\frac{\mu - \text{rad } \mathbf{p}}{\mu + \text{rad } \mathbf{p}} \leq \frac{\mu - \text{rad } \mathbf{q}}{\mu + \text{rad } \mathbf{q}}.$$

После несложных преобразований мы получаем

$$\mu \cdot \text{rad } \mathbf{p} \geq \mu \cdot \text{rad } \mathbf{q},$$

что эквивалентно (с учётом  $\mu > 0$ ) неравенству  $\text{rad } \mathbf{p} \geq \text{rad } \mathbf{q}$ , т. е.  $\mathbf{p} \supseteq \mathbf{q}$ . ■

Теперь мы готовы сформулировать и доказать наш основной результат:

**Теорема 5.4.2** Пусть интервальная  $m \times n$ -матрица  $\mathbf{A}$  и интервальный  $m$ -вектор  $\mathbf{b}$  таковы, что для всех  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  выполнены условия

- (i)  $\mathbf{b}_i \neq 0$ ,
- (ii)  $-1 < \max\{\chi(\mathbf{a}_{ij}) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{ij} \neq 0\} \leq \chi(\mathbf{b}_i)$ .

Если «средняя система» линейных уравнений  $(\text{mid } \mathbf{A})x = \text{mid } \mathbf{b}$  совместна, то её решение принадлежит управляемому множеству решений  $\Xi_{\text{ctl}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  интервальной линейной системы  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  (которое, соответственно, непусто).

**Доказательство.** Если  $\tilde{x}$  есть решение «средней» точечной системы, то

$$\text{mid}(\mathbf{A}\tilde{x}) = (\text{mid } \mathbf{A}) \cdot \tilde{x} = \text{mid } \mathbf{b}$$

(см. Предложение 2.2.4). Далее, так как  $-1 < \chi(\mathbf{b}_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , мы получаем  $\text{mid}(\mathbf{A}\tilde{x})_i \neq 0$ . Следовательно, для всякого  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  законны следующие выкладки:

$$\begin{aligned} \chi((\mathbf{A}\tilde{x})_i) &= \chi\left(\sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij}\tilde{x}_j\right) \\ &\leq \max\{\chi(\mathbf{a}_{ij}\tilde{x}_j) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{ij}\tilde{x}_j \neq 0\} \quad \text{в силу (1.43)} \\ &= \max\{\chi(\mathbf{a}_{ij}) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{ij}\tilde{x}_j \neq 0\} \\ &\leq \max\{\chi(\mathbf{a}_{ij}) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{ij} \neq 0\}. \end{aligned}$$

Таким образом, неравенства  $-1 < \chi((\mathbf{A}\tilde{x})_i) \leq \chi(\mathbf{b}_i)$  справедливы для  $i = 1, 2, \dots, m$ , и в силу Предложения 5.4.1

$$(\mathbf{A}\tilde{x})_i \supseteq \mathbf{b}_i, \quad i \in \{1, 2, \dots, m\},$$

что и доказывает теорему. ■

Например, оба условия Теоремы 5.4.2 удовлетворяются для рассмотренной выше интервальной системы (5.32). Решением её «средней системы» служит вектор  $(1, 1)^\top$ , который, как можно видеть (из Рис. 5.7, в частности), действительно лежит



в управляемом множестве решений для (5.32). И всё-таки доказанная теорема является лишь грубым достаточным признаком. К примеру, условие (ii) Теоремы 5.4.2 не выполнено для интервальной линейной системы

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 2] \\ [-2, 2] & [2, 4] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1, 5] \\ [1, 5] \end{pmatrix}, \quad (5.33)$$

в то время как соответствующая «средняя система» совместна и её решение  $(1, 1)^\top$  принадлежит непустому управляемому множеству решений для (5.33).

На основании утверждения Теоремы 5.4.2 может создаться впечатление, что решение «средней системы» является наиболее вероятным представителем управляемого множества решений интервальных линейных систем. Но следующий контрпример показывает, что и это не так в общем случае. Для системы

$$\begin{pmatrix} 4 & [1, 3] \\ [0, 2] & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [5, 7] \\ 4 \end{pmatrix}$$

мы имеем  $\Xi_{ctl} = \{(1, 1)^\top\}$ , но решение «средней системы» есть вектор  $(\frac{8}{7}, \frac{5}{7})^\top$ .

Несмотря на кажущуюся тяжеловесность Теоремы 5.4.2 реализация сформулированного в ней критерия требует всего  $O(mn)$  арифметических и логических операций, а вопрос совместности «средней системы» решается просто в случае неособенной квадратной интервальной матрицы  $\mathbf{A}$ . Несмотря на то, что в самой общей постановке задача проверки того, особенна или неособенна интервальная матрица является NP-трудной, в настоящее время имеются развитые численные алгоритмы проверки неособенности интервальной матрицы (см. §2.5). Суммируя сказанное, можно утверждать, что выведенный нами критерий является вполне практичным, хотя и недостаточно чувствительным. Он предназначен для предварительного грубого исследования управляемого множества решений ИСЛАУ.

При решении практических задач помимо решения как такового часто требуются некоторые характеристики его устойчивости, показывающие границы области разрешимости, либо устойчивость совместности. В данной ситуации для таких целей вполне может подойти величина

$$\mathcal{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \chi(\mathbf{b}_i) - \max_{\substack{1 \leq j \leq n \\ \mathbf{a}_{ij} \neq 0}} \chi(\mathbf{a}_{ij}) \right\} \geq 0,$$

которая является грубой количественной мерой «показателя совместности» в случае  $\mathcal{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) > 0$ .

Почувительно сопоставить Теорему 5.4.2 с Теоремой 6.4.1 из следующей главы книги, где предложен достаточный критерий пустоты допускового множества решений (неразрешимости линейной задачи о допусках). Утверждение Теоремы 6.4.1 находится в красивой двойственности к Теореме 5.4.2, а множества решений  $\Xi_{tot}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  и  $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  являются в некотором смысле антагонистами друг к другу.

Следующий результат не столь эффектен, но он также может оказаться полезным в ряде случаев. Прежде чем формулировать его, отметим, что каждый ортант  $\mathbb{R}^n$

полностью задаётся указанием знаков компонент его внутренних точек, и по этой причине мы далее будем говорить об органтах

$$(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n), \quad (5.34)$$

где  $\epsilon_j = \pm 1$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Если  $\epsilon_l = 0$ , то условимся считать, что символ (5.34) обозначает любой из органтов  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{l-1}, -1, \epsilon_{l+1}, \dots, \epsilon_n)$  или  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{l-1}, 1, \epsilon_{l+1}, \dots, \epsilon_n)$ .

**Теорема 5.4.3** Пусть интервальная  $m \times n$ -матрица  $\mathbf{A}$  и интервальный  $m$ -вектор  $\mathbf{b}$  таковы, что

$$\min\{\chi(\mathbf{a}_{kj}) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{kj} \neq 0\} > \chi(\mathbf{b}_k) \geq 0$$

для некоторого  $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Тогда управляемое множество решений  $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  имеет пустое пересечение с органтами  $(\operatorname{sgn} \mathbf{a}_{k1}, \operatorname{sgn} \mathbf{a}_{k2}, \dots, \operatorname{sgn} \mathbf{a}_{kn})$  и  $(-\operatorname{sgn} \mathbf{a}_{k1}, -\operatorname{sgn} \mathbf{a}_{k2}, \dots, -\operatorname{sgn} \mathbf{a}_{kn})$ .

**Доказательство** этой теоремы будет проведено от противного.

Предположим, что условие теоремы выполнено для некоторого индекса  $k$ , но существует точка  $t \in \Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  из органта  $(\operatorname{sgn} \mathbf{a}_{k1}, \operatorname{sgn} \mathbf{a}_{k2}, \dots, \operatorname{sgn} \mathbf{a}_{kn})$ . Тогда  $\mathbf{A}t \supseteq \mathbf{b}$ , и, в частности,

$$(\mathbf{A}t)_k \supseteq \mathbf{b}_k,$$

что эквивалентно

$$\chi((\mathbf{A}t)_k) \leq \chi(\mathbf{b}_k), \quad (5.35)$$

поскольку  $\chi(\mathbf{b}_k) \geq 0$ .

С другой стороны, все интервалы  $\mathbf{a}_{kj}t_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , по самому их построению одинаково расположены относительно нуля, так что

$$\begin{aligned} \chi((\mathbf{A}t)_k) &= \chi\left(\sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{kj}t_j\right) \\ &\geq \min\{\chi(\mathbf{a}_{kj}t_j) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{kj}t_j \neq 0\} \quad \text{в силу (1.45)} \\ &= \min\{\chi(\mathbf{a}_{kj}) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{kj}t_j \neq 0\} \\ &\geq \min\{\chi(\mathbf{a}_{kj}) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{kj} \neq 0\}. \end{aligned}$$

Таким образом, из условия теоремы следует, что

$$\chi((\mathbf{A}t)_k) > \chi(\mathbf{b}_k)$$

в противоречие с (5.35). Этим завершается доказательство для органта  $(\operatorname{sgn} \mathbf{a}_{k1}, \operatorname{sgn} \mathbf{a}_{k2}, \dots, \operatorname{sgn} \mathbf{a}_{kn})$ . Нетрудно видеть, что наши рассуждения в равной степени подходят также и для органта  $(-\operatorname{sgn} \mathbf{a}_{k1}, -\operatorname{sgn} \mathbf{a}_{k2}, \dots, -\operatorname{sgn} \mathbf{a}_{kn})$ . ■

**Следствие.** Пусть интервальная матрица  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  и интервальный вектор  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  имеют только неотрицательные элементы и

$$\min\{\chi(\mathbf{a}_{kj}) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{kj} \neq 0\} > \chi(\mathbf{b}_k)$$

для некоторого  $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Тогда управляемое множество решений  $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  не может содержать неотрицательных векторов.

В заключение приведём ещё один интересный способ исследования управляемого множества решений ИСЛАУ. В его основе лежит то факт, что

$$\begin{aligned} & \Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(Ax = b) \ \& \ (\forall b \in \mathbf{b})(\exists A \in \mathbf{A})(Ax = b)\} \quad (5.36) \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A} \cdot x = \mathbf{b}\}. \end{aligned}$$

Иными словами, пересечением управляемого и допускового множеств решений является множество всех точечных формальных решений для (5.5), которое, в свою очередь, находится совсем несложно. Действительно, беря середины от обеих частей исходного интервального уравнения (5.5), получим

$$(\text{mid } \mathbf{A}) \cdot x = \text{mid } \mathbf{b}.$$

Поэтому для нахождения пересечения (5.36) нам нужно лишь решить «среднюю» линейную систему и проверить её решения на равенство  $\mathbf{A} \cdot x = \mathbf{b}$ .

Наконец, задача распознавания пустоты или непустоты допускового множества решений  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  также может быть эффективно решена за полиномиальное время (см. Главу 6). Тогда, если  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A} \cdot x = \mathbf{b}\} = \emptyset$ , в то время как  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$ , то мы можем заключить, что  $\Xi_{ctl}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \emptyset$ . Именно таким образом, к примеру, можно прийти к выводу о пустоте управляемого множества решений для интервальной линейной системы уравнений (5.12).

## 5.5 Распознавание множеств решений

Как уже отмечалось, если достаточно много элементов матрицы ИСЛАУ имеют E-неопределённость, то задачи распознавания пустоты или непустоты множеств АЕ-решений  $\Xi_{A\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  интервальных линейных систем, а также задача нахождения хотя бы одной точки из  $\Xi_{A\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  в общем случае являются NP-трудными.

Универсальный метод решения этих задач может быть основан на том факте, что пересечения множеств решений ИСЛАУ с каждым из ортантов пространства  $\mathbb{R}^n$  являются выпуклыми полиэдральными множествами, для которых уравнения граничных гиперплоскостей легко выписываются по матрице и правой части ИСЛАУ (см. §5.26). Следовательно, пустота или непустота пересечения  $\Xi_{A\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  с каждым из ортантов  $\mathbb{R}^n$  может быть выявлена путём решения некоторой системы линейных неравенств, например, с помощью хорошо разработанных методов линейного программирования. В целом же распознавание множеств АЕ-решений ИСЛАУ и нахождение их точек потребуют не более чем  $2^n$  решений систем линейных неравенств, причём этот результат не может быть принципиально улучшен.

Таким образом, в самой общей ситуации отыскание и корректировка точки из множества решений ИСЛАУ является весьма непростым делом, и поэтому ниже имеет смысл дать набор частных рецептов для решения проблемы в тех или иных конкретных ситуациях.

Рассмотрим, прежде всего случай объединённого множества решений интервальной линейной системы  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  с квадратной  $n \times n$ -матрицей  $\mathbf{A}$ . Если она неособенная (т. е. неособенны все  $A \in \mathbf{A}$ ), то точку  $y$  из  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  можно получить, решив какую-нибудь точечную систему уравнений  $Ay = b$  с  $A$  из  $\mathbf{A}$  и  $b$  из  $\mathbf{b}$ , скажем, «среднюю» систему

$$(\text{mid } \mathbf{A})y = \text{mid } \mathbf{b}.$$

В свою очередь, проверка неособенности интервальной матрицы  $\mathbf{A}$  может быть выполнена, например, методами, описанными в §2.5.

Предположим теперь, что интервальная матрица  $\mathbf{A}$  — особенная, т. е. содержит особенные точечные матрицы. Хорошо известно, что во множестве всех вещественных  $n \times n$ -матриц особенные матрицы образуют гладкое многообразие коразмерности 1, которое является «тощим» множеством с лебеговой мерой нуль в  $\mathbb{R}^{n \times n}$ . Следовательно, если все элементы данной интервальной матрицы  $\mathbf{A}$  имеют ненулевые ширины, то путём подходящего варьирования элементов точечной  $n \times n$ -матрицы в пределах  $\mathbf{A}$  мы всегда можем надеяться попасть на какую-нибудь неособенную матрицу  $A$ . И вновь для отыскания точки  $y$  достаточно решить систему  $Ay = b$  с каким-то  $b \in \mathbf{b}$ .

Что делать в случае прямоугольной системы уравнений? Здесь оказывается полезной техника так называемых *распознающих функционалов*, разработанная автором в [20, 61], и ей мы посвятим оставшуюся часть параграфа.

**Теорема 5.5.1** Пусть  $\mathbf{A}$  — интервальная  $m \times n$ -матрица,  $\mathbf{b}$  — интервальный  $m$ -вектор, и выражением

$$\text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left\langle \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right\rangle \right\}$$

задается функционал  $\text{Uni} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , такой что принадлежность точки  $x$  объединённому множеству решений  $\Xi_{\text{uni}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  интервальной линейной системы  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  равносильна неотрицательности в  $x$  функционала  $\text{Uni}$ ,

$$x \in \Xi_{\text{uni}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \iff \text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0,$$

т. е. множество решений  $\Xi_{\text{uni}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  является лебеговым множеством  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0\}$  функционала  $\text{Uni}$ .

Если из контекста понятно, о какой интервальной системе идет речь, то мы будем писать просто  $\text{Uni}(x)$  вместо  $\text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$ .

**Доказательство.** Точка  $x$  лежит в объединённом множестве решений  $\Xi_{\text{uni}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  тогда и только тогда, когда существует матрица  $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij}) \in \mathbf{A}$ , такая что

$$\tilde{A}x \in \mathbf{b}.$$

После детального расписывания матрично-векторного произведения и представления интервалов правой части в центральной форме эта принадлежность примет вид

$$\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} x_j \in \text{mid } \mathbf{b}_i + [-\text{rad } \mathbf{b}_i, \text{rad } \mathbf{b}_i], \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Добавив теперь по  $(-\text{mid } \mathbf{b}_i)$  к обеим частям полученных включений, придём к эквивалентным соотношениям

$$\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} x_j - \text{mid } \mathbf{b}_i \in [-\text{rad } \mathbf{b}_i, \text{rad } \mathbf{b}_i], \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

которые, в свою очередь, равносильны

$$\left| \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} x_j - \text{mid } \mathbf{b}_i \right| \leq \text{rad } \mathbf{b}_i,$$

и поэтому

$$\text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} x_j \right| \geq 0 \quad (5.37)$$

для всех  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Итак,  $x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , если и только если для каждого фиксированного  $i$  существуют такие  $\tilde{a}_{ij} \in \mathbf{a}_{ij}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , что оказываются справедливыми неравенства (11.46). Но это эквивалентно выполнению для  $i = 1, 2, \dots, m$  условий

$$\max_{\substack{\tilde{a}_{ij} \in \mathbf{a}_{ij}, \\ j=1,2,\dots,n}} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} x_j \right| \right\} \geq 0. \quad (5.38)$$

Внося максимум внутрь скобки, и учитывая, что естественное интервальное расширение выражения под знаком модуля совпадает с его областью значений, вместо (5.38) получим для  $i = 1, 2, \dots, m$

$$\left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left\langle \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right\rangle \right\} \geq 0. \quad (5.39)$$

Далее посредством взятия минимума мы можем свернуть  $m$  штук условий (5.39) в одно, заключая, что точка  $x$  принадлежит множеству решений  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  действительно в том и лишь в том случае, если

$$\min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left\langle \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right\rangle \right\} \geq 0,$$

как и требовалось. ■

Получается, что посредством знака своих значений функционал  $\text{Uni}$  «распознаёт» принадлежность точки множеству  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ . Именно поэтому мы используем по отношению к нему эпитет «распознающий». Справедливы, кроме того, следующие свойства [20]:

- 1) Функционал  $\text{Uni}$  — вогнутый в каждом ортанте  $\mathbb{R}^n$ , а если в интервальной матрице  $\mathbf{A}$  некоторые столбцы — целиком вещественные, то  $\text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$  вогнут и на объединениях нескольких ортантов.
- 2) Функционал  $\text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$  достигает конечного максимума на всём пространстве  $\mathbb{R}^n$ .
- 3) Если  $\text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) > 0$ , то  $x$  — точка топологической внутренней  $\text{int } \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  множества решений.
- 4) При некоторых дополнительных ограничениях на  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $x$  верно и обратное: из принадлежности  $x \in \text{int } \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  следует  $\text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) > 0$ .

Последние два свойства распознающего функционала позволяют использовать его для исследования принадлежности точек внутренней множества решений. Это может иметь особую важность при нахождении телесной внутренней оценки множества решений вокруг точки-центра по методике, которую мы опишем далее в §11.7.

Итак, для практического нахождения точки из объединённого множества решений ИСЛАУ можно порекомендовать глобальную максимизацию распознающего функционала  $\text{Uni}$ . Если этот глобальный максимум больше либо равен нулю, то, во-первых, объединённое множество решений рассматриваемой системы непусто, и, во-вторых, аргументы распознающего функционала, доставляющие ему неотрицательные значения, лежат в этом множестве решений. Кроме того, знание конкретной величины максимума  $M = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$  позволяет более тонко исследовать интервальную систему уравнений. Например, если объединённое множество решений  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  пусто, то при увеличении радиуса всех компонент правой части на  $M$  это множество делается, как легко видеть, непустым, так как  $\max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$  станет уже неотрицательным.

В заключение параграфа отметим, что распознающий функционал может быть построен также для управляемого множества решений ИСЛАУ, и для экономии места мы лишь конспективно приведём соответствующий результат. Для интервальной  $m \times n$ -матрицы  $\mathbf{A}$  и интервального  $m$ -вектора  $\mathbf{b}$  выражением

$$\text{Ctr}(x) = \text{Ctr}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \sum_{j=1}^n |x_j| \cdot \text{rad } a_{ij} - \left| b_i - \sum_{j=1}^n x_j \text{mid } a_{ij} \right| \right\}$$

определяется отображение  $\text{Ctr} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , такое что принадлежность  $x \in \Xi_{\text{ctr}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  равносильна  $\text{Ctr}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0$ . Следовательно, для интервальной линейной системы  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  управляемое множество решений является лебеговым множеством  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{Ctr}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0\}$  функционала  $\text{Ctr}$ .

## 5.6 Интервальные уравнения со связанными параметрами

До сих пор мы предполагали, что интервальные параметры, фигурирующие в уравнениях и системах уравнений, являются независимыми интервальными величинами в смысле Определения 1.3.2. Ситуация меняется решающим образом, если

интервальные параметры уравнений оказываются связанными (зависимыми). Это обстоятельство, вообще говоря, усложняет постановки задач, так как теперь на наши результаты существенно влияет конкретный вид связей, наложенных на интервальные параметры.

В настоящем параграфе мы рассмотрим интервальные системы линейных алгебраических уравнений с простейшими видами связей между интервальными параметрами — симметричными, кососимметричными, персимметричными и аффинными.

*Интервальной симметричной линейной системой* будем называть интервальную систему линейных алгебраических уравнений (5.4)–(5.5) с матрицей  $\mathbf{A}$ , симметричной относительно главной диагонали, и такой, что в её пределах также рассматриваются только вещественные матрицы  $A \in \mathbf{A}$ , обладающие свойством симметричности  $A = A^T$ . Для интервальных систем уравнений существуют, как мы могли видеть в Главе 4, различные определения решений и множеств решений, для которых, в свою очередь, возможны те или иные способы оценивания. Эта общая философия применима и к системам со связанными параметрами, для которых также имеет смысл рассматривать множества кванторных решений (см., к примеру, работы [7, 16, 17]).

Но ниже мы ограничимся простейшим *объединённым множеством решений* для систем (5.4)–(5.5), которое образовано всевозможными решениями  $x$  точечных систем  $Ax = b$ , когда матрица  $A$  и вектор  $b$  пробегает  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{b}$  соответственно, подчиняясь наложенным на них связям. Объединённое множество решений интервальной симметричной линейной системы определяется строго как

$$\Xi_{uni}^{sym}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(A = A^T \text{ и } Ax = b) \}.$$

Изучение интервальных линейных систем со связями и первые попытки решения для них задачи внешнего оценивания (4.22) восходят к началу 90-х годов прошлого века [32, 39]. Предложенный в [32] интервальный метод Холесского является естественным интервальным расширением вещественного метода Холесского для решения симметричных линейных систем уравнений (он известен также как «метод квадратного корня»). Но численные эксперименты демонстрируют невысокое качество получаемых с его помощью внешних оценок множества  $\Xi_{uni}^{sym}$ .

Далее Г. Алефельд, В. Крейнович и Г. Майер в большом цикле работ [25, 26, 27, 28, 29, 30, 31] обратились к теоретическому исследованию ИСЛАУ с симметричными, кососимметричными, тёплицевыми и даже более общими видами связей, дав характеристику соответствующих множеств решений. Они установили, в частности, что границы множеств решений интервальных симметричных и кососимметричных линейных систем в общем случае составлены из кусков гиперплоскостей и поверхностей второго порядка (в отличие от кусочно-плоских границ множеств решений ИСЛАУ с независимыми данными). Более точно, справедлива

**Теорема 5.6.1** Пусть  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  и  $\mathbf{b} \in \mathbb{IR}^n$ . Тогда в каждом ортанте пространства  $\mathbb{R}^n$  множество решений  $\Xi_{uni}^{sym}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  может быть представлено как пересечение объединённого множества решений  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  системы без связей и некоторых множеств, имеющих границами поверхности второго порядка.

То же самое верно для множеств решений интервальных кососимметричных и персимметричных систем линейных уравнений [27].

В более общем случае, когда на элементы матрицы и правой части ИСЛАУ наложены аффинные связи, имеющие вид

$$a_{ij} = \tilde{a}_{ij} + \sum_{k=1}^p a_{ijk} f_k$$

и

$$b_i = \tilde{b}_i + \sum_{k=1}^p b_{ik} f_k,$$

где  $\tilde{a}_{ij}$ ,  $\tilde{b}_i$ ,  $a_{ijk}$ ,  $b_{ik}$  — вещественные константы, а  $f_k \in \mathbf{f}_k$  — некоторые независимые интервальные величины, Г. Алефельд, В. Крейнович и Г. Майер доказали в статьях [28, 29], что объединённое множество решений является так называемым *полуалгебраическим множеством*. Для аккуратной формулировки соответствующих результатов напомним

**Определение 5.6.1** [2] *Множество в  $\mathbb{R}^n$  называется полуалгебраическим, если оно является конечным объединением подмножеств, каждое из которых определяется конечной системой полиномиальных уравнений и неравенств вида*

$$\begin{cases} P_i(x_1, \dots, x_n) \omega_i 0, \\ i = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

где  $P_i$  — некоторые полиномы,  $\omega_i$  — бинарные отношения,  $\omega_i \in \{=, \geq, >\}$ . Если неравенства в выписанной системе для определения множества не используются, то это множество называется алгебраическим.

Имеет место

**Теорема 5.6.2** (теорема Алефельда-Крейновича-Майера) *Любая проекция объединённого множества решений интервальной линейной системы уравнений с аффинными связями является полуалгебраическим множеством.*

*Всякое полуалгебраическое множество в  $\mathbb{R}^n$  может быть представлено как проекция множества решений некоторой интервальной линейной системы с аффинными связями на параметры.*

Для точной характеристики множеств решений ИСЛАУ со связями специального вида Г. Алефельд, В. Крейнович и Г. Майер разработали в [25, 46] метод исключения, родственному процессу исключения Фурье-Мощкина для систем линейных неравенств. К сожалению, его трудоёмкость быстро растёт с размерностью задачи. Например, для интервальной симметричной линейной системы, имеющей трёхдиагональную  $n \times n$ -матрицу, количество неравенств, получающихся в результате этого процесса для описания пересечения  $\Xi_{uni}^{sym}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  с отдельным органо́том ограничено сверху числом

$$\frac{1}{3} n(n^2 + 5),$$

причём эта оценка точна [26]. Для интервальных линейных систем со связями, имеющих плотно заполненную матрицу, ситуация ещё хуже: для  $3 \times 3$ -системы, например,



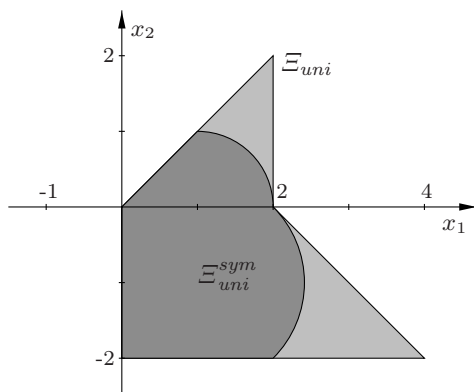


Рис. 5.8. Множество решений интервальной симметричной линейной системы уравнений (5.40) в сравнении с множеством решений такой же системы без связей.

результатирующая система неравенств, описывающая пересечение  $\Xi_{uni}^{sym}$  с одним ортантом пространства  $\mathbb{R}^n$  имеет 44 неравенства [30]. Таким образом, в силу огромной трудоёмкости метода исключения Алефельда-Крейновича-Майера он имеет, главным образом, теоретическое значение, а задача практического вычисления оценок множеств решений ИСЛАУ с симметричными, кососимметричными и т. п. матрицами со связанными элементами стоит весьма остро.

Мы займёмся этой задачей в Главе 9 (см. §9.9). Пока же можно отметить, что из простых и популярных численных методов неплохие результаты при внешнем оценивании множеств решений симметричных, кососимметричных и некоторых других близких типов ИСЛАУ показывает интервально-аффинный метод Гаусса [24], в котором можно естественно учесть информацию о простых связях между элементами матрицы.

Согласно теореме Бекка-Никеля экстремальные оценки объединённого множества решений ИСЛАУ без связей достигаются на крайних матрицах и правых частях. Но для систем со связанными параметрами этот факт уже неверен. Например, для интервальной симметричной линейной системы

$$\begin{pmatrix} 1 & [0, 1] \\ [0, 1] & [-4, -1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0, 2] \\ [0, 2] \end{pmatrix} \quad (5.40)$$

Г. Алефельд, В. Крейнович и Г. Майер показали в [30], что её множества решений имеют вид, изображенный на Рис. 5.8, и, кроме того,

$$\max\{x_1 \mid x \in \Xi_{uni}^{sym}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\} = 1 + \sqrt{2},$$

причём этот максимум достигается на вещественной системе

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} - 1 \\ \sqrt{2} - 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

матрица которой не является крайней (при этом  $x_2 = -1$ ).

Тем не менее, правые части СЛАУ, на которой достигается максимум первой компоненты точек множества решений в рассмотренном примере, образованы верхними концами соответствующих интервалов, и это не случайно. Справедливо следующее обобщение теоремы Бекка-Никеля:

**Теорема 5.6.3** Пусть дана симметричная интервальная система линейных алгебраических уравнений  $Ax = b$  с неособенной симметричной интервальной матрицей  $A = A^T \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  и таким вектором правой части  $b \in \mathbb{IR}^n$ , что его интервальные компоненты независимы друг от друга и от элементов матрицы  $A$ . Для любого индекса  $\nu \in \{1, 2, \dots, n\}$  точные покомпонентные оценки точек из множества решений  $\Xi_{uni}^{sym}$ , т. е. значения  $\min \{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}^{sym}\}$  и  $\max \{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}^{sym}\}$ , достигаются на точечных линейных системах  $Ax = b$ , у которых векторы правой части  $b$  образованы концами интервальных компонент вектора  $b$ .

**Доказательство.** Используя правило Крамера для решения СЛАУ (см., к примеру, [3, 15]), можем дать выражения для каждой компоненты решения системы линейных уравнений  $Ax = b$  с матрицей  $A \in \mathbf{A}$  и вектором  $b \in \mathbf{b}$ :

$$x_\nu = \frac{\det(A_{:,1}, \dots, A_{:,\nu-1}, b, A_{:,\nu+1}, \dots, A_{:,n})}{\det A}, \quad \nu = 1, 2, \dots, n,$$

где числитель дроби является определителем матрицы, полученной из  $A$  заменой её  $\nu$ -го столбца  $A_{:, \nu}$  на вектор-столбец правой части  $b$ . На основе этого представления, можно более точно судить о том, как  $x_\nu$  зависит от компонент  $b_i$  вектора правой части  $b$ .

Из свойств определителя вытекает, что для каждого  $i = 1, 2, \dots, n$ ,

$$x_\nu = x_\nu(b_i) = \frac{\xi b_i + \eta}{\det A}, \quad (5.41)$$

где  $\xi, \eta$  не зависят от  $b_i$ . Эти соотношения остаются верными для всех значений остальных компонент правой части  $b$  и всех элементов матрицы  $A$  в пределах соответствующих интервалов. Утверждение теоремы следует из монотонности линейных функций  $x_\nu(b_i)$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, n$ , которые определяются посредством (5.41). ■

## 5.7 Метод осевых сечений

*Методом осевых сечений* мы будем называть способ исследования множеств решений интервальных систем уравнений, основанный на их сечении прямыми или плоскостями, параллельными координатным осям пространства. Информация, полученная при изучении этих сечений, позволит во многих случаях судить о строении множеств решений в целом или даже получать какие-то оценки множеств решений. Особая роль, которую играют в этом методе координатные направления, т. е. тот факт, что сечения организуются прямыми и плоскостями параллельными координатным, вызвана специальной формой представления многомерной интервальной неопределённости — тем, что она также берётся в виде прямого произведения интервалов на координатных осях.

Рассмотрим вначале случай сечения множеств решений прямыми. Пусть  $\Xi$  — множество АЕ-решений интервальной линейной системы уравнений  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  с характеристическими матрицей  $\mathbf{A}^c \in \mathbb{K}\mathbb{R}^{m \times n}$  и вектором правой части  $\mathbf{b}^c \in \mathbb{K}\mathbb{R}^m$ .

Зафиксируем индекс  $\nu \in \{1, 2, \dots, n\}$  и рассмотрим в пространстве  $\mathbb{R}^n$  прямую линию  $l$  с параметрическим уравнением

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = r_1, \\ \vdots \\ x_{\nu-1} = r_{\nu-1}, \\ x_\nu = t, \\ x_{\nu+1} = r_{\nu+1}, \\ \vdots \\ x_n = r_n, \end{array} \right.$$

где  $r_1, \dots, r_{\nu-1}, r_{\nu+1}, \dots, r_n$  — вещественные константы, а  $t$  — параметр, пробегающий вещественную ось  $\mathbb{R}$ . Эта прямая, которую мы будем называть «пробной», параллельна  $\nu$ -ой координатной оси и полностью задаётся указанием  $(n-1)$ -мерного вещественного вектора  $r = (r_1, \dots, r_{\nu-1}, r_{\nu+1}, \dots, r_n)^\top$ . Для явного указания параметров этой прямой мы будем использовать обозначение  $l(r)$ . Каково пересечение  $l(r)$  с множеством решений  $\Xi$ ?

Подставим уравнение этой прямой в соотношение (5.16)

$$\mathbf{A}^c \cdot x \subseteq \mathbf{b}^c$$

которая превратится при этом в «распавшуюся» систему  $m$  одномерных линейных включений с интервальными коэффициентами и одной неизвестной переменной  $t$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_{1\nu}^c t + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \nu}}^n \mathbf{a}_{1j}^c r_j \subseteq \mathbf{b}_1^c, \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ \mathbf{a}_{m\nu}^c t + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \nu}}^n \mathbf{a}_{mj}^c r_j \subseteq \mathbf{b}_m^c, \end{array} \right.$$

которая равносильна

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_{1\nu}^c t \subseteq \mathbf{b}_1^c \ominus \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \nu}}^n \mathbf{a}_{1j}^c r_j, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ \mathbf{a}_{m\nu}^c t \subseteq \mathbf{b}_m^c \ominus \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \nu}}^n \mathbf{a}_{mj}^c r_j. \end{array} \right. \quad (5.42)$$

Каждое из одномерных уравнений, образующих эту систему, мы можем решить отдельно от других, а затем пересечь все получившиеся при этом множества решений друг с другом

Итак, мы свели задачу нахождения сечения множества решений прямой к решению системы одномерных включений вида  $\underline{p}t \subseteq \underline{q}$  с интервалами  $\underline{p}, \underline{q} \in \mathbb{K}\mathbb{R}$ . Если  $0 \notin \text{prg } \underline{p}$ , то существует обратный для  $\underline{p}$  элемент  $\text{inv } \underline{p}$ , и решение включения  $\underline{p}t \subseteq \underline{q}$  даётся формулой  $t \subseteq (\text{inv } \underline{p})\underline{q}$ . Но в общем случае этот рецепт не годится, и нам нужно иметь другой способ решения элементарных включений, работающий для произвольных  $\underline{p}$ .

Напомним, что в силу (1.65)

$$\underline{p}t = \begin{cases} [\underline{p}t, \overline{p}t], & \text{если } t \geq 0, \\ [\overline{p}t, \underline{p}t], & \text{если } t \leq 0. \end{cases}$$

Следовательно, включение  $\underline{p}t \subseteq \underline{q}$

$$\text{при } t \geq 0 \text{ равносильно } [\underline{p}t, \overline{p}t] \subseteq \underline{q},$$

$$\text{при } t \leq 0 \text{ равносильно } [\overline{p}t, \underline{p}t] \subseteq \underline{q}.$$

Мы можем поэтому отдельно решить простые включения для случаев  $t \geq 0$  и  $t \leq 0$  и затем объединить получающиеся множества решений.

При  $t \geq 0$  включение  $[\underline{p}t, \overline{p}t] \subseteq [\underline{q}, \overline{q}]$  равносильно, в свою очередь, системе двух линейных неравенств

$$\begin{cases} \underline{p}t \geq \underline{q}, \\ \overline{p}t \leq \overline{q}. \end{cases}$$

Образующие эту систему неравенства решаются порознь, а затем их множества решений пересекаются друг с другом и с множеством  $t \in [0, +\infty)$ , которое диктуется знаком  $t$ . Наконец, как следует из элементарной алгебры, решение простейшего неравенства  $\kappa t \leq \omega$  есть множество

$$\begin{aligned} t &\leq \omega/\kappa, & \text{если } \kappa > 0, \\ t &\geq \omega/\kappa, & \text{если } \kappa < 0, \\ t &= \emptyset, & \text{если } \kappa = 0 \text{ и } \omega < 0, \\ t &= \mathbb{R}, & \text{если } \kappa = 0 \text{ и } \omega \geq 0. \end{aligned}$$

Решение простейшего неравенства  $\kappa t \geq \omega$  есть множество

$$\begin{aligned} t &\geq \omega/\kappa, & \text{если } \kappa > 0, \\ t &\leq \omega/\kappa, & \text{если } \kappa < 0, \\ t &= \emptyset, & \text{если } \kappa = 0 \text{ и } \omega > 0, \\ t &= \mathbb{R}, & \text{если } \kappa = 0 \text{ и } \omega \leq 0. \end{aligned}$$

В целом алгоритм вычисления этих решений, а также общего решения включения  $[\underline{p}t, \overline{p}t] \subseteq \underline{q}$  легко программируется с помощью любого языка программирования высокого уровня.

При  $t \leq 0$  включение  $[\overline{p}t, \underline{p}t] \subseteq [\underline{q}, \overline{q}]$  равносильно системе двух линейных неравенств

$$\begin{cases} \overline{p}t \geq \underline{q}, \\ \underline{p}t \leq \overline{q}, \end{cases}$$

которая решается аналогично рассмотренному выше случаю  $t \geq 0$ .

Выше мы построили методику численного нахождения пересечения прямой  $l(r)$  с множеством решений. Иногда возможно указать для этого пересечения даже аналитические выражения и провести их исследование (см. §11.6).

Если мы захотим найти с помощью использованной выше методики пересечение множества решений с плоскостью, параллельной некоторым координатным осям, то вместо системы одномерных включений (5.42) относительно одного неизвестного получим систему включений, которая будет иметь уже два и более неизвестных. Решать её в общем случае гораздо сложнее, чем (5.42), но для ИСЛАУ некоторых частных видов это сделать всё-таки можно. Например, когда исходная ИСЛАУ имеет ленточную матрицу. Наконец, общая схема метода осевых сечений применима и к интервальным системам нелинейных уравнений.

## 5.8 Предварительное оценивание множеств решений

Этот параграф посвящен обзору методик, которые позволяют относительно быстро находить какие-то, возможно весьма грубые, внешние оценки множеств решений интервальных линейных систем. Во-первых, они имеют самостоятельную ценность, давая иногда пользователю достаточную информацию о решении стоящей перед ним задачи. И, во-вторых, необходимость в подобных алгоритмах вызвана тем обстоятельством, что некоторые интервальные методы для внешнего оценивания множеств решений являются уточняющими процедурами, для успешного начала работы которых нужно знать хоть какое-нибудь начальное внешнее приближение. Таким является, к примеру, интервальный метод Гаусса-Зейделя (см. §7.3).

Мы разберём три способа предварительного внешнего оценивания объединённых множеств решений ИСЛАУ. Самый первый — это модификация на интервальный случай известных рассуждений, которые дают оценку нормы решения системы линейных уравнений.

**Предложение 5.8.1** Пусть матрицы  $A, \Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$  таковы, что величина  $\eta := \|I - \Lambda A\|$  удовлетворяет  $\eta < 1$  в некоторой матричной норме. Тогда для решения системы  $Ax = b$  в согласованной векторной норме справедлива оценка

$$\|x\| \leq \frac{\|Ab\|}{1 - \eta}. \quad (5.43)$$

**Доказательство.** Соотношение  $Ax = b$  влечёт  $x = Ab + (I - \Lambda A)x$ , и поэтому

$$\|x\| \leq \|Ab\| + \|(I - \Lambda A)x\| \leq \|Ab\| + \|I - \Lambda A\| \cdot \|x\| = \|Ab\| + \eta \|x\|,$$

откуда и следует требуемое. ■

Доказанный результат можно использовать для грубого оценивания множества решений  $\Xi(A, b)$  интервальной линейной системы уравнений  $Ax = b$ . Справедливо

**Предложение 5.8.2** Пусть матрицы  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и  $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  таковы, что величина  $\eta := \|I - \mathbf{A}\|_\infty$  удовлетворяет условию  $\eta < 1$  для подчинённой чебышёвской матричной нормы  $\|\cdot\|_\infty$ . Тогда объединённое множество решений  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  интервальной линейной системы  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  содержится в брус  $\mathbf{x} = ([-\theta, \theta], \dots, [-\theta, \theta])^\top \in \mathbb{IR}^n$ , таком что

$$\theta = \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{b}\|_\infty}{1 - \eta}. \quad (5.44)$$

Напомним, что чебышёвская норма ( $\infty$ -норма) векторов определяется как  $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ , и ей подчинена норма интервальных матриц (см. §2.3)

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left( \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right).$$

**Доказательство.** Пусть  $Ax = b$  — система линейных алгебраических уравнений с матрицей  $A \in \mathbf{A}$  и правой частью  $b \in \mathbf{b}$ . В силу монотонности норм интервальных векторов и матриц по включению

$$\|\mathbf{A}\mathbf{b}\|_\infty \leq \|\mathbf{A}\mathbf{b}\|_\infty \quad \text{и} \quad \|I - \mathbf{A}\|_\infty \leq \|I - \mathbf{A}\|_\infty.$$

Поэтому если  $\|I - \mathbf{A}\|_\infty = \eta < 1$ , то для любого  $x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  в согласованной векторной норме в силу (5.43) имеет место

$$\|x\|_\infty \leq \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{b}\|_\infty}{1 - \eta}.$$

Выписанное неравенство справедливо в любой норме, но чебышёвская норма наиболее удобна здесь для целей интервального анализа, поскольку тогда оценка вида  $\|x\|_\infty \leq C$  определяет в пространстве  $\mathbb{R}^n$  множество, совпадающее по форме с интервальным вектором-брусом. Для других норм это не так, и переход от полученной оценки по норме к интервальной внешней оценке должен будет привести к появлению дополнительного множителя. Таким образом, при выполнении условий доказываемого Предложения предварительной внешней оценкой объединённого множества решений интервальной линейной системы  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  действительно можно взять брус  $\mathbf{x} = ([-\theta, \theta], \dots, [-\theta, \theta])^\top$ , где значение  $\theta$  определено посредством (5.44). ■

**Пример 5.8.1** Для интервальной системы уравнений

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 1] \\ [-1, 2] & [2, 4] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0, 2] \\ [0, 2] \end{pmatrix} \quad (5.45)$$

возьмём в качестве матрицы  $A$  обратную к средней матрице системы, т.е.

$$\frac{2}{37} \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix},$$

Тогда

$$\mathbf{A}\mathbf{A} = \frac{2}{37} \begin{pmatrix} [11, 26] & [-10, 10] \\ [-10, 10] & [11, 26] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}\mathbf{b} = \frac{2}{37} \begin{pmatrix} [0, 14] \\ [-2, 12] \end{pmatrix},$$

так что  $\eta = \|I - LA\|_\infty = \frac{35}{37} < 1$ ,  $\|Lb\|_\infty = \frac{28}{37}$ . Следовательно,  $\theta = 14$ , и брусом, содержащим объединённое множество решений рассматриваемой ИСЛАУ является  $([-14, 14], [-14, 14])^\top$ . Оптимальная (наилучшая) внешняя интервальная оценка объединённого множества решений этой системы — брус

$$\begin{pmatrix} [-0.666(6), 4] \\ [-0.666(6), 3] \end{pmatrix}.$$

Его можно нарисовать и увидеть, к примеру, с помощью пакета `IntLinIncR2` [19] или же программы `AEsolset.ps` [18]. ■

Ещё один способ быстрого приблизительного внешнего оценивания множества решений ИСЛАУ может быть основан на оценках обратной интервальной матрицы, выведенных в Главе 2. Напомним, что согласно Теореме 2.9.1 (стр. 136) для интервальной  $H$ -матрицы  $\mathbf{A}$  обратная к ней оценивается как

$$|\mathbf{A}^{-1}| \leq \langle \mathbf{A} \rangle^{-1}, \quad (2.55)$$

где  $\langle \mathbf{A} \rangle$  — компарант матрицы  $\mathbf{A}$ . Если рассматривается интервальная система линейных уравнений  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  с такой матрицей, то для любого  $x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  справедливо

$$|x| = |\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}| \leq |\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}| \leq |\mathbf{A}^{-1}| |\mathbf{b}| \leq \langle \mathbf{A} \rangle^{-1} |\mathbf{b}|.$$

Поэтому множество решений интервальной линейной системы  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  с  $H$ -матрицей  $\mathbf{A}$  будет содержаться в интервальном векторе  $[-\beta, \beta]$ , где  $\beta \in \mathbb{R}^n$  и определяется как  $\beta := \langle \mathbf{A} \rangle^{-1} |\mathbf{b}|$ . Для ИСЛАУ с сильно неособенной матрицей приведение к  $H$ -матрице можно выполнить с помощью преобуславливания.

**Пример 5.8.2** Если в рассмотренном выше примере для приведения ИСЛАУ к виду, имеющему  $H$ -матрицу, использовать преобуславливание «обратной средней», то в качестве предварительной внешней оценки множества решений системы (5.45) получим тот же самый брус  $([-14, 14], [-14, 14])^\top$ , что и с помощью первого способа. ■

Рассмотрим теперь способ предварительного внешнего оценивания множества решений ИСЛАУ, предложенный Х. Бекком в [35]. Вспомним характеристику Оеттли-Прагера (5.20) для объединённого множества решений интервальных линейных систем:

$$x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \Leftrightarrow |(\text{mid } \mathbf{A})x - \text{mid } \mathbf{b}| \leq \text{rad } \mathbf{A} \cdot |x| + \text{rad } \mathbf{b}.$$

Пусть  $\hat{x}$  — решение «средней системы» уравнений для  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ , так что

$$(\text{mid } \mathbf{A}) \hat{x} = \text{mid } \mathbf{b}.$$

Произвольный вектор  $x$  можно представить тогда в виде  $x = \hat{x} + \delta x$  с некоторым  $\delta x \in \mathbb{R}^n$ . Подставив это выражение в неравенство Оеттли-Прагера и выполнив несложные преобразования, будем иметь:

$$|(\text{mid } \mathbf{A}) \delta x| \leq \text{rad } \mathbf{A} \cdot |\hat{x} + \delta x| + \text{rad } \mathbf{b}.$$

Далее, после умножения обеих частей этого неравенства на неотрицательную матрицу  $|(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}|$  получим

$$|(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| |(\text{mid } \mathbf{A}) \delta x| \leq |(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| (\text{rad } \mathbf{A} |\hat{x} + \delta x| + \text{rad } \mathbf{b}),$$

откуда

$$|\delta x| \leq |(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \cdot \text{rad } \mathbf{A} \cdot |\delta x| + |(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| (\text{rad } \mathbf{A} |\hat{x}| + \text{rad } \mathbf{b}),$$

то есть

$$(I - |(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \cdot \text{rad } \mathbf{A}) |\delta x| \leq |(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| (\text{rad } \mathbf{A} |\hat{x}| + \text{rad } \mathbf{b}).$$

Если потребовать, чтобы интервальная матрица  $\mathbf{A}$  была сильно неособенной, то матрица  $(I - |(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \cdot \text{rad } \mathbf{A})$  также будет неособенна, а обратная к ней матрица неотрицательна. Таким образом, мы доказали следующее

**Предложение 5.8.3** Пусть в интервальной линейной системе уравнений  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  матрица  $\mathbf{A}$  сильно неособенна и  $\hat{x}$  — решение её «средней системы»

$$(\text{mid } \mathbf{A})x = \text{mid } \mathbf{b}.$$

Тогда объединённое множество решений  $\Xi_{\text{uni}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  заключено в интервальном векторе  $[\hat{x} - \Delta, \hat{x} + \Delta]$ , где

$$\Delta = (I - |(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \cdot \text{rad } \mathbf{A})^{-1} |(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| (\text{rad } \mathbf{A} |\hat{x}| + \text{rad } \mathbf{b}). \quad (5.46)$$

Оценке Х. Бекка можно придать более удобную и практичную форму. Например, оценивая обратную матрицу в большой скобке из выражения правой части (5.46) с помощью известного неравенства для суммы матричного ряда Неймана (см. [23]), получим

$$\begin{aligned} |\Delta| &\leq \|(I - |(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \cdot \text{rad } \mathbf{A})^{-1}\|_{\infty} |(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| (\text{rad } \mathbf{A} |\hat{x}| + \text{rad } \mathbf{b}) \\ &\leq \frac{1}{1 - \||(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \cdot \text{rad } \mathbf{A}\|_{\infty}} |(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| (\text{rad } \mathbf{A} |\hat{x}| + \text{rad } \mathbf{b}), \end{aligned}$$

где посредством  $\|\cdot\|_{\infty}$  обозначена подчинённая  $\infty$ -норма матриц (подчинённая чебышёвская норма), т. е. максимум сумм модулей элементов по строкам.

**Пример 5.8.3** Рассмотрим ту же самую, что и в предшествующих примерах, интервальную линейную систему

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 1] \\ [-1, 2] & [2, 4] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0, 2] \\ [0, 2] \end{pmatrix}. \quad (5.45)$$

Решением  $\hat{x}$  её средней системы является вектор  $\frac{2}{37} (7, 5)^{\top}$ . Тогда согласно (5.46)

$$\Delta = \begin{pmatrix} 12.669 \\ 12.682 \end{pmatrix}.$$



Соответственно, брус внешней оценки множества решений есть

$$\begin{pmatrix} [-12.291, 13.048] \\ [-12.412, 12.952] \end{pmatrix}.$$

Оценка получилась немного лучше, чем с помощью предшествующих приёмов, но ценой бóльших трудозатрат. ■

## Комментарий к Главе 5

**К §5.26.** Результат Теоремы 5.2.2 был впервые представлен в работах [21, 62, 65].

Определение характеристической матрицы и характеристического вектора правой части ИСЛАУ предложено автором в [67, 68, 69]. Верхний индекс «с» у матрицы  $A$  и вектора  $b$  — это готическая первая буква слова «characteristic» — «характеристический».

Характеризация Оетгли-Прагера, выведенная в работе [51] ещё в 1964 году, сделалась достоянием некоторых курсов по вычислительной линейной алгебре (см., в частности, [4], §2.7.5). Аналогичный результат для допускового множества решений ИСЛАУ получен в работе [53]. Теорема 5.2.4 — это результат И. Рона, рассказанный им в частной беседе в 1996 году и, к сожалению, в то время нигде не опубликованный. Тем не менее, вскоре он сделался широко известен среди специалистов и послужил основой для многих результатов о множествах АЕ-решений интервальных линейных систем уравнений.

Для полиэдральных множеств существует почти эквивалентный русский термин «многогранные множества» (см. книгу Б.Н. Пшеничного [12] и другие). Мы следуем в этом вопросе международной терминологии, представленной, к примеру, в книге Р. Рокафеллара [13].

Множество решений интервальной системы (11.35) было нарисовано А. Ноймайером в книге [25] (и даже воспроизведено на её суперобложке), но в другой проекции, нежели Рис. 5.3.

Для визуализации множеств решений интервальных систем линейных уравнений, неравенств и их смесей И.А. Шарой созданы пакеты `IntLinIncr2` и `IntLinIncr3` [19]. Их англоязычные версии называются `IntLinInc2D` и `IntLinInc3D`. В основе алгоритма визуализации лежит разбиение всего множества решений на отдельные полиэдральные куски по органтам (по Теореме 5.2.5), которые рисуются с помощью специального *метода граничных интервалов*, способного успешно справляться даже с неограниченными множествами решений.

**К §5.3.** Альтернатива Янссона (Теорема 5.3.2) получена в работе [38].

Результат теоремы Бекка-Никеля (Теорема 5.3.3) сформулирован и доказан в работе К. Никеля [49], но в неявной форме он содержится, фактически, в статье Х. Бекка [34]. По этой причине мы даём ему двойное наименование.

Основная идея доказательства Теоремы 5.3.4 совпадает с идеей, приведённой в книге [48] (стр. 92), но в [48] почему-то не оговаривается условие  $m \geq n$ , и рассуждения странно неряшливы в том, что касается топологических свойств множеств и отображений и связи решений различных систем уравнений.

**К §5.4.** Для общих нелинейных систем управляемое множество решений вместе с его интерпретацией было выделено автором в [58, 66]. Но для простейшего случая интервальных линейных систем управляемое множество решений рассматривалось в неявной форме ещё в книге А. Дейфа [36], а затем в работе Н.А. Хлебалина и Ю.И. Шокина [14]. Теорему 5.4.1 и соотношение (5.36) установили А.В. Лакеев и С.И. Носков в работах [9, 10] (хотя и не использовали для нового множества решений никакого имени).

**К §5.6.** Теорема Алефельда-Крейновича-Майера сформулирована и доказана в работе [28], а затем уточнена в заметке [29].

Помимо объединённого множества решений для ИСЛАУ со связями в приложениях важную роль играют также другие множества решений интервальных систем уравнений с дополнительными условиями связанности интервальных параметров. В частности, допусковому множеству решений ИСЛАУ со связями посвящены работы [16, 17].

Теорема 5.6.3 была получена в работе [71], где послужила основой модифицированной стратегии дробления параметров в PPS-методах (см. Главу 9, §9.9).

**К §5.7.** Метод осевых сечений восходит к работам автора начала 90-х годов прошлого века [57, 63, 59], где он использовался в качестве вспомогательной процедуры в методах нахождения различных оценок множеств решений ИСЛАУ.

Далее в книге метод осевых сечений используется в Главе 11 (§11.6) для внутреннего оценивания множеств решений ИСЛАУ с неотрицательными матрицами.

**К §5.8.** Результат Предложения 5.8.3 и следующая за ним упрощённая оценка получены в работе [35]. Немало рецептов получения предварительных внешних оценок для объединённого множества решений ИСЛАУ можно найти в книге А. Ноймайера [48], но они основываются на более сложном математическом аппарате теории матриц и принципиально не лучше тех, что приведены в §5.8.

## Литература к Главе 5

- [1] Алефельд Г., Херцбергер Ю. *Введение в интервальные вычисления*. – Москва: Мир, 1987.
- [2] Арнольд В.И. *Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений*. – Ижевск-Москва: Издательство «РХД», 2000.
- [3] Воеводин В.В., Воеводин Вл.В. *Энциклопедия линейной алгебры. Электронная система ЛИНЕАЛ*. – Санкт-Петербург: БХВ, 2006.
- [4] Голуб Дж., ван Лоун Ч. *Матричные вычисления*. – Москва: Мир, 1999.
- [5] Гэри М., Джонсон Д. *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи*. – Москва: Мир, 1982.
- [6] Дьедонне Ж. *Основы современного анализа*. – Москва: Мир, 1964.
- [7] Ивлев Р.С. Асимптотическая устойчивость и положительная определённость интервальной матрицы со связями // *Вычислительные Технологии*. – 2003. – Т. 8, №5. – С. 63–77.

- [8] Клини С.К. *Математическая логика*. – Москва: Мир, 1973.
- [9] ЛАКЕЕВ А.В., НОСКОВ С.И. Описание множества решений линейного уравнения с интервально заданными оператором и правой частью // *Доклады Академии Наук*. – 1993. – Т. 330, №4. – С. 430–433.
- [10] ЛАКЕЕВ А.В., НОСКОВ С.И. О множестве решений линейного уравнения с интервально заданными оператором и правой частью // *Сибирский Математический Журнал*. – 1994. – Т. 35, №5. – С. 1074–1084.
- [11] НИКАЙДО Х. *Выпуклые структуры и математическая экономика*. – Москва: Мир, 1972.
- [12] ПШЕНИЧНЫЙ Б.Н. *Выпуклый анализ и экстремальные задачи*. – Москва: Наука, 1980.
- [13] РОКАФЕЛЛАР Р. *Выпуклый анализ*. – Москва: Мир, 1973.
- [14] ХЛЕБАЛИН Н.А., ШОКИН Ю.И. Интервальный вариант метода модального управления // *Доклады АН СССР*. – 1991. – Т. 316, №4. – С. 846–850.
- [15] ХОРН Р., ДЖОНСОН Ч. *Матричный анализ*. – Москва: Мир, 1989.
- [16] ШАРАЯ И.А. Допусковое множество решений интервальных линейных систем уравнений со связанными коэффициентами // *Вычислительная математика. Труды XIV Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения», Иркутск, Байкал, 2–8 июля 2008 года. Том 3*. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2008. – С. 196–203.
- [17] ШАРАЯ И.А., ШАРЫЙ С.П. Допусковое множество решений для интервальных систем уравнений со связанными коэффициентами // *Вычислительные Технологии*. – 2009. – Т. 14, №3. – С. 104–123.
- [18] ШАРАЯ И.А. Программа `AEsolset.ps` для визуализации множеств решений интервальных линейных систем уравнений с двумя неизвестными: Программное обеспечение, доступное на <http://www.nsc.ru/interval/sharaya/>
- [19] ШАРАЯ И.А. Пакет `IntLinIncXX` для визуализации множеств решений интервальных линейных систем с двумя и тремя неизвестными: Программное обеспечение, доступное на <http://www.nsc.ru/interval/sharaya/>
- [20] ШАРЫЙ С.П. О характеристике объединенного множества решений интервальной линейной алгебраической системы. – Красноярск, 1990. – 20 с. – Депонировано в ВИНТИ, №726-B91.
- [21] ШАРЫЙ С.П. Линейные статические системы с интервальной неопределённостью: эффективные алгоритмы для решения задач управления и стабилизации // *Вычислительные Технологии / Сборник научных трудов ИВТ СО РАН*. – Новосибирск, 1995. – Т. 4, №13. – С. 64–80.
- [22] ШАРЫЙ С.П. Об интервальных матрицах полного ранга // *Сибирский журнал вычислительной математики*. – 2014. — Т. 17, №3. — С. 289–304.
- [23] ШАРЫЙ С.П. *Курс вычислительных методов*. – ИВТ & НГУ: Новосибирск, 2020.
- [24] АКНМЕРОВ R.R. Interval-affine Gaussian algorithm for constrained systems // *Reliable Computing*. – 2005. – Vol. 11, No. 5. – P. 323–341.
- [25] ALEFELD G., KREINOVICH V., MAYER G. Symmetric linear systems with perturbed input data // *Numerical Methods and Error Bounds / Alefeld G. and Herzberger J., eds*. – Berlin: Akademie Verlag, 1996. – P. 16–22.
- [26] ALEFELD G., KREINOVICH V., MAYER G. The shape of the symmetric solution set // *Applications of Interval Computations / Kearfott R.B. and Kreinovich V., eds*. – Dordrecht: Kluwer, 1996. – P. 61–79.

- [27] ALEFELD G., KREINOVICH V., MAYER G. On the shape of the symmetric, persymmetric, and skew-symmetric solution set // *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* – 1997. – Vol. 18. – P. 693–705.
- [28] ALEFELD G., KREINOVICH V., MAYER G. The shape of the solution set for systems of interval linear equations with dependent coefficients // *Mathematische Nachrichten.* – 1998. – Bd. 192. – P. 23–36.
- [29] ALEFELD G., KREINOVICH V., MAYER G., HUTH M. A comment on the shape of the solution set for systems of interval linear equations with dependent coefficients // *Reliable Computing.* – 2001. – Vol. 7, No. 3. – P. 275–277.
- [30] ALEFELD G., KREINOVICH V., MAYER G. On symmetric solution sets // *Inclusion methods for nonlinear problems with applications in engineering, economics, and physics* / Herzberger J., ed. – Wien, New York: Springer, 2003. – P. 1–23. – (Computing Supplement; 16)
- [31] ALEFELD G., KREINOVICH V., MAYER G. On the solution sets of particular classes of linear interval systems // *Journal of Computational and Applied Mathematics.* – 2003. – Vol. 152, No. 1–2. – P. 1–15.
- [32] ALEFELD G., MAYER G. The Cholesky method for interval data // *Linear Algebra and its Applications.* – 1993. – Vol. 194. – P. 161–182.
- [33] BARTH W., NUDING E. Optimale Lösung von Intervallgleichungssystemen // *Computing.* – 1974. – Vol. 12. – P. 117–125.
- [34] BEECK H. Über die Struktur und Abschätzungen der Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen mit Intervallkoeffizienten // *Computing.* – 1972. – Vol. 10. – P. 231–244.
- [35] BEECK H. Zur Problematik der Hüllenbestimmung von Intervallgleichungssystemen // *Interval Mathematics* / Nickel K., ed. – Berlin: Springer Verlag, 1975. – P. 150–159. – (Lecture Notes in Computer Science; vol. 29).
- [36] DEIF A.S. *Sensitivity analysis in linear systems.* – Berlin: Springer-Verlag, 1986.
- [37] HARTFIEL D.J. Concerning the solution set of  $Ax = b$  where  $P \leq A \leq Q$  and  $p \leq b \leq q$  // *Numerische Mathematik.* – 1980. – Vol. 35, No. 3. – P. 355–359.
- [38] JANSSON C. Calculation of exact bounds for the solution sets of linear interval systems // *Linear Algebra and its Applications.* – 1997. – Vol. 251. – P. 321–340.
- [39] JANSSON CH. Interval linear systems with symmetric matrices, skew-symmetric matrices, and dependencies in the right hand side // *Computing.* – 1991. – Vol. 46. – P. 265–274.
- [40] JAULIN L., RATSCHAN S., HARDOUIN L. Set computation for nonlinear control // *Reliable Computing.* – 2004. – Vol. 10, No. 1. – P. 1–26.
- [41] JERRELL M. Applications of interval computations to regional economic input-output models // *Applications of Interval Computations* / Kearfott R.B. and Kreinovich V., eds. – Dordrecht: Kluwer, 1996. – P. 133–143.
- [42] JIRSTRAND M. Nonlinear control system design by quantifier elimination // *Journal of Symbolic Computation.* – 1997. – Vol. 24, No. 2. – P. 137–152.
- [43] KREINOVICH V., LAKEYEV A.V., NOSKOV S.I. Optimal solution of interval linear systems is intractable (NP-hard) // *Interval Computations.* – 1993. – No. 1. – P. 6–14.
- [44] KREINOVICH V., LAKEYEV A.V., ROHN J., KAHL P. *Computational complexity and feasibility of data processing and interval computations.* – Dordrecht: Kluwer, 1997.
- [45] LAKEYEV A.V. Computational complexity of estimation of generalized solution sets for interval linear systems // *Вычислительные Технологии.* – 2003. – Т. 8, №1. – С. 12–23.

- [46] MAYER G. A new way to describe the symmetric solution set  $S_{sym}$  of linear interval systems // *Topics in numerical analysis with special emphasis on nonlinear problems* / G. Alefeld, X. Chen, eds. – Wien: Springer, 2001. – P. 151–163. – (Computing Supplement; 15).
- [47] NEUMAIER A. Tolerance analysis with interval arithmetic // *Freiburger Intervall-Berichte*. – 1986. – No. 86/9. – S. 5–19.
- [48] NEUMAIER A. *Interval methods for systems of equations*. – Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [49] NICKEL K. Die Überschätzung des Wertebereichs einer Funktion in der Intervallrechnung mit Anwendungen auf lineare Gleichungssysteme // *Computing*. – 1977. – Vol. 18, Issue 1. – P. 15–36.
- [50] OETTLI W. On the solution set of a linear system with inaccurate coefficients // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1965. – Vol. 2, No. 1. – P. 115–118.
- [51] OETTLI W., PRAGER W. Compatibility of approximate solution of linear equations with given error bounds for coefficients and right-hand sides // *Numerische Mathematik*. – 1964. – Vol. 6. – P. 405–409.
- [52] RATSCHKEK H. Teilbarkeitskriterien der Intervallarithmetic // *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. – 1972. – Bd. 252. – S. 128–138.
- [53] ROHN J. Inner solutions of linear interval systems // *Interval Mathematics 1985* / Nickel K., ed. – New York: Springer Verlag, 1986. – P. 157–158. – (*Lecture Notes on Computer Science; vol. 212*).
- [54] ROHN J. Systems of linear interval equations // *Linear Algebra and its Applications*. – 1989. – Vol. 126. – P. 39–78.
- [55] ROHN J. Личное сообщение. – Würzburg, 1996.
- [56] ROHN J. *A handbook of results on interval linear problems*. – Institute of Computer Science, Academy of Sciences of the Czech Republic: Prague, 2012. – Электронная книга, доступная на <http://uivtx.cs.cas.cz/~rohn/publist/!aahandbook.pdf>
- [57] SHARY S.P. Optimal solution of interval linear algebraic systems. I // *Interval Computations*. – 1991. – Vol. 1, No. 2. – P. 7–30.
- [58] SHARY S.P. On controlled solution set of interval algebraic systems // *Interval Computations*. – 1992. – No. 4(6). – P. 66–75.
- [59] SHARY S.P. Solving interval linear systems with nonnegative matrices // *Scientific Computations and Mathematical Modelling: Proceedings of the International Conference MMSC-93* / Markov S.M., ed. – Sofia: DATECS Publishing, 1993. – P. 179–182.
- [60] SHARY S.P. Solving the tolerance problem for interval linear systems // *Interval Computations*. – 1994. – No. 2. – P. 6–26.
- [61] SHARY S.P. Solving the linear interval tolerance problem // *Mathematics and Computers in Simulation*. – 1995. – Vol. 39. – P. 53–85.
- [62] SHARY S.P. Linear static systems under interval uncertainty: Algorithms to solve control and stabilization problems // *International Journal of Reliable Computing. Supplement. Extended Abstracts of APIC'95, International Workshop on Applications of Interval Computations*. – El Paso, Texas, 1995. – P. 181–184.
- [63] SHARY S.P. On optimal solution of interval linear equations // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1995. – Vol. 32, No. 2. – P. 68–630.

- [64] SHARY S.P. Algebraic approach to the interval linear static identification, tolerance and control problems, or One more application of Kaucher arithmetic // *Reliable Computing*. – 1996. – Vol. 2, No. 1. – P. 3–33.
- [65] SHARY S.P. Algebraic solutions to interval linear equations and their applications // *Numerical Methods and Error Bounds* / Alefeld G. and Herzberger J., eds. – Berlin: Akademie Verlag, 1996. – P. 224–233.
- [66] SHARY S.P. Controllable solution sets to interval static systems // *Applied Mathematics and Computation*. – 1997. – Vol. 86, No. 2-3. – P. 185–196.
- [67] SHARY S.P. Interval Gauss-Seidel method for generalized solution sets to interval linear systems // *MISC'99 – Workshop on Applications of Interval Analysis to Systems and Control, Girona, Spain, February 24–26, 1999*. – Girona: Universitat de Girona, 1999. – P. 51–65.
- [68] SHARY S.P. Outer estimation of generalized solution sets to interval linear systems // *Developments in Reliable Computing* / Csendes T., ed. – Dordrecht: Kluwer, 1999. – P. 323–335.
- [69] SHARY S.P. Outer estimation of generalized solution sets to interval linear systems // *Reliable Computing*. – 1999. – Vol. 5. – P. 323–335.
- [70] SHARY S.P. New characterizations for the solution set to interval linear systems of equations // *Applied Mathematics and Computation*. – 2015. – Vol. 265. – P. 570–573.
- [71] SHARY S.P., MORADI B. Solving interval linear least squares problems by PPS-methods // *Numerical Algorithms*. – 2021. – Vol. 87. – P. 41–75.

## Глава 6

# Решение интервальной линейной задачи о допусках

В этой главе подробно рассматривается *интервальная линейная задача о допусках*, требующая внутреннего оценивания допускового множества решений интервальной линейной системы уравнений. На основе подхода, который назван «центровым», развивается технологическая цепочка решения задачи о допусках, позволяющая получать для любых интервальных систем линейных алгебраических уравнений либо брус решения задачи, либо заключение о пустоте допускового множества решений. В целом представляемые ниже методы позволяют всесторонне исследовать интервальную линейную задачу о допусках, причём кроме числовых ответов они способны дать ещё и качественную картину влияния на решение различных факторов.

Существуют также другие подходы к решению интервальной линейной задачи о допусках. Это так называемый формально-алгебраический подход и методика, основанная на монотонности конфигурации множеств решений неотрицательных интервальных линейных систем. Они излагаются в Главе 11.

### 6.1 Обсуждение постановки задачи

Пусть дана интервальная система линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b \tag{6.1}$$

с интервальной  $m \times n$ -матрицей  $A$  и интервальным  $m$ -вектором  $b$  в правой части. *Допусковым множеством решений* системы (6.1) мы условились называть множество  $\Xi_{tol}(A, b)$ , образованное всеми такими векторами  $x \in \mathbb{R}^n$ , что произведение  $Ax$  попадает в  $b$  для любой  $A \in \mathbf{A}$ , т. е.

$$\Xi_{tol}(A, b) := \Xi_{tol} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(Ax = b)\}. \tag{6.2}$$

Это определение можно переписать также в виде

$$\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \mathbf{A})(Ax \in \mathbf{b})\},$$

или, пользуясь свойством (2.4) интервального матрично-векторного умножения (Глава 2, стр. 97), в виде *критерия принадлежности* вектора  $x$  допусковому множеству решений:

$$x \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \iff \mathbf{A} \cdot x \subseteq \mathbf{b}, \quad (6.3)$$

где « $\cdot$ » — интервальное матричное произведение.

Для уяснения содержательного смысла допускового множества решений рассмотрим заданную в виде «чёрного ящика» систему (Рис. 6.1) с вектором входных воздействий  $x \in \mathbb{R}^n$  и вектором выходных откликов  $y \in \mathbb{R}^m$ , причём зависимость вход-выход предположим линейной,  $y = Ax$ , с некоторой вещественной  $m \times n$ -матрицей  $A = (a_{ij})$ . Пусть параметры «чёрного ящика» не являются заданными точно, но нам известны лишь интервалы их возможных значений  $\mathbf{a}_{ij} \ni a_{ij}$ , из которых образована интервальная  $m \times n$ -матрица  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$ . Эти параметры, к примеру, могут изменяться непредсказуемым образом («дрейфовать») в пределах  $\mathbf{a}_{ij}$ , либо интервальная неопределённость может быть следствием нашего незнания точной модели и т. п.

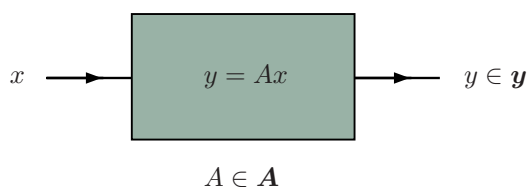


Рис. 6.1. Модель для интерпретации допускового множества решений.

Предположим также, что для множества выходных состояний «чёрного ящика» задан интервальный вектор  $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n)^\top$ , в который надо обеспечить попадание  $y$  вне зависимости от конкретных значений  $a_{ij}$  из  $\mathbf{a}_{ij}$ . Согласно общепринятой в технике терминологии интервалы  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$  являются *допусками* на выходные значения  $y_i, i = 1, 2, \dots, n$  (см. обсуждение на стр. 21). Естественно задаться вопросом: существуют ли такие входные воздействия  $\tilde{x}$ , что при любых возможных реализациях параметров системы  $a_{ij}$  из  $\mathbf{a}_{ij}$  мы всё равно получим на выходе отклик  $y$  в пределах требуемых допусков  $\mathbf{y}$ ? Допусковое множество решений  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{y})$  является в точности множеством всех таких  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ .

Фактически, сказанное выше является конкретизацией той интерпретации различных множеств АЕ-решений, которая уже рассматривалась в Главе 4 на примере обратной задачи системного анализа. Допусковое множество решений (6.2) отвечает случаю, когда в «чёрном ящике» с линейной зависимостью вход-выход все входные воздействия — возмущающие, а все выходы являются стабилизируемыми (регулируемыми).

Практические приложения допускового множества решений ИСЛАУ обширны и многообразны. Это построение межотраслевого экономического баланса в условиях интервальной неопределённости [44], технологическое проектирование [1, 2], вос-



становление зависимостей по интервальным данным [26, 51], автоматическое управление [7, 8, 9, 10, 19, 21, 52, 53, 54] и т. д. В частности, в работах Р.С. Ивлева и С.П. Соколовой [10, 54] допусковое множество решений для более общих чем (6.1) интервальных линейных систем уравнений возникает в связи с оригинальным подходом к исследованию асимптотической устойчивости динамических систем, имеющих интервальную неопределённость в данных. Очень важным свойством допускового множества решений является тот факт, что оно наиболее устойчиво к возмущениям данных из всех множеств АЕ-решений для интервальных линейных систем уравнений (см. подробности в [50]). По этой причине его можно использовать для регуляризации плохообусловленных и неустойчивых постановок задач.

**Предложение 6.1.1** *Допусковое множество решений интервальной линейной системы уравнений есть выпуклое полиэдральное множество в  $\mathbb{R}^n$ .*

**Доказательство.** Пусть точки  $x, y \in \mathbb{R}^n$  принадлежат непустому допусковому множеству решений  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  интервальной линейной системы  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ . Покажем, что тогда этому множеству целиком принадлежит также отрезок прямой, соединяющий  $x$  и  $y$ .

Точки этого отрезка представляются в виде  $\lambda x + (1 - \lambda)y$ , где  $\lambda \in [0, 1]$ . Используя свойство субдистрибутивности, будем иметь

$$\mathbf{A}(\lambda x + (1 - \lambda)y) \subseteq \mathbf{A}(\lambda x) + \mathbf{A}((1 - \lambda)y) = \lambda \mathbf{A}x + (1 - \lambda)\mathbf{A}y.$$

Но

$$\mathbf{A}x \subseteq \mathbf{b} \quad \text{и} \quad \mathbf{A}y \subseteq \mathbf{b},$$

так как точки  $x$  и  $y$  лежат в допусковом множестве решений. Складывая эти включения с неотрицательными весами  $\lambda$  и  $(1 - \lambda)$  при  $\lambda \in [0, 1]$ , получим

$$\lambda \mathbf{A}x + (1 - \lambda)\mathbf{A}y \subseteq \lambda \mathbf{b} + (1 - \lambda)\mathbf{b} = \mathbf{b},$$

где последнее равенство обосновывается дистрибутивностью (1.56).

Следовательно, в целом

$$\mathbf{A}(\lambda x + (1 - \lambda)y) \subseteq \mathbf{b},$$

что в силу (6.3) означает принадлежность точки  $(\lambda x + (1 - \lambda)y)$  допусковому множеству решений  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ .

Полиэдральность множества  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  следует из Теоремы 5.2.5. ■

Рис. 6.2 изображает, к примеру, допусковое множество решений (в сравнении с объединённым множеством решений) для системы

$$\begin{pmatrix} [1, 2] & [-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}] \\ [-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}] & [1, 2] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 1] \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

Несмотря на результат Предложения 6.1.1 прямое описание допусковых множеств решений интервальных линейных систем уравнений, при котором, согласно доказательству Теоремы 5.2.5, выписываются все ограничивающие его гиперплоскости, является трудоёмким и практически бесполезным: его сложность растёт быстрее  $m \cdot 2^n$ .

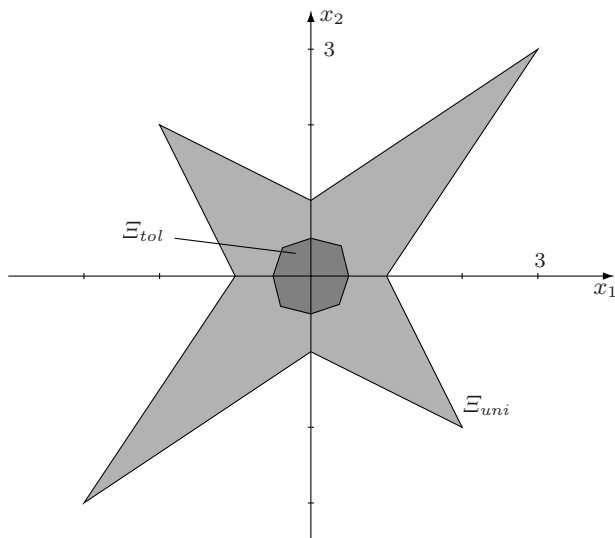


Рис. 6.2. Множества решений интервальной системы (6.4).

По этой причине имеет смысл ограничиться нахождением некоторых просто устроенных *оценок* допускового множества решений. При этом особенно интересны его подмножества, так как для каждого их элемента  $x$  остаётся выполненным характеристическое условие

$$(\forall A \in \mathbf{A})(Ax \in \mathbf{b}),$$

определяющее множество решений  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ . Иными словами, мы заменяем  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  на его внутреннюю оценку, формулируя подлежащую решению задачу в следующем виде:

*Найти (по-возможности, бóльший) брус, который содержится в допусковом множестве решений данной интервальной линейной системы уравнений.*

(6.5)

За этой задачей закрепилось наименование *интервальной линейной задачи о допусках* или просто *линейной задачи о допусках* (сокращённо ЛЗД) для заданной интервальной линейной системы. Именно эта задача является предметом рассмотрения настоящей главы. Практическая значимость линейной задачи о допусках, как мы видели, определяется тем, что она является задачей стабилизации выходов системы в заданном коридоре при наличии ограниченных неконтролируемых возмущений. Очень важны приложения к анализу данных и восстановлению зависимостей при интервальной неопределённости. Кроме того, допусковое множество решений обладает рядом других замечательных свойств, которые выделяют его из остальных множеств решений и делают необходимым его нахождение и оценивание.

Специфической особенностью задачи о допусках является то обстоятельство, что допусковое множество решений может оказаться пустым даже для вполне «обычных» данных. Это происходит в случае, когда интервальная правая часть систе-

мы уравнений «слишком узка» в сравнении с интервалами в матрице. Тогда «размах» произведения  $\mathbf{A}x$  слишком велик и не может «вместиться» в коридоры правых частей  $\mathbf{b}$ . Например, это имеет место для одномерного интервального уравнения  $[1, 2]x = [2, 3]$ . Отрицательных чисел в допусковом множестве решений здесь быть не может, но для любого неотрицательного  $t \in \mathbb{R}$  отношение правого и левого концов произведения  $[1, 2]t = [t, 2t]$  равно 2, тогда как в правой части это отношение всего лишь  $3/2$ . Двумерная система

$$\begin{pmatrix} [1, 2] & [-1, 1] \\ [-1, 1] & [1, 2] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1, 3] \\ [1, 3] \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

даёт более сложный пример пустоты допускового множества решений (см. подробности в Примере 6.5.2). В подобных ситуациях будем говорить, что линейная задача о допусках *неразрешима* или *несовместна*, и тогда исходная постановка задачи (6.5) теряет смысл. Соответственно, из общей постановки линейной задачи о допусках выделяется более узкая подзадача исследования её разрешимости, и ей будет уделено значительное внимание в этой главе.

Мы уже видели, что, опираясь на свойства интервальных матрично-векторных операций, определение допускового множества решений интервальной линейной системы (6.1) переформулируется следующим равносильным образом:

$$\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A} \cdot x \subseteq \mathbf{b}\}.$$

Может даже показаться, что имеет место точное равенство

$$\{Ax \mid A \in \mathbf{A}, x \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\} = \mathbf{b}.$$

Но это неверно, как показывает пример задачи о допусках с данными  $\mathbf{A} = [-1, 1]$ ,  $\mathbf{b} = [0, 1]$ . Здесь лишь ноль может быть элементом  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , поскольку иначе умножение  $y \neq 0$ ,  $y \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , на  $(-\text{sgn } y)$  из интервала  $[-1, 1] = \mathbf{A}$  привело бы к отрицательному числу  $-|y| \notin [0, 1]$ . Следовательно,

$$\{Ax \mid A \in \mathbf{A}, x \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\} = 0 \neq [0, 1] = \mathbf{b}.$$

В свою очередь, если какое-то множество  $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$  удовлетворяет свойству

$$\{Ax \mid A \in \mathbf{A}, x \in \mathcal{C}\} = \mathbf{b}, \quad (6.7)$$

это не обязательно влечёт  $\mathcal{C} = \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ . Для иллюстрации рассмотрим одномерный пример линейной задачи о допусках с  $\mathbf{A} = \mathbf{b} = [-1, 1]$ . Теперь  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = [-1, 1]$ , но для любого из интервалов  $[\kappa, 1]$  или  $[-1, \kappa]$ , где  $-1 \leq \kappa \leq 1$ , равенство (6.7) также выполнено. Следовательно, свойство (6.7) не полностью характеризует допусковое множество решений интервальных линейных систем. Тем не менее,  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  есть наибольшее по включению из множеств  $\mathcal{C}$  удовлетворяющих

$$\{Ax \mid A \in \mathbf{A}, x \in \mathcal{C}\} \subseteq \mathbf{b}.$$

В §5.2а мы уже отмечали включение

$$\begin{aligned} \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(Ax = b)\} \\ &\subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(Ax = b)\} = \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}), \end{aligned}$$

и Рис. 5.1 и 6.2 демонстрируют, что множества  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  и  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  могут значительно отличаться друг от друга размерами. Это отличие тем сильнее, чем больше ширина интервальной матрицы  $\mathbf{A}$ .

Хотя в настоящей книге мы рассматриваем приближения (оценки) допускового множества решений интервальными векторами, т. е. брусами с гранями, параллельными координатным осям, следует хорошо осознавать как преимущества, так и возможные недостатки этого способа оценивания. Он, в частности, может оказаться весьма невыгодным в том смысле, что отношение объёма оценивающего бруса к объёму множества решений  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  может быть сколь угодно малым (см. Рис. 4.7, стр. 239). Подобное явление характерно для длинных вытянутых множеств решений интервальных систем уравнений. В этом случае имеет смысл рассмотреть оценивание допускового множества решений не брусами, а какими-либо другими множествами, например, косыми параллелепипедами [30].

## 6.2 Строение и описание допускового множества решений

Как частный случай Теоремы 5.2.1 имеет место представление

$$\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \bigcap_{A \in \mathbf{A}} \Xi_{tol}(A, \mathbf{b}), \quad (6.8)$$

и, более того,

$$\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \bigcap_{A \in \mathbf{A}} \{A^{-1}\mathbf{b} \mid \mathbf{b} \in \mathbf{b}\}, \quad (6.9)$$

если  $\mathbf{A}$  — неособенная квадратная матрица, т. е. когда неособенны все  $A \in \mathbf{A}$ . Хотя определение допускового множества решений требует, чтобы произведение  $Ax$  попадало в вектор правой части  $\mathbf{b}$  для *каждого*  $A \in \mathbf{A}$ , мы покажем, что достаточно выполнения включения  $Ax \in \mathbf{b}$  лишь для матриц  $A$  из некоторого *конечного* подмножества в  $\mathbf{A}$ . Справедливо,

**Предложение 6.2.1**  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall V \in \text{vert } \mathbf{A})(Vx \in \mathbf{b})\}$ .

**Доказательство** сводится к проверке того, что

$$\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \supseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall V \in \text{vert } \mathbf{A})(Vx \in \mathbf{b})\},$$

так как обратное включение очевидно.

Предположим, что некоторый вектор  $x \in \mathbb{R}^n$  удовлетворяет  $Vx \in \mathbf{b}$  для всех  $V \in \text{vert } \mathbf{A}$ . Пусть  $A$  — какая-то матрица из  $\mathbf{A}$ . В соответствии с определением  $\text{vert } \mathbf{A}$  существуют коэффициенты  $\lambda_V \geq 0$ , общим числом  $2^{mn}$ , такие что

$$\sum_{V \in \text{vert } \mathbf{A}} \lambda_V = 1 \quad \text{и} \quad A = \sum_{V \in \text{vert } \mathbf{A}} \lambda_V V,$$

т. е.  $A$  представима в виде выпуклой комбинации крайних матриц из  $\mathbf{A}$ . Тогда

$$Ax = \left( \sum_{V \in \text{vert } \mathbf{A}} \lambda_V V \right) \cdot x = \sum_{V \in \text{vert } \mathbf{A}} \lambda_V Vx,$$

т. е. произведение  $Ax$  является выпуклой комбинацией произведений  $Vx$ ,  $V \in \text{vert } \mathbf{A}$ . Но все  $Vx \in \mathbf{b}$  в силу сделанного предположения, следовательно, их выпуклая комбинация также принадлежит выпуклому множеству  $\mathbf{b}$ . ■

Результат Предложения 6.2.1 влечёт, в частности, более точное чем (6.8) представление

$$\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \bigcap_{V \in \text{vert } \mathbf{A}} \Xi_{tol}(V, \mathbf{b}). \quad (6.10)$$

Если же  $\mathbf{A}$  — квадратная и все крайние точечные матрицы  $A \in \text{vert } \mathbf{A}$  неособенны (при этом неособенность самой интервальной матрицы  $\mathbf{A}$  не требуется), то

$$\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \bigcap_{V \in \text{vert } \mathbf{A}} \{V^{-1}\mathbf{b} \mid \mathbf{b} \in \mathbf{b}\},$$

что существенно усиливает (6.9).

Так как

$$\begin{aligned} \Xi_{tol}(V, \mathbf{b}) &= \{x \mid Vx \in \mathbf{b}\} = \{x \mid \underline{\mathbf{b}}_i \leq V_i: x \leq \bar{\mathbf{b}}_i, i = 1, \dots, m\} \\ &= \bigcap_{i \in \{1, \dots, m\}} \{x \mid \underline{\mathbf{b}}_i \leq V_i: x \leq \bar{\mathbf{b}}_i\}, \end{aligned}$$

то допусковое множество решений для системы с точечной матрицей является множеством решений системы  $m$  двусторонних линейных неравенств. Из (6.10) получаем

$$\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \bigcap_{V \in \text{vert } \mathbf{A}} \bigcap_{i \in \{1, \dots, m\}} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \underline{\mathbf{b}}_i \leq V_i: x \leq \bar{\mathbf{b}}_i\}. \quad (6.11)$$

Значит, для интервальной линейной системы уравнений с существенно интервальной матрицей допусковое множество решений — это множество решений некоторой конечной системы двусторонних линейных неравенств вида  $\underline{\mathbf{b}}_i \leq V_i: x \leq \bar{\mathbf{b}}_i$  для  $V \in \text{vert } \mathbf{A}$ . Отсюда снова следует, что  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  — выпуклое полиэдральное множество.

В представлении (6.11) система двусторонних линейных неравенств, описывающая  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , состоит из отдельных частей, в каждой из которых  $m$  строк, а число частей  $2^{mn}$  равно числу вершин матрицы  $\mathbf{A}$ . Всего в системе двусторонних неравенств, соответствующей (6.11), содержится  $m \cdot 2^{mn}$  неравенств, но среди них есть много повторяющихся. Меньшую по размерам систему двусторонних линейных неравенств для описания  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  даёт результат из работы [24]:

**Теорема 6.2.1** (теорема И.А. Шарой о строении допускового множества решений)  
Точка  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$  принадлежит допусковому множеству решений интервальной линейной системы  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  тогда и только тогда, когда она является решением системы

двусторонних линейных неравенств

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{b}}_i \leq a x \leq \overline{\mathbf{b}}_i, \\ a \in \text{vert } \mathbf{A}_{i,:}, \\ i = 1, \dots, m, \end{cases}$$

где вектор-строки  $a$  пробегают всевозможные вершины интервальных строк матрицы  $\mathbf{A}$ . Количество неравенств в этой системе не превосходит суммы числа вершин во всех интервальных векторах  $\text{vert } \mathbf{A}_{i,:}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , и, тем более, не превосходит  $m \cdot 2^n$ .

Результат теоремы можно кратко записать в виде следующего представления:

$$\Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \bigcap_{i \in \{1, \dots, m\}} \bigcap_{a \in \text{vert } \mathbf{A}_{i,:}} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \underline{\mathbf{b}}_i \leq a x \leq \overline{\mathbf{b}}_i\}. \quad (6.12)$$

Эта запись удобна для сопоставления с (6.11), и она показывает принципиальное уменьшение количества пересечений по наборам концов интервалов матрицы в сравнении с перебором по всем  $V \in \text{vert } \mathbf{A}$ .

Множество решений двустороннего линейного неравенства вида

$$c \leq a x \leq d, \quad c, d \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}^n,$$

будем называть *гиперполосой*. Обычно это множество, заключенное между двумя параллельными гиперплоскостями, реже — пустое множество или всё пространство  $\mathbb{R}^n$ . В такой терминологии, допустимое множество решений — это пересечение конечного числа (не более чем  $m \cdot 2^n$ ) гиперполос.

Решение систем линейных неравенств может быть выполнено различными способами, и один из наиболее популярных состоит в применении развитых методов линейного программирования и реализующих их готовых программ. В стандартной форме задачи линейного программирования система линейных неравенств имеет специальный вид, требующий неотрицательности переменных. Очень удобен для представления допустимого множества решений ИСЛАУ в таком виде результат, полученный И. Роном в [45]:

**Теорема 6.2.2** (теорема Рона о допустимом множестве решений)

Точка  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$  принадлежит допустимому множеству решений интервальной линейной системы  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  тогда и только тогда, когда  $\tilde{x} = x' - x''$ , где  $n$ -векторы  $x'$  и  $x''$  удовлетворяют системе линейных неравенств

$$\begin{cases} \overline{\mathbf{A}}x' - \underline{\mathbf{A}}x'' \leq \overline{\mathbf{b}}, \\ -\underline{\mathbf{A}}x' + \overline{\mathbf{A}}x'' \leq -\underline{\mathbf{b}}, \\ x', x'' \geq 0. \end{cases} \quad (6.13)$$

**Доказательство.** Пусть  $\tilde{x}$  — точка из допустимого множества решений, так что  $\mathbf{A} \cdot \tilde{x} \subseteq \mathbf{b}$  в силу (6.3). Напомним также, что

$$\mathbf{A}\tilde{x} = [(\text{mid } \mathbf{A})\tilde{x} - (\text{rad } \mathbf{A})|\tilde{x}|, (\text{mid } \mathbf{A})\tilde{x} + (\text{rad } \mathbf{A})|\tilde{x}|]$$

(см. §2.1, стр. 103). Поэтому включение  $\mathbf{A}\tilde{x} \subseteq \mathbf{b}$  равносильно

$$\underline{\mathbf{b}} \leq (\text{mid } \mathbf{A}) \tilde{x} - (\text{rad } \mathbf{A}) |\tilde{x}| \quad \text{и} \quad (\text{mid } \mathbf{A}) \tilde{x} + (\text{rad } \mathbf{A}) |\tilde{x}| \leq \overline{\mathbf{b}}.$$

Представим теперь вектор  $\tilde{x}$  и его модуль через положительную и отрицательную части числа (см. Определение 1.7.3):  $x = x^+ - x^-$  и  $|\tilde{x}| = x^+ + x^-$ . Подставляя эти выражения в выписанные выше неравенства и выполняя несложные преобразования, убеждаемся, что векторы  $x' = x^+$  и  $x'' = x^-$  удовлетворяют (6.13).

Наоборот, пусть некоторые  $x', x'' \in \mathbb{R}^n$  являются решениями системы неравенств (6.13). Определим вектор  $d \in \mathbb{R}^n$  так, чтобы его компоненты были минимумами из соответствующих компонент  $x'$  и  $x''$ , т. е.

$$d_i = \min\{x'_i, x''_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда  $d \geq 0$  и для вектора  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ , такого что  $\tilde{x} = x' - x''$ , мы имеем

$$x_i^+ = \max\{0, x'_i - x''_i\} = x'_i - \min\{x'_i, x''_i\} = x'_i - d_i$$

для всех  $i = 1, 2, \dots, n$ . По этой причине  $x^+ = x' - d$ , и аналогичным же образом нетрудно убедиться, что  $x^- = x'' - d$ . Следовательно,  $|\tilde{x}| = x' + x'' - 2d$ , и поэтому

$$(\text{mid } \mathbf{A}) \tilde{x} + (\text{rad } \mathbf{A}) |\tilde{x}| = \overline{\mathbf{A}}x' - \underline{\mathbf{A}}x'' - 2(\text{rad } \mathbf{A})d \leq \overline{\mathbf{b}},$$

$$(\text{mid } \mathbf{A}) \tilde{x} - (\text{rad } \mathbf{A}) |\tilde{x}| = \underline{\mathbf{A}}x' - \overline{\mathbf{A}}x'' + 2(\text{rad } \mathbf{A})d \geq \underline{\mathbf{b}}.$$

В целом справедливо включение

$$\mathbf{A}\tilde{x} = [(\text{mid } \mathbf{A}) \tilde{x} - (\text{rad } \mathbf{A}) |\tilde{x}|, (\text{mid } \mathbf{A}) \tilde{x} + (\text{rad } \mathbf{A}) |\tilde{x}|] \subseteq \mathbf{b},$$

и потому  $\tilde{x} \in \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ . ■

В заключение параграфа напомним ещё один интересный результат И. Рона, касающийся допускового множества решений ИСЛАУ — его характеризацию, как множества решений системы неравенств с модулями, аналогичной системе Оетгли-Прагера (см. §5.2б): принадлежность  $\tilde{x} \in \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  эквивалентна

$$|\text{mid } \mathbf{A} \cdot \tilde{x} - \text{mid } \mathbf{b}| \leq \text{rad } \mathbf{b} - \text{rad } \mathbf{A} \cdot |\tilde{x}|.$$

### 6.3 Ограниченность допускового множества решений

В общем случае допусковое множество решений  $\Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  может быть и неограниченным. Но для квадратных интервальных линейных систем, когда  $m = n$ , множество  $\Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  является ограниченным, если хотя бы одна точечная матрица  $\tilde{A} \in \mathbf{A}$  неособенна, поскольку

$$\Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \subseteq \{\tilde{A}^{-1}\mathbf{b} \mid \mathbf{b} \in \mathbf{b}\}.$$

В этом параграфе будет показано, как по виду матрицы  $\mathbf{A}$  можно судить об ограниченности допускового множества решений для интервальной линейной системы

уравнений  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ . Решение этого вопроса интересно как с теоретической точки зрения, так и в практическом плане. Дело в том, что интервальная задача о допусках и допусковое множество решений возникают при решении задачи восстановления линейной зависимости по данным с интервальной неопределённостью [26]. Ограниченность допускового множества решений означает, что вариабельность оценки параметров линейной зависимости, интервальный аналог её дисперсии, конечен.

Далее мы докажем два утверждения: первое позволит по специальному виду матрицы заключать, что допусковое множество решений неограниченно, а второе, наоборот, показывает, что в случае неограниченности допускового множества решений матрица ИСЛАУ должна иметь именно этот специальный вид.

Напомним, что конечное множество  $\{a_j\}$  векторов из  $\mathbb{R}^n$  называется *линейно зависимым*, если существуют вещественные числа  $c_j$ , не все из которых равны нулю, такие что  $\sum_j a_j c_j = 0$ . Множество из одного вектора считается линейно зависимым тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой.

**Предложение 6.3.1** Пусть для интервальной линейной системы  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  допусковое множество решений  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  непусто. Если в матрице  $\mathbf{A}$  есть линейно зависимые точечные столбцы, то  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  неограниченно.

**Доказательство.** В силу критерия (6.3) принадлежности допусковому множеству решений непустота  $\Xi_{tol}$  означает существование вектора  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ , такого что  $\mathbf{A}\tilde{x} \subseteq \mathbf{b}$ . Расписав произведение  $\mathbf{A}\tilde{x}$  по столбцам  $\mathbf{A}_{:j}$ , получим

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{A}_{:j} \tilde{x}_j \subseteq \mathbf{b}. \quad (6.14)$$

Пусть  $J$  — множество номеров линейно зависимых точечных столбцов  $\mathbf{A}_{:j}$  матрицы  $\mathbf{A}$ . Тогда (6.14) можно переписать в виде

$$\sum_{j \in J} \mathbf{A}_{:j} \tilde{x}_j + \sum_{\substack{j=1 \\ j \notin J}}^n \mathbf{A}_{:j} \tilde{x}_j \subseteq \mathbf{b}, \quad (6.15)$$

а линейную зависимость точечных столбцов выразить формулой

$$\sum_{j \in J} \mathbf{A}_{:j} c_j = 0, \quad (6.16)$$

где  $c_j \in \mathbb{R}$  и  $\sum_{j \in J} |c_j| > 0$ . Домножая (6.16) на вещественное число  $t$  и добавляя к (6.15), получим

$$\sum_{j \in J} \mathbf{A}_{:j} (\tilde{x}_j + tc_j) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \notin J}}^n \mathbf{A}_{:j} \tilde{x}_j \subseteq \mathbf{b} \quad (6.17)$$

для произвольного  $t \in \mathbb{R}$ .

Введём вектор  $c = (c_1, \dots, c_n)$ , дополнив множество коэффициентов линейной зависимости (6.16) нулевыми коэффициентами для  $j \notin J$ . Тогда (6.17) можно переписать в виде

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \left( \sum_{j=1}^n \mathbf{A}_{:j} (\tilde{x}_j + tc_j) \subseteq \mathbf{b} \right),$$



что в матричной форме выглядит так:

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \left( \mathbf{A}(\tilde{x} + tc) \subseteq \mathbf{b} \right).$$

По критерию принадлежности (6.3) это означает, что вместе с решением  $\tilde{x}$  в множество  $\Xi_{tol}$  попадает прямая, проходящая через  $\tilde{x}$  и параллельная ненулевому вектору  $c \in \mathbb{R}^n$ . Следовательно,  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  неограниченно. ■

**Предложение 6.3.2** Пусть допускное множество решений  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  интервальной линейной системы  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  непусто. Если оно неограниченно, то в матрице  $\mathbf{A}$  существуют линейно зависимые точечные столбцы.

**Доказательство.** Ранее мы показали, что множество  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  — выпуклое и полиэдральное (Предложение 6.1.1). Если  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  неограниченно, значит, неограниченно его пересечение с каким-нибудь ортантом. Тогда в этом ортанте лежит выпуклое полиэдральное неограниченное подмножество  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , из которого можно выбрать некоторый луч, т. е. множество точек вида  $(\tilde{x} + tc)$ , где  $\tilde{x}$  — начало луча,  $c$  — ненулевой вектор направления,  $t \in \mathbb{R}_+$  — параметр, задающий точки луча.

Так как луч  $(\tilde{x} + tc)$  целиком лежит в  $\Xi_{tol}$ , то для любого неотрицательного  $t$

$$\mathbf{A}(\tilde{x} + tc) \subseteq \mathbf{b} \tag{6.18}$$

по критерию принадлежности (6.3). С другой стороны, луч  $(\tilde{x} + tc)$  целиком лежит в одном ортанте, поэтому  $x_j c_j \geq 0$  для любого  $j \in \{1, \dots, n\}$ , и в (6.18) можно раскрыть скобки по правилу дистрибутивности (1.56):

$$\mathbf{A}\tilde{x} + \mathbf{A}(tc) \subseteq \mathbf{b}.$$

Как следствие, для любого  $t \in \mathbb{R}_+$

$$\mathbf{A}(tc) \subseteq \mathbf{b} \ominus \mathbf{A}\tilde{x},$$

причём интервал  $\mathbf{b} \ominus \mathbf{A}\tilde{x}$  в правой части этого включения — правильный. Таким образом, для любого неотрицательного  $t$  должно выполняться неравенство

$$|\mathbf{A}(tc)| \leq w, \tag{6.19}$$

где  $w := |\mathbf{b} \ominus \mathbf{A}\tilde{x}| \geq 0$ . Вещественный множитель  $t$  выносится за интервальное матрично-векторное произведение, и это позволяет переписать (6.19) в виде

$$|t(\mathbf{A}c)| \leq w \quad \text{для всех } t \geq 0.$$

Для  $t = 0$  неравенство очевидно выполняется, а положительное  $t$  можно далее вынести за знак модуля и разделить на него обе части неравенства. Получаем  $|\mathbf{A}c| \leq w/t$  для любого  $t > 0$ , и это возможно только при  $|\mathbf{A}c| = 0$ , что эквивалентно

$$\mathbf{A}c = 0. \tag{6.20}$$

Равенство (6.20) означает, что

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{A}_{:j} c_j = 0,$$

т. е. линейная комбинация столбцов интервальной матрицы  $\mathbf{A}$  с коэффициентами в виде компонент вектора  $c$ , равна нулю. Остаётся заметить, что ненулевые коэффициенты в этой сумме могут стоять только при точечных столбцах матрицы, так как иначе радиус линейной комбинации

$$\text{rad}(\mathbf{A}c) = \sum_{j=1}^n |c_j| \cdot \text{rad} \mathbf{A}_{:j} \quad (6.21)$$

будет отличен от нуля, что стало бы противоречить (6.20). ■

Из Предложения 6.3.1 и Предложения 6.3.2 вытекает следующий очень важный результат И.А. Шарой [23, 46]:

**Теорема 6.3.1** (критерий неограниченности допускового множества решений)  
*Непустое допусковое множество решений  $\Xi_{\text{toi}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  интервальной линейной системы уравнений  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  неограниченно тогда и только тогда, когда в матрице  $\mathbf{A}$  существуют линейно зависимые точечные столбцы.*

Таблица 6.1. Примеры применения критерия неограниченности для непустого допускового множества ИСЛАУ

интервальная матрица $\mathbf{A}$	допусковое множество решений
все элементы существенно интервальны	ограниченно
каждый столбец имеет существенно интервальный элемент	ограниченно
есть нулевые столбцы	неограниченно
есть пропорциональные точечные столбцы	неограниченно
число неинтервальных столбцов больше общего числа строк	неограниченно

В заключение темы попытаемся представить, как выглядит неограниченное допусковое множество решений ИСЛАУ. Пусть  $c \in \mathbb{R}^n$  — произвольный вектор коэффициентов, с которыми линейная комбинация столбцов интервальной матрицы  $\mathbf{A}$  равна нулю, т. е.  $\mathbf{A}c = 0$ . Обозначим через  $L$  линейное пространство всех таких векторов. В силу (6.21) у вектора  $c$  могут отличаться от нуля только компоненты, соответствующие точечным столбцам матрицы  $\mathbf{A}$ . Значит, размерность пространства

$L$  равна  $(p-q)$ , где  $p$  — общее число всех точечных столбцов,  $q$  — максимальное число линейно независимых точечных столбцов матрицы  $\mathbf{A}$ . Например, если в матрице  $\mathbf{A}$  все точечные столбцы нулевые, то размерность пространства  $L$  равна их числу.

Опираясь на доказательство Предложения 6.3.1, можно сказать, что  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  представляет собой объединение прямых, параллельных произвольному вектору  $\mathbf{c}$  из  $L$ . Следовательно, допусковое множество решений состоит из пространств, полученных параллельными сдвигами  $L$ . Для выпуклого полиэдрального множества это означает, что все его грани лежат в гиперплоскостях, параллельных  $L$ .

Результаты параграфа полезно свести в таблицу (Табл. 6.1), которая в ёмкой и наглядной форме позволяет сопоставить различные условия ограниченности и неограниченности допускового множества решений. Отметим также, что оценивание неограниченного множества нужно основывать на других принципах, нежели ограниченного. В работах [23, 46] для этой цели предлагаются подходы, основанные на разложении допускового множества решений на более простые составные части.

## 6.4 Грубое исследование разрешимости

При решении интервальной линейной задачи о допусках выяснение того, является допусковое множество решений пустым или непустым, т.е. исследование разрешимости задачи, имеет самостоятельное значение. Результатам на эту тему посвящено немало публикаций, начиная с 70-х годов XX века. Одним из первых И. Рон обратился к исследованию линейной задачи о допусках при изучении линейных экономических моделей межотраслевого баланса в условиях интервальной неопределённости, т.е. интервального уравнения Леонтьева (см. §5.2а). В его работе [44] были выведены явные формулы, позволяющие исследовать разрешимость линейной задачи о допусках, но только для интервальных матриц  $\mathbf{A}$  специального вида и неотрицательных правых частей  $\mathbf{b}$ .

В работе Н.А. Хлебалина [19] (а потом также в [22, 38]) рассматривался следующий простой эвристический способ проверки разрешимости ЛЗД: в качестве наиболее вероятного представителя допускового множества решений  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  берётся решение  $\tilde{\mathbf{x}}$  «средней» точечной системы

$$(\text{mid } \mathbf{A}) \mathbf{x} = \text{mid } \mathbf{b}, \quad (6.22)$$

которое затем тестируется на включение  $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} \subseteq \mathbf{b}$ . Если же  $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} \not\subseteq \mathbf{b}$ , то мы заключаем о «практической неразрешимости» линейной задачи о допусках, хотя, строго говоря, в этом случае никакого определённого суждения выносить нельзя. Описанный «тест средней системы», как показывает практика, работает лишь когда матрица  $\mathbf{A}$  «достаточно узка» в сравнении с вектором правой части  $\mathbf{b}$  и не способен исследовать тонких пограничных ситуаций.

Например, пусть  $\mathbf{A} = [-1, 2]$ ,  $\mathbf{b} = [-2, 6]$ . Тогда  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = [-1, 2]$ , но решение «средней системы» (6.22) равно 4, и оно не принадлежит допусковому множеству решений. Более интересен двумерный контрпример с данными

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & [1, 2] \\ [1, 2] & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [5, 7] \\ [7, 9] \end{pmatrix}. \quad (6.23)$$

Здесь  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  состоит из единственной точки  $(1, 2)^\top$ , тогда как решение «средней системы» есть  $(\frac{8}{9}, \frac{20}{9})^\top$ . Отметим, что в этом примере матрица интервальной линейной системы положительна и неособенна.

В Главе 11 этой книги мы представляем так называемый формально-алгебраический подход к решению линейной задачи о допусках, в котором заключение о пустоте или непустоте  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  принимается по результатам вычисления формального решения интервальной системы уравнений  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ . Нередко он позволяет выявлять разрешимость задачи и в тех случаях, когда «тест средней системы» терпит неудачу. Тем не менее, формальное решение для интервальной линейной системы  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  не обязательно существует, даже если задача о допусках для неё совместна. Это иллюстрируется тем же самым одномерным примером с  $\mathbf{A} = [-1, 2]$ ,  $\mathbf{b} = [-2, 6]$ . Формальное решение уравнения  $[-1, 2] \cdot x = [-2, 6]$  не существует, но  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = [-1, 2] \neq \emptyset$ .

Полное исследование разрешимости линейной задачи о допусках может быть выполнено с помощью методов линейного программирования, опираясь на представления допускового множества решений ИСЛАУ как множества решений системы линейных алгебраических неравенств — теорему И.А. Шарой о допусковом множестве решений (Теорема 6.2.1) и теорему И. Рона о допусковом множестве решений (Теорема 6.2.2). Кроме того, далее в этой главе в §6.5 развивается техника для полного исследования разрешимости линейной задачи о допусках, основанная на максимизации так называемого распознающего функционала множества решений. Но оба этих способа полного исследования допускового множества решений требуют заметных вычислительных затрат. В этом параграфе мы дадим простое достаточное условие неразрешимости линейной задачи о допусках, использующее сравнение «относительных узостей» элементов интервальной матрицы и вектора правой части. Оно предназначено для предварительного быстрого исследования задачи о допусках.

Заметим, что если  $i$ -ая строка матрицы  $\mathbf{A}$  содержит только нулевые элементы, то для непустоты допускового множества решений  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  необходимо  $\mathbf{b}_i \ni 0$ . Если же это условие выполнено, то свойство  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  быть пустым или непустым зависит уже только от других, не  $i$ -ых строк матрицы  $\mathbf{A}$  и компонент вектора  $\mathbf{b}$ . Таким образом, без потери общности можно предполагать далее, что  $\mathbf{A}$  не имеет нулевых строк.

Основной результат этого параграфа —

**Теорема 6.4.1** Пусть в системе уравнений  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  интервальная  $m \times n$ -матрица  $\mathbf{A}$  и интервальный  $m$ -вектор  $\mathbf{b}$  таковы, что для некоторого  $k \in \{1, 2, \dots, m\}$  выполнены следующие условия:

- (i)  $0 \notin \mathbf{b}_k$ ,
- (ii)  $\max\{\chi(\mathbf{a}_{kj}) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{kj} \neq 0\} < \chi(\mathbf{b}_k)$ .

Тогда допусковое множество решений  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  пусто.

Например, используя этот признак, можно легко заключить, что интервальное уравнение  $[1, 2]x = [2, 3]$  имеет пустое допусковое множество решений.

**Доказательство** теоремы будет проведено *ad absurdum* («от противного»).

Предположим, что задача о допусках всё-таки имеет некоторое решение  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$ , так что  $\mathbf{Ay} \subseteq \mathbf{b}$ , и, кроме того, выполняется условие (i). Последнее

делает невозможным равенство интервала  $(\mathbf{A}y)_k$  нулю, и потому верны следующие неравенства:

$$\begin{aligned}\chi((\mathbf{A}y)_k) &= \chi\left(\sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{kj}y_j\right) \\ &\leq \max\{\chi(\mathbf{a}_{kj}y_j) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{kj}y_j \neq 0\} \quad \text{в силу (1.43)} \\ &= \max\{\chi(\mathbf{a}_{kj}) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{kj}y_j \neq 0\} \quad \text{в силу (1.42)} \\ &\leq \max\{\chi(\mathbf{a}_{kj}) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{kj} \neq 0\}.\end{aligned}$$

Мы нашли, что

$$\chi((\mathbf{A}y)_k) \leq \max\{\chi(\mathbf{a}_{kj}) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{kj} \neq 0\}. \quad (6.24)$$

С другой стороны, наше предположение о существовании решения означает, что  $(\mathbf{A}y)_k \subseteq \mathbf{b}_k$ , и это вместе с (1.46) влечёт

$$\chi((\mathbf{A}y)_k) \geq \chi(\mathbf{b}_k).$$

Сопоставляя это соотношение с (6.24), получаем

$$\max\{\chi(\mathbf{a}_{kj}) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{kj} \neq 0\} \geq \chi(\mathbf{b}_k),$$

что противоречит (ii). ■

Важность условия (i) Теоремы 6.4.1 может быть продемонстрирована на рассмотренном выше одномерном примере с  $\mathbf{A} = [-1, 2]$  и  $\mathbf{b} = [-2, 6]$ . Здесь  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = [-1, 2] \neq \emptyset$ , хотя  $\chi(\mathbf{A}) = -\frac{1}{2} < -\frac{1}{3} = \chi(\mathbf{b})$ . Более глубокое объяснение состоит в том, что свойство (1.46) функционала  $\chi$ , на котором, в частности, основывается доказательство, неверно для интервалов, содержащих нуль во внутренней части:

$$[-1, 1] \subseteq [-1, 2] \subseteq [-2, 2],$$

$$\text{но } \chi([-1, 1]) = \chi([-2, 2]) = -1, \quad \chi([-1, 2]) = -\frac{1}{2}.$$

В то же время, невыполнение условий Теоремы 6.4.1 не обязательно влечёт разрешимость линейной задачи о допусках. Например, условие (ii) из формулировки теоремы неверно для системы (6.6), но её допускное множество решений всё-таки пусто.

Если мы заключили на основании Теоремы 6.4.1 о несовместности линейной задачи о допусках с матрицей  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$  и вектором правой части  $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_i)$ , то для дальнейшего исследования задачи может оказаться полезной величина  $\mathcal{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , введённая в §5.4:

$$\mathcal{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \chi(\mathbf{b}_i) - \max_{\substack{1 \leq j \leq n \\ \mathbf{a}_{ij} \neq 0}} \chi(\mathbf{a}_{ij}) \right\} \geq 0.$$

Конкретное значение  $\mathcal{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  до некоторой степени может характеризовать «меру неразрешимости» рассматриваемой задачи: чем она больше, тем более далека задача от разрешимости, и наоборот. Кроме того, индексы  $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ , для которых

выполнены условия (i)–(ii) Теоремы 6.4.1, указывают на те строки матрицы  $\mathbf{A}$  и соответствующие компоненты вектора  $\mathbf{b}$ , которые вносят главный вклад в неразрешимость рассматриваемой задачи о допусках. Для того, чтобы приблизить задачу к разрешимому состоянию, следует либо сузить наиболее широкие элементы в этих строках матрицы  $\mathbf{A}$ , т. е. увеличить  $\max_{1 \leq j \leq n} \chi(\mathbf{a}_{kj})$ , либо расширить правую часть, т. е. уменьшить  $\chi(\mathbf{b}_k)$ .

## 6.5 Полное исследование разрешимости

Согласно теореме И. Рона о допусковом множестве решений (теорема 6.2.2) мы можем представить его через решение системы линейных неравенств. Как следствие, на вопрос о пустоте или непустоте допускового множества решений ИСЛАУ можно ответить с помощью какого-либо из многочисленных методов решения систем линейных алгебраических неравенств. Для этой цели удобно применять, к примеру, начальный этап стандартного симплекс-метода для задачи линейного программирования — так называемое «введение в базис» (см., к примеру, [4]). Ниже мы представляем другой подход к исследованию разрешимости интервальной линейной задачи о допусках, который основан на интервальной технике и лучше приспособлен для анализа задачи и её коррекции.

### 6.5а Распознающий функционал

Основой развиваемой далее теории является удобная аналитическая характеристика допускового множества решений.

**Теорема 6.5.1** Пусть даны интервальная  $m \times n$ -матрица  $\mathbf{A}$  и интервальный  $m$ -вектор правой части  $\mathbf{b}$ , а выражением

$$\text{Tol}(x) = \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right\}$$

определяется функционал  $\text{Tol} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{IR}^{m \times n} \times \mathbb{IR}^m \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда принадлежность  $x \in \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  равносильна  $\text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0$ , т. е. допусковое множество решений интервальной линейной системы  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  есть множество уровня

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0\}$$

функционала  $\text{Tol}$ .

**Доказательство.** Пусть  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ . Вспомним, что  $\tilde{x} \in \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  в том и лишь в том случае, если  $\mathbf{A}\tilde{x} \subseteq \mathbf{b}$ , т. е.

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} \tilde{x}_j \subseteq \mathbf{b}_i = [\text{mid } \mathbf{b}_i - \text{rad } \mathbf{b}_i, \text{mid } \mathbf{b}_i + \text{rad } \mathbf{b}_i], \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Эти включения можно переписать в следующем виде

$$\text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} \tilde{x}_j \subseteq [-\text{rad } \mathbf{b}_i, \text{rad } \mathbf{b}_i], \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

что эквивалентно

$$\left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} \tilde{x}_j \right| \leq \text{rad } \mathbf{b}_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Следовательно, точка  $\tilde{x}$  принадлежит  $\Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  тогда и только тогда, когда

$$\text{Tol}(\tilde{x}, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} \tilde{x}_j \right| \right\} \geq 0.$$

Это и требовалось показать. ■

Отметим сразу же, что функционал  $\text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$  непрерывен по всем своим аргументам, что следует из непрерывности интервальных арифметических операций и непрерывности модуля (магнитуды) интервала. Кроме того, функционал  $\text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$  непрерывен и в более сильном смысле, по Липшицу (см. Определение 3.2.1), так как задающее его выражение составлено только из липшицевых функций.

Мы будем называть функционал  $\text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$  *распознающим*, поскольку знак его значений позволяет «распознать» точки из  $\Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ . Аргументы этого функционала не вполне равноправны: с одной стороны, это исследуемая точка  $x \in \mathbb{R}^n$ , а с другой — данные задачи, т. е. матрица  $\mathbf{A}$  и вектор правой части  $\mathbf{b}$ . Когда вторичные аргументы распознающего функционала —  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{b}$  — несущественны, мы будем опускать их, говоря просто о функционале  $\text{Tol}(x)$ .

Напомним важное

**Определение 6.5.1** Пусть  $D$  — выпуклое множество в пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Функция  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  называется *вогнутой*, если для любых  $x, y \in D$  и  $0 \leq \lambda \leq 1$  имеет место

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Иными словами, *вогнутой функцией* называется функция, подграфик которой является выпуклым множеством (см. [16]).

Характерный вид графиков вогнутых функций изображён на Рис. 6.3. Вогнутые функции являются антиподами выпуклых функций. Иногда вогнутые функции называют также «выпуклыми вверх функциями», а просто выпуклые — «выпуклыми вниз».

**Предложение 6.5.1** Функционал  $\text{Tol}(x)$  — вогнутая функция.

**Доказательство.** Как известно, нижняя огибающая, т. е. поточечный минимум, семейства вогнутых функций сама является вогнутой функцией. Так как функционал

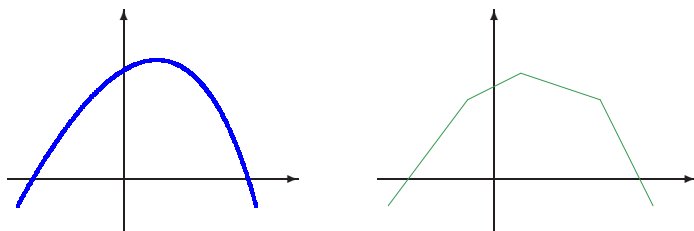


Рис. 6.3. Графики вогнутых функций.

$\text{Tol}(x)$  есть нижняя огибающая функционалов

$$\varsigma_i(x) = \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right|, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

то нам достаточно лишь установить вогнутость каждого из  $\varsigma_i(x)$ .

Пусть  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ . Субдистрибутивность классической интервальной арифметики влечет тогда

$$\begin{aligned} \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} (\lambda x_j + (1-\lambda)y_j) \\ \subseteq \lambda \left( \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right) + (1-\lambda) \left( \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} y_j \right). \end{aligned}$$

Абсолютная величина интервала — функция  $|\cdot|$  — монотонно зависит от интервала (свойство (1.18), стр. 37), следовательно

$$\begin{aligned} \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} (\lambda x_j + (1-\lambda)y_j) \right| \\ \leq \left| \lambda \left( \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right) + (1-\lambda) \left( \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} y_j \right) \right| \\ \leq \lambda \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| + (1-\lambda) \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} y_j \right|. \end{aligned}$$

По этой причине в самом деле

$$\varsigma_i(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda \varsigma_i(x) + (1-\lambda) \varsigma_i(y), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

что и доказывает предложение. ■

Итак, подграфик

$$\text{hyp Tol} = \{ (x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}, t \leq \text{Tol}(x) \}$$



отображения  $\text{Tot} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  является выпуклым множеством. Но его свойства оказываются даже ещё более специфичными.

**Определение 6.5.2** [16] *Функция, надграфик которой является выпуклым полиэдром, называется выпуклой полиэдральной. Функция, подграфик которой является выпуклым полиэдром, называется вогнутой полиэдральной.*

Неформально можно сказать, что полиэдральная функция — это функция, график которой составлен в  $\mathbb{R}^{n+1}$  из кусков гиперплоскостей (отрезков прямых в случае функций одной переменной).

**Предложение 6.5.2** *Распознающий функционал  $\text{Tot}(x)$  — вогнутая полиэдральная функция.*

**Доказательство.** Утверждение предложения равносильно тому, что  $\text{hyp Tot}$  является пересечением конечного числа полупространств в  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Выражая абсолютное значение через максимум, мы получим для каждого  $i = 1, 2, \dots, m$

$$\begin{aligned} \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| &= \text{rad } \mathbf{b}_i - \max_{\hat{\mathbf{a}}_{ij}} \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \hat{\mathbf{a}}_{ij} x_j \right| && \text{так как модуль интервала есть} \\ &&& \text{максимум модулей концов} \\ &= \text{rad } \mathbf{b}_i - \max_{\hat{\mathbf{a}}_{ij}} \left\{ \max \left\{ \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \hat{\mathbf{a}}_{ij} x_j, \sum_{j=1}^n \hat{\mathbf{a}}_{ij} x_j - \text{mid } \mathbf{b}_i \right\} \right\} \\ &= \min_{\hat{\mathbf{a}}_{ij}} \left\{ \min \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \text{mid } \mathbf{b}_i + \sum_{j=1}^n \hat{\mathbf{a}}_{ij} x_j, \text{rad } \mathbf{b}_i + \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \hat{\mathbf{a}}_{ij} x_j \right\} \right\}, \end{aligned}$$

где  $n$ -вектор  $(\hat{\mathbf{a}}_{i1}, \hat{\mathbf{a}}_{i2}, \dots, \hat{\mathbf{a}}_{in})$  пробегает по конечному множеству

$$\text{vert}(\mathbf{a}_{i1}, \mathbf{a}_{i2}, \dots, \mathbf{a}_{in}),$$

т. е. по всем вершинам  $i$ -ой строки интервальной матрицы  $\mathbf{A}$ . По этой причине функционал  $\text{Tot}$  является нижней огибающей не более чем  $m \cdot 2^{n+1}$  линейных функций вида

$$\text{rad } \mathbf{b}_i \pm \left( \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \hat{\mathbf{a}}_{ij} x_j \right), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

а множество  $\text{hyp Tot}$  есть пересечение подграфиков этих функций. ■

Так как  $\text{rad } \mathbf{b}_i + \text{mid } \mathbf{b}_i = \bar{\mathbf{b}}_i$  и  $\text{rad } \mathbf{b}_i - \text{mid } \mathbf{b}_i = -\underline{\mathbf{b}}_i$ , то можно уточнить данное выше описание: линейные функции, нижней огибающей которых представляется  $\text{Tot}$ ,

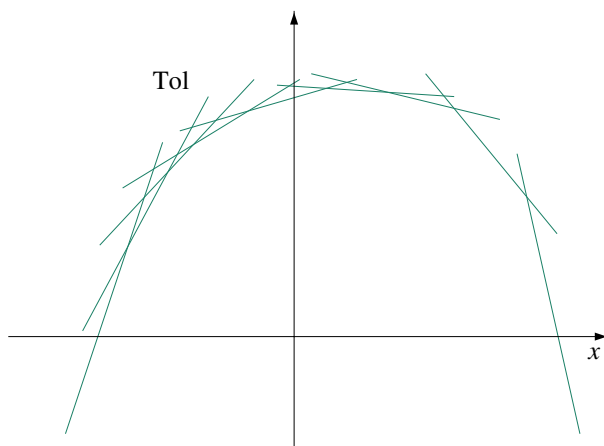


Рис. 6.4. Распознающий функционал Tol может быть представлен как нижняя огибающая семейства линейных функций.

имеют коэффициентами концы элементов интервальной матрицы системы, а свободные члены линейных функций — концы компонент вектора правой части.

В качестве следствия снова получаем известный результат, уже доказанный в Предложении 6.1.1: допустимое множество решений интервальной линейной системы является выпуклым полиэдральным множеством.

**Предложение 6.5.3** *Функционал  $\text{Tol}(x)$  достигает конечного максимума на всём пространстве  $\mathbb{R}^n$ .*

**Доказательство.** В основе доказательства лежит специальное представление выпуклых полиэдральных множеств через их крайние точки и крайние лучи (направления); см., например, [16]. Известно, что если выпуклое полиэдральное множество ограничено, то оно является выпуклой оболочкой своих крайних точек. Если же оно неограничено, то к выпуклым комбинациям крайних точек добавляются линейные комбинации крайних направлений. Этот результат можно также переформулировать в равносильном виде: всякое выпуклое полиэдральное множество есть сумма полиэдра и полиэдрального конуса [15].

В нашем случае подграфик  $\text{hyp Tol}$  функционала Tol, будучи выпуклым полиэдральным множеством в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , является выпуклой оболочкой конечного числа точек  $(c_k, \gamma_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, p$ , и лучей с направляющими векторами  $(c_k, \gamma_k)$ ,  $k = p+1, \dots, q$ , в  $\mathbb{R}^{n+1}$ . При этом из числа направлений мы должны исключить направление  $(0, \dots, 0, 1)$ , так как  $\text{Tol}(x)$  всюду определён. Более точно,

$$\text{hyp Tol} = \left\{ \sum_{k=1}^q \lambda_k (c_k, \gamma_k) \mid c_k \in \mathbb{R}^n, \gamma_k \in \mathbb{R}, \lambda_k \geq 0, \sum_{k=1}^p \lambda_k = 1 \right\}.$$

Поскольку  $\text{Tol}(x) \leq \min_{1 \leq i \leq m} \text{gad } \mathbf{b}_i$ , можем заключить, что все  $\gamma_k \leq 0$ ,  $k = p+1, \dots, q$ , так как в противном случае функционал Tol был бы неограничен сверху.

По этой причине

$$\begin{aligned}
 \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x) &= \max \{ t \in \mathbb{R} \mid (\exists x \in \mathbb{R}^n) ((x, t) \in \text{hyp Tol}) \} \\
 &= \max \left\{ \sum_{k=1}^q \lambda_k \gamma_k \mid \lambda_k \geq 0, \sum_{k=1}^p \lambda_k = 1 \right\} \\
 &= \max \left\{ \sum_{k=1}^p \lambda_k \gamma_k \mid \lambda_k \geq 0, \sum_{k=1}^p \lambda_k = 1 \right\} \\
 &= \max_{1 \leq k \leq p} \gamma_k.
 \end{aligned}$$

Таким образом,  $\max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x)$  совпадает с максимумом по некоторому конечному множеству значений функционала — по всем  $\gamma_k$ , — и достигается на значении аргумента, соответствующем максимальному из этих  $\gamma_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, p$ . ■

**Пример 6.5.1** Для интервальной линейной  $3 \times 2$ -системы

$$\begin{pmatrix} [2, 3] & [-1, 2] \\ [1, 2] & [1, 3] \\ [-1, 1] & [0, 1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0, 60] \\ [10, 72] \\ [-10, 36] \end{pmatrix} \quad (6.25)$$

распознающий функционал допускового множества решений есть

$$\begin{aligned}
 \text{Tol}(x) &= \min \{ 30 - |30 - [2, 3] \cdot x_1 - [-1, 2] \cdot x_2|, \\
 &\quad 31 - |41 - [1, 2] \cdot x_1 - [1, 3] \cdot x_2|, \\
 &\quad 23 - |13 - [-1, 1] \cdot x_1 - [0, 1] \cdot x_2| \}, \quad (6.26)
 \end{aligned}$$

и его график изображён с разных точек зрения на Рис. 6.5. Хорошо видна полиэдральность этого графика.

Наивысшая по оси значений точка графика  $\text{Tol}$  имеет координаты  $(6, 8, 4)^\top$ , так что максимум распознающего функционала равен 4, и он достигается при значении аргумента  $(6, 8)^\top$ . ■

**Предложение 6.5.4** Пусть для каждого индекса  $i = 1, 2, \dots, m$  в  $i$ -ой строке интервальной матрицы  $\mathbf{A}$  существует хотя бы один ненулевой элемент или же не равен нулю ни один из концов соответствующей компоненты правой части  $\mathbf{b}_i$ . Тогда принадлежность  $y \in \text{int } \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  влечёт  $\text{Tol}(y, \mathbf{A}, \mathbf{b}) > 0$ .

**Доказательство.** Пусть  $\Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$  и  $\max \text{Tol}(x)$  достигается в некоторой точке  $\tau \in \Xi_{\text{tol}}$ . Если  $y \in \text{int } \Xi_{\text{tol}}$ , то  $y$  — внутренняя точка отрезка  $[\tau, z] \subset \Xi_{\text{tol}}$ , т.е.  $y = \lambda \tau + (1 - \lambda)z$  для некоторых  $\lambda \in ]0, 1[$ ,  $z \in \Xi_{\text{tol}}$ . Следовательно,

$$\text{Tol}(y) \geq \lambda \text{Tol}(\tau) + (1 - \lambda) \text{Tol}(z),$$

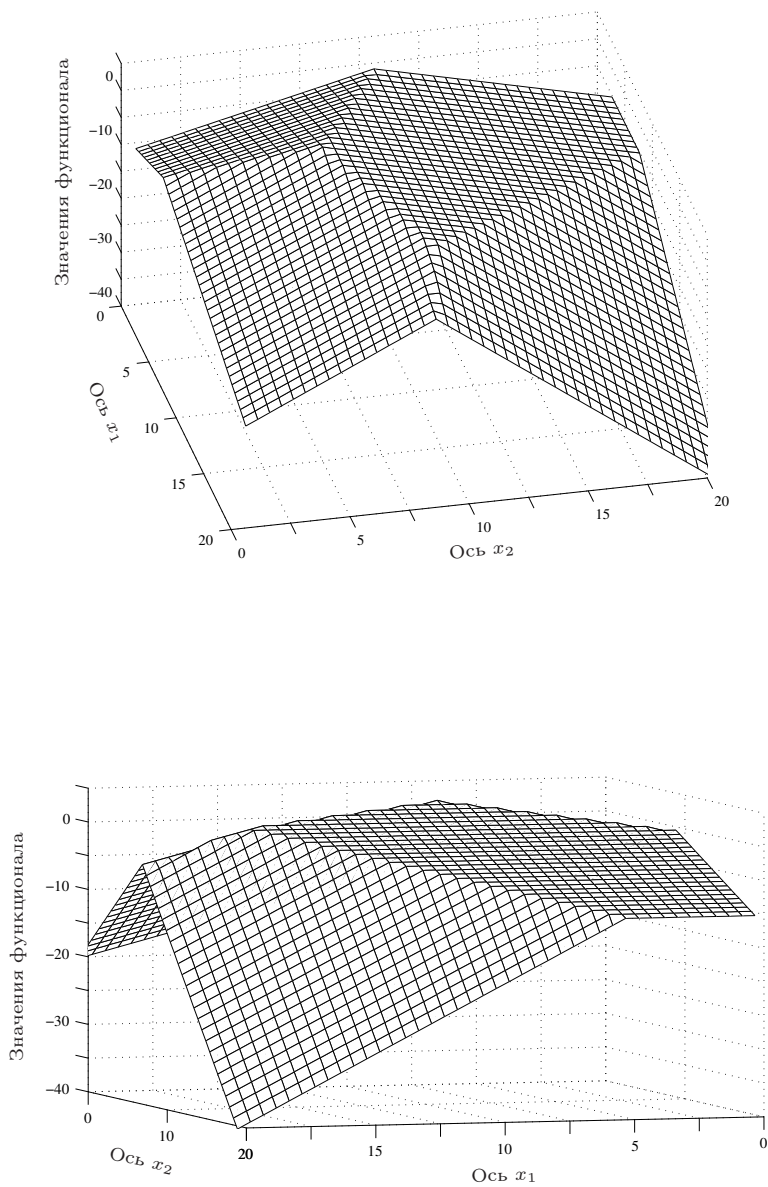


Рис. 6.5. График распознающего функционала (6.26) с разных точек зрения.

так как функционал  $\text{Tol}$  вогнутый.

Предположим, что  $\text{Tol}(y) = 0$ . Тогда выписанное выше неравенство выполняется, если и только если  $\text{Tol}(\tau) = \text{Tol}(y) = 0$ . Но  $\text{Tol}(\tau) = \max \text{Tol}(x)$ , и поэтому функционал  $\text{Tol}$  обязан при этом быть нулевым на всем множестве  $\Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ . Более того, пусть  $\mathbb{R}^n = \bigcup_{1 \leq i \leq m} \mathcal{W}_i$ , где

$$\mathcal{W}_i = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \left| \text{Tol}(x) = \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right| \right\}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\Xi_{\text{tol}} = \bigcup_{1 \leq i \leq m} (\Xi_{\text{tol}} \cap \mathcal{W}_i),$$

причём все множества  $\Xi_{\text{tol}} \cap \mathcal{W}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , замкнуты. Следовательно, по крайней мере для одного  $k \in \{1, 2, \dots, m\}$  имеем  $\text{int}(\Xi_{\text{tol}} \cap \mathcal{W}_k) \neq \emptyset$ , так что в целом

$$\text{rad } \mathbf{b}_k - \left| \text{mid } \mathbf{b}_k - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{kj} x_j \right| = 0 = \text{const}$$

для всех  $x \in \text{int}(\Xi_{\text{tol}} \cap \mathcal{W}_k)$ .

Последнее соотношение означает, в частности, что на некоторой открытой области в  $\mathbb{R}^n$  либо

$$\text{rad } \mathbf{b}_k - \text{mid } \mathbf{b}_k + \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{kj} x_j = 0 = \text{const}, \quad (6.27)$$

либо

$$\text{rad } \mathbf{b}_k - \text{mid } \mathbf{b}_k + \overline{\sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{kj} x_j} = 0 = \text{const}, \quad (6.28)$$

либо

$$\text{rad } \mathbf{b}_k + \text{mid } \mathbf{b}_k - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{kj} x_j = 0 = \text{const}, \quad (6.29)$$

либо

$$\text{rad } \mathbf{b}_k + \text{mid } \mathbf{b}_k - \overline{\sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{kj} x_j} = 0 = \text{const}, \quad (6.30)$$

в чём можно убедиться после расписывания определения модуля интервала. Возможны ли подобные равенства?

Дифференцируя выражения (6.27)–(6.30) по  $x_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , легко увидеть, что их производные равны какому-либо из концов интервалов  $\mathbf{a}_{kj}$ , левому или правому, может быть, взятому ещё с противоположным знаком. Получается, что эти производные могут одновременно занулиться лишь в случае, когда каждый из интервальных элементов  $k$ -ой строки матрицы имеет нуль каким-то из своих концов. Но даже тогда выражения (6.27)–(6.30) не равны нулю, если  $\text{rad } \mathbf{b}_k \neq \pm \text{mid } \mathbf{b}_k$ , т.е. если концом  $\mathbf{b}_i$  не является нуль. Это и доказывает утверждение Предложения. ■

**Предложение 6.5.5** Если  $\text{Tol}(y, \mathbf{A}, \mathbf{b}) > 0$ , то  $y \in \text{int } \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$ .

**Доказательство.** Так как отображение  $\text{Tol} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывно, множество  $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{Tol}(x) > 0\}$  является открытым. Оно также непусто, поскольку  $y \in X \subseteq \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , причём  $X \subseteq \text{int } \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ . Следовательно,  $y \in \text{int } \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$ . ■

### 6.5б Применение распознающего функционала

Подытоживая результаты предыдущего раздела, мы приходим к следующей методике исследования разрешимости линейной задачи о допусках, т. е. к критерию пустоты/непустоты допускового множества решений интервальных линейных систем:

Решаем задачу безусловной максимизации распознающего функционала

$$\text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right\}.$$

Пусть  $T = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$  и это значение достигается распознающим функционалом в некоторой точке  $\tau \in \mathbb{R}^n$ . Тогда

- если  $T \geq 0$ , то  $\Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$ , т. е. линейная задача о допусках для интервальной линейной системы  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  совместна и точка  $\tau$  лежит в допусковом множестве решений;
- если  $T > 0$ , то  $\tau \in \text{int } \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$ , и принадлежность точки  $\tau$  допусковому множеству решений устойчива к малым возмущениям данных — матрицы и правой части системы;
- если  $T < 0$ , то  $\Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \emptyset$ , т. е. линейная задача о допусках для интервальной линейной системы  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  несовместна.

Отметим, что Теорема 6.5.1 и Предложения 6.5.1–6.5.5, а также описанная выше методика исследования разрешимости линейной задачи о допусках останутся справедливыми, если определить распознающий функционал Tol более общим выражением, как

$$\text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) := \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ s_i \left( \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right) \right\},$$

где  $s_i, i = 1, 2, \dots, m$ , — некоторые положительные числа. Ниже мы увидим примеры того, как распознающие функционалы подобного вида плодотворно применяются в различных ситуациях.

В настоящее время максимизация негладких вогнутых функционалов является хорошо разработанным разделом вычислительной оптимизации. За последние десятилетия было предложено немало эффективных численных методов решения этой задачи (см., например, монографии [5, 37, 11, 12, 14, 27, 29] и указанные там ссылки). Если же размерность задачи о допусках невелика, то для максимизации распознающего функционала можно использовать методы прямого поиска [17].

С 2010 года автором свободно распространяется программа `tolsoivty`, которую можно загрузить с веб-сайта «Интервальный анализ и его приложения» — <http://www.nsc.ru/interval/> (раздел «Программное обеспечение» и далее «Некоторые интервальные программы для Scilab» или «Некоторые интервальные программы для MATLAB»). Программа предназначена для численного нахождения

безусловного максимума распознающего функционала  $Tol$  и использует в качестве основы алгоритм `ralgb5`, созданный П.И. Стецюком и реализующий идеи работы [28] (кроме того, алгоритму `ralgb5` посвящена отдельная статья [18]). Фактически, `tolsovlty` — очень хорошая и проверенная временем программа максимизации распознающего функционала, которую можно рекомендовать для решения практических задач.

Другая эффективный путь нахождения максимума распознающего функционала  $Tol$  — это методы отделяющих плоскостей, предложенные Е.А. Нурминским [42] и развитые далее Е.А. Воронцовой [3, 55]. На веб-сайте «Интервальный анализ и его приложения» выложена свободная программа `tolspaclip`, реализующая метод отделяющих плоскостей с дополнительным отсечением, предназначенная для тех же целей, что и `tolsovlty`. Методы отсекающих плоскостей хорошо работают при размерностях пространства параметров до нескольких тысяч. В целом можно утверждать, что развитая в этом параграфе процедура исследования разрешимости линейной задачи о допусках вполне практична.

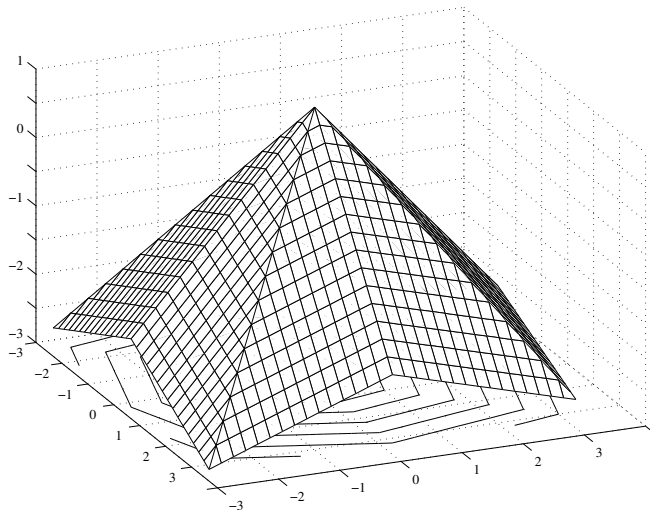


Рис. 6.6. График распознающего функционала допускового множества решений системы (6.4) с проекциями множеств уровня под ним.

**Пример 6.5.2** Для интервальной линейной системы (6.4) распознающий функционал допускового множества решений имеет вид

$$\begin{aligned} Tol(x) &= \min \left\{ 1 - \left| [1, 2] x_1 + \left[-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right] x_2 \right|, 1 - \left| \left[-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right] x_1 + [1, 2] x_2 \right| \right\} \\ &= 1 - \max \left\{ \left| [1, 2] x_1 + \left[-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right] x_2 \right|, \left| \left[-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right] x_1 + [1, 2] x_2 \right| \right\}, \end{aligned}$$

и его график изображён на Рис. 6.6. Здесь модули выражений под знаками экстрему-

мов всегда неотрицательны. Кроме того, они достигают своих наименьших значений, равных нулю, одновременно, когда  $x_1 = x_2 = 0$ . При всех остальных  $x_1$  и  $x_2$  выражения под знаками модулей ненулевые, так что значение распознающего функционала в этих точках будет меньше его значения в нуле. Таким образом

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x) = 1$$

и достигается при  $x = 0$ . Этот максимум надёжно находится и вычислительными оптимизационными процедурами (например, программой `tolsovlty`).

Так как  $\text{Tol}(0) = 1 > 0$ , то точка  $0$  лежит во внутренней допускового множества решений.

Для интервальной линейной системы (6.6) максимум распознающего функционала  $\text{Tol}$  равен  $-1$  и достигается в точке  $(4/3, 4/3)^\top$ . Соответственно, допусковое множество решений пусто. ■

**Пример 6.5.3** Для интервальной линейной системы (6.23) максимум распознающего функционала, который достигается в точке  $(1, 2)^\top$ , равен нулю. При его численном нахождении большинством приближённых оптимизационных методов мы этот нуль не достигнем, а будем лишь приближаться к нему снизу. Это может создать впечатление о том, что рассматриваемая линейная задача о допусках неразрешима, хотя на самом деле допусковое множество решений состоит из точки  $(1, 2)^\top$ . ■

По поводу последнего примера необходимо сказать следующее. Во-первых, малая абсолютная величина максимума распознающего функционала свидетельствует о том, что рассматриваемая задача о допусках находится вблизи границы разрешимости и требуется более тщательное вычисление  $\max_{\mathbb{R}^n} \text{Tol}(x)$ . Другая возможность тонкого исследования разрешимости линейной задачи о допусках — применение симплекс-метода линейного программирования для поиска решений системы линейных неравенств (6.13) из теоремы И. Рона о допусковом множестве решений (Теорема 6.2.2). В симплекс-методе выполняется движение от одной вершины полиэдрального множества решений к другой, так что эти вершины находятся точно в пределах погрешности машинных вычислений. Во-вторых, задачи, подобные рассмотренной в примере, являются, в некотором роде, исключительными, так как соответствующие им данные образуют тощее множество первой бэровской категории в пространстве всех данных. Разрешимость такой задачи может быть разрушена при сколь угодно малом шевелении входных данных. Иными словами, задачи о допусках, подобные (6.23), являются непростыми для исследования в силу того, что находятся на границе множества разрешимых задач.

В заключение параграфа полезно сравнить наш подход к исследованию разрешимости задачи о допусках с тем, который был предложен ранее И. Роном [45] и основан на результате Теоремы 6.2.2. Нередко решение системы линейных неравенств (6.13) оказывается привычнее или удобнее, чем максимизация негладкого распознающего функционала, но в результате решения (6.13) мы можем получить точку, которая лежит на границе допускового множества решений  $\Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ . Например,

Это неприемлемо для нас по двум причинам: во-первых, такая точка может покатить множество решений при сколь угодно малых шевелениях данных задачи и,



во-вторых, не годится в качестве центра телесного бруса внутренней оценки допускового множества решений. Кроме того, метод «распознающего функционала» может быть развит и дальше, при этом он становится пригодным для оценивания степени разрешимости или неразрешимости задачи о допусках и корректировать её данные в нужном нам смысле. По сути, числовое значение максимума распознающего функционала является важной характеристикой линейной задачи о допусках, позволяя решать многие тонкие вопросы. Таких возможностей подход И. Рона также не предоставляет.

## 6.6 Коррекция линейной задачи о допусках

Представим себе реальный процесс решения какой-нибудь конкретной практической задачи. Почти всегда он не заканчивается после того, как мы пришли к выводу о том, что рассматриваемая задача не имеет решений (неразрешима). Заказчику, как правило, интересно получить и дальнейшую информацию о том,

насколько, в количественном измерении, неразрешима эта задача,

как следует изменить входные данные задачи, чтобы она стала разрешимой,

и т. д. Напротив, если исходная задача оказалась разрешимой, то нередко требуется указать границы вариаций входных данных, в пределах которых задача всё ещё останется разрешимой. Мы способны дать развернутые ответы на эти и даже более сложные вопросы об интервальной линейной задаче о допусках с помощью распознающего функционала и основанной на нём техники.

### 6.6а Коррекция вектора правой части

Если матрица  $\mathbf{A}$  и середина правой части  $\text{mid } \mathbf{b}$  по каким-то причинам зафиксированы и остаются неизменными, то увеличение радиусов всех компонент вектора  $\mathbf{b}$  на одну и ту же величину  $K$  приводит, как легко видеть, к добавлению константы  $K$  к функционалу  $\text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$ . Следовательно,

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b} + K\mathbf{e}) = K + \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}),$$

где  $\mathbf{e} = ([-1, 1], \dots, [-1, 1])^\top$ .

Если линейная задача о допусках неразрешима и

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = T < 0,$$

мы можем сделать её разрешимой с той же самой матрицей  $\mathbf{A}$  посредством расширения вектора правой части на  $K\mathbf{e}$ ,  $K \geq 0$ . При этом множество значений аргумента, доставляющих максимум функционалу  $\text{Tol}$  не изменится, но точки  $\tau \in \text{Arg } \max \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$  будут наверняка принадлежать непустому допусковому множеству решений интервальной линейной системы

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b} + K\mathbf{e}.$$

Наоборот, если

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = T \geq 0,$$

так что линейная задача о допусках разрешима, то она останется таковой даже после того, как мы уменьшим радиусы всех компонент вектора правой части на величину  $K$ ,  $K \leq T$ .

Нередко подобное равномерное уширение всех компонент вектора  $\mathbf{b}$  может оказаться неприемлемым на практике. По этой причине станем предполагать, что нам задан масштабирующий вектор

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_m), \quad v_i \geq 0,$$

такой что увеличение ширины  $\mathbf{b}_i$  в процессе коррекции задачи должно быть пропорциональным  $v_i$ . Вычислим теперь

$$V = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}_v(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}),$$

где

$$\text{Tol}_v(x) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ v_i^{-1} \left( \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right) \right\}. \quad (6.31)$$

Если интервальная линейная задача о допусках с матрицей  $\mathbf{A}$  и вектором правой части  $\mathbf{b}$  не имеет решений, то  $V < 0$ . Но задача с той же матрицей  $\mathbf{A}$  и уширенным вектором  $(\mathbf{b}_i + K v_i [-1, 1])_{i=1}^m$  в правой части становится разрешимой при  $K \geq |V|$ . Подбирая масштабирующие множители  $v_i$  нужных нам компонент правой части очень маленькими, можно добиться того, чтобы они практически не изменялись при коррекции, а уширились бы только те компоненты вектора  $\mathbf{b}$ , которые имеют дополнительные к ним номера.

Наиболее важный частный случай рассмотренной конструкции — это обеспечение одинаковых относительных (пропорциональных абсолютным значениям) увеличений радиусов компонент правой части, когда  $v_i = |\mathbf{b}_i|$  для ненулевых  $\mathbf{b}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Обозначим

$$\text{Tol}_0(x) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ |\mathbf{b}_i|^{-1} \left( \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right) \right\}$$

и пусть

$$\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}_0(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}).$$

Величина  $\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  является существенно более тонкой количественной характеристикой совместности линейной задачи о допусках, чем введённая в §§5.4 и 6.4

$$\mathcal{D}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \chi(\mathbf{b}_i) - \max_{\substack{1 \leq j \leq n \\ \mathbf{a}_{ij} \neq 0}} \chi(\mathbf{a}_{ij}) \right\} \geq 0.$$

Судя по модулю  $\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , можно весьма точно определить меру несовместности задачи в случае  $\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) < 0$  или, наоборот, то, «насколько задача совместна» (запас устойчивости разрешимого состояния) в случае  $\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0$ . Естественно, всё это достигается ценой дополнительных вычислений.

### 6.6б Коррекция матрицы системы

Выше мы продемонстрировали возможности коррекции интервальной линейной задачи о допусках путём модификации одного вектора правой части  $\mathbf{b}$ . Обсудим теперь, как задачу о допусках можно корректировать посредством варьирования элементов матрицы  $\mathbf{A}$ . Представляемая ниже методика имеет своей основой

**Предложение 6.6.1** Пусть  $s, x \in \mathbb{R}$ , причём  $s$  — уравновешенный интервал и  $\text{rad } x \geq \text{rad } s$ . Тогда  $(x \ominus s)$  является правильным интервалом и  $|x \ominus s| = |x| - |s|$ .

**Доказательство.** Обозначим для краткости  $s := |s| = \text{rad } s$ . Предположим также для определенности, что

$$|x| = \max\{|\bar{x}|, |\underline{x}|\} = |\bar{x}|,$$

т. е.  $|\bar{x}| \geq |\underline{x}|$ . В частности, это означает  $\bar{x} \geq 0$ .

Покажем, что при сделанных нами предположениях

$$|\bar{x} - s| \geq |\underline{x} + s|. \quad (6.32)$$

Действительно, по условию Предложения

$$\text{rad } x = \frac{1}{2}(\bar{x} - \underline{x}) \geq s,$$

и поэтому

$$\bar{x} - s \geq \underline{x} + s.$$

Если  $\underline{x} + s \geq 0$ , то неравенство (6.32) получается отсюда взятием абсолютного значения от обеих частей. Иначе, если  $\underline{x} + s \leq 0$ , то  $\underline{x} \leq 0$ ,  $|\underline{x}| = -\underline{x}$ , и мы снова имеем в силу известного неравенства для модуля разности

$$|\bar{x} - s| \geq |\bar{x}| - |s| \geq |\underline{x}| - s = -\underline{x} - s = |\underline{x} + s|.$$

Наконец, с учётом (6.32)

$$|x \ominus s| = \max\{|\bar{x} - s|, |\underline{x} + s|\} = |\bar{x} - s| = \bar{x} - s = |x| - |s|,$$

как и требовалось. Для случая  $|x| = |\underline{x}|$  доказательство проводится аналогичным образом. ■

Предположим, что нам дана несовместная линейная задача о допусках с интервальной матрицей  $\mathbf{A}$  и интервальным вектором правой части  $\mathbf{b}$ . Тогда безусловный максимум распознающего функционала  $\text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$ , который обозначим через  $T$ , отрицателен. Будем также считать известным, что этот максимум достигается в точке  $\tau \in \mathbb{R}^n$ :

$$T := \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \text{Tol}(\tau, \mathbf{A}, \mathbf{b}) < 0.$$

Можно ли уменьшить меру неразрешимости линейной задачи о допусках путём сужения матрицы  $\mathbf{A}$  и как конкретно это сделать?

Примем следующие естественные предположения:

- (i) все компоненты вектора правой части  $\mathbf{b}$  являются невырожденными интервалами, то есть  $\text{rad } \mathbf{b}_i > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,
- (ii) в каждой строке матрицы  $\mathbf{A}$  существуют элементы с ненулевой шириной, т. е.  $\sum_{j=1}^n \text{rad } \mathbf{a}_{ij} > 0$  для всех  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Первое условие является почти необходимым для успешной коррекции задачи, так как при нулевой ширине правой части и ненулевой ширине элементов матрицы возможностей сделать допустовое множество решений непустым имеется очень мало. Второе условие необходимо для того, чтобы вообще можно было сужать интервальную матрицу  $\mathbf{A}$ . Кроме того, привлекая величины  $|\tau_j|$  — модули компонент аргумента максимума  $\tau$  — в качестве весовых множителей, перепишем условие (ii) в следующем виде

$$\Delta := \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \sum_{j=1}^n |\tau_j| \text{rad } \mathbf{a}_{ij} \right\} > 0.$$

Далее, зафиксируем положительную константу  $K$ ,  $0 < K \leq \Delta$ , и выберем интервальную  $m \times n$ -матрицу  $\mathbf{E} = (e_{ij})$  с уравновешенными интервальными элементами  $e_{ij} = [-e_{ij}, e_{ij}]$  так, чтобы

$$\sum_{j=1}^n e_{ij} |\tau_j| = K, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (6.33)$$

и, конечно,

$$0 \leq e_{ij} \leq \text{rad } \mathbf{a}_{ij} \quad \text{для всех } i, j. \quad (6.34)$$

Тогда интервальная линейная задача о допусках с тем же самым вектором правой части  $\mathbf{b}$  и модифицированной интервальной матрицей  $\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}$  является «менее неразрешимой», чем исходная задача. Условие (6.34) гарантирует, что результат вычитания  $\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}$  является правильной интервальной матрицей.

В самом деле, оценивая распознающий функционал для новой интервальной линейной задачи о допусках, получим

$$\begin{aligned} \text{Tol}(x, \mathbf{A} \ominus \mathbf{E}, \mathbf{b}) &= \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n (\mathbf{a}_{ij} \ominus e_{ij}) x_j \right| \right\} \\ &= \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \ominus \sum_{j=1}^n e_{ij} x_j \right| \right\} \\ &= \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| + \left| \sum_{j=1}^n e_{ij} x_j \right| \right\} \end{aligned}$$

в силу Предложения 6.6.1. Следовательно, так как (6.33) эквивалентно

$$\left| \sum_{j=1}^n e_{ij} \tau_j \right| = K,$$

мы получаем

$$\begin{aligned}
 \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x, \mathbf{A} \ominus \mathbf{E}, \mathbf{b}) &\geq \text{Tol}(\tau, \mathbf{A} \ominus \mathbf{E}, \mathbf{b}) \\
 &= \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} \tau_j \right| + \left| \sum_{j=1}^n \mathbf{e}_{ij} \tau_j \right| \right\} \\
 &= \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} t_j \right| + K \right\} \\
 &= K + \text{Tol}(\tau, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = K + \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \\
 &= K + T.
 \end{aligned}$$

Если  $K \geq |T|$ , то тогда линейная задача о допусках с матрицей  $\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}$  и правой частью  $\mathbf{b}$  становится разрешимой. Более того, мы можем наверняка утверждать, что известная нам точка  $\tau$  — аргумент максимума функционала  $\text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$  — принадлежит множеству решений  $\Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}, \mathbf{b})$  скорректированной задачи.

Решающим моментом процедуры коррекции с варьированием матрицы является нахождение  $e_{ij}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , удовлетворяющих недоопределённой системе уравнений (6.33) при условиях (6.34). Можно рассматривать (6.33)–(6.34) как условия на множество допустимых решений некоторой задачи линейного программирования. Как следствие, мы можем привлечь для их отыскания развитые численные методы линейного программирования, задавшись каким-нибудь простым линейным критерием оптимальности на искомые  $e_{ij}$ . Например, можно потребовать нахождения максимума для суммы  $\sum_{i,j} e_{ij}$ .

Если  $\Delta \leq |T|$ , то коррекция, выполненная в соответствии с описанным выше рецептом, может оказаться недостаточной для того, чтобы сделать задачу о допусках заведомо разрешимой. Для квадратных интервальных линейных систем это обстоятельство следует рассматривать, скорее, как следствие грубости нашей методики. В принципе, *любая* интервальная линейная задача о допусках с неособенной интервальной матрицей  $\mathbf{A}$  может быть сделана разрешимой путём подходящего сужения  $\mathbf{A}$ , так как в пределе, для неособенной точечной матрицы  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , допустовое множество решений становится непустым при любом векторе правой части. Для того, чтобы всё-таки превратить исходную задачу в разрешимую при больших  $|T|$ , мы рекомендуем применять описанный выше приём повторно (и, возможно, неоднократно), комбинируя его с перевычислением безусловного максимума распознающего функционала.

Наконец, последнее замечание. Выше мы уменьшали взвешенные (с коэффициентами  $|\tau_j|$ ) ширины каждой строки интервальной матрицы  $\mathbf{A}$  на одну и ту же величину  $K$ . Аналогично случаю коррекции правой части, иногда может возникнуть необходимость уменьшать эти ширины в различной степени. Решение этой усложненной задачи стандартно: мы вводим положительный вектор  $v = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ , такой что мера уменьшения (6.33) взвешенной ширины  $i$ -ой строки должна быть пропорциональна  $v_i$ , и затем оперируем с модифицированным распознающим функционалом  $\text{Tol}_v(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$ , который определен выражением (6.31).

## 6.7 Формулы для размеров бруса решения

Если установлена разрешимость интервальной линейной задачи о допусках и найдена точка в допусковом множестве решений  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , мы можем обратиться к построению бруса внутренней оценки множества решений, используя найденную точку из  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  как центр этого бруса. Этот способ построения внутренней оценки множества решений называется «центровым подходом», и он развивался Н.А. Хлебалиным [19], А. Ноймайером [38], В.В. Шайдуровым [6], В.В. Шайдуровым и С.П. Шарым [22], С.П. Шарым [47, 48] и другими авторами. Основой выводимой ниже формулы для размеров оценки является взятие минимума, по некоторому брусу, от рациональной функции с модулями, так что дальнейшее решение интервальной линейной задачи о допусках сводится к задаче условной оптимизации. Мы не обсуждаем вопросы, связанные с оптимальным выбором центра интервального решения, так как они тесно связаны с практическими нуждами конкретных заказчиков.

Отметим, что в приложениях постановка линейной задачи о допусках часто является более детализованной, нежели (6.5). Дополнительно к формулировке (6.5) мы примем, следуя В.В. Шайдурову [6, 22], что отношение допусков отдельных компонент задаётся некоторым положительным вектором  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ ,  $w_k > 0$ . Фактически, при этом вводятся весовые коэффициенты для ширин искомого вектора допусков, так что

$$\text{wid } U_k / \text{wid } U_l = w_k / w_l.$$

Посредством масштабирования исходной интервальной системы уравнений подобные случаи легко привести к одному стандартному, когда  $w = (1, 1, \dots, 1)$  и мы должны вписать гиперкуб в допусковое множество решений модифицированной системы уравнений.

Действительно, введём матрицы  $D = \text{diag}\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  и  $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}D$ . Пусть интервальный вектор  $\tilde{U}$ , такой что

$$\text{wid } \tilde{U}_k = \text{wid } \tilde{U}_l, \quad k, l = 1, 2, \dots, n,$$

является решением задачи о допусках для интервальной линейной системы  $\tilde{\mathbf{A}}x = \mathbf{b}$ . Тогда  $U = D\tilde{U}$  — решение исходной задачи, так как для любого  $x \in U$  справедливо

$$\mathbf{A}x = \mathbf{A}(DD^{-1}x) = (\mathbf{A}D)(D^{-1}x) = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{x} \subseteq \mathbf{b}.$$

Кроме того,  $\text{wid } U_k / \text{wid } U_l = w_k / w_l$ , как и требовалось. По этой причине всюду ниже в постановке линейной задачи о допусках мы будем иметь в виду поиск интервального вектора  $U$  с компонентами равной ширины, содержащегося в допусковом множестве решений  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  интервальной линейной системы уравнений  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ .

По-видимому, простейшим способом конструирования интервальных решений линейной задачи о допусках вокруг известного центра является метод, предложенный А. Ноймайером в [38] и приведённый в Табл. 6.2. То, что получаемый в результате его работы брус действительно лежит внутри  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , следует из выкладки

$$\mathbf{A}x \subseteq \mathbf{A}(y + \eta e) \subseteq \mathbf{A}y + \mathbf{A}(\eta e) \subseteq \mathbf{A}y + \mathbf{b} \ominus \mathbf{A}y = \mathbf{b},$$

справедливой для каждого  $x \in y + \eta e$ .

Мы развиваем далее более тонкую методику, и её основой является следующий результат:

Таблица 6.2. Метод А. Ноймайера для вычисления размера бруса решения линейной задачи о допусках

Для данного  $y \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  вычисляем наибольшее неотрицательное  $\eta$ , такое что

$$\eta \cdot \mathbf{A}e \subseteq \mathbf{b} \ominus \mathbf{A}y.$$

Интервальный вектор  $(y + \eta e)$ ,  $e = ([-1, 1], \dots, [-1, 1])^\top$ , есть внутренняя оценка допускового множества решений  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ .

**Теорема 6.7.1** Пусть точка  $y \in \mathbb{R}^n$  принадлежит допусковому множеству решений интервальной линейной  $m \times n$ -системы  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ , т. е.  $y \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , и пусть

$$r := \min_{1 \leq i \leq m} \min_{A \in \text{vert } \mathbf{A}} \left\{ \frac{\text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \right|}{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|} \right\}. \quad (6.35)$$

Тогда  $r \geq 0$  и интервальный вектор  $\mathbf{U} = (y + r e)$ ,  $e = ([-1, 1], \dots, [-1, 1])^\top$ , с центром в  $y$  целиком лежит в допусковом множестве решений  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ .

**Доказательство.** Так как

$$\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \geq 0$$

для любых точечных матриц  $A = (a_{ij}) \in \mathbf{A}$ , то неотрицательность  $r$  в (6.35) равносильна неотрицательности выражения

$$\min_{1 \leq i \leq m} \min_{A \in \mathbf{A}} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \right| \right\}, \quad (6.36)$$

которое определяет значение распознающего функционала Tol в точке  $y$ . Таким образом, (6.36), а вместе с ним и (6.35), действительно неотрицательны при  $y \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ .

Предположим сначала, что в рассматриваемой интервальной линейной задаче о допусках матрица  $\mathbf{A}$  является точечной, т. е.  $\mathbf{A} = A$ , и потому  $\text{vert } \mathbf{A} = A$ . Представим каждый  $x \in \mathbf{U}$  в виде  $x = y + z$ , где

$$\max_{1 \leq j \leq n} |z_j| \leq r_A$$

и

$$r_A = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \right|}{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|} \right\}. \quad (6.37)$$

Для  $i = 1, 2, \dots, m$  справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} |(Az)_i| &= \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |z_j| \leq r_A \cdot \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \\ &\leq \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \right| = \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - (Ay)_i \right|. \end{aligned}$$

Далее, поскольку  $Ax = Ay + Az$ , то

$$(Ay)_i - |(Az)_i| \leq (Ax)_i \leq (Ay)_i + |(Az)_i|,$$

и с учётом оценки на  $|(Az)_i|$  имеем

$$(Ay)_i - \text{rad } \mathbf{b}_i + \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - (Ay)_i \right| \leq (Ax)_i \leq (Ay)_i + \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - (Ay)_i \right|,$$

что равносильно

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{b}}_i - (\text{mid } \mathbf{b}_i - (Ay)_i) + \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - (Ay)_i \right| \\ \leq (Ax)_i \leq \end{aligned} \tag{6.38}$$

$$\bar{\mathbf{b}}_i - (\text{mid } \mathbf{b}_i - (Ay)_i) - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - (Ay)_i \right|.$$

В силу того, что

$$-s + |s| \geq 0 \quad \text{и} \quad -s - |s| \leq 0$$

для всякого вещественного  $s$ , неравенство (6.38) влечет

$$\underline{\mathbf{b}}_i \leq (Ax)_i \leq \bar{\mathbf{b}}_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

то есть  $Ax \in \mathbf{b}$ , как и ожидалось.

Пусть теперь матрица  $\mathbf{A}$  задачи имеет ненулевую ширину и  $y \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ . Рассмотрим совокупность всех интервальных линейных задач о допусках для систем уравнений  $Ax = \mathbf{b}$  с точечными матрицами  $A = (a_{ij}) \in \text{vert } \mathbf{A}$ . Согласно представлению (6.10)

$$\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \bigcap_{A \in \text{vert } \mathbf{A}} \Xi_{tol}(A, \mathbf{b}),$$

и если для каждого  $A \in \text{vert } \mathbf{A}$  интервальный вектор решения соответствующей задачи о допусках есть  $U_A$ ,  $U_A \subseteq \Xi_{tol}(A, \mathbf{b})$ , то интервальный вектор  $U$ , такой что

$$U = \bigcap_{A \in \text{vert } \mathbf{A}} U_A$$

также включён в  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ .

В частности, если все  $U_A$  являются брусами с одинаковыми компонентами (кубиками) и с общим центром, то их пересечение — кубик с тем же центром и радиусом, равным минимуму радиусов, которые, в свою очередь, определяются формулой (6.37). Иными словами, имеем

$$U = y + re,$$



где

$$r = \min_{A \in \text{vert } \mathbf{A}} r_A = \min_{A \in \text{vert } \mathbf{A}} \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \right|}{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|} \right\}.$$

Для завершения доказательства теоремы остаётся заметить, что перестановка минимумов по  $i$  и по  $A$  не оказывает влияния на результат вычисления выписанного выражения. ■

Несмотря на внешнюю простоту доказательства, утверждение Теоремы 6.7.1 является наиболее тонким из результатов подобного сорта. Ранее В.В. Шайдуров установил в [6, 22], что если  $y \in \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , то для

$$r = \min_{1 \leq i \leq m} \min_{A \in \mathbf{A}} \left\{ \frac{\text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \right|}{\sum_{i=1}^n |a_{ij}|} \right\} \quad (6.39)$$

интервальный вектор  $(y + re)$  включён в  $\Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ . Как видим, эта формула практически совпадает с (6.35) за исключением того, что в (6.39) внутренний минимум берётся по *всем* матрицам  $A \in \mathbf{A}$ , а не по *конечному* множеству крайних матриц, как в (6.35). Это, тем не менее, никоим образом не влияет на окончательный результат, который совершенно идентичен для обеих формул. Действительно, можно показать, что функция в фигурных скобках (6.39) является квазивогнутой (см. §11.7в). Минимум квазивогнутой функции достигается, как известно, в крайних точках выпуклой области определения. Таким образом, для всякого  $i = 1, 2, \dots, m$  выражения в фигурных скобках (6.39) принимают свои минимальные значения на  $A \in \mathbf{A}$  в вершинах интервальных векторов  $(\mathbf{a}_{i1}, \mathbf{a}_{i2}, \dots, \mathbf{a}_{in})$ , откуда и следует формула (6.35). Но в Теореме 6.7.1 мы достигли тех же целей более элементарными средствами.

По смыслу интервальной линейной задачи о допусках нам нужны либо точные значения величин (6.35) и (6.39), либо оценки для них снизу. Простейший способ получения этих оценок состоит в том, чтобы взять левый конец естественного интервального расширения по  $\mathbf{A}$  для выражений в фигурных скобках (6.39). Иными словами, мы заменяем переменные  $a_{ij}$  интервалами их изменения  $\mathbf{a}_{ij}$ , выполняем арифметические операции между ними по правилам классической интервальной арифметики, затем берём нижний конец результирующего интервала. Алгоритм, представленный в Табл. 6.3 и впервые предложенный В.В. Шайдуровым (см. [6, 22]), именно так и делает.

Поскольку и числитель и знаменатель минимизируемого выражения содержат лишь по одному вхождению каждой из переменных  $a_{ij}$  в первой степени, то метод В.В. Шайдурова, в действительности, эквивалентен оцениванию минимума дроби как частного от минимума числителя на максимум знаменателя. Из свойств естественного интервального расширения (см. Главу 3) следует, что погрешность такого оценивания имеет первый порядок в зависимости от ширины матрицы  $\mathbf{A}$ .

Таблица 6.3. Метод В.В. Шайдурова для вычисления размера бруса решения линейной задачи о допусках

Для данного  $y \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  вычисляем значения

$$r_i = \frac{\left| \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} y_j \right| \right|}{\sum_{j=1}^n |\mathbf{a}_{ij}|},$$

$i = 1, 2, \dots, m$ , и затем полагаем

$$\varrho := \min_{1 \leq i \leq m} r_i.$$

Интервальный вектор  $(y + \varrho \mathbf{e})$ ,  $\mathbf{e} = ([-1, 1], \dots, [-1, 1])^\top$ , есть внутренняя оценка допускового множества решений  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , т.е.  $y + \varrho \mathbf{e} \subseteq \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ .

**Предложение 6.7.1** Для любой точки-центра  $y \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  результаты, получаемые алгоритмом Ноймайера, совпадают с результатами алгоритма Шайдурова.

**Доказательство.** Действительно, условие  $\eta \cdot \mathbf{Ae} \subseteq \mathbf{b} \ominus \mathbf{A}y$  означает

$$\eta \cdot (\underline{\mathbf{Ae}})_i \geq (\underline{\mathbf{b} \ominus \mathbf{A}y})_i \quad \text{и} \quad \eta \cdot (\overline{\mathbf{Ae}})_i \leq (\overline{\mathbf{b} \ominus \mathbf{A}y})_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

где  $\mathbf{Ae}$  — уравновешенный интервальный вектор, в котором

$$-(\underline{\mathbf{Ae}})_i = (\overline{\mathbf{Ae}})_i = |(\mathbf{Ae})_i| = \sum_{j=1}^n |\mathbf{a}_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Далее, для  $y \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$

$$(\underline{\mathbf{b} \ominus \mathbf{A}y})_i \leq 0 \leq (\overline{\mathbf{b} \ominus \mathbf{A}y})_i$$

и, таким образом, для всякого  $i$  верна следующая цепочка соотношений:

$$\begin{aligned}
 \eta &\leq \min \left\{ \frac{(\underline{\mathbf{b}} \ominus \underline{\mathbf{A}}\mathbf{y})_i}{(\underline{\mathbf{A}}\mathbf{e})_i}, \frac{(\overline{\mathbf{b}} \ominus \overline{\mathbf{A}}\mathbf{y})_i}{(\overline{\mathbf{A}}\mathbf{e})_i} \right\} \\
 &= \frac{\min \left\{ -(\text{mid } \mathbf{b}_i - \text{rad } \mathbf{b}_i) + (\underline{\mathbf{A}}\mathbf{y})_i, (\text{mid } \mathbf{b}_i + \text{rad } \mathbf{b}_i) - (\overline{\mathbf{A}}\mathbf{y})_i \right\}}{|(\mathbf{A}\mathbf{e})_i|} \\
 &= \frac{\min \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - (\text{mid } \mathbf{b}_i - (\underline{\mathbf{A}}\mathbf{y})_i), \text{rad } \mathbf{b}_i - ((\overline{\mathbf{A}}\mathbf{y})_i - \text{mid } \mathbf{b}_i) \right\}}{|(\mathbf{A}\mathbf{e})_i|} \\
 &= \frac{\text{rad } \mathbf{b}_i - \max \left\{ \text{mid } \mathbf{b}_i - (\underline{\mathbf{A}}\mathbf{y})_i, (\overline{\mathbf{A}}\mathbf{y})_i - \text{mid } \mathbf{b}_i \right\}}{|(\mathbf{A}\mathbf{e})_i|} \\
 &= \frac{\text{rad } \mathbf{b}_i - |\text{mid } \mathbf{b}_i - (\mathbf{A}\mathbf{y})_i|}{|(\mathbf{A}\mathbf{e})_i|}.
 \end{aligned}$$

Для  $i = 1, 2, \dots, m$  последнее выражение совпадает с нижней границей соответствующего интервала  $r_i$ , получаемого в алгоритме Табл. 6.3, так что взятие минимума по всем  $i$  приводит к равенству  $\eta = \rho$ . ■

Как метод Шайдурова, так и метод Ноймайера просты и легко реализуемы: если уже найдена точка  $y \in \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , то построение интервального решения вокруг неё требует всего  $O(mn)$  арифметических операций. Но для широких интервальных матриц  $\mathbf{A}$  получаем значительное округление окончательного результата.

**Пример 6.7.1** Построим брус внутренней оценки допускового множества решений системы (6.4). В §6.5 мы нашли точку  $(0, 0)^\top$  из внутренней её допускового множества решений, и эту точку можно взять в качестве центра искомого бруса. В соответствии с методом Шайдурова

$$r_1 = r_2 = \frac{1}{\left| \left[ -\frac{2}{3}, \frac{1}{2} \right] \right| + \left| [1, 2] \right|} = \frac{1}{\frac{2}{3} + 2} = \frac{3}{8} = 0.375,$$

так что получаем кубик  $([-0.375, 0.375], [-0.375, 0.375])^\top$ . Он даже максимален по включению, так как касается границ допускового множества решений (см. Рис. 6.2).

Причина столь хорошего качества оценивания — совпадение центра бруса с началом координат, т.е. точкой  $(0, 0)^\top$ , из-за чего связанность переменных в числителе и знаменателе дроби в фигурных скобках из (6.35) исчезает, а естественное интервальное расширение приводит к точному оцениванию области значений.

Если сдвинуть центр бруса внутренней оценки из начала координат, скажем, в точку  $(0.1, 0.1)^\top$ , то метод Шайдурова выдаст радиусом всего 0.28125. Этот кубик уже не касается границы допускового множества решений. ■

В выражении (6.35) взятие минимума по  $i = 1, 2, \dots, m$  не представляет трудностей, так что нашей основной задачей является, по возможности, наиболее точное оценивание снизу минимума по  $A \in \mathbf{A}$  от выражения в фигурных скобках в (6.35)

и (6.39). По существу, остаток этой главы будет посвящён решению именно этой задачи.

Обозначим для удобства  $\mathbf{X} := (\mathbf{a}_{i1}, \mathbf{a}_{i2}, \dots, \mathbf{a}_{in})^\top$ , так что  $\mathbf{X}_j = \mathbf{a}_{ij}$  для каждого фиксированного индекса  $i$ , и пусть

$$\Phi(x) = \frac{R - \left| M - \sum_{j=1}^n x_j y_j \right|}{\sum_{j=1}^n |x_j|}. \quad (6.40)$$

Таким образом, построение бруса внутренней оценки сводится к задаче

Для функции  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , заданной выражением (6.40),  
вычислить  $\min_{x \in \text{vert } \mathbf{X}} \Phi(x)$  или же его оценку снизу

(6.41)

Отметим специфику этой задачи: минимум должен быть найден точно или же получена оценка для него снизу. Традиционные (точечные) методы оптимизации такую задачу не решают, так как обычно приближаются к минимуму функции сверху.

## 6.8 Переборный алгоритм построения бруса решения

Количество элементов множества  $\text{vert } \mathbf{X}$  — вершин  $n$ -мерного бруса  $\mathbf{X}$  — равно  $2^n$ , но для небольших размерностей  $n$  решение задачи (6.41) путём полного перебора всех значений целевой функции  $\Phi$  по  $\text{vert } \mathbf{X}$  вполне возможно.

При алгоритмизации перебора вершин бруса  $\mathbf{X} \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n$  удобно занумеровать их с помощью  $n$ -значных двоичных чисел от  $00 \dots 0$  до  $11 \dots 1$ . Сделать это можно различными способами, но наиболее простой и естественной является нумерация, при которой  $j$ -ый двоичный знак в номере вершины полагается равным 0, если  $j$ -ая координата этой вершины совпадает с левым концом интервала  $\mathbf{X}_j$ , и 1, если она совпадает с его правым концом. При такой нумерации вершина  $(\underline{\mathbf{X}}_1, \underline{\mathbf{X}}_2, \dots, \underline{\mathbf{X}}_n)$ , к примеру, имеет номер  $00 \dots 0$ , а вершина  $(\overline{\mathbf{X}}_1, \overline{\mathbf{X}}_2, \dots, \overline{\mathbf{X}}_n)$  имеет номер  $11 \dots 1$ .

Пошаговое исследование вершин бруса  $\mathbf{X}$  может быть организовано как последовательный обход всех вершин, начиная, к примеру, с вершины  $00 \dots 0$  и далее, переходя каждый раз к вершине со следующим двоичным номером. Этот процесс может быть описан псевдокодом Табл. 6.4.

Трудоёмкость выполнения этого алгоритма, пропорциональную  $2^n$ , принципиально улучшить нельзя, но можно существенно уменьшить множитель при экспоненциальной части. Действительно, на каждом шаге процесса перебора вершин бруса  $\mathbf{X}$  мы вычисляем суммы

$$\Upsilon(x) = M - \sum_{j=1}^n x_j y_j \quad \text{и} \quad \Theta(x) = \sum_{j=1}^n |x_j|$$

и затем значение целевой функции

$$\Phi(x) = \frac{R - |\Upsilon(x)|}{\Theta(x)},$$

Таблица 6.4. Простейший переборный алгоритм вычисления размеров бруса решения линейной задачи о допусках

```

S ← +∞ ;
DO FOR k = 0 TO 2n - 1
    x ← ( координата вершины бруса X,
          двоичный номер которой равен k );
    s ← Φ(x);
    IF ( s < S )
        S ← s
    END IF
END DO

```

где  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \text{vert } \mathbf{X}$  — координаты исследуемой вершины. Если же обход вершин бруса будет выполняться некоторым специальным образом, так, что на каждом шаге мы станем переходить к соседней (смежной) вершине, координаты которой отличаются лишь в одной компоненте, то в суммах  $\Upsilon$  и  $\Theta$  изменится лишь по одному слагаемому. Для вычисления их новых значений совсем необязательно заново суммировать все  $n$  членов. Гораздо более разумным будет перевычислить  $\Upsilon$  и  $\Theta$  посредством следующих рекуррентных формул: если новая исследуемая вершина отличается от предшествующей лишь в своей  $j$ -ой координате — она равна  $x_j''$  вместо  $x_j'$  — то

$$\text{новое значение } \Upsilon = (\text{старое значение } \Upsilon) + (x_j'' - x_j') \cdot y_j, \quad (6.42)$$

$$\text{новое значение } \Theta = (\text{старое значение } \Theta) + |x_j''| - |x_j'|. \quad (6.43)$$

Алгоритм Табл. 6.4 не обладает желаемым свойством «перехода к соседней вершине». Например, последовательные двоичные числа 011 и 100 различаются в трёх разрядах, а не в одном, как это должно было бы быть для соседних вершин. Следовательно, для реализации сформулированной выше идеи, нам необходим специальный алгоритм, являющийся, по существу, перенумерацией вершин бруса. Этот алгоритм является разновидностью так называемого бинарного «кода Грея» [34] и весьма часто используется в различных ситуациях, требующих порождения бинарных последовательностей (см. по этому поводу также [56]).

**Предложение 6.8.1** *Алгоритм Табл. 6.5 проходит ровно по одному разу через каждую вершину бруса  $\mathbf{X}$ , а любые две исследуемые алгоритмом вершины с последовательными номерами  $\mu_k$  и  $\mu_{k+1}$  являются смежными.*

**Доказательство.** Оказывается, что свойство исследуемого алгоритма выполнять полный перебор вершин сохраняется также справедливым и в том случае, если в

Таблица 6.5. Модифицированный переборный алгоритм вычисления размеров бруса решения линейной задачи о допусках

```

 $S \leftarrow +\infty$ ;
 $\mu \leftarrow$  двоичное число  $00\dots 0$ ;
DO FOR  $k = 0$  TO  $2^n - 1$ 
   $x \leftarrow$  ( координата вершины бруса  $X$ ,
              двоичный номер которой равен  $\mu$  );
   $s \leftarrow \Phi(x)$ ;
  IF (  $s < S$  )
     $S \leftarrow s$ 
  END IF
   $j \leftarrow$  ( номер наибольшего разряда, в котором
                отличаются двоичные числа  $k$  и  $k + 1$  );
   $\mu \leftarrow$  ( двоичное число, которое получается из  $\mu$ 
                 заменой  $j$ -го разряда на дополнительный,
                 т. е. 0 заменяется на 1, а 1 на 0 );
END DO

```

качестве начальной вершины берётся *любая* другая вершина, а не только  $00\dots 00$ . Мы докажем этот более общий факт индукцией по размерности  $n$  рассматриваемого бруса.

Действительно, если  $n = 1$ , то утверждение очевидно для обеих двоичных последовательностей  $\{0, 1\}$  и  $\{1, 0\}$ , которые могут порождаться нашим алгоритмом. Предположив, что оно уже доказано для размерности  $(n - 1)$ , рассмотрим перенумерацию вершин, порождаемую алгоритмом Табл. 6.5 для размерности  $n$ :

$$\mu_{00\dots 00}, \mu_{00\dots 01}, \dots, \mu_{11\dots 11}. \quad (6.44)$$

Важно понять, что в этой последовательности  $n$ -ый знак изменяется лишь однажды, а именно, при смене номера шага с  $01\dots 11$  на  $10\dots 00$ . Таким образом, ни одно число из первой половины последовательности (6.44) не может быть равным числу из второй половины этой последовательности в силу различности их  $n$ -ых знаков. Отбрасывая этот  $n$ -ый знак у чисел из (6.44), мы получим две последовательности, которые перенумеровывают вершины  $(n - 1)$ -мерного бруса:

$$\mu'_{0\dots 00}, \mu'_{0\dots 01}, \dots, \mu'_{1\dots 11} \quad \text{и} \quad \mu''_{0\dots 00}, \mu''_{0\dots 01}, \dots, \mu''_{1\dots 11}.$$

Обе они порождаются исследуемым алгоритмом, но из разных начальных чисел  $\mu'_{00\dots 0}$  и  $\mu''_{00\dots 0}$ , в то время как  $\mu'_{00\dots 0} = \mu'_{11\dots 1}$ . По индукционному предположению

каждая такая последовательность содержит только различные  $(n - 1)$ -значные двоичные числа от  $00 \dots 0$  до  $11 \dots 1$ . Следовательно, все числа из последовательности (6.44) также отличаются друг от друга. Всего вместе их  $2^n$ , и потому каждое из них встречается лишь один раз в (6.44).

Последовательность (6.44) является, таким образом, некоторой перенумерацией вершин  $n$ -мерного бруса  $\mathbf{X}$ . Кроме того, из описания алгоритма в Табл. 6.5 непосредственно видно, что вершины с номерами  $\nu$  и  $\nu + 1$  являются смежными. Предложение тем самым полностью доказано. ■

Выигрыш алгоритма Табл. 6.5 в сравнении с алгоритмом Табл. 6.4 по трудоёмкости является тем большим, чем больше размерность исходной задачи, но экспоненциальный характер роста трудоёмкости в зависимости от размерности всё-таки не преодолевается. Таким образом, практическая значимость описанных в этом параграфе алгоритмов полного перебора ограничена задачами малой размерности.

Ещё одно необходимое замечание состоит в том, что в процессе работы алгоритма Табл. 6.5 могут накапливаться значительные ошибки от рекуррентного перевычисления выражений  $\Upsilon$  и  $\Theta$  посредством (6.42)–(6.43), так как алгоритм не является самоисправляющимся. Для того, чтобы застраховаться от возможного раздувания бруса внутренней оценки за пределы допускового множества решений, целесообразно вести все вычисления в интервальной машинной арифметике и результатом взять нижний конец получившегося интервала (если он получился положительным).

## 6.9 Алгоритмы типа «ветвей и границ»

Итак, желательно иметь в своем распоряжении методы вычисления величины (6.35)–(6.39) с точностью, превосходящей точность алгоритмов Табл. 6.2–6.3, но сложностью выполнения, меньшей чем у переборных алгоритмов Табл. 6.4–6.5, основанных на Теореме 6.7.1. Именно таким является подход, развиваемый ниже в этом параграфе. Он имеет в своей основе известный «метод ветвей и границ» и занимает промежуточное положение между простейшими алгоритмами Табл. 6.2–6.3 и переборными методами предыдущего параграфа. Время его исполнения в наихудшем случае растёт как экспонента от размерности задачи, но из-за гибкой вычислительной схемы он может быть с успехом применён к задачам любого размера. При этом точность вычисления величины (6.35)–(6.39) будет лимитироваться лишь наличием вычислительными ресурсами — производительностью ЭВМ и, возможно, объёмом оперативной памяти.

Вспомним основную теорему интервальной арифметики. Если  $F(x) = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — рациональная функция, в выражении для которой каждая переменная имеет лишь одно вхождение в первой степени, то её естественное интервальное расширение (когда оно существует) совпадает с точной областью её значений. Таким образом, для  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n)$  левый конец  $\underline{F(\mathbf{X})}$  естественного интервального расширения  $F(\mathbf{X})$  является глобальным минимумом  $F$  на  $\mathbf{X}$ , а его правый конец  $\overline{F(\mathbf{X})}$  — это глобальный максимум  $F$  на  $\mathbf{X}$ . Но мы можем найти не только сами эти значения  $\min\{F(x) \mid x \in \mathbf{X}\}$  и  $\max\{F(x) \mid x \in \mathbf{X}\}$ , а ещё и аргументы  $F$ ,

доставляющие их, т. е. множества

$$\text{Arg min}\{F(x) \mid x \in \mathbf{X}\} \quad \text{и} \quad \text{Arg max}\{F(x) \mid x \in \mathbf{X}\}.$$

Эта возможность не указана в основной теореме интервальной арифметики, но она есть и является очень полезной. Ниже мы будем обозначать аргументы минимума и максимума как

$$\text{Arg } \underline{F(\mathbf{X})} \quad \text{и} \quad \text{Arg } \overline{F(\mathbf{X})}$$

для краткости.

Действительно, если каждая переменная имеет лишь одно вхождение в первой степени в рациональном выражении  $F$ , то зависимость  $F$ , к примеру, от  $x_i$  выглядит следующим образом:

$$\text{либо } F(x_i) = \kappa x_i + \mu, \quad (6.45)$$

$$\text{либо } F(x_i) = \frac{1}{\kappa x_i + \mu}, \quad (6.46)$$

где  $\kappa, \mu$  — константы, не зависящие от  $x_i$ . В любом случае  $F(x_i)$  является монотонной функцией от  $x_i$  (что касается второй возможности, это верно для  $0 \notin \kappa \mathbf{X}_i + \mu$ ). Таким образом, для фиксированных  $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ , значения  $\min F(x_i)$  и  $\max F(x_i)$  достигаются в концах интервала  $\mathbf{X}_i$  или, если  $\kappa = 0$ , в любой точке этого интервала  $\mathbf{X}_i$ . Поскольку подобные рассуждения справедливы для любой переменной  $x_i$  вне зависимости от конкретных значений других переменных, то множества  $\text{Arg } \underline{F(\mathbf{X})}$  и  $\text{Arg } \overline{F(\mathbf{X})}$  являются либо вершинами бруса  $\mathbf{X}$ , либо целыми его гранями. Как они могут быть найдены?

При выполнении с интервалами любой из четырех арифметических операций — сложения, умножения, вычитания или деления — мы можем определить одновременно с результатом этой операции также и то, какие именно концы исходных интервалов дают, складываясь (соответственно, вычитаясь, умножаясь или делясь), тот или иной конец результирующего интервала. При вычитании, например, максимум разности, т. е. правый конец результирующего интервала достигается, когда уменьшаемое равно правому концу, а вычитаемое — левому концу соответствующих интервалов.

Чтобы вычислить произведение  $\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2$ , нужно

- 1) выполнить четыре умножения — найти  $\overline{\mathbf{X}_1} \overline{\mathbf{X}_2}$ ,  $\underline{\mathbf{X}_1} \overline{\mathbf{X}_2}$ ,  $\overline{\mathbf{X}_1} \underline{\mathbf{X}_2}$ ,  $\underline{\mathbf{X}_1} \underline{\mathbf{X}_2}$ ,
- 2) выбрать минимум и максимум из полученных чисел.

Пусть, к примеру, этими экстремумами являются  $\underline{\mathbf{X}_1} \overline{\mathbf{X}_2}$  и  $\overline{\mathbf{X}_1} \overline{\mathbf{X}_2}$ . Мы, тем самым, получаем, что

$$\text{Arg min}\{x_1 \cdot x_2 \mid x_1 \in \mathbf{X}_1, x_2 \in \mathbf{X}_2\} = (\underline{\mathbf{X}_1}, \overline{\mathbf{X}_2}),$$

$$\text{Arg max}\{x_1 \cdot x_2 \mid x_1 \in \mathbf{X}_1, x_2 \in \mathbf{X}_2\} = (\overline{\mathbf{X}_1}, \overline{\mathbf{X}_2}).$$

Если бы минимальными элементами множества

$$\{\overline{\mathbf{X}_1} \overline{\mathbf{X}_2}, \underline{\mathbf{X}_1} \overline{\mathbf{X}_2}, \overline{\mathbf{X}_1} \underline{\mathbf{X}_2}, \underline{\mathbf{X}_1} \underline{\mathbf{X}_2}\}$$



были одновременно два произведения, скажем,  $\underline{X}_1 \underline{X}_2$  и  $\underline{X}_1 \overline{X}_2$ , то мы заключили бы следующее:

$$\text{Arg min} \{x_1 \cdot x_2 \mid x_1 \in \underline{X}_1, x_2 \in \underline{X}\} = (\underline{X}_1, \underline{X}_2),$$

т. е. в этом случае множество  $\text{Arg min} (x_1 \cdot x_2)$  состоит из целой грани бруса входных данных  $(\underline{X}_1, \underline{X}_2)$ .

Далее, значение любого конечного рационального выражения  $F(x)$  от интервальных аргументов может быть вычислено за конечное число интервальных сложений, вычитаний, умножений и делений. Если каждая переменная встречается в этом выражении  $F(x)$  единожды в первой степени, то, рекуррентно отслеживая эволюцию концов интервалов, мы сможем найти тот набор концов исходных интервалов  $\underline{X}_1, \underline{X}_2, \dots, \underline{X}_n$ , на котором достигаются  $\underline{F}(\underline{X})$  и  $\overline{F}(\underline{X})$ .

Нетрудно понять, что всё вышесказанное остается верным, если выражение  $F(x)$ , имеющее по одному вхождению каждой переменной, сконструировано не только из четырех арифметических операций, но содержит также вхождения  $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots$  каких-то других функций. Нам лишь необходимо при взятии естественного интервального расширения от  $F$  заменить  $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots$  на вхождения соответствующих оптимальных интервальных расширений. Например, если, в выражениях

$$\Psi(x) = R - \left| M - \sum_{j=1}^n x_j y_j \right| \quad \text{и} \quad \Theta(x) = \sum_{j=1}^n |x_j|,$$

мы заменим все арифметические операции их интервальными аналогами и вместо функции абсолютного значения возьмем её оптимальное интервальное расширение

$$\text{abs } \underline{X} = [\langle \underline{X} \rangle, |\underline{X}|],$$

то подстановка вместо переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  интервалов их возможных изменений  $\underline{X}_1, \underline{X}_2, \dots, \underline{X}_n$  даст точные области значений для  $\Psi(x)$  и  $\Theta(x)$  на брус  $\underline{X} = (\underline{X}_1, \underline{X}_2, \dots, \underline{X}_n)$ .

Ниже нас будут интересовать, главным образом, множества

$$\text{Arg } \underline{\Psi}(\underline{X}) \quad \text{и} \quad \text{Arg } \overline{\Theta}(\underline{X})$$

для некоторого бруса  $\underline{X} \in \mathbb{IR}^n$ . Задача их нахождения является несколько не более трудной, чем для чисто рациональных выражений, поскольку мы знаем как вычислять  $\text{Arg min}$  и  $\text{Arg max}$  для функции абсолютного значения, входящей в  $\Psi(x)$  и  $\Theta(x)$  помимо основных арифметических операций. Она может быть решена той же самой методикой «отслеживания границ», которую мы применили для определения аргументов экстремумов функций (6.45)–(6.46).

Конечно, искомое множество  $\text{Arg } \overline{\Theta}(\underline{X})$  может иметь нетривиальную структуру. В частности, оно может быть несвязным если  $\underline{X}_j = -\overline{X}_j \neq 0$  для некоторого  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Множество  $\text{Arg } \underline{\Psi}(\underline{X})$  также несвязно, если

$$M - \sum_{j=1}^n [\underline{X}_j, \overline{X}_j] y_j = \sum_{j=1}^n [\underline{X}_j, \overline{X}_j] y_j - M.$$

В любом случае отдельные компоненты связности множеств  $\text{Arg } \overline{\Theta(\mathbf{X})}$  и  $\text{Arg } \underline{\Psi(\mathbf{X})}$  представимы в виде прямых произведений  $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 \times \dots \times \mathcal{G}_n$ , где  $\mathcal{G}_j$  суть либо вершины бруса  $\mathbf{X}$ , либо целые его грани.

Договоримся ниже понимать под  $\text{Arg } \underline{\Psi(\mathbf{X})}$  или  $\text{Arg } \overline{\Theta(\mathbf{X})}$  некоторую компоненту связности множества точек, на которых достигаются  $\underline{\Psi(\mathbf{X})}$  или  $\overline{\Theta(\mathbf{X})}$  соответственно, причём неважно, какую именно. Дело в том, что для множеств  $\mathcal{G}, \mathcal{H} \subseteq \mathbb{R}^n$  со структурой прямого произведения, т. е. таких что

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 \times \dots \times \mathcal{G}_n, \mathcal{G}_j \subseteq \mathbb{R} \quad \text{и} \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \times \dots \times \mathcal{H}_n, \mathcal{H}_j \subseteq \mathbb{R},$$

условие  $(\mathcal{G} \cap \mathcal{H} = \emptyset)$  эквивалентно  $(\mathcal{G}_j \cap \mathcal{H}_j = \emptyset)$  для по крайней мере одного из  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Далее мы будем существенно использовать это свойство.

Псевдокод соответствующего алгоритма для вычисления  $\overline{\Theta(\mathbf{X})}$  и  $\text{Arg } \overline{\Theta(\mathbf{X})}$  может выглядеть, к примеру, следующим образом:

```

S ← 0 ;
DO FOR j = 1 TO n
  IF ( |X_j| ≤ |X_j| ) THEN
    S ← S + X_j ;
    ( Arg Θ(X) )_j ← X_j
  ELSE
    S ← S + X_j ;
    ( Arg Θ(X) )_j ← X_j
  END IF
END DO
Θ(X) ← S ;

```

После этих необходимых приготовлений мы переходим собственно к решению задачи (6.41), т. е. к вычислению

$$\begin{aligned} \min\{\Phi(x) \mid x \in \text{vert } \mathbf{X}\} &= \min\left\{ \frac{\Psi(x)}{\Theta(x)} \mid x \in \text{vert } \mathbf{X} \right\} \\ &= \min_{\substack{x_j \in \{\underline{X}_j, \overline{X}_j\} \\ j=1,2,\dots,n}} \left\{ \frac{R - \left| M - \sum_{j=1}^n x_j y_j \right|}{\sum_{i=1}^n |x_j|} \right\}, \end{aligned} \quad (6.47)$$

где  $R, M, y_1, y_2, \dots, y_n$  — некоторые известные константы. Как уже было отмечено в §6.7, простейшим способом оценивания величины (6.47) снизу является взятие естественного интервального расширения  $\Phi(\mathbf{X})$  по всему брусу  $\mathbf{X}$  для минимизируемой функции  $\Phi(x)$ . Его левый конец  $\underline{\Phi(\mathbf{X})}$ , совпадающий с

$$\frac{\underline{\Psi(\mathbf{X})}}{\overline{\Theta(\mathbf{X})}} = \frac{\min\{\Psi(x) \mid x \in \mathbf{X}\}}{\max\{\Theta(x) \mid x \in \mathbf{X}\}}$$

даёт требуемую оценку снизу для величины  $\min\{\Phi(x) \mid x \in \text{vert } \mathbf{X}\}$ .

Найдем множества  $\text{Arg } \underline{\Psi(\mathbf{X})}$  и  $\text{Arg } \overline{\Theta(\mathbf{X})}$ . Нам могут встретиться две взаимоисключающие ситуации:

- 1)  $\text{Arg } \underline{\Psi(\mathbf{X})} \cap \text{Arg } \overline{\Theta(\mathbf{X})} \neq \emptyset$   
или 2)  $\text{Arg } \underline{\Psi(\mathbf{X})} \cap \text{Arg } \overline{\Theta(\mathbf{X})} = \emptyset$ .

В первом случае пересечение  $\text{Arg } \underline{\Psi(\mathbf{X})} \cap \text{Arg } \overline{\Theta(\mathbf{X})}$  обязано содержать точку из  $\text{vert } \mathbf{X}$ , которая доставляет глобальный минимум дроби  $\Psi(x)/\Theta(x)$  на  $\mathbf{X}$ , так что задачу минимизации (6.47) можно считать успешно решённой. Если же  $\text{Arg } \underline{\Psi(\mathbf{X})} \cap \text{Arg } \overline{\Theta(\mathbf{X})} = \emptyset$ , то

$$\underline{\Phi(\mathbf{X})} = \frac{\min\{\Psi(x) \mid x \in \mathbf{X}\}}{\max\{\Theta(x) \mid x \in \mathbf{X}\}} < \min\left\{\frac{\Psi(x)}{\Theta(x)} \mid x \in \mathbf{X}\right\},$$

и существует индекс  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , такой что  $k$ -ая компонента множеств  $\text{Arg } \underline{\Psi(\mathbf{X})}$  и  $\text{Arg } \overline{\Theta(\mathbf{X})}$  не имеет общих значений:

$$(\text{Arg } \underline{\Psi(\mathbf{X})})_k \cap (\text{Arg } \overline{\Theta(\mathbf{X})})_k = \emptyset.$$

Компоненты бруса  $\mathbf{X}$ , удовлетворяющие этому условию, будем называть далее *инцидентными*.

Если  $k$  — это индекс инцидентной компоненты (и поэтому, в частности,  $\underline{\mathbf{X}}_k \neq \overline{\mathbf{X}}_k$ ), то положим

$$\mathbf{X}' := (\mathbf{X}_1, \dots, \underline{\mathbf{X}}_k, \dots, \mathbf{X}_n),$$

$$\mathbf{X}'' := (\mathbf{X}_1, \dots, \overline{\mathbf{X}}_k, \dots, \mathbf{X}_n).$$

Будем говорить, что брусы  $\mathbf{X}'$  и  $\mathbf{X}''$  являются *потомками* от  $\mathbf{X}$  и называть саму процедуру их порождения *дроблением* исходного бруса  $\mathbf{X}$ . Монотонность интервальной арифметики по включению влечёт

$$\underline{\Phi(\mathbf{X})} \leq \underline{\Phi(\mathbf{X}')} \quad \text{и} \quad \underline{\Phi(\mathbf{X})} \leq \underline{\Phi(\mathbf{X}'')},$$

и поэтому

$$\underline{\Phi(\mathbf{X})} \leq \min\left\{\underline{\Phi(\mathbf{X}')}, \underline{\Phi(\mathbf{X}'')}\right\}.$$

На практике это неравенство чаще всего будет строгим. Действительно, в случае, когда множества  $\text{Arg } \underline{\Psi}(\mathbf{X})$  и  $\text{Arg } \overline{\Theta}(\mathbf{X})$  являются прямыми произведениями, их попадание в разные брусы-потомки в результате разбиения  $\mathbf{X}$ , такого что

$$\text{Arg } \underline{\Psi}(\mathbf{X}) \subseteq \mathbf{X}' \quad \text{и} \quad \text{Arg } \overline{\Theta}(\mathbf{X}) \subseteq \mathbf{X}'',$$

имеет следствием

$$\underline{\Psi}(\mathbf{X}) = \underline{\Psi}(\mathbf{X}') \quad \text{и} \quad \overline{\Theta}(\mathbf{X}) = \overline{\Theta}(\mathbf{X}''),$$

тогда как

$$\underline{\Psi}(\mathbf{X}'') > \underline{\Psi}(\mathbf{X}) \quad \text{и} \quad \overline{\Theta}(\mathbf{X}') < \overline{\Theta}(\mathbf{X}).$$

Таким образом,

$$\underline{\Psi}(\mathbf{X}) / \overline{\Theta}(\mathbf{X}) < \underline{\Psi}(\mathbf{X}') / \overline{\Theta}(\mathbf{X}') \quad \text{и} \quad \underline{\Psi}(\mathbf{X}) / \overline{\Theta}(\mathbf{X}) < \underline{\Psi}(\mathbf{X}'') / \overline{\Theta}(\mathbf{X}''),$$

т. е. на самом деле

$$\underline{\Phi}(\mathbf{X}) < \min \left\{ \underline{\Phi}(\mathbf{X}'), \underline{\Phi}(\mathbf{X}'') \right\}.$$

Пусть

$$\min \{ \Phi(x) \mid x \in \text{vert } \mathbf{X} \} = \Phi(y)$$

для некоторой вершины  $y \in \text{vert } \mathbf{X}$ . Если  $y'$  и  $y''$  — это точки, полученные из  $\Pi$  заменой её  $k$ -ой компоненты на  $\underline{\mathbf{X}}_k$  и  $\overline{\mathbf{X}}_k$  соответственно, то, вновь воспользовавшись свойством монотонности интервальной арифметики, найдём

$$\underline{\Phi}(\mathbf{X}') \leq \Phi(y') \quad \text{и} \quad \underline{\Phi}(\mathbf{X}'') \leq \Phi(y''),$$

так что

$$\min \left\{ \underline{\Phi}(\mathbf{X}'), \underline{\Phi}(\mathbf{X}'') \right\} \leq \min \{ \Phi(\Pi'), \Phi(\Pi'') \} = \Phi(\Pi).$$

По этой причине

$$\underline{\Phi}(\mathbf{X}) < \min \left\{ \underline{\Phi}(\mathbf{X}'), \underline{\Phi}(\mathbf{X}'') \right\} \leq \min \left\{ \frac{\Psi(x)}{\Theta(x)} \mid x \in \text{vert } \mathbf{X} \right\}.$$

Представленные рассуждения являются, таким образом, практическим рецептом улучшения оценки снизу для (6.47), причём процесс дробления может быть повторен по отношению к брусам-потомкам  $\mathbf{X}'$  и  $\mathbf{X}''$ , что даст ещё более точное приближение  $\min \{ \Phi(x) \mid x \in \mathbf{X} \}$  в виде минимума полученных для этих брусов оценок. Далее потомки от  $\mathbf{X}'$  и  $\mathbf{X}''$  также могут быть разбиты пополам для дальнейшего уточнения оценки (6.47) и т. д. Имеет смысл организовать этот процесс последовательного вычисления всё более точных оценок в соответствии с общей схемой «метода ветвей и границ», уже использованной в Главе 3: дробление бруса  $\mathbf{X}$  на потомки  $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{X}$  есть не что иное, как разбиение задачи на подзадачи, т. е. порождение «ветвей», тогда как вычисление  $\underline{\Phi}(\mathbf{P})$ ,  $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{X}$ , — это просто оценивание «границ» целевой функции по этим «ветвям».

Таблица 6.6. Алгоритм уточнения размеров бруса решения линейной задачи о допусках

```

Q ← X;
вычисляем  $\overline{\Theta(Q)}$  и  $\text{Arg } \overline{\Theta(Q)}$ ,  $\underline{\Psi(Q)}$  и  $\text{Arg } \underline{\Psi(Q)}$ ;
вычисляем  $\Phi(Q) = \underline{\Psi(Q)} / \overline{\Theta(Q)}$ ;
инициализируем рабочий список  $\mathcal{L}$ , т. е. присваиваем
 $\mathcal{L} \leftarrow \{ (\underline{Q}, \underline{\Phi(Q)}, \underline{\Psi(Q)}, \overline{\Theta(Q)}, \text{Arg } \underline{\Psi(Q)}, \text{Arg } \overline{\Theta(Q)}) \}$ ;
DO WHILE (  $\text{Arg } \underline{\Psi(Q)} \cap \text{Arg } \overline{\Theta(Q)} = \emptyset$  )
    выбираем в ведущем бруске инцидентную компоненту  $Q_l$ ;
    разбиваем  $Q$  на потомки  $Q'$  и  $Q''$  так, чтобы  $Q'_l$  и  $Q''_l$ 
        являлись противоположными концами интервала  $Q_l$ 
        и  $\text{Arg } \underline{\Psi(Q)} \subseteq Q'$ ,  $\text{Arg } \overline{\Theta(Q)} \subseteq Q''$ ;
    удаляем из рабочего списка  $\mathcal{L}$  бывшую ведущую запись
         $(\underline{Q}, \underline{\Phi(Q)}, \underline{\Psi(Q)}, \overline{\Theta(Q)}, \text{Arg } \underline{\Psi(Q)}, \text{Arg } \overline{\Theta(Q)})$ ;
    вычисляем  $\overline{\Theta(Q')}$  и  $\text{Arg } \overline{\Theta(Q')}$ ,  $\underline{\Psi(Q'')}$  и  $\text{Arg } \underline{\Psi(Q'')}$ ;
    присваиваем
         $\underline{\Phi(Q')} \leftarrow \underline{\Psi(Q')} / \overline{\Theta(Q')}$  и  $\underline{\Phi(Q'')} \leftarrow \underline{\Psi(Q'')} / \overline{\Theta(Q'')}$ ;
    помещаем записи
         $(\underline{Q'}, \underline{\Phi(Q')}, \underline{\Psi(Q')}, \overline{\Theta(Q')}, \text{Arg } \underline{\Psi(Q')}, \text{Arg } \overline{\Theta(Q')})$  и
         $(\underline{Q''}, \underline{\Phi(Q'')}, \underline{\Psi(Q'')}, \overline{\Theta(Q'')}, \text{Arg } \underline{\Psi(Q'')}, \text{Arg } \overline{\Theta(Q'')})$ 
        в список  $\mathcal{L}$  в подходящем порядке (по возрастанию
        второго поля);
    обозначаем новую ведущую запись списка  $\mathcal{L}$  через
         $(\underline{Q}, \underline{\Phi(Q)}, \underline{\Psi(Q)}, \overline{\Theta(Q)}, \text{Arg } \underline{\Psi(Q)}, \text{Arg } \overline{\Theta(Q)})$ ;
END DO

```

Будем хранить множество всех брусов  $P$ , порождаемых в процессе дробления, вместе с их соответствующими оценками в виде упорядоченного *рабочего списка*  $\mathcal{L}$ , состоящего из шестичленных записей

$$(\underline{P}, \underline{\Phi(P)}, \underline{\Psi(P)}, \overline{\Theta(P)}, \text{Arg } \underline{\Psi(P)}, \text{Arg } \overline{\Theta(P)}),$$

$P \in \mathbb{R}^n$ ,  $P \subseteq X$ . Как обычно, первую запись списка  $\mathcal{L}$ , имеющую наименьшее значение оценки  $\underline{\Phi(P)}$  к началу текущего шага алгоритма, мы будем называть *ведущей записью*. В начале нашего алгоритма последовательного улучшения

$$\mathcal{L} = \left\{ (\underline{X}, \underline{\Phi(X)}, \underline{\Psi(X)}, \overline{\Theta(X)}, \text{Arg } \underline{\Psi(X)}, \text{Arg } \overline{\Theta(X)}) \right\},$$

а затем на каждом шаге алгоритма список модифицируется в соответствии с инструкциями Табл. 6.6.

В результате исполнения алгоритма порождается неубывающая последовательность оценок  $\Phi(\mathbf{Q})$  для ведущих брусов  $\mathbf{Q}$ , все более точно приближающая искомым  $\min \Phi(x)$  снизу. Она конечна: если в исходном брусе  $\mathbf{X}$  ненулевую ширину имеют  $l$  компонент ( $l \leq n$ ), то, как нетрудно видеть, ведущий брус превратится в точку  $y$  после не более чем  $2^l$  шагов алгоритма Табл. 6.6 и  $\Phi(y) = \min\{\Phi(x) \mid x \in \text{vert } \mathbf{X}\}$ .

Идея подобных алгоритмов глобальной оптимизации не нова, аналогичные методы рассматривались в Главе 3, где указана и подробная библиография. Но при построении алгоритма Табл. 6.6 мы постарались максимально учесть особенности решаемой задачи — вид минимизируемой функции, структуру области определения и тот факт, что искомым  $\min \Phi(x)$  достигается в вершинах бруса  $\mathbf{X}$ . В частности, мы дробим ведущие брусы на потомки, которые являются не просто половинками, но двумя противоположными гранями меньшей размерности. Другая оригинальная особенность алгоритма Табл. 6.6 состоит в том, что дробление (бисекция) ведущих брусов выполняется не по всем компонентам, а лишь по инцидентным, т. е. таким, уменьшение которых только и обеспечивает улучшение оценки целевой функции. Иными словами, мы не скатываемся к беспорядочному измельчению ведущих брусов, но дробим так, чтобы обеспечить гарантированное уточнение оценки для (6.47). Наконец, алгоритм Табл. 6.6 более полно учитывает информацию о своих предыдущих шагах ценой некоторого удлинения записей, хранимых в рабочем списке  $\mathcal{L}$ . Благодаря последнему обстоятельству мы, в действительности, вычисляем оценку целевой функции всего один раз для двух брусов-потомков.

Продолжим построение более практичной вычислительной процедуры на основе алгоритма Табл. 6.6. В принципе, мы можем улучшить этот простейший алгоритм, пользуясь стандартным набором модификаций, перечисленных в Главе 3 (в списке на стр. 183). Ниже мы реализуем только первый («тест на монотонность») и последний («отбраковка по значению») из представленных в нём пунктов, тем более, что в нашей ситуации они оказываются взаимно дополняющими друг друга. Кроме того, чтобы сделать улучшение оценки целевой функции более весомым, имеет смысл воспользоваться широко известной эвристической рекомендацией: на каждом шаге алгоритма ведущий брус дробится по самой длинной из инцидентных компонент.

«Отбраковка по значению» в применении к брусам из рабочего списка алгоритма Табл. 6.6 реализуется следующим стандартным образом. На каждом шаге алгоритма наряду с  $\Phi(\mathbf{P})$  мы будем дополнительно

- вычислять величину  $\Phi(\text{mid } \mathbf{P})$  и
- поддерживать параметр  $\phi$ , равный наименьшему из значений  $\Phi(\text{mid } \mathbf{P})$  для всех брусов  $\mathbf{P}$ , порождённых алгоритмом вплоть до текущего шага.

Тогда  $\min\{\Phi(x) \mid x \in \mathbf{X}\} \leq \phi$ , и все записи

$$(\mathbf{P}, \underline{\Phi}(\mathbf{P}), \underline{\Psi}(\mathbf{P}), \overline{\Theta}(\mathbf{P}), \text{Arg } \underline{\Psi}(\mathbf{P}), \text{Arg } \overline{\Theta}(\mathbf{P})),$$

которые удовлетворяют

$$\phi < \underline{\Phi}(\mathbf{P}), \tag{6.48}$$

могут быть удалены из списка  $\mathcal{L}$  без какого-либо влияния на результат работы алгоритма.

Но на пути реализации этой идеи стоят значительные трудности. Дело в том, что в алгоритме Табл. 6.6 диаметры ведущих брусов не обязательно стремятся к нулю, так как брусы дробятся только по инцидентным компонентам. Подобная особенность алгоритма Табл. 6.6, несомненно, является весьма выгодной, так как обеспечивает экономию и целенаправленность вычислительных усилий. Но она же приводит к тому, что разность  $(\Phi(\text{mid } \mathbf{P}) - \underline{\Phi}(\mathbf{P}))$  может оставаться большей некоторого положительного числа даже для ведущих брусов. Численные эксперименты показывают, что тогда, как правило, неравенство (6.48) выполняется крайне редко, и столь же редко мы можем признать бесперспективной ту или иную запись списка  $\mathcal{L}$ . Таким образом, имеется необходимость дополнить алгоритм Табл. 6.6 помимо «теста на промежуточное значение» некоторой процедурой, которая уменьшает размер компонент вне зависимости от того, являются они инцидентными или нет. Эту роль может играть, например, сжатие бруса по компоненте, на которой выявлена монотонность целевой функции.

Целевая функция  $\Phi(x)$  не является гладкой, но она непрерывна и почти всюду дифференцируема. Следовательно, исследование её монотонности по отдельным переменным на брусах  $\mathbf{P} \in \mathbb{IR}^n$  можно проводить посредством изучения знака интервальных расширений частных производных  $\partial\Phi(x)/\partial x_j$  на  $\mathbf{P}$ . Так как  $\Phi(x) = \Psi(x)/\Theta(x)$ , то по правилу дифференцирования частного имеем

$$\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_j} = \frac{\frac{\partial\Psi(x)}{\partial x_j} \Theta(x) - \Psi(x) \frac{\partial\Theta(x)}{\partial x_j}}{(\Theta(x))^2}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (6.49)$$

При этом

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Psi(x)}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( R - \left| M - \sum_{j=1}^n x_j y_j \right| \right) \\ &= -\text{sgn} \left( M - \sum_{j=1}^n x_j y_j \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \left( M - \sum_{j=1}^n x_j y_j \right) \\ &= y_j \cdot \text{sgn} \left( M - \sum_{j=1}^n x_j y_j \right), \\ \frac{\partial\Theta(x)}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sum_{j=1}^n |x_j| \right) = \frac{\partial |x_j|}{\partial x_j} = \text{sgn } x_j, \end{aligned}$$

и поэтому

$$\Psi'(x)\Theta(x) - \Psi(x)\Theta'(x) = \quad (6.50)$$

$$y_j \cdot \text{sgn} \left( M - \sum_{j=1}^n x_j y_j \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^n |x_j| \right) - \left( R - \left| M - \sum_{j=1}^n x_j y_j \right| \right) \cdot \text{sgn } x_j.$$

Таблица 6.7. Модифицированный алгоритм уточнения размеров бруса решения линейной задачи о допусках

$Q \leftarrow X; \quad \phi \leftarrow \Phi(\text{mid } X);$   
 вычисляем  $\overline{\Theta(Q)}, \text{Arg } \overline{\Theta(Q)}, \underline{\Psi(Q)}, \text{Arg } \underline{\Psi(Q)}, \Phi(X) = \Psi(X)/\Theta(X);$   
 присваиваем  $\mathcal{L} \leftarrow \{ (Q, \underline{\Phi(Q)}, \underline{\Psi(Q)}, \overline{\Theta(Q)}, \text{Arg } \underline{\Psi(Q)}, \text{Arg } \overline{\Theta(Q)}) \};$   
 DO WHILE (  $\text{Arg } \underline{\Psi(Q)} \cap \text{Arg } \overline{\Theta(Q)} = \emptyset$  и  $(\phi - \underline{\Phi(Q)}) > \epsilon$  )  
     выбираем в ведущем бруске инцидентную компоненту  $Q_i$   
     наибольшей длины и рассекаем  $Q$  на потомки  $Q'$  и  $Q''$  так,  
     чтобы  $Q'_i$  и  $Q''_i$  являлись противоположными концами  
     интервала  $Q_i$  и  $\text{Arg } \underline{\Psi(Q)} \subseteq Q', \text{Arg } \overline{\Theta(Q)} \subseteq Q''$   
     находим естественные интервальные расширения выражений  
     (6.50) на  $Q'$  для всех  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  таких, что  $\text{wid } Q'_j \neq 0$ ;  
     если результатом является неотрицательный интервал, то  
     заменяем  $Q'_j$  на его левый конец  $\underline{Q}'_j$ , а если неположительный,  
     то на правый конец  $\overline{Q}'_j$ ;  
     выполняем инструкции предыдущего пункта для бруса  $Q''$ ;  
     вычисляем  $\overline{\Theta(Q')}, \text{Arg } \overline{\Theta(Q')}, \underline{\Psi(Q'')}$  и  $\text{Arg } \underline{\Psi(Q'')};$   
     присваиваем  
      $\underline{\Phi(Q')} \leftarrow \underline{\Psi(Q)} / \overline{\Theta(Q')}$  и  $\underline{\Phi(Q'')} \leftarrow \underline{\Psi(Q'')} / \overline{\Theta(Q'')};$   
     если  $\underline{\Phi(Q')} \leq \phi$ , то помещаем запись  $(Q', \underline{\Phi(Q')}, \underline{\Psi(Q)}, \overline{\Theta(Q')},$   
      $\text{Arg } \underline{\Psi(Q)}, \text{Arg } \overline{\Theta(Q')})$  в список  $\mathcal{L}$  в нужном порядке  
     (по возрастанию второго члена);  
     если  $\underline{\Phi(Q'')} \leq \phi$ , то помещаем запись  $(Q'', \underline{\Phi(Q'')}, \underline{\Psi(Q'')}, \overline{\Theta(Q'')},$   
      $\text{Arg } \underline{\Psi(Q'')}, \text{Arg } \overline{\Theta(Q'')})$  в список  $\mathcal{L}$  в нужном порядке;  
     удаляем бывшую ведущую запись  $(Q, \underline{\Phi(Q)}, \underline{\Psi(Q)},$   
      $\overline{\Theta(Q)}, \text{Arg } \underline{\Psi(Q)}, \text{Arg } \overline{\Theta(Q)})$  из списка  $\mathcal{L}$ ;  
     вычисляем  $\Phi(\text{mid } Q'), \Phi(\text{mid } Q'')$  и затем присваиваем  
      $\omega \leftarrow \min\{\Phi(\text{mid } Q'), \Phi(\text{mid } Q'')\};$   
     если  $\phi > \omega$ , то присваиваем  $\phi \leftarrow \omega$  и чистим список  $\mathcal{L}$ , т. е.  
     удаляем из него все такие записи  $(P, \underline{\Phi(P)}, \underline{\Psi(P)}, \overline{\Theta(P)},$   
      $\text{Arg } \underline{\Psi(P)}, \text{Arg } \overline{\Theta(P)})$ , что  $\underline{\Phi(P)} > \phi$ ;  
     обозначаем новую ведущую запись списка через  
      $(Q, \underline{\Phi(Q)}, \underline{\Psi(Q)}, \overline{\Theta(Q)}, \text{Arg } \underline{\Psi(Q)}, \text{Arg } \overline{\Theta(Q)});$   
 END DO



Далее несложно вычислить естественные интервальные расширения этих выражений, используя представление (3.1) для функции  $\text{sgn}$ . Ясно, что знаки полученных интервалов совпадают с интересующими нас знаками естественных интервальных расширений частных производных  $\partial\Phi(x)/\partial x_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , так как знаменатель в выражениях (6.49) неотрицателен.

В целом, для практического вычисления размеров интервального решения линейной задачи о допусках мы рекомендуем алгоритм, представленный в Табл. 6.7. В условии выполнения цикла DO WHILE этого псевдокода величина  $\epsilon$  определяет задаваемое пользователем условие на абсолютную точность результата. Но, как показывает вычислительный опыт, для задач больших размерностей более частой причиной завершения работы является исчерпание ресурсов вычислительной системы (главным образом, времени). В подобных случаях мы, тем не менее, всё равно получаем некоторый ответ для решаемой задачи в виде последней вычисленной ведущей оценки  $\Phi(Q)$ , т. е. алгоритмы Табл. 6.6 и Табл. 6.7 являются *последовательно гарантирующими* (см. Главу 9).

## Комментарий к Главе 6

**К §6.1** История интервальной задачи о допусках и допускового множества решений для интервальных систем уравнений частично уже затрагивалась в Комментарий к Главе 4.

Допусковое множество решений было впервые рассмотрено в статье Е. Нудинга и Й. Вильгельма [41], где дан также пример его практического возникновения. Естественно, что современная терминология в этой работе не использовалась, и авторы называли множество  $\Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  *множеством внутренних решений*. Соответственно, про точки из этого множества говорили как про *внутренние решения* ИСЛАУ (см. также [45]). Саму же задачу внутреннего оценивания допускового множества решений (6.5) иногда называли *внутренней задачей* для интервальных линейных систем [6, 22].

Большое внимание допусковому множеству решений уделил А. Дейф в книге [32] (Глава 2 и особенно раздел 2.6). В ней даны интересные практические приложения этого множества решений в задачах расчёта электронных устройств, но предложенные А. Дейфом методы распознавания и оценивания допускового множества решений имеют частный и полувзвистический характер.

А. Ноймайер в [38, 39] и некоторые другие авторы в 80-е годы прошлого века использовали для (6.2) термин *ограниченное множество решений* (restricted solution set). В конце концов в англоязычной терминологии по отношению к множеству (6.2) стараниями автора этой книги закрепилось наименование tolerable solution set, тогда как в русских работах говорили о «допустимом множестве решений». Последний термин не совсем удачен ввиду перегруженности прилагательного «допустимый», интенсивно употребляемого по разным поводам как перевод английского слова feasible. По этой причине в середине 2000-х было решено сменить терминологию, и в последнее время для (6.2) повсеместно используется другой термин — *допусковое множество решений*. Он адекватно отражает суть этого множества решений и не способен приводить к недоразумениям.

Ранняя история возникновения этого множества решений и связанных с ним постановок задач изложена А. Ноймайером в обзоре [38], а также Б. Келлинг и Д. Эльшлегелем в работах [35, 36].

В работах А.Ф. Бочкова и Т.В. Евтушенко [1, 2] допустимое множество решений ИСЛАУ исследовалось в связи с необходимостью расчёта режимов технологических процессов в условиях неопределённости. При этом возникала необходимость не просто находить оценку допустимого множества решений, но даже оптимизировать на нём некоторый функционал, характеризующий качество рассматриваемого производственного процесса.

Результат Предложения 6.1.1 — выпуклость и полиэдральность допустимого множества решений — может быть доказан многими способами, см. [22, 36, 40, 45]. Наше доказательство следует работе [22].

**К §6.2** Теорема И. Рона о допустимом множестве решений [45] была исторически первым результатом, который давал представление допустимого множества решений ИСЛАУ в виде системы линейных неравенств. В некоторых случаях он не очень удобен, так как, фактически, сопровождается введением новых переменных и приводит к увеличению размерности пространства неизвестных вдвое. Это стимулировало поиск других подобных представлений.

**К §6.3** Изложение результатов об ограниченности допустимого множества решений — Предложений 6.3.1 и 6.3.2 и Теоремы 6.3.1 — следует работам [23, 46].

**К §6.4** В англоязычной экономической литературе модели межотраслевого баланса называют также моделями «затраты-выпуск» (input-output models).

Примеры, демонстрирующие несостоятельность «теста средней системы» для выбора точки из допустимого множества решений, были впервые представлены автором в препринте [25].

**К §6.7** Существуют отличные от «центрового» подходы к построению бруса-решения линейной задачи о допусках.

Так называемый формально-алгебраический подход к решению линейной задачи о допусках, при котором она сводится к нахождению формального интервального решения ИСЛАУ, подробно рассматривается далее в Главах 11–12.

А.Ф. Бочков и Т.В. Евтушенко в [1] шли к построению бруса-решения ЛЗД более прямым и очевидным путем, выписывая в явном виде условия принадлежности вершин искомого бруса части допустимого множества решений, ограниченной одним ортантом, и решая далее задачу максимизации объема этого бруса. Возможности этой методики исчерпываются, правда, задачами небольшой размерности, поскольку количество ограничений в получающейся оптимизационной задаче множится экспоненциально.

Н.А. Хлебалин [20, 21] сводил вписывание бруса наибольшего периметра в допустимое множество решений ИСЛАУ с точечной матрицей к решению некоторой задачи линейного программирования. О. Бьемо и Б. Филиппе в [31] предлагают методику решения линейной задачи о допусках, также основанную на технике линейного программирования и теореме И. Рона о допустимом множестве решений.

**К §6.8** Алгоритм перебора всех вершин интервального вектора-бруса, при котором на каждом шаге выполняется переход к соседней вершине, использовался также И. Роном в Главе 2 книги [33].

**К §6.9** Основные результаты этого параграфа были сначала опубликованы в препринте [25], а затем, в дополненном виде, в работе [48].

## Литература к Главе 6

- [1] Бочков А.Ф., Евтушенко Т.В. Один подход к выбору стационарных режимов технологических процессов в условиях неопределённости. – Москва, 1988. – 17 с. – Депонировано в ВИНТИ, №2891-В88.
- [2] Бочков А.Ф., Евтушенко Т.В. Оптимизация режимов технологических процессов по интервальным моделям // *Вопросы кибернетики. Устройства и системы* / Сб. научн. трудов под ред. Евтихиева Н.Н. – Москва: Моск. ин-т радиотехники, электроники и автоматики, 1989. – С. 10–17.
- [3] Воронцова Е.А. Линейная задача о допусках для интервальной модели межотраслевого баланса // *Вычислительные технологии*. – 2017. – Т. 22, №2. – С. 67–84.
- [4] Данциг Дж. *Линейное программирование, его обобщения и приложения*. – Москва: Прогресс, 1974.
- [5] Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. *Недифференцируемая оптимизация*. – Москва: Наука, 1981.
- [6] Довронев Б.С., Шайдуров В.В. *Двусторонние численные методы*. – Новосибирск: Наука, 1990.
- [7] Дугарова И.В., Смагина Е.М. Обеспечение устойчивости системы с неопределёнными параметрами // *Автоматика и Телемеханика*. – 1990. – № 11. – С. 176–181.
- [8] Захаров А.В., Шокин Ю.И. Синтез систем управления при интервальной неопределённости параметров их математических моделей // *Доклады АН СССР*. – 1988. – Т. 299, №2. – С. 292–295.
- [9] Ивлев Р.С. Построение и исследование свойств многомерных систем управления интервально-заданными объектами управления. Дисс. ...к.т.н. — Алматы: Институт проблем информатики и управления, 1999.
- [10] Ивлев Р.С. Асимптотическая устойчивость линейных интервально-заданных систем // *Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах*. – Казань, 2001. – Вып. 2(14), т. 7. – С. 55–63.
- [11] Мину М. *Математическое программирование. Теория и алгоритмы*. – Москва: Наука, 1990.
- [12] Нестеров Ю.Е. *Введение в выпуклую оптимизацию*. – Москва: Издательство МЦНМО, 2010.
- [13] Пападимитриу Х., Стайглиц К. *Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность*. – Москва: Мир, 1985.
- [14] Поляк Б.Т. *Введение в оптимизацию*. – Москва: Наука, 1983.
- [15] Пшеничный Б.Н. *Выпуклый анализ и экстремальные задачи*. – Москва: Наука, 1980.
- [16] Рокафеллар Р. *Выпуклый анализ*. – Москва: Мир, 1973.

- [17] РЫКОВ А.С. *Поисковая оптимизация. Методы деформируемых конфигураций.* – Москва: «Физико-математическая литература», ВО «Наука», 1993.
- [18] СТЕЦЮК П.И. Субградиентные методы  $\text{ralgb5}$  и  $\text{ralgb4}$  для минимизации овражных выпуклых функций // *Вычислительные технологии.* – 2017. – Т. 22, №2. – С. 127–149.
- [19] ХЛЕБАЛИН Н.А. Аналитический метод синтеза регуляторов в условиях неопределённости параметров объекта // *Аналитические методы синтеза регуляторов.* – Саратов: Саратовский политехнический институт, 1981. – С. 107–123.
- [20] ХЛЕБАЛИН Н.А. Аналитический синтез регуляторов в условиях неопределённости параметров объекта управления. Дисс. . . к.т.н. – Саратов: Саратовский политехнический институт, 1984.
- [21] ХЛЕБАЛИН Н.А. Синтез интервальных регуляторов в задаче модального управления // *Аналитические методы синтеза регуляторов.* – Саратов: Саратовский политехнический ин-т, 1988. – С. 26–30.
- [22] ШАЙДУРОВ В.В., ШАРЫЙ С.П. Решение интервальной алгебраической задачи о допусках. – Красноярск, 1988. – 27 с. – (Препринт / ВЦ СО АН СССР ; №5).
- [23] ШАРАЯ И.А. Ограничено ли допустимое множество решений интервальной системы? // *Вычислительные Технологии.* – 2004. – Т. 9, №3. – С. 108–112.
- [24] ШАРАЯ И.А. Строение допустимого множества решений интервальной линейной системы // *Вычислительные технологии.* – 2005. – Т. 10, №5. – С. 103–119.
- [25] ШАРЫЙ С.П. О некоторых методах решения линейной задачи о допусках. – Красноярск, 1989. – 45 с. – (Препринт / ВЦ СО АН СССР ; №6).
- [26] ШАРЫЙ С.П. Сильная согласованность в задаче восстановления зависимостей при интервальной неопределённости данных // *Вычислительные Технологии.* – 2017. – Т. 22, №2. – С. 150–172.
- [27] ШОР Н.З. *Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения.* – Киев: Наукова думка, 1979.
- [28] ШОР Н.З., ЖУРБЕНКО Н.Г. Метод минимизации, использующий операцию растяжения пространства в направлении разности двух последовательных градиентов // *Кибернетика.* – 1971. – №3. – С. 51–59.
- [29] ШОР Н.З., СТЕЦЕНКО С.И. *Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация.* – Киев: Наукова думка, 1989.
- [30] BEAUMONT O. Solving linear interval tolerance problem with oblique boxes // IRISA Publication Interne №2000 PI-1313. – IRISA, 2000. – 9 p.
- [31] BEAUMONT O., PHILIPPE B. Linear interval tolerance problem and linear programming techniques // *Reliable Computing.* – 2001. – Vol. 7, No. 6. – P. 433–447.
- [32] DEIF A. *Sensitivity analysis in linear systems.* – Berlin: Springer, 1986.
- [33] FIEDLER M., NEDOMA M., RAMIK J., ROHN J., ZIMMERMAN M. *Linear programming problems with inexact data.* – New York: Springer, 2006.
- [34] GRAY F. Pulse code communication. United States Patent No. 2632058. March 17, 1953.
- [35] KELLING B. Geometrische Untersuchungen zur eigenschranken Lösungsmenge Intervallgleichungssysteme // *ZAMM.* – 1994. – Bd. 74, No. 12. – P. 625–628.
- [36] KELLING B., OELSCHLÄGEL D. Zur Lösung von linearen Toleranzproblemen // *Wiss. Zeitschrift TH Leuna-Merseburg.* – 1991. – Bd. 33, No. 1. – P. 121–131.

- [37] HIRIART-URRUTY J.-B., LEMARECHAL C. *Convex Analysis and Minimization Algorithms I, II*. – Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1993.
- [38] NEUMAIER A. Tolerance analysis with interval arithmetic // *Freiburger Intervall-Berichte*. – 1986. – No. 9/86. – S. 5–19.
- [39] NEUMAIER A. *Interval methods for systems of equations*. – Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [40] NUDING E. Ein einfacher Beweis der Satze von Oettli-Prager und J. Rohn // *Freiburger Intervall-Berichte*. – 1986. – No. 9/86. – S. 1–3.
- [41] NUDING E., WILHELM W. Über Gleichungen und über Lösungen // *ZAMM*. – 1972. – Bd. 52. – P. T188–T190.
- [42] NURMINSKI E.A. Separating plane algorithms for convex optimization // *Mathematical Programming*. – 1997. – Vol. 76. – P. 373–391.
- [43] RATSCHKE H., SAUER W. Linear interval equations // *Computing*. – 1982. – Vol. 28, No. 2. – P. 105–115.
- [44] ROHN J. Input-output planning with inexact data // *Freiburger Intervall-Berichte*. – 1978. – No. 9/78. – S. 1–16.
- [45] ROHN J. Inner solutions of linear interval systems // *Interval Mathematics 1985* / Nickel K., ed. – New York: Springer Verlag, 1986. – P. 157–158. – (*Lecture Notes in Computer Science*; vol. 212).
- [46] SHARAYA I.A. On unbounded tolerable solution sets // *Reliable Computing*. – 2005. – Vol. 11, No. 5. – P. 425–432.
- [47] SHARY S.P. Solving the tolerance problem for interval linear systems // *Interval Computations*. – 1994. – No. 2. – P. 6–26.
- [48] SHARY S.P. Solving the linear interval tolerance problem // *Mathematics and Computers in Simulation*. – 1995. – Vol. 39. – P. 53–85.
- [49] SHARY S.P. On optimal solution of interval linear equations // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1995. – Vol. 32, No. 2. – P. 610–630.
- [50] SHARY S.P. Interval regularization for imprecise linear algebraic equations. – Новосибирск, 2018. – 21 с. – Депонировано в электронном репозитории [arXiv.org](https://arxiv.org), регистрационный номер arXiv:1810.01481.
- [51] SHARY S.P. Weak and strong compatibility in data fitting problems under interval uncertainty // *Advances in Data Science and Adaptive Analysis*. – 2020. – Vol. 12, No. 1. – 34 p.
- [52] SMAGINA YE.M. A new approach to the modal regulator synthesis for interval plant with scalar input // *Reliable Computing*. – 1997. – Vol. 3. – P. 401–410.
- [53] SMAGINA YE.M., BREWER I. Using interval arithmetic for robust state feedback design // *Systems & Control Letters*. – 2002. – Vol. 46. – P. 187–194.
- [54] SOKOLOVA S.P., IVLEV R.S. Asymptotic stability of interval time-delay systems // *Reliable Computing*. – 2003. – Vol. 9, No. 4. – P. 303–313.
- [55] VORONTSOVA E. Extended separating plane algorithm and NSO-solutions of PageRank problem / *Discrete Optimization and Operations Research. Proceedings of 9th International Conference DOOR 2016, Vladivostok, Russia, September 19-23, 2016*, ed. by Kochetov, Y., Khachay, M., Beresnev, V., Nurminski, E., Pardalos, P. *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 9869. Cham, Switzerland, Springer International, 2016.

- [56] WEISSTEIN E.W. Gray Code. — Интернет-статья с сайта Wolfram MathWorld, см. <http://mathworld.wolfram.com/GrayCode.html>

## Глава 7

# Внешнее оценивание объединённого множества решений

Эта глава книги посвящена задаче внешнего интервального оценивания объединённого множества решений интервальных линейных систем уравнений. Отдельное рассмотрение объединённого множества решений ИСЛАУ вызвано тем, что это наиболее популярное из множеств решений, для оценивания которого создано большое количество специфичных методик, не работающих для других множеств решений.

В §4.4 упоминались наиболее важные теоретические результаты, касающиеся трудоёмкости решения задач, связанных с объединённым множеством решений. Оказывается, что для интервальных линейных систем задача распознавания того, пусто или непусто объединённое множество решений, в общем случае NP-трудна (труднорешаема). Кроме того, вычисление для объединённого множества решений внешних покоординатных оценок с любой заданной абсолютной или относительной точностью также есть NP-трудная задача, как в общем случае, так и во многих практически важных частных ситуациях.

Эти факты заставляют особым образом классифицировать численные методы для решения задач распознавания и оценивания объединённого множества решений. Традиционное разделение вычислительных методов на прямые и итерационные при этом не то чтобы отменяется, но становится не столь важным и отходит на второй план. Вместо этого, учитывая труднорешаемость рассматриваемых задач, уместно разделить все численные методы для внешнего оценивания объединённого множества решений интервальных систем уравнений на три большие группы:

Во-первых, это методы для нахождения оптимальных (точных) решений внешней задачи или же решений, имеющих гарантированную погрешность. В силу труднорешаемости этой задачи соответствующие численные методы по своей структуре близки переборным алгоритмам дискретной оптимизации, а их трудоёмкость в общем случае может расти экспоненциально в зависимости от размера задачи. Мы будем называть их также *точными методами*.

Во-вторых, это методы решения внешней задачи, в которых на ответ не накладываются требования оптимальности или гарантированной погрешности. Трудоемкость этих методов, как правило, полиномиальная, и мы будем называть их *быстрыми методами* или же *методами общего назначения*.

Третью группу методов образуют различные специализированные алгоритмы для интервальных систем уравнений какого-либо частного вида (например, для блочных или ленточных ИСЛАУ и т. п.).

Методам первой группы целиком посвящена Глава 9 нашей книги, а сейчас мы будем рассматривать, главным образом, методы общего назначения, тем более что они нередко являются «строительными блоками» для конструирования методов из второй группы, предназначенных для оптимального оценивания множества решений. В этой главе мы называем объединённое множество решений просто *множеством решений* и обозначаем  $\Xi$  или  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , поскольку иные множества решений в тексте не встречаются.

## 7.1 Подготовительные факты

Прежде всего приведём важный и полезный результат [19], который часто используется в связи с исследованием и оцениванием объединённого множества решений ИСЛАУ.

**Теорема 7.1.1** (характеризация Бекка) *Пусть заданы  $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{m \times n}$  и  $\mathbf{b} \in \mathbb{IR}^m$ . Вектор  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$  принадлежит множеству решений  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  интервальной системы линейных алгебраических уравнений  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  тогда и только тогда, когда выполнено любое из условий*

$$\mathbf{A} \cdot \tilde{x} \cap \mathbf{b} \neq \emptyset, \quad 0 \in \mathbf{A} \cdot \tilde{x} - \mathbf{b}, \quad (7.1)$$

где « $\cdot$ » обозначает интервальное матричное умножение.

**Доказательство.** Если  $\tilde{x} \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , то  $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$  для некоторых  $\tilde{A} \in \mathbf{A}$ ,  $\tilde{b} \in \mathbf{b}$ . Следовательно, по крайней мере  $\tilde{b} \in \mathbf{A}\tilde{x} \cap \mathbf{b}$ , так как  $\mathbf{A}\tilde{x} \ni \tilde{A}\tilde{x}$  и  $\mathbf{b} \ni \tilde{b}$ . По этой причине действительно  $\mathbf{A}\tilde{x} \cap \mathbf{b} \neq \emptyset$ .

Наоборот, пусть  $\mathbf{A}\tilde{x} \cap \mathbf{b} \neq \emptyset$ , так что это пересечение содержит некоторый вектор  $\tilde{b} \in \mathbb{R}^m$ . Вспомним, что в силу свойств интервального матричного умножения (2.4)

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \{A\mathbf{x} \mid A \in \mathbf{A}\},$$

т. е. результат интервального умножения  $\mathbf{A}\tilde{x}$  в точности совпадает с множеством всевозможных произведений  $A\tilde{x}$  для  $A \in \mathbf{A}$ . Следовательно, вектор  $\tilde{b}$  должен быть равен  $\tilde{A}\tilde{x}$  для некоторой  $\tilde{A} \in \mathbf{A}$ , т. е. имеет место равенство  $\tilde{b} = \tilde{A}\tilde{x}$  с какой-то  $\tilde{A} \in \mathbf{A}$ . Итак,  $\tilde{x} \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ .

Для завершения доказательства теоремы заметим очевидную равносильность условий из (7.1):  $\mathbf{A}\tilde{x} \cap \mathbf{b} \neq \emptyset$  в самом деле выполняется в том и только в том случае, когда  $0 \in \mathbf{A}\tilde{x} - \mathbf{b}$ . ■



Обращаясь к вычислению внешней оценки множеств решений интервальной линейной системы

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (7.2)$$

отметим, что она находится особенно просто в случаях, когда матрица  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  имеет специальную форму. Простейшими такими формами являются верхняя треугольная, когда  $a_{ij} = 0$  при  $i > j$ , либо нижняя треугольная, когда  $a_{ij} = 0$  при  $i < j$ . Тогда оптимальная внешняя оценка множества решений ИСЛАУ может быть вычислена с помощью процесса последовательного нахождения компонент и подстановки их в соседнее уравнение, где присутствует лишь одна дополнительная неизвестная переменная. В вычислительной линейной алгебре этот процесс называют *прямой подстановкой* для нижней треугольной матрицы и *обратной подстановкой* для верхней треугольной матрицы.

Например, для верхней треугольной матрицы псевдокод этого несложного алгоритма имеет вид

```
DO FOR  $i = n$  TO 1 STEP (-1)
```

$$\mathbf{x}_i \leftarrow \left( \mathbf{b}_i - \sum_{j>i} \mathbf{a}_{ij} \mathbf{x}_j \right) / \mathbf{a}_{ii} \quad (7.3)$$

```
END DO
```

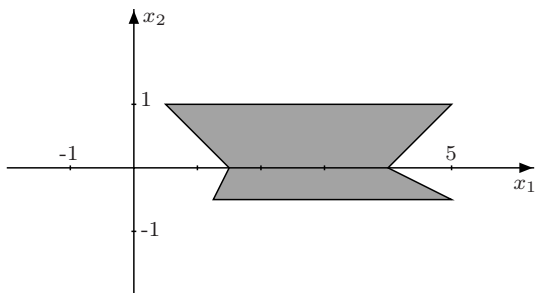


Рис. 7.1. Множество решений треугольной интервальной системы уравнений (7.4).

При этом само множество решений треугольной ИСЛАУ может и не являться брусом, как, например, множество решений системы

$$\begin{pmatrix} [1, 2] & [-1, 2] \\ 0 & [2, 3] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [3, 4] \\ [-1, 2] \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

изображённое на Рис. 7.1.

Другой случай простой разрешимости внешней задачи для ИСЛАУ соответствует ситуации, когда  $\mathbf{A}$  — положительно обратимая интервальная матрица, в частности, интервальная  $M$ -матрица (см. §2.8). Тогда справедлива

**Теорема 7.1.2** Пусть интервальная  $n \times n$ -система линейных алгебраических уравнений  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  такова, что её матрица  $\mathbf{A}$  является интервальной  $M$ -матрицей. Тогда оптимальная внешняя оценка множества решений, т. е. его интервальная оболочка  $\square \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , вычисляется как

$$\square \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \begin{cases} [\overline{\mathbf{A}}^{-1}\underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{A}}^{-1}\overline{\mathbf{b}}], & \text{если } \mathbf{b} \geq 0, \\ [\underline{\mathbf{A}}^{-1}\underline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{A}}^{-1}\overline{\mathbf{b}}], & \text{если } \mathbf{b} \leq 0, \\ \underline{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{b}, & \text{если } \mathbf{b} \ni 0. \end{cases}$$

**Доказательство.** Ясно, что

$$\square \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \left[ \min_{A \in \mathbf{A}} \min_{b \in \mathbf{b}} A^{-1}b, \max_{A \in \mathbf{A}} \max_{b \in \mathbf{b}} A^{-1}b \right], \quad (7.5)$$

где экстремумы по множествам векторов понимаются в покомпонентном смысле. Так как  $\mathbf{A}$  есть  $M$ -матрица, то  $A^{-1} \geq 0$  для любой  $A \in \mathbf{A}$ . Поэтому  $A^{-1}b' \leq A^{-1}b''$  в случае  $b' \leq b''$ . Как следствие, внутренние экстремумы в выражениях для концов многомерных интервалов из (7.5) равны

$$\min_{b \in \mathbf{b}} A^{-1}b = A^{-1}\underline{\mathbf{b}}, \quad \max_{b \in \mathbf{b}} A^{-1}b = A^{-1}\overline{\mathbf{b}}$$

для любых  $A \in \mathbf{A}$ .

Найдём теперь внешние экстремумы, равные

$$\min_{A \in \mathbf{A}} A^{-1}\underline{\mathbf{b}} \quad \text{и} \quad \max_{A \in \mathbf{A}} A^{-1}\overline{\mathbf{b}}$$

соответственно. Для любых точечных  $n \times n$ -матриц  $A', A'' \in \mathbf{A}$ , таких что  $A' \leq A''$ , имеем  $(A')^{-1} \leq (A'')^{-1}$  (см., к примеру, доказательство теоремы Кутлера в §2.8, стр. 132). Дальнейшее существенно зависит от знака правой части  $\mathbf{b}$ . Если  $\mathbf{b} \geq 0$ , так что  $\underline{\mathbf{b}} \geq 0$  и  $\overline{\mathbf{b}} \geq 0$ , то  $(A')^{-1}\underline{\mathbf{b}} \leq (A'')^{-1}\underline{\mathbf{b}}$  и  $(A')^{-1}\overline{\mathbf{b}} \leq (A'')^{-1}\overline{\mathbf{b}}$ . Поэтому

$$\min_{A \in \mathbf{A}} A^{-1}\underline{\mathbf{b}} = \overline{\mathbf{A}}^{-1}\underline{\mathbf{b}} \quad \text{и} \quad \max_{A \in \mathbf{A}} A^{-1}\overline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{A}}^{-1}\overline{\mathbf{b}}.$$

Если  $\mathbf{b} \leq 0$ , так что  $\underline{\mathbf{b}} \leq 0$  и  $\overline{\mathbf{b}} \leq 0$ , то  $(A')^{-1}\underline{\mathbf{b}} \geq (A'')^{-1}\underline{\mathbf{b}}$  и  $(A')^{-1}\overline{\mathbf{b}} \geq (A'')^{-1}\overline{\mathbf{b}}$ . Поэтому

$$\min_{A \in \mathbf{A}} A^{-1}\underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{A}}^{-1}\underline{\mathbf{b}} \quad \text{и} \quad \max_{A \in \mathbf{A}} A^{-1}\overline{\mathbf{b}} = \overline{\mathbf{A}}^{-1}\overline{\mathbf{b}}.$$

Если же  $\mathbf{b} \ni 0$ , так что  $\underline{\mathbf{b}} \leq 0$  и  $\overline{\mathbf{b}} \geq 0$ , то  $(A')^{-1}\underline{\mathbf{b}} \geq (A'')^{-1}\underline{\mathbf{b}}$  и  $(A')^{-1}\overline{\mathbf{b}} \geq (A'')^{-1}\overline{\mathbf{b}}$ . Поэтому

$$\min_{A \in \mathbf{A}} A^{-1}\underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{A}}^{-1}\underline{\mathbf{b}} \quad \text{и} \quad \max_{A \in \mathbf{A}} A^{-1}\overline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{A}}^{-1}\overline{\mathbf{b}}.$$

В последнем случае нетрудно понять, что интервальный вектор  $[\underline{\mathbf{A}}^{-1}\underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{A}}^{-1}\overline{\mathbf{b}}]$  совпадает с результатом произведения  $\underline{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{b}$ , в котором действия с нижними и верхними

концами интервалов-компонент вектора  $\mathbf{b}$  выполняются порознь друг от друга в силу неотрицательности матрицы  $\mathbf{A}^{-1}$ . ■

Напомним (см. §2.7), что для квадратной неособенной интервальной матрицы  $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  обратной интервальной матрицей  $\mathbf{A}^{-1} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  называется внешняя оценка множества всех обратных точечных матриц из  $\mathbf{A}$ , т. е.

$$\mathbf{A}^{-1} \supseteq \{A^{-1} \mid A \in \mathbf{A}\}.$$

Если для интервальной линейной системы уравнений (7.2) с квадратной матрицей  $\mathbf{A}$  известна обратная  $\mathbf{A}^{-1}$ , то внешняя оценка объединённого множества решений этой системы легко может быть вычислена как  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ . При этом включение

$$\square \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \subseteq \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \quad (7.6)$$

обращается в равенство для точечных  $\mathbf{A}$ , что вытекает из свойств интервального матричного умножения. Но для существенно интервальных матриц  $\mathbf{A}$  левая и правая части включения (7.6) могут заметно различаться, даже если в качестве обратной интервальной матрицы мы возьмём оптимальную внешнюю оценку множества всех обратных точечных матриц.

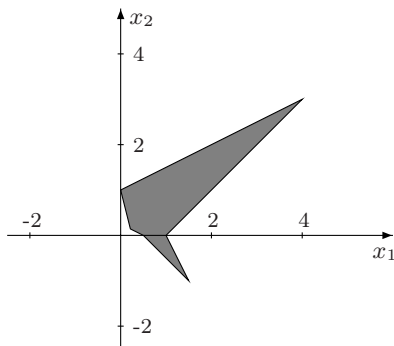


Рис. 7.2. Множество решений интервальной системы уравнений (7.7).

**Пример 7.1.1** Рассмотрим ИСЛАУ

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 1] \\ [-1, 2] & [2, 4] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1, 2] \\ [1, 2] \end{pmatrix}, \quad (7.7)$$

для матрицы которой мы нашли обратную в примере из §2.7 (стр. 125). Умножая эту обратную матрицу (2.42) на вектор правой части системы (7.7), получим

$$\begin{pmatrix} [-\frac{5}{6}, 4] \\ [-\frac{11}{6}, 3] \end{pmatrix}, \quad (7.8)$$

тогда как оптимальной внешней оценкой множества решений является более узкий брус  $([0, 4], [-1, 3])^T$  (см. Рис. 7.2). ■

Справедливо

**Предложение 7.1.1** (лемма Ноймайера) *Оптимальная внешняя интервальная оценка множества решений  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  квадратной интервальной линейной системы  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  не может в общем случае быть представлена, как произведение  $\mathbf{G}\mathbf{b}$  с какой-то интервальной матрицей  $\mathbf{G}$ , не зависящей от правой части системы  $\mathbf{b}$ .*

**Доказательство.** Допустим, напротив, что представление

$$\square \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \mathbf{G}\mathbf{b}, \quad (7.9)$$

о котором идёт речь в условии предложения, всё-таки существует для некоторой матрицы  $\mathbf{G} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ .

Рассмотрим интервальные линейные системы вида (7.2) с матрицей  $\mathbf{A}$  и векторами правых частей  $e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(n)}$ , которые являются 1-м, 2-м,  $\dots$ ,  $n$ -м столбцами единичной  $n \times n$ -матрицы. Ясно, что множества  $\square \Xi(\mathbf{A}, e^{(1)}), \square \Xi(\mathbf{A}, e^{(2)}), \dots, \square \Xi(\mathbf{A}, e^{(n)})$  суть 1-й, 2-й,  $\dots$ ,  $n$ -й столбцы обратной интервальной матрицы  $\mathbf{A}^{-1}$ . С другой стороны, если верно представление (7.9), то они должны совпадать с соответствующими столбцами матрицы  $\mathbf{G}$ . Следовательно,  $\mathbf{G} = \mathbf{A}^{-1}$ , что в общем случае невозможно, как показывается в Примере 7.1.1. ■

Результат леммы Ноймайера – ещё одно свидетельство того, что интервальная линейная алгебра «существенно нелинейна», и эффективные методы решения внешней задачи для ИСЛАУ должны быть устроены совсем не так, как методы решения точечных СЛАУ в традиционной вычислительной линейной алгебре.

## 7.2 Интервальный метод Гаусса

Метод исключения Гаусса и его многочисленные модификации являются популярнейшими алгоритмами вычислительной линейной алгебры, и в этом параграфе мы рассмотрим их интервальные версии, также играющие важную роль среди интервальных алгоритмов.

Для системы линейных уравнений

$$Ax = b$$

с  $n \times n$ -матрицей  $A = (a_{ij})$  и  $n$ -вектором правых частей  $b = (b_i)$  выполнение метода Гаусса состоит из двух этапов — *прямого хода* и *обратного хода* (называемого также *обратной подстановкой*). Во время прямого хода последовательно обнуляются поддиагональные элементы 1-го, 2-го,  $\dots$ ,  $(n - 1)$ -го столбцов матрицы системы и соответствующим образом преобразуется вектор правой части. Матрица системы тем самым приводится к верхнему треугольному виду (см. Рис. 7.3). В таблице (7.10) представлен псевдокод прямого хода простейшей версии традиционного метода Гаусса, в котором уже опущены инструкции, дающие результатом нулевые элементы матрицы.

```

DO FOR  $j = 1$  TO  $n - 1$ 
  DO FOR  $i = j + 1$  TO  $n$ 
     $r_{ij} \leftarrow a_{ij} / a_{jj}$ 
    DO FOR  $k = j + 1$  TO  $n$ 
       $a_{ik} \leftarrow a_{ik} - r_{ij} a_{jk}$ 
    END DO
     $b_i \leftarrow b_i - r_{ij} b_j$ 
  END DO
END DO

```

(7.10)

Далее следует обратная подстановка (обратный ход), которая выполняется в соответствии со следующим псевдокодом:

```

DO FOR  $i = n$  TO  $1$  STEP  $(-1)$ 
   $x_i \leftarrow \left( b_i - \sum_{j>i} a_{ij} x_j \right) / a_{ii}$ 
END DO

```

(7.11)

Она позволяет последовательно вычислить в обратном порядке искомые значения неизвестных, начиная с  $n$ -ой.

Пусть теперь задана интервальная  $n \times n$ -система линейных уравнений

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b} \tag{7.2}$$

с неособенной матрицей  $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ . Заменяем в алгоритмах (7.10)–(7.11) все величины  $r_{ij}$ ,  $a_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $x_i$  на интервальные —  $\mathbf{r}_{ij}$ ,  $\mathbf{a}_{ij}$ ,  $\mathbf{b}_i$ ,  $\mathbf{x}_i$ , а арифметические операции — на операции интервальной арифметики. Получающийся при этом алгоритм, который является естественным интервальным расширением точечного метода Гаусса, называется *интервальным методом Гаусса*, и его псевдокод представлен в Табл. 7.1. Он также состоит из прямого хода и обратной подстановки, которые выполняются двумя внешними циклами — первым по столбцовому индексу  $j$  и вторым по строчному индексу  $i$ .

Хорошо известна матричная интерпретация традиционного метода Гаусса, когда его прямой ход рассматривается как LU-разложение матрицы системы на треугольные сомножители. Но в отличие от точечного случая полноценное треугольное разложение интервальной матрицы  $\mathbf{A}$  интервальным методом Гаусса мы таким образом не получим. Стоящие в самом внутреннем цикле прямого хода (7.10) вычитания

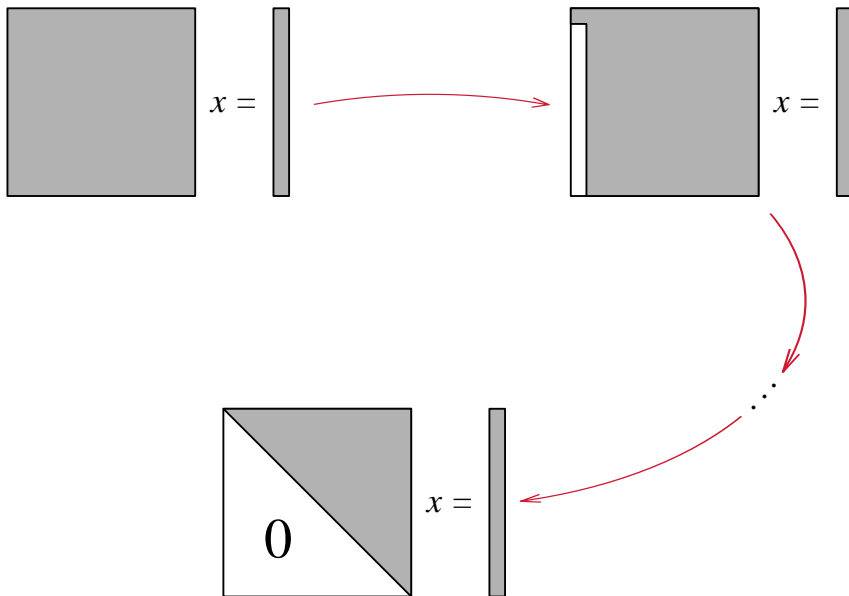


Рис. 7.3. Схема преобразования системы уравнений в прямом ходе традиционного метода Гаусса.

$(a_{ik} - r_{ij}a_{jk})$ , в результате которых получают нули для поддиагональных элементов матрицы, становятся теперь интервальными вычитаниями  $(a_{ik} - r_{ij}a_{jk})$ , которые не приведут к занулению этих поддиагональных элементов. Причина состоит в том, что ширина интервальной разности равна сумме ширин операндов и занулиться может лишь когда уменьшаемое и вычитаемое — вещественные числа.

Тем не менее, в методе Гаусса выражения во всех инструкциях прямого и обратного ходов содержат только четыре основных арифметических операции, а потому неизвестные переменные  $x_1, x_2, \dots, x_n$  являются рациональными функциями от элементов матрицы  $a_{ij}$  и компонент вектора правой части  $b_i$  в том смысле, которого мы придерживаемся с §1.4. Из основной теоремы интервальной арифметики (Теорема 1.4.1, стр. 34) следует, что результат выполнения интервального метода Гаусса должен содержать все возможные результаты применения точечных методов Гаусса к точечным данным, содержащимся в задаваемых системой (7.2) интервалах. Но результаты точечных методов Гаусса — это решения систем уравнений  $Ax = b$  с  $A \in \mathbf{A}$  и  $b \in \mathbf{b}$ . Поэтому полученные с помощью интервального метода Гаусса интервалы для неизвестных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  содержат области значений соответствующих компонент точек из множества решений  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ . В целом брус  $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  является внешней оценкой объединённого множества решений ИСЛАУ.

Нетривиальным моментом реализации интервального метода Гаусса является выполнение делений на диагональные элементы  $a_{jj}$  в прямом и обратном ходах: оно невозможно при  $0 \notin a_{jj}$ , так что при возникновении этой ситуации исполнение все-

Таблица 7.1. Интервальный метод Гаусса  
(простейшая версия)

```

DO FOR  $j = 1$  TO  $n - 1$ 
  DO FOR  $i = j + 1$  TO  $n$ 
     $r_{ij} \leftarrow a_{ij} / a_{jj}$ 
    DO FOR  $k = j + 1$  TO  $n$ 
       $a_{ik} \leftarrow a_{ik} - r_{ij} a_{jk}$ 
    END DO
     $b_i \leftarrow b_i - r_{ij} b_j$ 
  END DO
END DO
DO FOR  $i = n$  TO  $1$  STEP  $(-1)$ 
   $x_i \leftarrow \left( b_i - \sum_{j>i} a_{ij} x_j \right) / a_{ii}$ 
END DO

```

го алгоритма завершается аварийным образом. Сферу применимости интервального метода Гаусса можно немного расширить с помощью процедуры выбора ведущего элемента, полной или частичной, и соответствующей перестановки строк и/или столбцов матрицы системы. Этот приём совершенно аналогичен тому, что применяется в традиционном методе Гаусса (см., к примеру, [3, 5]), но в интервальном случае при поиске ведущего элемента следует выбирать интервал с максимальной мигнитудой (в поддиагональной части активного столбца или во всей активной подматрице).

Традиционный точечный метод Гаусса с выбором ведущего элемента (частичным или полным), как известно, всегда применим к системам линейных алгебраических уравнений с неособенными матрицами (см. к примеру, [5, 15]). К сожалению, для интервального метода Гаусса это не так: существуют примеры интервальных линейных систем с неособенными матрицами, для которых метод Гаусса с выбором ведущего элемента не может проработать до конца.

**Пример 7.2.1** (пример Райхмана [46]) Рассмотрим интервальную  $3 \times 3$ -матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & [0, r] & [0, r] \\ [0, r] & 1 & [0, r] \\ [0, r] & [0, r] & 1 \end{pmatrix}, \quad (7.12)$$

в которой  $0 < r < 1$ . Нетрудно убедиться в том, что применение к ней преобразований прямого хода интервального метода Гаусса приводит к матрице, у которой на месте

(3, 3) стоит элемент  $[1 - r^2 - r^2/(1 - r^2), 1 + r^3/(1 - r^2)]$ . Его правый конец всегда положителен при сделанных относительно  $r$  предположениях, тогда как левый конец меняет знак при переходе  $r$  через корень многочлена  $(1 - r^2)^2 - r^2$ , равный

$$r^* = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = 0.61803\dots < 0.62.$$

Следовательно, обратный ход интервального метода Гаусса для интервальной линейной системы с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & [0, 0.62] & [0, 0.62] \\ [0, 0.62] & 1 & [0, 0.62] \\ [0, 0.62] & [0, 0.62] & 1 \end{pmatrix}, \quad (7.13)$$

соответствующей  $r = 0.62$  будет невозможен (так же, как и для любой другой матрицы вида (7.12) с  $r \in [r^*, 1)$ ), поскольку в нём сразу же встретится деление на нульсодержащий интервал  $\mathbf{a}_{33}$ . В то же время, матрица (7.13) неособенна, что устанавливается, к примеру, с помощью признака Рунпа (Теорема 2.5.10).

Матрица (7.12) из рассмотренного примера является не чем иным, как масштабированной  $3 \times 3$ -матрицей Ноймайера-Райхмана (2.38) с подходящим значением диагонального параметра  $\theta$ . Мы привели её здесь в виде (7.13), чтобы сохранить преемственность изложения с работой [46]. ■

В примере Райхмана размерность матрицы, равная 3, принципиальна: для двумерных вещественных интервальных линейных систем с неособенными матрицами можно показать, что интервальный метод Гаусса всегда успешно работает до конца [1, 42, 46]. В комплексном случае в силу особенностей комплексных интервальных арифметик ситуация тяжелее, и существуют примеры даже двумерных интервальных линейных систем с неособенными матрицами, к которым интервальный метод Гаусса неприменим [1].

Пример 7.2.1 несложно обобщается на интервальные линейные системы размерности  $\geq 3$ . В работе К. Райхмана [46] это сделано путём достраивания матрицы (7.13) единичной матрицей, но с таким же успехом можно просто взять неособенную матрицу Ноймайера-Райхмана необходимого размера, достаточно близкую к особенным.

Интересны достаточные условия выполнимости интервального метода Гаусса, и наиболее значительным результатом в этом направлении является

**Теорема 7.2.1** (теорема Алефельда) *Если матрица  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  является H-матрицей, то интервальный метод Гаусса применим к интервальной линейной системе  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  без перестановки строк и столбцов при любом векторе правой части  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ . Если посредством  $\text{IGA}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  обозначить результат интервального метода Гаусса, то справедлива оценка*

$$|\text{IGA}(\mathbf{A}, \mathbf{b})| \leq \langle \mathbf{A} \rangle^{-1} |\mathbf{b}|.$$

Для доказательства этой теоремы нам понадобится ввести ряд новых понятий, имеющих также самостоятельное значение.

Пусть  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и  $n \geq 2$ . Представим матрицу  $A$  в блочном виде

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & a^\top \\ a' & A' \end{pmatrix},$$



где  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in \mathbb{R}^{n-1}$ ,  $\mathbf{A}' \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ . Выполнение первого шага прямого хода метода Гаусса — исключение поддиагональных элементов первого столбца — приводит к матрице

$$\begin{pmatrix} \alpha & \mathbf{a}'^\top \\ 0 & \mathbf{A}' - \mathbf{a}'\alpha^{-1}\mathbf{a}'^\top \end{pmatrix},$$

в которой существенную и наиболее важную для дальнейшего трансформацию претерпевает правый нижний блок. Мы введём для него специальное обозначение и термин:

$$\text{Ш}(\mathbf{A}) := \mathbf{A}' - \mathbf{a}'\alpha^{-1}\mathbf{a}'^\top$$

— дополнение по Шуру элемента  $a_{11}$  в матрице  $\mathbf{A}$ . Аналогичным образом определим дополнение по Шуру и для интервальных матриц: если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \mathbf{a}'^\top \\ \mathbf{a}' & \mathbf{A}' \end{pmatrix}, \quad (7.14)$$

где  $\alpha \in \mathbb{IR}$ ,  $\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in \mathbb{IR}^{n-1}$ ,  $\mathbf{A}' \in \mathbb{IR}^{(n-1) \times (n-1)}$ , то положим

$$\text{Ш}(\mathbf{A}) := \mathbf{A}' - \mathbf{a}'\alpha^{-1}\mathbf{a}'^\top. \quad (7.15)$$

**Предложение 7.2.1** Пусть  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij}) \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  и  $n > 1$ . Тогда

- (i) если  $0 \notin \mathbf{a}_{11}$ , то  $\langle \text{Ш}(\mathbf{A}) \rangle \geq \text{Ш}(\langle \mathbf{A} \rangle)$ ;
- (ii) если  $\mathbf{A}$  —  $M$ -матрица, то  $\text{Ш}(\mathbf{A}) = [\text{Ш}(\underline{\mathbf{A}}), \text{Ш}(\overline{\mathbf{A}})]$  и  $\text{Ш}(\mathbf{A})$  — также  $M$ -матрица;
- (iii) если  $\mathbf{A}$  —  $H$ -матрица, то  $\text{Ш}(\mathbf{A})$  — также  $H$ -матрица.

**Доказательство.** В терминах представления (7.14)  $\alpha = \mathbf{a}_{11}$ , так что если  $0 \notin \mathbf{a}_{11}$ , то  $\text{Ш}(\mathbf{A})$  существует и справедлива следующая цепочка соотношений

$$\begin{aligned} \langle \text{Ш}(\mathbf{A}) \rangle &= \langle \mathbf{A}' - \mathbf{a}'\alpha^{-1}\mathbf{a}'^\top \rangle \geq \langle \mathbf{A}' \rangle - |\mathbf{a}'\alpha^{-1}\mathbf{a}'^\top| \\ &= \langle \mathbf{A}' \rangle - |\mathbf{a}'| \langle \alpha \rangle^{-1} |\mathbf{a}'^\top| = \text{Ш}(\langle \mathbf{A} \rangle), \end{aligned}$$

что доказывает (i).

Если  $\mathbf{A}$  —  $M$ -матрица, то в представлении (7.14) имеет место  $\alpha > 0$ ,  $\mathbf{a}'^\top \leq 0$ ,  $\mathbf{a}' \leq 0$ , и поэтому

$$\begin{aligned} \text{Ш}(\mathbf{A}) &= [\underline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{A}}] - [\underline{\mathbf{a}'}, \overline{\mathbf{a}'}][\overline{\alpha}^{-1}, \underline{\alpha}^{-1}][\underline{\mathbf{a}'}, \overline{\mathbf{a}'}]^\top \\ &= [\underline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{A}}] - [\overline{\mathbf{a}'}\overline{\alpha}^{-1}\overline{\mathbf{a}'}, \underline{\mathbf{a}'}\underline{\alpha}^{-1}\underline{\mathbf{a}'}]^\top \\ &= [\underline{\mathbf{A}} - \underline{\mathbf{a}'}\underline{\alpha}^{-1}\underline{\mathbf{a}'}, \overline{\mathbf{A}} - \overline{\mathbf{a}'}\overline{\alpha}^{-1}\overline{\mathbf{a}'}]^\top = [\text{Ш}(\underline{\mathbf{A}}), \text{Ш}(\overline{\mathbf{A}})]. \end{aligned}$$

Далее, для  $M$ -матрицы  $\mathbf{A}$  существует  $n$ -вектор  $\mathbf{u} > 0$ , такой что  $\mathbf{A}\mathbf{u} = [\underline{\mathbf{A}}\mathbf{u}, \overline{\mathbf{A}}\mathbf{u}] > 0$ . Пусть

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \omega \\ \mathbf{u}' \end{pmatrix},$$

где  $\omega \in \mathbb{R}$ ,  $u' \in \mathbb{R}^{n-1}$ . Тогда

$$\underline{A}u = \begin{pmatrix} \underline{\alpha}\omega + \underline{a}^\top u' \\ \underline{a}'\omega + \underline{A}'u' \end{pmatrix} > 0. \quad (7.16)$$

Покажем, что  $u'$  является вектором, удовлетворяющим определению  $M$ -матрицы для  $\text{Ш}(\underline{A})$ . Имеем

$$\begin{aligned} \text{Ш}(\underline{A})u' &= [\text{Ш}(\underline{A}), \text{Ш}(\overline{A})]u' \\ &\geq \text{Ш}(\underline{A})u' = (\underline{A}' - \underline{a}'\underline{\alpha}^{-1}\underline{a}^\top)u' \\ &= \underline{A}'u' + \underline{a}'\omega - \underline{a}'\underline{\alpha}^{-1}\underline{\alpha}\omega - \underline{a}'\underline{\alpha}^{-1}\underline{a}^\top u' \\ &= (\underline{a}'\omega + \underline{A}'u') - \underline{a}'\underline{\alpha}^{-1}(\underline{\alpha}\omega + \underline{a}^\top u') > 0 \end{aligned}$$

в силу (7.16) и так как  $\underline{a}'\underline{\alpha}^{-1} \leq 0$ . Кроме того, из определения (7.15) и знаков  $\underline{a}'$ ,  $\underline{\alpha}^{-1}$  и  $\underline{a}^\top$  следует, что для  $M$ -матрицы  $\underline{A}$  элементы  $\text{Ш}(\underline{A})$  не больше соответствующих элементов  $\underline{A}$ . В частности, внедиагональные элементы в  $\text{Ш}(\underline{A})$  также неположительны, и она действительно является  $M$ -матрицей.

Докажем теперь (iii). Если  $\underline{A}$  —  $H$ -матрица, то  $\langle \underline{A} \rangle$  — точечная  $M$ -матрица и потому  $\text{Ш}(\langle \underline{A} \rangle)$  — тоже  $M$ -матрица в силу (ii). Найдётся, следовательно, вектор  $v \in \mathbb{R}^{n-1}$ ,  $v > 0$ , такой что  $\text{Ш}(\langle \underline{A} \rangle)v > 0$ , и тогда же  $\langle \text{Ш}(\underline{A}) \rangle v > 0$  по свойству (i). Следовательно,  $\text{Ш}(\underline{A})$  действительно  $H$ -матрица. ■

**Доказательство теоремы Алефельда** проводится индукцией по размерности интервальной системы уравнений, опираясь на результат Предложения 7.2.1. ■

**Следствие.** Если матрица  $\underline{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  имеет диагональное преобладание (см. Определение 2.5.2), то интервальный метод Гаусса применим к интервальной линейной системе  $\underline{A}x = \underline{b}$  без перестановки строк и столбцов при любом векторе правой части  $\underline{b} \in \mathbb{IR}^n$ . Это вытекает из того факта, что матрицы с диагональным преобладанием являются  $H$ -матрицами.

**Теорема 7.2.2** (теорема Барта-Нудинга-Бекка) *Если в интервальной линейной системе  $\underline{A}x = \underline{b}$  матрица  $\underline{A}$  является  $M$ -матрицей и выполнено какое-либо одно из условий  $\underline{b} < 0$ ,  $0 \in \underline{b}$  или  $\underline{b} > 0$ , то результатом интервального метода Гаусса в применении к этой системе является брус оптимальной внешней оценки множества решений.*

Доказательство может быть найдено в оригинальной статье [18] или в книге [42].

Каково качество внешних оценок объединённых множеств решений ИСЛАУ, получаемых интервальным методом Гаусса в общем случае? Коль скоро интервальный метод Гаусса является естественным интервальным расширением соответствующего точечного метода, то для ответа на этот вопрос можем воспользоваться Теоремой 3.2.2 (стр. 156), из которой следует первый порядок точности интервального

метода Гаусса. Если, как и ранее, обозначить через  $IGA(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  результат интервального метода Гаусса в применении к системе  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , то сказанное означает, что

$$\text{dist}(\square \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}), IGA(\mathbf{A}, \mathbf{b})) \leq C \max\{\|\text{wid } \mathbf{A}\|, \|\text{wid } \mathbf{b}\|\},$$

где  $\|\cdot\|$  — матричная и векторная нормы соответственно, и  $C$  — некоторая положительная константа, зависящая от выбора норм и расстояния  $\text{dist}$ .

Таким образом, при малых ширинах матрицы и правой части ИСЛАУ качество оценивания множеств решений с помощью интервального метода Гаусса также будет неплохим. Если же ширина элементов в ИСЛАУ делается относительно большой, то качество результатов интервального метода Гаусса можно кратко резюмировать как «невысокое». Это подтверждается результатами многочисленных тестовых расчётов (см. самое первое исследование на эту тему в [58]). Ещё одной неприятной особенностью интервального метода Гаусса является тот факт, что даже для ИСЛАУ с точечными матрицами, вся интервальность которых сосредоточена в правой части, он может выдавать не оптимальные внешние оценки множества решений.

**Пример 7.2.2** (И. Рон [53]) Рассмотрим интервальную линейную  $4 \times 4$ -систему уравнений

$$\begin{pmatrix} \gamma^2/\alpha & [-\gamma, \gamma] & [-\gamma, \gamma] & [-\gamma, \gamma] \\ 0 & \beta & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \beta & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ [-\gamma, \gamma] \\ [-\gamma, \gamma] \\ [-\gamma, \gamma] \end{pmatrix} \quad (7.17)$$

с параметрами  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 1$  и  $\gamma > 0$ . Последний из них,  $\gamma$ , — это радиус интервальных элементов системы, а  $\alpha$  и  $\beta$  влияют на абсолютную и относительную грубость результата интервального метода Гаусса.

Несложными вычислениями можно показать, что точная верхняя граница первой компоненты точек множества решений системы (7.17) равна

$$\bar{x}_1 = \frac{\alpha(3\beta + 5)}{(\beta - 1)(\beta + 2)}. \quad (7.18)$$

С другой стороны, интервальный метод Гаусса для верхнего конца первой компоненты интервальной оценки множества решений даёт

$$\bar{\mathbf{y}}_1 = \frac{\alpha(3\beta^2 + 3\beta + 2)}{\beta^2(\beta - 1)}. \quad (7.19)$$

Ясно, что при приближении  $\beta$  к единице и размеры множества решений, и его оценка с помощью интервального метода Гаусса неограниченно возрастают. Но, сравнивая выражения (7.18) и (7.19) друг с другом, можно заключить, что для всякого  $r \in ]0, 2[$ , и произвольной положительной константы  $K$  найдутся  $\alpha > 0$  и  $\beta > 1$ , такие что

$$\frac{\bar{\mathbf{y}}_1 - \bar{x}_1}{\bar{x}_1} > r \quad \text{и} \quad \bar{\mathbf{y}}_1 - \bar{x}_1 > K.$$

Это означает, что интервальный метод Гаусса может давать относительное огрубление оценки множества решений для (7.17) до двух раз, а абсолютное огрубление может быть вообще сколь угодно большим. ■

Наши заключения подкрепляются результатами большого количества вычислительных экспериментов с интервальным методом Гаусса (см., к примеру, [58]). И всё-таки, несмотря на очевидные недостатки интервального метода Гаусса при решении реальных задач он может работать подчас лучше более тонких методик. Проиллюстрируем этот вывод всего одним примером.

**Пример 7.2.3** Интервальная линейная система с матрицей Ноймайера-Райхмана

$$\begin{pmatrix} 3.33 & [0, 2] & [0, 2] \\ [0, 2] & 3.33 & [0, 2] \\ [0, 2] & [0, 2] & 3.33 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-1, 2] \\ [-1, 2] \\ [-1, 2] \end{pmatrix} \quad (7.20)$$

успешно просчитывается интервальным методом Гаусса, и получаемый при этом ответ

$$\begin{pmatrix} [-22.7496, 22.9337] \\ [-18.5923, 18.6891] \\ [-18.5923, 18.6891] \end{pmatrix}$$

является очень грубым, но всё-таки не совсем неинформативным в сравнении с оптимальными внешними оценками множества решений

$$\begin{pmatrix} [-3.66797, 3.45107] \\ [-3.66797, 3.45107] \\ [-3.66797, 3.45107] \end{pmatrix}.$$

Матрица системы (7.20), будучи неособенной, не является уже сильно неособенной: как мы видели в §2.5 для матрицы Ноймайера-Райхмана 3-го порядка граница между неособенностью и сильной неособенностью пролегает при значении диагонального параметра примерно равном 3.37228132. По этой причине в применении к системе (7.20) другие более тонкие методики, использующие, к примеру, предобуславливание ИСЛАУ (см. §7.5), уже отказались бы работать, тогда как метод Гаусса, использующий лишь частичные преобразования матрицы ИСЛАУ, успешно выдаёт некоторый ответ. ■

Для ИСЛАУ с сильно неособенными интервальными матрицами применение интервального метода Гаусса можно порекомендовать в редких случаях. Почти всегда при том же объёме вычислений более узкие интервальные оценки множеств решений могут быть получены с помощью других более современных методов. С другой стороны, сама идея интервализации, в том или ином виде, метода Гаусса для систем линейных уравнений далеко не исчерпана. Дальнейшее развитие интервальных арифметик и способов оценивания областей значений функций наверняка вызовет рождение новых версий интервального метода Гаусса.

Например, вместо классической интервальной арифметики можно применить в методе Гаусса так называемую аффинную или интервально-аффинную арифметику, обладающие «памятью». На этом пути получается, в частности, «интервально-аффинный метод Гаусса», предложенный Р.Р. Ахмеровым в [2, 16] на основе разработанной им версии интервальной аффинной арифметики. Вычислительные эксперименты свидетельствуют о том, что интервально-аффинный метод Гаусса, во-первых, имеет существенно более широкую область применимости, нежели обычный интервальный метод Гаусса, и, во-вторых, качество выдаваемых им результатов оказывается существенно лучшим. Кроме того, интервально-аффинный метод Гаусса способен учитывать связи между интервальными данными задачи, например, симметричность всех точечных матриц из рассматриваемой ИСЛАУ. Поэтому он применим к симметричным, кососимметричным и т. п. интервальным системам линейных алгебраических уравнений.

### 7.3 Интервальный итерационный метод Гаусса-Зейделя

Интервальный метод Гаусса-Зейделя, которому посвящён этот параграф, является итерационной процедурой для уточнения известной внешней оценки множества решений ИСЛАУ. Другое его предназначение — это нахождение внешней оценки части множества решений, ограниченной заданным брусом. Интервальный метод Гаусса-Зейделя обычно применяют после предварительного предобуславливания системы (см. §7.5 ниже). Используя терминологию, которая вводится далее в §7.8, можно также сказать, что интервальный метод Гаусса-Зейделя является локальной оценивающей процедурой для интервальных систем линейных алгебраических уравнений.

Предположим, что дана интервальная система линейных уравнений  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ , причём интервальная  $n \times n$ -матрица  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$  не предполагается неособенной (регулярной). Мы лишь потребуем, чтобы элементы её главной диагонали не содержали нуля, т. е.  $0 \notin \mathbf{a}_{ii}$  для  $i = 1, 2, \dots, n$ . Если  $\mathbf{A}$  неособенна, то этому условию всегда можно удовлетворить перестановкой строк. Пусть также задан некоторый брус  $\mathbf{X}$ , содержащий множество решений  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  или же некоторую его часть, которая интересует нас по условиям задачи.

Если  $\tilde{x}$  лежит во множестве решений и бресе  $\mathbf{X}$ , так что  $\tilde{x} \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \mathbf{X}$ , то, прежде всего,

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$$

для некоторых  $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij}) \in \mathbf{A}$  и  $\tilde{b} = (\tilde{b}_i) \in \mathbf{b}$ , или, в развёрнутом виде,

$$\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}\tilde{x}_j = \tilde{b}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Оставим в левых частях этих равенств слагаемые, соответствующие диагональным элементам матрицы, а остальные перенесём в правые части и поделим обе части

равенств на  $\tilde{a}_{ii}$ . Получим

$$\tilde{x}_i = \left( \tilde{b}_i - \sum_{j \neq i} \tilde{a}_{ij} \tilde{x}_j \right) / \tilde{a}_{ii}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7.21)$$

Интервализуем выражения в правых частях (7.21) и положим

$$\mathbf{X}'_i := \left( \mathbf{b}_i - \sum_{j \neq i} \mathbf{a}_{ij} \mathbf{X}_j \right) / \mathbf{a}_{ii}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Мы должны признать, что

$$\tilde{x}_i \in \mathbf{X}'_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

поскольку выражения для  $\mathbf{X}'_i$  являются естественными интервальными расширениями правых частей в (7.21) по  $\tilde{a}_{ij} \in \mathbf{a}_{ij}$ ,  $\tilde{b}_i \in \mathbf{b}_i$  и  $\tilde{x}_j \in \mathbf{X}_j$ . Итак,  $\tilde{x} \in \mathbf{X}'$ , и это верно для любой точки  $\tilde{x} \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \mathbf{X}$ . Следовательно, в целом  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \mathbf{X} \subseteq \mathbf{X}'$ , т. е. брус  $\mathbf{X}'$  является новой внешней оценкой рассматриваемой части множества решений.

Чтобы взять лучшее от обеих внешних оценок — новой  $\mathbf{X}'$  и старой  $\mathbf{X}$ , естественно выполнить их пересечение  $\mathbf{X}' \cap \mathbf{X}$ . Далее процесс построения новой внешней оценки для множества решений можно повторить, отправляясь от полученной уточнённой оценки, потом снова взять пересечение с предшествующей внешней оценкой, и т. д. Наконец, поскольку в этом итерационном процессе компоненты нового приближения насчитываются последовательно друг за другом, начиная с самой первой, то мы можем организовывать пересечение старой и новой оценок также по мере вычисления компонент и сразу же привлекать уточнённые новые компоненты для расчёта следующих по номеру компонент вычисляемого приближения. Именно так делается в известном итерационном методе Гаусса-Зейделя для решения систем линейных уравнений (см., к примеру, [5, 15]). В интервальном случае это имеет даже больший смысл, так как монотонность по включению для арифметических операций и пересечения немедленно приводит к более узким (точнее, не более широким) интервальным результатам. Получающий интервальный итерационный метод, псевдокод которого выписан в Табл. 7.2, называется *интервальным методом Гаусса-Зейделя*.

Может ли в процессе описанного выше уточнения-пересечения встретиться ситуация  $\mathbf{X}'_i \cap \mathbf{X}_i = \emptyset$  для некоторого индекса  $i$ ? Из наших рассуждений следует, что это возможно лишь при нарушении исходного допущения о том, что начальный брус содержит точки множества решений, т. е. когда  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \mathbf{X} = \emptyset$ . Таким образом, интервальный метод Гаусса-Зейделя можно применять для произвольного начального бруса  $\mathbf{X}$ , не обязательно содержащего  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  или какую-то его часть. Но если в процессе итерирования мы получаем пустое множество, то это свидетельствует о том, что брус  $\mathbf{X}$  вообще не пересекает оцениваемого множества решений.

Ясно, что результатом работы интервального метода Гаусса-Зейделя является брус, не более широкий, чем начальное приближение  $\mathbf{X}$ . Когда он действительно более узок, чем  $\mathbf{X}$ ? Исследование интервального метода Гаусса-Зейделя было выполнено В. Бартом и Е. Нудингом в [18], а затем А. Ноймайером в [40, 42], и ниже мы представляем наиболее важные из их результатов. В наших построениях существенную роль играют понятия  $M$ -матрицы,  $H$ -матрицы и компаранта (см. Главу 2).

Таблица 7.2. Интервальный метод Гаусса-Зейделя для внешнего оценивания множеств решений ИСЛАУ

<p>Вход</p> <p>Интервальная линейная система уравнений <math>\mathbf{Ax} = \mathbf{b}</math>.</p> <p>Брус <math>\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n)^\top \in \mathbb{IR}^n</math>, ограничивающий желаемую часть объединённого множества решений <math>\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})</math>.</p> <p>Некоторая константа <math>\epsilon &gt; 0</math>.</p>
<p>Выход</p> <p>Уточнённая внешняя оценка <math>\mathbf{X}'</math> для пересечения множества решений <math>\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})</math> с брусом <math>\mathbf{X}</math>, либо информация «исходный брус <math>\mathbf{X}</math> не пересекает множества решений <math>\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})</math>».</p>
<p>Алгоритм</p> <p><math>q \leftarrow +\infty</math>;</p> <p>DO WHILE ( <math>q \geq \epsilon</math> )</p> <p style="padding-left: 2em;">DO FOR <math>i = 1</math> TO <math>n</math></p> <p style="padding-left: 4em;"><math>\mathbf{X}'_i \leftarrow \mathbf{X}_i \cap \left( \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \mathbf{a}_{ij} \mathbf{X}'_j - \sum_{j=i+1}^n \mathbf{a}_{ij} \mathbf{X}_j \right) / \mathbf{a}_{ii}</math>;</p> <p style="padding-left: 4em;">IF ( <math>\mathbf{X}'_i = \emptyset</math> ) THEN</p> <p style="padding-left: 6em;">STOP, сигнализируя «множество решений <math>\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})</math> не пересекает брус <math>\mathbf{X}</math>»</p> <p style="padding-left: 4em;">END IF</p> <p style="padding-left: 2em;">END DO</p> <p><math>q \leftarrow</math> расстояние между векторами <math>\mathbf{X}</math> и <math>\mathbf{X}' = (\mathbf{X}'_1, \dots, \mathbf{X}'_n)^\top</math>;</p> <p><math>\mathbf{X} \leftarrow \mathbf{X}'</math>;</p> <p>END DO</p>

**Теорема 7.3.1** Если вектор  $\mathbf{X}^* \in \mathbb{IR}^n$  является пределом последовательности, порождаемой интервальным методом Гаусса-Зейделя в применении к интервальной линейной системе  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , то

$$\langle \mathbf{A} \rangle | \mathbf{X}^* | \leq | \mathbf{b} |. \quad (7.22)$$

Если же  $\mathbf{A}$  — интервальная  $H$ -матрица, то

$$| \mathbf{X}^* | \leq \langle \mathbf{A} \rangle^{-1} | \mathbf{b} |. \quad (7.23)$$

**Доказательство.** Напомним, что при реализации интервального метода Гаусса-Зейделя мы рассматриваем интервальные матрицы  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$ , в которых диагональные элементы не содержат нулей, т. е.  $0 \notin \mathbf{a}_{ii}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Интервальный метод Гаусса-Зейделя порождает в  $\mathbb{IR}^n$  последовательность вложенных интервальных векторов, которая, следовательно, должна иметь некоторый предел  $\mathbf{X}^*$  (см. Предложение 2.4.2). Переходя к пределу по счётчику шагов в расчётных формулах, определяющих интервальные итерации Гаусса-Зейделя (см. Табл. 7.2), и учитывая, что  $\lim \mathbf{X} = \lim \mathbf{X}' = \mathbf{X}^*$ , получим

$$\mathbf{X}_i^* = \mathbf{X}_i^* \cap \left( \left( \mathbf{b}_i - \sum_{j \neq i} \mathbf{a}_{ij} \mathbf{X}_j^* \right) / \mathbf{a}_{ii} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Следовательно, по крайней мере

$$\mathbf{X}_i^* \subseteq \left( \mathbf{b}_i - \sum_{j \neq i} \mathbf{a}_{ij} \mathbf{X}_j^* \right) / \mathbf{a}_{ii},$$

и потому

$$| \mathbf{X}_i^* | \leq \left| \left( \mathbf{b}_i - \sum_{j \neq i} \mathbf{a}_{ij} \mathbf{X}_j^* \right) / \mathbf{a}_{ii} \right|$$

для всех  $i = 1, 2, \dots, n$ . Оценим сверху правые части полученных неравенств:

$$\begin{aligned} \left| \left( \mathbf{b}_i - \sum_{j \neq i} \mathbf{a}_{ij} \mathbf{X}_j^* \right) / \mathbf{a}_{ii} \right| &= | (\mathbf{a}_{ii})^{-1} | \cdot \left| \mathbf{b}_i - \sum_{j \neq i} \mathbf{a}_{ij} \mathbf{X}_j^* \right| \\ &\leq \langle \mathbf{a}_{ii} \rangle^{-1} \left( | \mathbf{b}_i | + \sum_{j \neq i} | \mathbf{a}_{ij} | | \mathbf{X}_j^* | \right) \end{aligned}$$

для всякого  $i = 1, 2, \dots, n$ . Таким образом, в целом имеем

$$| \mathbf{X}_i^* | \leq \langle \mathbf{a}_{ii} \rangle^{-1} \left( | \mathbf{b}_i | + \sum_{j \neq i} | \mathbf{a}_{ij} | | \mathbf{X}_j^* | \right),$$

что равносильно

$$\langle \mathbf{a}_{ii} \rangle | \mathbf{X}_i^* | - \sum_{j \neq i} | \mathbf{a}_{ij} | | \mathbf{X}_j^* | \leq | \mathbf{b}_i |,$$



или

$$(\langle \mathbf{A} | \mathbf{X}^* |) \leq |\mathbf{b}_i|$$

для всех  $i = 1, 2, \dots, n$ , т. е. совпадает с (7.22).

Если же  $\mathbf{A}$  — интервальная  $H$ -матрица, то  $\langle \mathbf{A} \rangle$  — это  $M$ -матрица и, домножая обе части (7.22) на  $\langle \mathbf{A} \rangle^{-1} \geq 0$ , получим (7.23). ■

Из неравенства (7.23) следует, что если в системе  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  интервальная матрица  $\mathbf{A}$  является  $H$ -матрицей, то любой начальный интервальный вектор  $\mathbf{X}$  с достаточно большой чебышёвской нормой  $\|\mathbf{X}\|_\infty$  улучшается (т. е. уменьшается в размерах) интервальным методом Гаусса-Зейделя. Напротив, если  $\mathbf{A}$  не есть  $H$ -матрица, то такого вывода сделать уже нельзя. А. Ноймайер в [42] установил в этих условиях следующий эффектный результат:

**Теорема 7.3.2** [42] *Если матрица  $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  не является  $H$ -матрицей, то существуют сколь угодно широкие интервальные векторы, которые не улучшаются интервальным методом Гаусса-Зейделя, применённым для внешнего оценивания множества решений однородной интервальной линейной системы  $\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ .*

**Доказательство.** Если  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  не является  $H$ -матрицей, то в силу Предложения 2.9.3 существует ненулевой вектор  $u \geq 0$ , такой что  $\langle \mathbf{A} \rangle u \leq 0$ . Расписывая это неравенство покомпонентно, получим

$$\sum_{j \neq i} |a_{ij}| u_j \geq \langle a_{ii} \rangle u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (7.24)$$

так что при любом вещественном  $\delta \geq 0$

$$\sum_{j \neq i} |a_{ij}| ([-\delta, \delta] u_j) = [-\delta, \delta] \sum_{j \neq i} |a_{ij}| u_j \supseteq [-\delta, \delta] \langle a_{ii} \rangle u_i \quad (7.25)$$

для всех  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Возьмём теперь начальной внешней оценкой множества решений  $\Xi(\mathbf{A}, 0)$  уравнённый интервальный вектор  $\mathbf{X} = [-\delta, \delta] u$ . В соответствии с расчётными формулами интервального метода Гаусса-Зейделя мы должны положить первой компонентой следующего приближения интервал

$$\mathbf{X}'_1 = \mathbf{X}_1 \cap \left( 0 - \sum_{j=2}^n a_{1j} \mathbf{X}_j \right) / a_{11}.$$

Но включение (7.25) имеет следствием

$$\left( \sum_{j=2}^n |a_{1j}| [-\delta, \delta] u_j \right) / \langle a_{11} \rangle \supseteq [-\delta, \delta] u_1,$$

так что

$$\left( - \sum_{j=2}^n a_{1j} \mathbf{X}_j \right) / a_{11} \supseteq \mathbf{X}_1,$$

и поэтому  $\mathbf{X}'_1 = \mathbf{X}_1$ . То же самое по индукции доказывается и для остальных, т. е. для 2-й, 3-й и т. д. компонент вектора следующего приближения  $\mathbf{X}'$ . Итак,  $\mathbf{X}' = \mathbf{X}$  и никакого улучшения оценки интервальный метод Гаусса-Зейделя в этом случае не обеспечивает. ■

Нетрудно сообразить, что результат доказанной теоремы может остаться справедливым и в случае, когда вектор правой части системы уравнений — ненулевой. Но при этом матрица системы должна быть «достаточно далёкой» от  $H$ -матрицы в том смысле, что в представлении компаранта  $\langle \mathbf{A} \rangle = sI - P$ , где  $I, P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P \geq 0$  и  $I$  — единичная матрица, величина  $s$  должна быть существенно меньше спектрального радиуса  $\rho(P)$  (см. §2.9). Тогда неравенство (7.24) и следующее из него включение (7.25) выполняются с достаточным запасом, а потому даже при ненулевой правой части ИСЛАУ будет справедливо равенство  $\mathbf{X}' = \mathbf{X}$ .

**Следствие из Теоремы 7.3.1.** Если в интервальной системе линейных алгебраических уравнений  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  матрица  $\mathbf{A}$  имеет диагональное преобладание (см. Определение 2.5.2), то в применении к этой ИСЛАУ любой начальный интервальный вектор  $\mathbf{X}$  с достаточно большой чебышёвской нормой  $\|\mathbf{X}\|_\infty$  улучшается (т. е. уменьшается в размерах) интервальным методом Гаусса-Зейделя.

Нередко с помощью интервальных итераций Гаусса-Зейделя можно получить оптимальные (наилучшие) внешние оценки объединённого множества решений. Это верно даже для целых классов матриц.

**Теорема 7.3.3** (теорема Барта-Нудинга) *Если в интервальной системе линейных уравнений  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  матрица  $\mathbf{A}$  является  $M$ -матрицей, то интервальный метод Гаусса-Зейделя сходится к оптимальной внешней интервальной оценке множества решений  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  из любого начального приближения, содержащего  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ .*

Доказательство можно найти в [18, 42].

Поведение интервального метода Гусса-Зейделя сильно зависит от того, какую часть множества решений мы оцениваем, выбирая соответствующим образом брус начального приближения. Это демонстрирует следующий

**Пример 7.3.1** Рассмотрим интервальную линейную систему (7.7):

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 1] \\ [-1, 2] & [2, 4] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1, 2] \\ [1, 2] \end{pmatrix}.$$

Матрица этой системы не является  $H$ -матрицей, и потому неудивительно, что интервальный метод Гаусса-Зейделя в применении к данной ИСЛАУ никак не улучшает сколь угодно широкие начальные брусы.

С другой стороны, предположим, что необходимо найти внешнюю интервальную оценку лишь той части множества решений (изображённого на Рис. 7.2), которая содержится в первом квадранте, т. е. имеет неотрицательные компоненты. Тогда любой брус вида  $([0, p], [0, q])^\top$  быстро сжимается интервальным методом Гаусса-Зейделя до оптимальной оценки соответствующей части множества решений. В частности, если взять  $p$  и  $q$  достаточно большими, то получим  $([0, 4], [0, 3])^\top$  — оптимальную оценку множества решений в первом квадранте. ■

## 7.4 Формально-алгебраический подход

Развиваемый в этом параграфе подход к задаче внешнего оценивания множеств решений ИСЛАУ мы называем *формально-алгебраическим* (или, кратко, *формальным подходом*), потому что он сводит исходную постановку к задаче нахождения *формального решения* некоторой вспомогательной интервальной системы уравнений. Это, по существу, весьма общая методика, которая может реализовываться различными конкретными способами в зависимости от выбора вспомогательной системы уравнений и численного метода поиска её формального решения. Отличительной особенностью формального подхода является его универсальность: как его общая теоретическая схема, так и соответствующие численные методы с равным успехом применимы к задачам внутреннего и внешнего интервального оценивания даже более общих, чем объединённое, множеств решений (см. Главы 10, 11 и 12).

Основой формального подхода в применении к задаче этой главы являются следующие результаты.

**Предложение 7.4.1** Пусть  $A$  — неособенная диагональная матрица. Множество решений интервальной линейной системы уравнений  $Ax = b$  с  $A \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  и  $b \in \mathbb{IR}^n$  совпадает с множеством решений интервальной системы

$$x = Cx + d, \quad (7.26)$$

где  $C = I - LA$ ,  $d = Lb$ .

**Доказательство.** Очевидно, что

$$\begin{aligned} \Xi(A, b) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(LAx = Lb)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(x = (I - LA)x + Lb)\}. \end{aligned}$$

Но если  $A$  — неособенная диагональная матрица, то  $A \in \mathbf{A}$  тогда и только тогда, когда  $(I - LA) \in (I - LA)$ , а  $b \in \mathbf{b}$  тогда и только тогда, когда  $Lb \in L\mathbf{b}$ . Поэтому, обозначая  $C = I - LA$  и  $d = Lb$ , мы можем продолжить выкладки следующим образом

$$\begin{aligned} \Xi(A, b) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists(I - LA) \in (I - LA))(\exists(Lb) \in L\mathbf{b})(x = (I - LA)x + Lb)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists C \in (I - LA))(\exists d \in L\mathbf{b})(x = Cx + d)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists C \in \mathbf{C})(\exists d \in \mathbf{d})(x = Cx + d)\} \end{aligned}$$

для  $C = I - LA$ ,  $d = Lb$ , что и требовалось. ■

**Теорема 7.4.1** (теорема Майера-Варнке). Пусть  $C \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ ,  $d \in \mathbb{IR}^n$ ,

$$\Xi = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists C \in \mathbf{C})(\exists d \in \mathbf{d})(x = Cx + d)\}$$

— множество решений интервальной линейной системы уравнений  $x = Cx + d$ , а  $x^* \in \mathbb{IR}^n$  — формальное решение этой системы. Тогда

- (i) для любой линейной системы  $x = Cx + d$  с  $C \in \mathbf{C}$  и  $d \in \mathbf{d}$  по крайней мере одно её решение содержится в брус  $\mathbf{x}^*$ ;
- (ii) включение  $\Xi \subseteq \mathbf{x}^*$  имеет место тогда и только тогда, когда интервальная матрица  $(I - C)$  неособенна.

**Доказательство.** Зафиксируем матрицу  $\tilde{C} \in \mathbf{C}$  и вектор  $\tilde{d} \in \mathbf{d}$  и рассмотрим отображение из  $\mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}^n$ , действующее по правилу

$$x \mapsto \tilde{C}x + \tilde{d}.$$

Так как  $\{\tilde{C}x + \tilde{d} \mid x \in \mathbf{x}^*\} \subseteq \tilde{C}\mathbf{x}^* + \tilde{d} \subseteq \mathbf{C}\mathbf{x}^* + \mathbf{d} = \mathbf{x}^*$ , то брус  $\mathbf{x}^*$  переводится этим отображением в себя. Следовательно, в силу теоремы Брауэра о неподвижной точке (стр. 24) в  $\mathbf{x}^*$  должно существовать хотя бы одно решение  $\tilde{x}$  системы уравнений

$$x = \tilde{C}x + \tilde{d}. \quad (7.27)$$

Коль скоро проведённое рассуждение справедливо для любых  $\tilde{C} \in \mathbf{C}$  и  $\tilde{d} \in \mathbf{d}$ , получаем утверждение (i).

Если интервальная матрица  $(I - C)$  неособенна, то каждая из систем уравнений (7.27) с  $\tilde{C} \in \mathbf{C}$  и  $\tilde{d} \in \mathbf{d}$  имеет ровно одно решение, откуда и следует включение  $\Xi \subseteq \mathbf{x}^*$ .

Наоборот, если справедливо это включение, то объединённое множество решений  $\Xi$  ограничено, а потому ограничены все множества решений отдельно взятых систем уравнений (7.27) для любых  $\tilde{C} \in \mathbf{C}$  и  $\tilde{d} \in \mathbf{d}$ . В этих условиях все точечные матрицы из  $(I - C)$  обязаны быть неособенными, поскольку решения системы линейных уравнений с особенной точечной матрицей образовывали бы неограниченное аффинное многообразие. ■

Итак, нахождение внешней оценки множества решений исходной ИСЛАУ свелось к нахождению формального решения некоторой специальной интервальной системы в рекуррентном виде. Заметим, что задача вычисления формального решения — это уже не задача оценивания или приближения, а, по существу, традиционная математическая задача нахождения решения некоторого уравнения или системы уравнений, хотя и рассматриваемая в непривычной алгебраической системе — интервальной арифметике  $\mathbb{IR}$ . Это формальное решение может быть вычислено весьма разнообразными способами, которые рассматриваются далее в этой главе и потом в Главе 12 нашей книги. К сожалению, воспользоваться теоремой Майера-Варнке мы можем не всегда, так как формальное решение системы в рекуррентном виде (7.26), получающейся из исходной ИСЛАУ (7.2), не всегда существует в  $\mathbb{IR}^n$ . Это демонстрирует

**Пример 7.4.1** Для интервального уравнения  $[3, 4]x = [0, 3]$  множеством решений является интервал  $[0, 1]$ , и его отыскание трудностей не представляет. В то же время, для  $A = 1$  переход к уравнению рекуррентном виде (7.26) даёт

$$x = [-3, -2]x + [0, 3], \quad (7.28)$$

и это уравнение не имеет правильных формальных решений.

В самом деле, предположим, что для (7.28) всё-таки существует формальное решение  $\mathbf{s} \in \mathbb{IR}$ . Ясно, что  $\mathbf{s}$  не может быть отрицательным интервалом, так как тогда  $[-3, -2] \mathbf{s} + [0, 3] > 0$  в противоречие со знаком левой части в (7.28). Поэтому  $\bar{\mathbf{s}} \geq 0$ , и из правил выполнения интервального умножения следует  $\inf([-3, -2] \cdot \mathbf{s}) = -3\bar{\mathbf{s}}$ . Подставляя это значение в уравнение для нижних концов

$$\underline{\mathbf{s}} = \underline{[-3, -2] \mathbf{s} + [0, 3]},$$

получаем  $\underline{\mathbf{s}} = -3\bar{\mathbf{s}}$ , т.е.  $\mathbf{s} = [-3t, t]$  для некоторого  $t \geq 0$ . Но если подставить найденное для  $\mathbf{s}$  представление в (7.28), будем иметь для верхних концов уравнение  $t = 9t + 3$ , и его решение  $t = -3/8$  противоречит условию  $t \geq 0$ .

Отметим, что в полной интервальной арифметике  $\mathbb{KR}$  формальное решение уравнения (7.28) существует и равно неправильному интервалу  $[2, -1]$ , хотя как-либо проинтерпретировать его с помощью теоремы Майера-Варнке невозможно. ■

На этом же примере можно понять роль масштабирующей диагональной матрицы  $\Lambda$  из Предложения 7.4.1. Если бы мы взяли её равной, скажем,  $\Lambda = \frac{1}{4}$ , то вместо (7.28) уравнением в рекуррентном виде являлось бы

$$\mathbf{x} = [0, \frac{1}{4}] \mathbf{x} + [0, \frac{3}{4}].$$

Теперь у него существует правильное формальное решение  $[0, 1]$ , дающее оптимальную оценку множества решений исходного интервального уравнения. Таким образом, с помощью подходящего выбора  $\Lambda$  мы иногда можем добиться того, чтобы вспомогательная интервальная система в рекуррентном виде (7.26) имела решение в  $\mathbb{IR}^n$ .

Для уяснения сферы применимости теоремы Майера-Варнке полезно следующее простое рассуждение. Пусть  $\mathbf{x}$  — правильное формальное решение интервальной системы уравнений в рекуррентном виде (7.26). Беря радиус от обеих частей равенства

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{d},$$

получим

$$\text{rad } \mathbf{x} = \text{rad}(\mathbf{C}\mathbf{x}) + \text{rad } \mathbf{d}.$$

Но  $\text{rad}(\mathbf{C}\mathbf{x}) \geq |\mathbf{C}| \text{rad } \mathbf{x}$  (см. Предложение 2.2.4, стр. 102), и в случае, когда все компоненты свободного члена  $\mathbf{d} = \Lambda \mathbf{b}$  имеют ненулевую ширину, т.е.  $\text{rad } \mathbf{d} > 0$ , справедливо неравенство

$$\text{rad } \mathbf{x} > |\mathbf{C}| \text{rad } \mathbf{x}.$$

Оно означает, в частности, что  $\text{rad } \mathbf{x} > 0$ , т.е. что правильное формальное решение является телесным брусом. Кроме того, мы можем отметить, что для положительного вектора  $\mathbf{y} = \text{rad } \mathbf{x}$  и для неотрицательной матрицы  $|\mathbf{C}|$  имеет место  $|\mathbf{C}|\mathbf{y} < \mathbf{y}$ . Отсюда в силу Предложения 2.3.3 (стр. 108) следует, что спектральный радиус матрицы  $|\mathbf{C}|$  должен быть строго меньше 1. Это необходимое условие существования правильного формального решения системы (7.26) при  $\text{rad } \mathbf{d} > 0$ .

С учётом сказанного естественны следующие результаты.

**Теорема 7.4.2** (теорема Апостолатоса-Кулиша). *Если матрица  $\mathbf{C} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  такова, что  $\rho(|\mathbf{C}|) < 1$ , то для любого вектора  $\mathbf{d} \in \mathbb{IR}^n$  интервальная линейная система уравнений*

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{d} \tag{7.26}$$

имеет единственное правильное формальное решение. Оно может быть найдено с помощью итерационного процесса

$$\mathbf{x}^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

при любом начальном векторе  $\mathbf{x}^{(0)}$  и является внешней интервальной оценкой множества решений рассматриваемой интервальной системы.

**Теорема 7.4.3** (теорема Алефельда-Херцбергера). Пусть в интервальной системе уравнений

$$x = G(\mathbf{a}, x) \tag{7.29}$$

отображение  $G : \mathbb{IR}^n \rightarrow \mathbb{IR}^n$ , действующее по правилу  $\mathbf{x} \mapsto G(\mathbf{a}, \mathbf{x})$ , является сжимающим, а выражения для компонент  $G_i(\mathbf{a}, x)$  являются элементарными функциональными выражениями, определёнными для рассматриваемых значений аргументов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{x}$ . Тогда правильное формальное решение интервальной системы уравнений (7.29) существует, единственно и является внешней интервальной оценкой её множества решений  $\Xi(G, \mathbf{a}) = \{x \in \mathbb{IR}^n \mid (\exists \mathbf{a} \in \mathbf{a})(x = G(\mathbf{a}, x))\}$ .

Мы проведём подробное доказательство только для теоремы Апостолатоса-Кулиша, так как для теоремы Алефельда-Херцбергера оно выполняется, по сути, тем же самым способом.

**Доказательство.** Рассматривая пространство  $\mathbb{IR}^n$  как мультиметрическое, с мультиметрикой (2.19), покажем, что отображение  $\mathcal{G} : \mathbb{IR}^n \rightarrow \mathbb{IR}^n$ , задаваемое правилом

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{d},$$

является сжимающим в смысле Определения 2.4.1 (стр. 112). В самом деле, используя свойства мультиметрики (1.95) и (2.22), получим

$$\text{Dist}(\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{d}, \mathbf{C}\mathbf{y} + \mathbf{d}) = \text{Dist}(\mathbf{C}\mathbf{x}, \mathbf{C}\mathbf{y}) \leq |\mathbf{C}| \cdot \text{Dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Поэтому если спектральный радиус матрицы  $|\mathbf{C}|$  меньше единицы, то мы оказываемся в условиях теоремы Шрёдера о неподвижной точке (Теорема 2.4.2, стр. 112). Как следствие, для рассматриваемой интервальной системы (7.26) существует формальное решение, которое мы обозначим через  $\mathbf{x}^*$ . Возьмём какую-нибудь точку  $\tilde{x}$  из множества решений для (7.26), так что  $\tilde{x} = \tilde{C}\tilde{x} + \tilde{d}$  для некоторых  $\tilde{C} \in \mathbf{C}$  и  $\tilde{d} \in \mathbf{d}$ , и покажем, что необходимо  $\tilde{x} \in \mathbf{x}^*$ .

Для этого организуем в  $\mathbb{IR}^n$  вспомогательный итерационный процесс

$$\mathbf{x}^{(0)} \leftarrow \tilde{x}, \tag{7.30}$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d}, \quad k = 0, 1, \dots \tag{7.31}$$

Пользуясь математической индукцией, нетрудно показать, что все последовательные приближения этого процесса содержат  $\tilde{x}$ . Действительно, для  $\mathbf{x}^{(0)}$  это верно по построению. Если же  $\tilde{x} \in \mathbf{x}^{(k)}$ , то в силу свойства монотонности интервальных арифметических операций по включению

$$\tilde{x} = \tilde{C}\tilde{x} + \tilde{d} \in \mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d} = \mathbf{x}^{(k+1)}.$$

Таким образом,  $\tilde{x} \in \mathbf{x}^{(k)}$  для любого номера  $k$ .

Снова обратимся к теореме Шрёдера о неподвижной точке. Тот факт, что отображение  $\mathcal{G} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  является сжимающим, влечёт сходимость итерационного процесса, определяемого формулами (7.30)–(7.31) в мультиметрическом пространстве  $\mathbb{R}^n$ . В условиях доказываемой теоремы отображение  $\mathcal{G}$  непрерывно, и потому предельный переход по  $k \rightarrow \infty$  в равенстве  $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d}$  показывает, что сходится последовательность  $\mathbf{x}^{(k)}$  к единственному формальному решению  $\mathbf{x}^*$  системы уравнений (7.26). Поскольку принадлежность  $\tilde{x} \in \mathbf{x}^{(k)}$  равносильна системе  $2n$  нестрогих неравенств, то она должна сохраниться и в пределе:

$$\tilde{x} \in \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^*.$$

Это и требовалось доказать. ■

Хотя может показаться, что Теоремы 7.4.2–7.4.3 имеют меньшую общность, чем теорема Майера-Варнке, рассуждения на стр. 380 показывают, что это относится лишь к случаю, когда  $\text{rad } \mathbf{d}_i = 0$  для некоторых  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Его иллюстрируют следующие примеры.

**Пример 7.4.2** Для интервальной линейной системы

$$\begin{pmatrix} [5, 6] & [-2, -1] \\ [-2, 1] & [4, 6] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

оптимальная внешняя оценка множества решений является брусом

$$\begin{pmatrix} [0.2162, 1] \\ [1.25, 2.5] \end{pmatrix}$$

(в этом несложно убедиться прямым построением множества решений по методике из §5.26 или с помощью каких-либо программ визуализации множеств решений).

Чтобы воспользоваться для внешнего оценивания множества решений формальным подходом, возьмём в качестве масштабирующей матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнение (7.26) получит вид

$$x = \begin{pmatrix} [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}] & [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ [-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] & [-\frac{1}{2}, 0] \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

где  $x = (x_1, x_2)^\top$ , и его формальным решением является вектор

$$\begin{pmatrix} [-1, 2] \\ [0, 3] \end{pmatrix},$$

который действительно даёт внешнюю оценку множества решений. Заметим, что при этом спектральный радиус матрицы модулей для  $(I - LA)$  равен в точности 1.

Если же диагональной масштабирующей матрицей  $L$  взять

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix},$$

то формальным решением соответствующего уравнения в рекуррентном виде (7.26) будет

$$\begin{pmatrix} [0.1944, 1] \\ [1.1667, 2.5] \end{pmatrix}.$$

Оно оценивает множество решений гораздо лучше. ■

**Пример 7.4.3** Для интервальной линейной системы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ [1, 4] & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

объединённое множество решений — это единственная точка  $(0, 1)^\top$ . Желая воспользоваться для его оценки развиваемым в этом разделе подходом, возьмём масштабирующую матрицу  $L$  единичной и организуем систему уравнений в рекуррентном виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ [-4, -1] & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.32)$$

Здесь для матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ [-4, -1] & 1 \end{pmatrix}$$

спектральный радиус матрицы модулей равен 3, но система уравнений (7.32) имеет правильное формальное решение  $(0, 1)^\top$ , дающее внешнюю оценку множества решений (и даже совпадающую с ним). ■

В обоих вышеприведённых примерах условия теоремы Апостолатоса-Кулиша не удовлетворяются, но специальный подбор данных (точные правые части систем и нетелесное множество решений во втором случае) приводят к тому, что формальный подход (в частности, теорема Майера-Варнке) работает. Ясно, что практическое значение подобных экзотических примеров не следует переоценивать.

Из конструктивных формулировок и доказательств Теорем 7.4.2–7.4.3 можно извлечь немало полезной информации. Во-первых, условиями этих теорем автоматически обеспечивается существование правильных формальных решений интервальной системы в рекуррентном виде. Во-вторых, мы видим, что это формальное решение можно находить с помощью итерационных процессов. В-третьих, из доказательства Теоремы 7.4.3 следует, что если начальное приближение содержит некоторую точку



из множества решений, то её будут также содержать и все последующие приближения этого процесса. Следовательно, итерации (7.30)–(7.31), стартующие из начального приближения  $\mathbf{x}^{(0)}$ , которое включает всё множество решений, порождают последовательность брусков, каждый из которых тоже целиком содержит множество решений.

Доказательство Теорем 7.4.2–7.4.3, основанное на теореме Шрёдера о сжимающих отображениях, вызвало в своё время целый поток работ, посвящённых построению различных итерационных алгоритмов для нахождения формальных решений уравнений (7.26) и (7.29). Но, вообще говоря, при построении конкретных процедур для нахождения формальных решений для (7.26) и (7.29) разработчик алгоритмов свободен в выборе и использовании любых других возможных приёмов и методик (например, символьных преобразований). Единственным руководящим принципом должно при этом оставаться удовлетворение искомым решением уравнений (7.26) или (7.29) в смысле Определения 4.3.2. В частности, для интервальных линейных систем вида (7.26) наиболее эффективным средством отыскания формальных решений оказывается нестационарный итерационный процесс — субдифференциальный метод Ньютона, конструируемый ниже в Главе 12 (с его помощью и были найдены формальные решения в примерах этого параграфа). Вычислительная сложность его такая же, как у конечных прямых алгоритмов для решения «внешней задачи».

Каково качество оценок множеств решений, получаемых с помощью формального подхода?

**Предложение 7.4.2** Пусть в условиях теорем Майера-Варнке или Апостолатоса-Кулиша матрица  $\mathbf{C}$  неотрицательна. Тогда правильное формальное решение интервальной линейной системы  $x = \mathbf{C}x + \mathbf{d}$  является оптимальной внешней оценкой её множества решений.

**Доказательство.** Пусть  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{IR}^n$  — рассматриваемое формальное решение, так что  $\mathbf{x}^* = \mathbf{C}\mathbf{x}^* + \mathbf{d}$ . Тогда

$$\underline{\mathbf{x}}^* = \underline{\mathbf{C}}\underline{\mathbf{x}}^* + \underline{\mathbf{d}} \quad \text{и} \quad \overline{\mathbf{x}}^* = \overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{x}}^* + \overline{\mathbf{d}}.$$

В силу неотрицательности  $\mathbf{C}$  эти равенства эквивалентны следующим

$$\underline{\mathbf{x}}^* = \mathbf{C}'\underline{\mathbf{x}}^* + \underline{\mathbf{d}} \quad \text{и} \quad \overline{\mathbf{x}}^* = \mathbf{C}''\overline{\mathbf{x}}^* + \overline{\mathbf{d}}, \quad (7.33)$$

где  $\mathbf{C}'$  и  $\mathbf{C}''$  — матрицы, составленные из концов элементов  $\mathbf{C}$ . Точный набор концов интервалов  $c_{ij}$ , образующих эти матрицы, можно установить из таблицы Кэли для интервального умножения в  $\mathbb{IR}$  (Табл. 1.1 на стр. 28).

Равенства (7.33) означают, что  $\underline{\mathbf{x}}^*$  и  $\overline{\mathbf{x}}^*$  являются решениями систем уравнений  $x = \mathbf{C}x + \mathbf{d}$  для некоторых  $\mathbf{C} \in \mathbf{C}$  и  $\mathbf{d} \in \mathbf{d}$ , т.е. принадлежат множеству решений интервальной системы  $x = \mathbf{C}x + \mathbf{d}$ , откуда и следует доказываемое. ■

Нетрудно понять, что в доказанном предложении матрица  $\mathbf{A}\mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{C}$  является интервальной  $M$ -матрицей. В общем случае полезна следующая

**Теорема 7.4.4** Пусть  $\mathbf{C} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  и  $\rho(|\mathbf{C}|) < 1$ ,  $\mathbf{d} \in \mathbb{IR}^n$ ,

$$\Xi = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists \mathbf{C} \in \mathbf{C})(\exists \mathbf{d} \in \mathbf{d})(x = \mathbf{C}x + \mathbf{d}) \}$$

— множество решений интервальной линейной системы уравнений  $x = Cx + d$ , а  $x^* \in \mathbb{R}^n$  — формальное решение этой системы. Тогда справедливо следующее неравенство для расстояния  $x^*$  до интервальной оболочки  $\square E$  множества решений:

$$\text{Dist}(\square E, x^*) \leq 2(I - |C|)^{-1} |C| \cdot \text{rad}(\square E). \quad (7.34)$$

**Доказательство.** Покажем, что справедливо включение

$$x^* \subseteq \square E + C(x^* - \square E).$$

Зафиксируем индекс  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  и возьмём какое-нибудь  $\xi \in x_i^*$ . Коль скоро  $x^* = Cx^* + d$ , то по определению интервальных матрично-векторных операций

$$\xi = (\tilde{C}\tilde{x} + \tilde{d})_i \quad \text{для некоторых } \tilde{C} \in C, \tilde{x} \in x^* \text{ и } \tilde{d} \in d.$$

Преобразуем правую часть выписанного равенства, учитывая, что в условиях теоремы из  $\rho(|C|) < 1$  следует обратимость матриц  $(I - \tilde{C})$  для любых  $\tilde{C} \in C$ , то

$$\begin{aligned} \tilde{C}\tilde{x} + \tilde{d} &= (I - \tilde{C})^{-1}\tilde{d} - (I - \tilde{C})^{-1}\tilde{d} + \tilde{C}\tilde{x} + \tilde{d} \\ &= (I - \tilde{C})^{-1}\tilde{d} - (I - \tilde{C})^{-1}\tilde{d} + \tilde{C}\tilde{x} + (I - \tilde{C})(I - \tilde{C})^{-1}\tilde{d} \\ &= (I - \tilde{C})^{-1}\tilde{d} + \tilde{C}\tilde{x} - (I - \tilde{C})^{-1}\tilde{d} + (I - \tilde{C})(I - \tilde{C})^{-1}\tilde{d} \\ &= (I - \tilde{C})^{-1}\tilde{d} + \tilde{C}\tilde{x} - \tilde{C}(I - \tilde{C})^{-1}\tilde{d} \\ &= (I - \tilde{C})^{-1}\tilde{d} + \tilde{C}(\tilde{x} - (I - \tilde{C})^{-1}\tilde{d}). \end{aligned}$$

Интервализуя последнее выражение по  $\tilde{C} \in C$ ,  $\tilde{x} \in x^*$  и учитывая, что  $(I - \tilde{C})^{-1}\tilde{d} \subseteq \square E$ , приходим к включению  $\tilde{C}\tilde{x} + \tilde{d} \in \square E + C(x^* - \square E)$ . Поэтому для любого индекса  $i = 1, 2, \dots, n$  и для любых  $\xi \in x_i^*$  справедливо

$$\xi \in (\square E + C(x^* - \square E))_i,$$

т. е. в самом деле  $x^* \subseteq \square E + C(x^* - \square E)$ .

Далее,

$$\begin{aligned} \text{Dist}(\square E, x^*) &\leq \text{Dist}(\square E, \square E + C(x^* - \square E)) \\ &= \text{Dist}(0, C(x^* - \square E)) \\ &= |C(\square E - x^*)| \leq |C| |x^* - \square E| \\ &\leq |C| (\text{Dist}(\square E, x^*) + 2 \text{rad}(\square E)), \end{aligned}$$

т. е.

$$(I - |C|) \cdot \text{Dist}(\square E, x^*) \leq 2|C| \cdot \text{rad}(\square E). \quad (7.35)$$

Матрица  $(I - |C|)$  обратима, коль скоро  $\rho(|C|) < 1$ , и, кроме того, обратная матрица  $(I - |C|)^{-1}$  неотрицательна, в чём можно убедиться из её разложения в матричный ряд Неймана. Следовательно, можем домножить обе части (7.35) слева на  $(I - |C|)^{-1}$ , получая доказываемое неравенство (7.34). ■

**Следствие.** Если  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$  — формальное решение системы уравнений

$$x = \mathbf{C}x + \mathbf{d},$$

$\Xi = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists C \in \mathbf{C})(\exists d \in \mathbf{d})(x = Cx + d)\}$  — её множество решений, и для некоторой матричной нормы величина  $\eta := \|\mathbf{C}\|$  такова, что  $\eta < 1$ , то для согласованной векторной нормы справедливо неравенство

$$\|\text{Dist}(\square\Xi, \mathbf{x}^*)\| \leq \frac{2\eta}{1-\eta} \cdot \|\text{rad}(\square\Xi)\|. \quad (7.36)$$

Действительно, при доказательстве Теоремы 7.4.4 мы установили, что

$$\text{Dist}(\square\Xi, \mathbf{x}^*) \leq |\mathbf{C}| (\text{Dist}(\square\Xi, \mathbf{x}^*) + 2 \text{rad}(\square\Xi)).$$

Беря нормы от обеих частей этого неравенства между неотрицательными векторами и пользуясь условиями согласования векторных и матричных норм, получим

$$\begin{aligned} \|\text{Dist}(\square\Xi, \mathbf{x}^*)\| &\leq \|\mathbf{C}\| \cdot \|\text{Dist}(\square\Xi, \mathbf{x}^*) + 2 \text{rad}(\square\Xi)\| \\ &\leq \|\mathbf{C}\| \cdot (\|\text{Dist}(\square\Xi, \mathbf{x}^*)\| + 2 \|\text{rad}(\square\Xi)\|), \end{aligned}$$

откуда следует

$$(I - \|\mathbf{C}\|) \cdot \|\text{Dist}(\square\Xi, \mathbf{x}^*)\| \leq 2 \|\mathbf{C}\| \cdot \|\text{rad}(\square\Xi)\|.$$

При  $\|\mathbf{C}\| = \eta < 1$  это влечёт оценку (7.36).

## 7.5 Предобуславливание

В вычислительной линейной алгебре предобуславливанием называют домножение обеих частей системы линейных уравнений на некоторую специальную матрицу. С помощью него в нужную сторону изменяются свойства решаемой системы уравнений, что приводит к улучшению работы различных численных методов. Аналогичная процедура имеет смысл также при решении интервальных систем уравнений.

Пусть  $A$  — точечная  $n \times n$ -матрица. Предобуславливанием интервальной линейной  $n \times n$ -системы уравнений  $Ax = b$  будем называть одновременное домножение матрицы и вектора правой части системы слева на  $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . При этом вместо исходной системы уравнений (7.2)

$$Ax = b$$

мы получаем предобусловленную интервальную систему

$$(LA)x = Lb. \quad (7.37)$$

Аналогично традиционной вычислительной линейной алгебре, матрицу  $L$  называют предобуславливающей матрицей или предобуславливателем.

Зачем нужно предобуславливание ИСЛАУ? В предшествующих параграфах мы видели, что работоспособность методов внешнего оценивания множеств решений существенно зависит от свойств интервальной матрицы системы. Так, для интервального метода Гаусса и интервальных итераций Гаусса-Зейделя желательно, чтобы эта

матрица являлась  $H$ -матрицей. Для применимости формального подхода из §7.4 требуется, чтобы в интервальной системе уравнений в рекуррентном виде (7.26) для матрицы  $\mathbf{C} = I - \Lambda \mathbf{A}$  выполнялось неравенство

$$\rho(|I - \Lambda \mathbf{A}|) < 1, \quad (7.38)$$

и т. д. Как удовлетворить этим условиям при решении интервальных линейных систем?

В последнем случае может отчасти помочь варьирование масштабирующей диагональной матрицы  $\Lambda$ , которая именно для этой цели и была введена в Предложении 7.4.1. Но в силу диагонального вида  $\Lambda$  эта процедура имеет ограниченные возможности. Если же допустить произвольные матрицы  $\Lambda$ , то как раз получаем предобуславливание.

Множество решений предобусловленной системы (7.37) включает множество решений для исходной (7.2), поскольку в общем случае  $\Lambda \mathbf{A} \supseteq \{ \Lambda A \mid A \in \mathbf{A} \}$  и  $\Lambda \mathbf{b} \supseteq \{ \Lambda b \mid b \in \mathbf{b} \}$  (см. Главу 2) и, следовательно,

$$\begin{aligned} \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) &= \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(Ax = b) \} \\ &\subseteq \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(\Lambda Ax = \Lambda b) \} \\ &\subseteq \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists U \in \Lambda \mathbf{A})(\exists v \in \Lambda \mathbf{b})(Ux = v) \} \\ &= \Xi(\Lambda \mathbf{A}, \Lambda \mathbf{b}). \end{aligned}$$

Таким образом, в результате предобуславливания множество решений, вообще говоря, расширяется, но зато путём специального выбора  $\Lambda$  свойства интервальной матрицы предобусловленной системы могут быть улучшены.

Популярный выбор предобуславливающей матрицы — это обратная к средней матрице системы, т. е.  $\Lambda = (\text{mid } \mathbf{A})^{-1}$ , и соответствующее предобуславливание называют «предобуславливанием обратной средней». Получающаяся в результате предобусловленная система (7.37) имеет своей средней матрицей единичную матрицу:

$$\text{mid } (\Lambda \mathbf{A}) = \text{mid } ((\text{mid } \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}) = (\text{mid } \mathbf{A})^{-1} \text{mid } \mathbf{A} = I$$

в силу свойства (2.11). Как следствие, в матрице  $(I - \Lambda \mathbf{A})$  все интервальные элементы уравновешены. Если матрица  $\mathbf{A}$  исходной системы имеет «достаточно малую» ширину, то интервальная матрица  $(\text{mid } \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}$  также «достаточно узка» и потому не сильно отличается от своей середины — единичной матрицы, т. е. заведомо обладает диагональным преобладанием. В частности, она является  $H$ -матрицей.

**Пример 7.5.1** Рассмотрим интервальную линейную систему (7.7)

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 1] \\ [-1, 2] & [2, 4] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1, 2] \\ [1, 2] \end{pmatrix},$$

для которой

$$\text{mid } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}, \quad (\text{mid } \mathbf{A})^{-1} = \frac{2}{37} \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix},$$

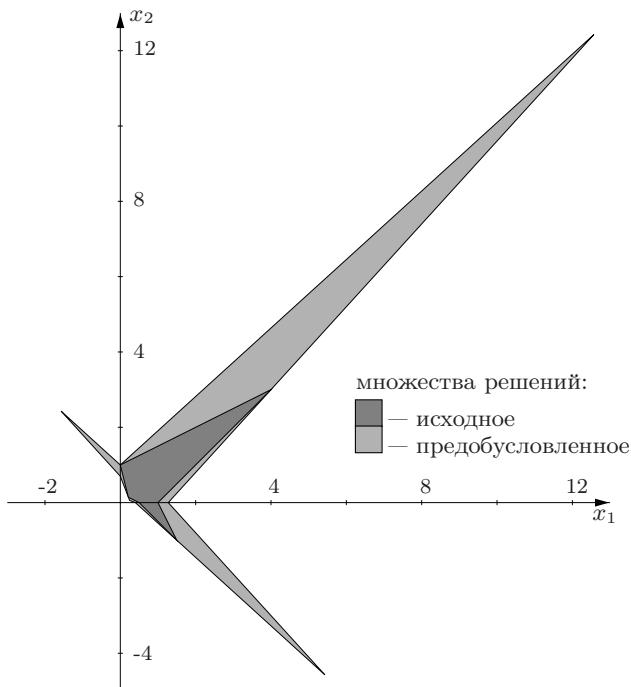


Рис. 7.4. Множество решений интервальной линейной системы уравнений, предобусловленной обратной средней матрицей, в сравнении с множеством решений исходной системы.

а интервальная система, предобусловленная с помощью обратной средней, есть

$$\frac{2}{37} \begin{pmatrix} [11, 26] & [-10, 10] \\ [-10, 10] & [11, 26] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{2}{37} \begin{pmatrix} [7, 14] \\ [4, 11] \end{pmatrix}. \quad (7.39)$$

Тогда

$$|I - (\text{mid } \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}| = \frac{1}{37} \begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 15 \end{pmatrix},$$

собственные числа этой матрицы равны  $\frac{1}{37}(15 \pm 20)$ , т. е.  $\frac{35}{37} \approx 0.945$  и  $(-\frac{5}{37}) \approx -0.135$ , так что условие (7.38) выполнено. Мы можем применить для внешнего оценивания множества решений ИСЛАУ итерационные методы из §7.4, и результатом является интервальный вектор

$$\begin{pmatrix} [-11.436, 12.571] \\ [-11.618, 12.429] \end{pmatrix}. \quad (7.40)$$

Из Рис. 7.4 можно видеть взаимное соотношение множеств решений исходной и предобусловленной систем, а также качество их внешнего оценивания брусом (7.40). Видно, что предобуславливание сильно увеличило размеры множества решений. ■

Предобуславливание обратной средней привлекательно по целому ряду причин. Во-первых, для предобусловленных интервальных линейных систем, матрицы которых имеют диагональную среднюю, оптимальные внешние оценки множеств решений могут быть очень быстро (практически, ценой одного обращения точечной матрицы) получены с помощью процедуры Хансена-Блика-Рона (см. §7.7 ниже). Во-вторых, несмотря на то, что в общем случае размеры множества решений после предобуславливания могут существенно вырасти, для ИСЛАУ с узкими интервальными матрицами предобуславливание с помощью обратной средней даёт хорошие результаты. Более точно, размеры множеств решений предобусловленной ИСЛАУ и исходной ИСЛАУ отличаются на величину второго порядка малости относительно ширины матрицы и правой части:

**Предложение 7.5.1** (лемма Миллера) *Пусть дана интервальная система линейных алгебраических уравнений  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ . При предобуславливании её обратной средней матрицей расстояние между интервальными оболочками множеств решений исходной и предобусловленной систем удовлетворяет оценке*

$$\text{dist}(\square\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}), \square\Xi(\Lambda\mathbf{A}, \Lambda\mathbf{b})) \leq C (\max\{\|\text{wid } \mathbf{A}\|, \|\text{wid } \mathbf{b}\|\})^2,$$

где  $\Lambda = (\text{mid } \mathbf{A})^{-1}$ ,  $C$  — некоторая константа, зависящая от выбора расстояния  $\text{dist}$ , а также векторной и матричной норм в правой части неравенства.

**Доказательство.** Отображение  $\mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , задаваемое правилом  $(A, b) \mapsto A^{-1}b$  и сопоставляющее точечным матрице  $A$  и  $b$  решение системы линейных алгебраических уравнений  $Ax = b$ , является гладким всюду на множестве неособенных матриц  $A$ . Это следует, например, из явного выражения для компонент решения системы  $Ax = b$  по правилу Крамера. Поэтому с точностью до членов второго порядка малости можно представить его в виде

■

Наконец, ряд методов для внешнего оценивания множеств решений ИСЛАУ (метод Гаусса, метод Кравчика и др.), будучи дополнен предобуславливанием обратной средней, приобретает второй порядок точности, а не первый, как это имеет место для их исходных версий.

Теоретическое исследование предобуславливания выполнено А. Ноймайером в работах [40, 42], и вкратце содержание его теории сводится к следующему. Если в рассматриваемой ИСЛАУ интервальная матрица  $\mathbf{A}$  сильно неособенна (см. Определение 2.6.1, стр. 122), то с помощью предобуславливания обратной средней матрицей  $\Lambda = (\text{mid } \mathbf{A})^{-1}$  можно удовлетворить условию (7.38), а также гарантировать хорошую работу интервального метода Гаусса-Зейделя. Кроме того, А. Ноймайер [42] доказал ряд теоретических результатов, свидетельствующих о некоторой оптимальности предобуславливания с помощью обратной средней матрицы в случае, когда исходная матрица ИСЛАУ имеет небольшую ширину.

Ясно, что увеличение множеств решений при предобуславливании является тем меньшим, чем меньше ширина интервальной матрицы системы. Но вот относительная величина этого расширения множества решений может оставаться очень большой даже для систем со сколь угодно узкими интервальными матрицами, как показывает следующий

**Пример 7.5.2** (И. Рон [53]) Зафиксировав  $\gamma > 0$ , рассмотрим интервальную систему уравнений  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  с

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \gamma^2 & [-\gamma, \gamma] & [-\gamma, \gamma] & [-\gamma, \gamma] \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ [-\gamma, \gamma] \\ [-\gamma, \gamma] \\ [-\gamma, \gamma] \end{pmatrix}.$$

Интервальная матрица  $\mathbf{A}$  сильно неособенна. Действительно, средняя матрица для  $\mathbf{A}$  блочно-диагональна,

$$\text{mid } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \gamma^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

она легко обращается, и

$$(\text{mid } \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma^{-1}[-1, 1] & \gamma^{-1}[-1, 1] & \gamma^{-1}[-1, 1] \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— неособенная интервальная матрица.

Рассмотрим теперь интервальную систему уравнений, предобусловленную обратной средней —

$$((\text{mid } \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}) x = (\text{mid } \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}, \quad (7.41)$$

и обозначим через  $\mathbf{X}'$  интервальную оболочку множества решений исходной системы, а через  $\mathbf{X}''$  — интервальную оболочку множества решений для (7.41). Брусы  $\mathbf{X}'$  и  $\mathbf{X}''$  легко находятся, исходя из того, что  $\mathbf{A}$  и  $(\text{mid } \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}$  — блочно-треугольные матрицы с точечными диагональными блоками (и вторая матрица вообще глубоко распадается). Получаем

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} [-0.6, 0.6] \\ \gamma[-0.4, 0.4] \\ \gamma[-0.4, 0.4] \\ \gamma[-0.4, 0.4] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}'' = \begin{pmatrix} [-1.2, 1.2] \\ \gamma[-0.4, 0.4] \\ \gamma[-0.4, 0.4] \\ \gamma[-0.4, 0.4] \end{pmatrix}.$$

В частности,  $\mathbf{X}''_1 = 2\mathbf{X}'_1$ , т.е. в этом примере предобуславливание независимо от значения  $\gamma$  приводит к двукратному увеличению размера множества решений по первой компоненте. ■

Итак, любой метод внешнего оценивания множества решений, основанный на предобуславливании интервальной линейной системы «обратной средней» матрицей может давать для сколь угодно узких интервальных данных задачи более чем двукратное уширение по некоторым компонентам, даже для размерностей  $n = 4$  и сильно неособенных интервальных матриц. Существуют ли подобные контрпримеры для систем меньших размерностей — пока неизвестно.

Отметим, что для неособенной диагональной матрицы  $A$  имеет место равенство  $AG = \{AG \mid G \in \mathbf{G}\}$ , какова бы ни была интервальная матрица или вектор  $\mathbf{G}$  подходящего размера. Иными словами, результат интервального матричного умножения на такую матрицу  $A$  совпадает с множеством поэлементных точечных произведений. Следовательно, с неособенной диагональной матрицей  $A$  можно осуществлять рассуждения типа

$$G \in \mathbf{G} \text{ эквивалентно } AG \in AG, \quad (7.42)$$

а предобуславливание такой матрицей оставляет множества решений ИСЛАУ неизменными. В общем случае, когда  $A$  не является диагональной, в логической формуле (7.42) вместо эквивалентности справедлива импликация только вправо, как мы видели в начале параграфа. Соответственно, множество решений системы уравнений, предобусловленной с помощью такой матрицы, уже не будет совпадать с исходным множеством решений. По этой причине можно порекомендовать выбирать матрицу  $A$  «не слишком сильно» отличающейся от диагональной.

Например, имеет смысл для начала попробовать взять матрицу  $A$  в виде

$$A = (\text{dev diag } \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} (\text{dev } \mathbf{a}_{11})^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (\text{dev } \mathbf{a}_{nn})^{-1} \end{pmatrix}, \quad (7.43)$$

т. е. как диагональную матрицу, составленную из величин, обратных отклонениям диагональных элементов  $\mathbf{A}$ . А. Ноймайер показал [43], что при оценивании объединённого множества решений формальный подход с таким простейшим «диагональным» предобуславливанием (7.43) применим в точности к интервальным линейным системам с  $H$ -матрицами. Иными словами, при этом несколько расширяется область применимости формального подхода из §7.4 и улучшается качество внешнего оценивания в сравнении с немодифицированной версией (7.26). При этом полученные результаты будут тем лучше, чем больше у матрицы  $\mathbf{A}$  диагональное преобладание, иными словами, чем больше разнятся левая и правая части в неравенстве (2.25).

Располагая более детальной информацией об интервальной матрице системы или об алгоритме, можно строить предобуславливающие матрицы, лучшие чем «обратная средняя». Например, в интервальном методе Гаусса-Зейделя существует возможность выбирать даже оптимальные (в том или ином смысле) предобуславливатели, которые перевычисляются для каждого отдельного шага алгоритма [31].

**Пример 7.5.3** Снова рассмотрим интервальную линейную систему

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 1] \\ [-1, 2] & [2, 4] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1, 2] \\ [1, 2] \end{pmatrix}, \quad (7.7)$$

но теперь предобусловим её с помощью точечной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0.272 & 0.044 \\ -0.028 & 0.326 \end{pmatrix}.$$



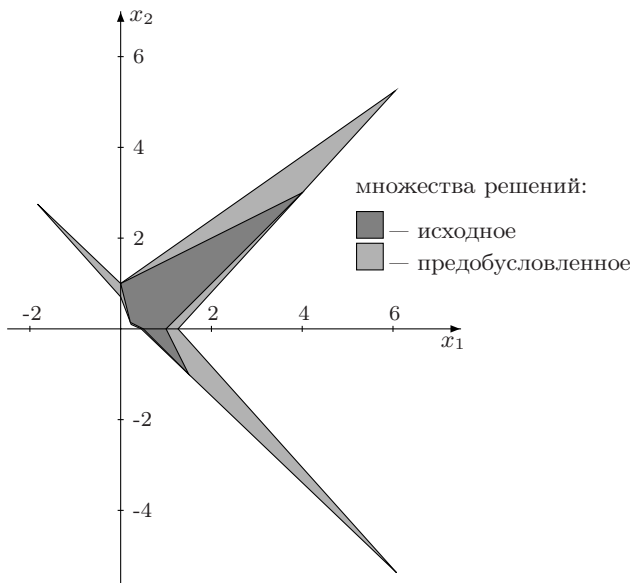


Рис. 7.5. Множество решений более удачно преобусловленной интервальной системы уравнений в сравнении с множеством решений исходной.

В результате получим интервальную систему

$$\begin{pmatrix} [0.5, 1.176] & [-0.456, 0.448] \\ [-0.438, 0.596] & [0.624, 1.36] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0.316, 0.632] \\ [0.270, 0.624] \end{pmatrix},$$

множество решений которой изображено на Рис. 7.5. Его оптимальной внешней оценкой является брус

$$\begin{pmatrix} [-1.83073, 6.07681] \\ [-5.37144, 5.24455] \end{pmatrix}.$$

При этом собственные числа матрицы  $|I - \Lambda A|$  равны 0.963 и  $(-0.087)$ , так что условие (7.38) применимости формального подхода выполнено. Его применение даёт интервальный вектор внешней оценки множества решений —

$$\begin{pmatrix} [-4.267, 6.077] \\ [-5.371, 5.265] \end{pmatrix}.$$

Хотя он и не является оптимальной внешней оценкой множества решений, но всё-таки существенно более узок, чем брус (7.40), который был получен при помощи преобуславливания «обратной средней» матрицей. ■

Как следует выбирать преобуславливатели для общих интервальных линейных систем? Насколько при этом расширяется сфера приложимости тех или иных методов для внешнего оценивания множества решений ИСЛАУ? Если преобусловленная система уравнений решается каким-то быстрым методом, то, может быть, имеет

смысл предобуславливать ИСЛАУ не один раз? С помощью одного предобуславливания мы получим более точную оценку множества решений по одной компоненте, а с помощью другого предобуславливания — по другой. Тем самым предобуславливающие матрицы подбираются из условия оптимизации оценки по отдельно взятой компоненте, а в целом описанная процедура может быть названа *мультипредобуславливанием*.

Всё это очень интересные открытые вопросы, которые ещё ждут своего исследования и разрешения.

## 7.6 Стационарные итерационные методы

Напомним, что итерационный процесс

$$x^{(k+1)} \leftarrow T(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

называется *стационарным*, если оператор  $T$  не зависит от номера шага  $k$ . Говорят также, что он *одношаговый* в случае, когда каждый член итерационной последовательности  $\{x^{(k)}\}$  зависит только от одного предшествующего ему члена.

**Теорема 7.6.1** *Итерационный процесс*

$$\mathbf{x}^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.44)$$

с  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$  для любого начального вектора  $\mathbf{x}^{(0)}$  сходится к единственному формальному решению  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$  интервальной системы уравнений (7.26)

$$x = \mathbf{C}x + \mathbf{d}$$

тогда и только тогда, когда  $\rho(|\mathbf{C}|) < 1$ , т.е. спектральный радиус матрицы  $|\mathbf{C}|$ , составленной из модулей элементов  $\mathbf{C}$ , меньше единицы.

**Доказательство.** В силу теоремы Шрёдера о неподвижной точке (стр. 112) достаточность условия  $\rho(|\mathbf{C}|) < 1$  очевидна.

Покажем его необходимость. Пусть итерации (7.44) сходятся из любого начального приближения к единственному формальному решению  $\mathbf{x}^*$  системы уравнений

$$x = \mathbf{C}x + \mathbf{d}.$$

В силу теоремы Перрона-Фробениуса неотрицательная точечная матрица  $|\mathbf{C}|$  имеет неотрицательный собственный вектор  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $v \geq 0$ , соответствующий наибольшему по модулю неотрицательному собственному значению  $\varrho = \rho(|\mathbf{C}|)$ . Возьмём в качестве начального приближения для итерационного процесса (7.44) какой-нибудь интервальный вектор  $\mathbf{x}^{(0)}$ , для которого вектор покомпонентных радиусов  $\text{rad } \mathbf{x}^{(0)}$  коллинеарен  $v$ , отмасштабировав его предварительно так, чтобы по крайней мере одна компонента  $\text{rad } \mathbf{x}^{(0)}$  была строго больше, чем соответствующая компонента вектора  $\text{rad } \mathbf{x}^*$ .

Тогда, предполагая  $\varrho \geq 1$ , мы можем заключить на основе Предложения 2.2.4 (стр. 102), что

$$\begin{aligned} \text{rad } \mathbf{x}^{(1)} &= \text{rad} (\mathbf{C}\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{d}) = \text{rad} (\mathbf{C}\mathbf{x}^{(0)}) + \text{rad } \mathbf{d} \\ &\geq \text{rad} (\mathbf{C}\mathbf{x}^{(0)}) \geq |\mathbf{C}| \text{rad } \mathbf{x}^{(0)} = \varrho \text{rad } \mathbf{x}^{(0)} \geq \text{rad } \mathbf{x}^{(0)}. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\text{rad } \mathbf{x}^{(2)} \geq |\mathbf{C}| \text{rad } \mathbf{x}^{(1)} \geq |\mathbf{C}| \text{rad } \mathbf{x}^{(0)} = \varrho \text{rad } \mathbf{x}^{(0)} \geq \text{rad } \mathbf{x}^{(0)}$$

и т. д. Для произвольного номера  $k$  имеем по индукции

$$\text{rad } \mathbf{x}^{(k)} \geq |\mathbf{C}| \text{rad } \mathbf{x}^{(k-1)} \geq |\mathbf{C}| \text{rad } \mathbf{x}^{(0)} = \varrho \text{rad } \mathbf{x}^{(0)} \geq \text{rad } \mathbf{x}^{(0)}.$$

В пределе, при  $k \rightarrow \infty$ , получаем  $\text{rad } \mathbf{x}^* \geq \text{rad } \mathbf{x}^{(0)}$ , что противоречит построению начального вектора  $\mathbf{x}^{(0)}$ . Следовательно, сделанное нами допущение  $\varrho \geq 1$  неверно, и должно выполняться неравенство  $\rho(|\mathbf{C}'|) < 1$ . ■

Стационарные итерационные методы можно использовать для внешнего оценивания множеств решений ИСЛАУ, опираясь на результаты §§7.4–7.5, т. е. применяя их для вычисления формальных решений систем в рекуррентном виде (7.26). С другой стороны, стационарные итерационные методы можно развивать далее как самостоятельный класс методов для решения задачи внешнего оценивания множества решений, основываясь на тех качествах, которые специфичны только для них. Например, из доказательства Теоремы 7.4.3 следует, что каждая итерация стационарного итерационного процесса содержит множество решений, если его содержало начальное приближение. Кроме того, при этом на каждом шаге итерационного процесса естественно брать пересечение найденной внешней оценки с предыдущей.

Рассмотрим *метод Кравчика* — итерационный метод для внешнего интервального оценивания множеств решений интервальных линейных систем уравнений, объединяющий в себе результаты этого и предшествующих параграфов с некоторыми техническими модификациями.

Выбираем интервальный вектор начального приближения  $\mathbf{x}^{(0)}$  так, чтобы

$$\mathbf{x}^{(0)} \supseteq \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}),$$

выбираем некоторую матрицу  $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , затем организуем итерации

$$\mathbf{x}^{(k+1)} \leftarrow (\Lambda \mathbf{b} + (I - \Lambda \mathbf{A}) \mathbf{x}^{(k)}) \cap \mathbf{x}^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (7.45)$$

Фактически, матрица  $\Lambda$  является предобуславливателем для исходной ИСЛАУ (см. §7.5). В методе Кравчика обычно берут предобуславливание обратной средней, т. е.

$$\Lambda = (\text{mid } \mathbf{A})^{-1},$$

а начальную внешнюю оценку множества решений находят каким-либо из способов, описанных в §5.8. Например, если  $\eta = \|I - \Lambda \mathbf{A}\|_\infty < 1$ , то из Предложения 5.8.1 вытекает, что в итерациях Кравчика можно взять начальным приближением брус

$$\mathbf{x}^{(0)} = ([-\theta, \theta], \dots, [-\theta, \theta])^\top, \quad \text{где } \theta = \frac{\|\Lambda \mathbf{b}\|_\infty}{1 - \eta}.$$

**Теорема 7.6.2** Пусть  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  и матрица  $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$  такова, что для некоторой матричной нормы величина  $\eta := \|\mathbf{I} - \Lambda\mathbf{A}\|$  удовлетворяет условию  $\eta < 1$ . Тогда для всякого начального приближения, содержащего множество решений  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , предел  $\mathbf{x}^*$  итераций метода Кравчика (7.45) удовлетворяет следующей оценке в согласованной векторной норме

$$\|\text{rad } \square \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})\| \leq \|\text{rad } \mathbf{x}^*\| \leq \frac{1 + \eta}{1 - \eta} \|\text{rad } \square \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})\|.$$

Доказательство этого результата аналогично доказательству Теоремы 7.4.4 и потому мы не приводим его.

Каков критерий останковки итераций (7.44)? Когда они выполняются на цифровой ЭВМ с конечной разрядной сеткой и интервальная арифметика реализована с внешним направленным округлением, то некоторые авторы рекомендуют продолжать итерирование до тех пор, пока два последовательных приближения не совпадут друг с другом. Иногда вполне достаточно остановить итерирование при выполнении менее жёстких условий, к примеру,

$$\text{Dist}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^*) \leq \epsilon \quad (7.46)$$

или

$$\text{dist}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^*) \leq \epsilon \quad (7.47)$$

для некоторого векторного или скалярного порога  $\epsilon > 0$ , т. е. когда отклонение очередного приближения от предельного бруса достаточно мало. При необходимости можно потребовать в левых частях этих неравенств не абсолютные значения отклонений, а их отношения к модулю предельного интервала или его ширине (если они ненулевые, конечно). Но как отследить выполнение этих неравенств, если предел  $\mathbf{x}^*$ , вообще говоря, неизвестен? По счастью, в стационарных итерационных процессах последовательности приближений и их погрешностей мажорируются по норме геометрическими прогрессиями, и это позволяет несложно контролировать момент достижения желаемых неравенств (7.46) и (7.47).

Имеем

$$\begin{aligned} \text{Dist}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^*) &= \text{Dist}(\mathbf{C}\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{d}, \mathbf{C}\mathbf{x}^* + \mathbf{d}) \\ &= \text{Dist}(\mathbf{C}\mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{C}\mathbf{x}^*) \\ &\leq |\mathbf{C}| \cdot \text{Dist}(\mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{x}^*). \end{aligned} \quad (7.48)$$

Коль скоро в силу неравенства треугольника

$$\text{Dist}(\mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{x}^*) \leq \text{Dist}(\mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{x}^{(k)}) + \text{Dist}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^*),$$

то, подставляя эту оценку для  $\text{Dist}(\mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{x}^*)$  в (7.48) и перегруппировывая члены, получаем

$$(I - |\mathbf{C}|) \cdot \text{Dist}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^*) \leq |\mathbf{C}| \cdot \text{Dist}(\mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{x}^*).$$

Если спектральный радиус матрицы  $|\mathbf{C}|$  меньше единицы, то  $(I - |\mathbf{C}|)$  не может иметь нулевых собственных значений, а потому является неособенной матрицей. Более того,  $(I - |\mathbf{C}|)$  — положительно обратимая матрица, в чём можно убедиться из её

разложения в матричный ряд Неймана (см., к примеру, [5]). Мы можем заключить

$$\text{Dist}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^*) \leq (I - |\mathbf{C}|)^{-1} |\mathbf{C}| \cdot \text{Dist}(\mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{x}^{(k)}). \quad (7.49)$$

Пользуясь этим неравенством, можно оценить в мультиметрике  $\text{Dist}$  расстояние до предела  $\mathbf{x}^*$ , основываясь на знании расстояния между двумя последовательными приближениями итерационного процесса.

Рассмотрим теперь этот же вопрос для обычной скалярной метрики  $\text{dist}$ , которая получается взятием некоторой векторной нормы от мультиметрики  $\text{Dist}$ , т. е.  $\text{dist}(\cdot, \cdot) = \|\text{Dist}(\cdot, \cdot)\|$ . Пусть также этой норме подчинена соответствующая матричная норма, тогда из (7.49) следует

$$\|\text{Dist}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^*)\| \leq \|(I - |\mathbf{C}|)^{-1}\| \cdot \|\mathbf{C}\| \cdot \|\text{Dist}(\mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{x}^{(k)})\|,$$

что означает

$$\text{dist}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^*) \leq \|(I - |\mathbf{C}|)^{-1}\| \cdot \|\mathbf{C}\| \cdot \text{dist}(\mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{x}^{(k)}).$$

Обозначим  $r := \|\mathbf{C}\|$  и наложим на матрицу  $\mathbf{C}$  и выбранную нами норму  $\|\cdot\|$  дополнительное условие  $r < 1$ . Обратная матрица  $(I - |\mathbf{C}|)^{-1}$  может быть представлена, как известно, матричным рядом Неймана, для суммы которого справедлива оценка (см. [5]):

$$\|(I - |\mathbf{C}|)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|\mathbf{C}\|}.$$

Из неё следует

$$\text{dist}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^*) \leq \frac{r}{1 - r} \cdot \text{dist}(\mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{x}^{(k)}).$$

Таким образом, условие (7.47) будет заведомо выполнено, если имеет место

$$\text{dist}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^{(k-1)}) \leq (r^{-1} - 1) \epsilon.$$

## 7.7 Процедура Хансена-Блика-Рона

Процедурой Хансена-Блика-Рона называют метод нахождения внешних оценок множеств решений интервальных линейных систем уравнений, в основе которого лежит следующий результат:

**Теорема 7.7.1** Пусть в интервальной линейной системе  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  матрица  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij}) \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  является интервальной  $H$ -матрицей и пусть

$$u_i = (\langle \mathbf{A} \rangle^{-1} |\mathbf{b}|)_i, \quad d_i = (\langle \mathbf{A} \rangle^{-1})_{ii}, \quad (7.50)$$

$$\alpha_i = \langle \mathbf{a}_{ii} \rangle - 1/d_i, \quad \beta_i = u_i/d_i - |\mathbf{b}_i| \quad (7.51)$$

для  $i = 1, 2, \dots, n$ . Тогда множество решений  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  содержится в интервальном векторе  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_i)$  с компонентами

$$\mathbf{x}_i = \frac{\mathbf{b}_i + \beta_i [-1, 1]}{\mathbf{a}_{ii} + \alpha_i [-1, 1]}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7.52)$$

Если же средняя матрица для  $A$  диагональна, то  $x$  — оптимальная внешняя оценка множества решений  $\Xi(A, b)$ .

Для лучшего уяснения смысла интервальных оценок (7.52) полезно следующее рассуждение. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений  $Ax = b$  с матрицей  $A = (a_{ij})$ , в которой диагональ существенно преобладает над остальной, внедиагональной, частью матрицы, так что

$$|a_{ii}| \gg \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

При этом матрица  $A$  является «почти диагональной», и, пренебрегая внедиагональными членами линейных уравнений из системы  $Ax = b$ , мы можем приближённо представить её решение как

$$x_i \approx \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Более точное выражение для  $i$ -ой компоненты решения должно учитывать вклад недиагональных элементов матрицы  $A$  и компонент  $b$ , отличных от  $i$ -ой, и потому необходимо имеет вид

$$x_i = \frac{b_i + \beta_i}{a_{ii} + \alpha_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (7.53)$$

где  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  — некоторые поправки, вычисляемые по  $A$  и  $b$ . В общем случае  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  находятся весьма непросто, и потому их точные значения нам, как правило, неизвестны. Но если мы знаем оценки сверху для их абсолютных значений, то можно предъявить двусторонние оценки решений, переписав точные равенства (7.53) в интервальной форме в виде включений

$$x_i \in \frac{b_i + \beta_i \cdot [-1, 1]}{a_{ii} + \alpha_i \cdot [-1, 1]}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

что совпадает с (7.52) в случае интервальной линейной системы.

Доказательство Теоремы 7.7.1 основывается на следующих двух простых фактах.

**Предложение 7.7.1** Пусть  $Q = (q_{ij})$  —  $n \times n$ -матрица,  $r$  и  $x$  —  $n$ -векторы и справедливо равенство  $Qx = r$ . Если матрица  $Q_{\neq i, \neq i}$  неособенна, то

$$(q_{ii} - Q_{i, \neq i} (Q_{\neq i, \neq i})^{-1} Q_{\neq i, i}) x_i = r_i - Q_{i, \neq i} (Q_{\neq i, \neq i})^{-1} r_{\neq i}.$$

**Доказательство.** В векторном равенстве  $Qx = r$  и в переменной  $x$ , во-первых, выделим отдельно  $i$ -ые компоненты, и, во-вторых, перепишем полученные соотношения так, чтобы можно было видеть вклад  $i$ -ой и остальных компонент. Имеем

$$\begin{aligned} Q_{\neq i, \neq i} x_{\neq i} + Q_{\neq i, i} x_i &= r_{\neq i}, \\ Q_{i, \neq i} x_{\neq i} + q_{ii} x_i &= r_i. \end{aligned}$$

Выражая из первого равенства  $(n-1)$ -вектор  $x_{\neq i}$  и подставляя его во второе равенство, получим искомое. ■

**Предложение 7.7.2** Если  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  —  $H$ -матрица, то  $Q_{\neq i, \neq i}$  также является  $H$ -матрицей.

**Доказательство.** Согласно определению  $H$ -матрицы (см. §2.9) существует положительный  $n$ -вектор  $v$ , такой что  $\langle Q \rangle v > 0$ . Опуская из этого векторного неравенства  $i$ -ое скалярное неравенство и выделяя в оставшихся неравенствах вклад компоненты  $v_i$ , получим

$$\langle Q_{\neq i, \neq i} \rangle v_{\neq i} - |Q_{\neq i, i}| v_i > 0.$$

Поэтому  $\langle Q_{\neq i, \neq i} \rangle v_{\neq i} > 0$  для положительного вектора  $v_{\neq i}$ , так что матрица  $Q_{\neq i, \neq i}$  действительно является  $H$ -матрицей. ■

**Доказательство Теоремы 7.7.1.** Если  $A$  —  $H$ -матрица, то  $H$ -матрицами являются все содержащиеся в ней точечные матрицы, и в силу Предложения 7.7.2 можно применить Предложение 7.7.1 к любой точечной системе  $Ax = b$  с  $A = (a_{ij}) \in \mathbf{A}$  и  $b \in \mathbf{b}$ . Имеем

$$x_i = \frac{b_i - A_{i, \neq i} (A_{\neq i, \neq i})^{-1} b_{\neq i}}{a_{ii} - A_{i, \neq i} (A_{\neq i, \neq i})^{-1} A_{\neq i, i}}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (7.54)$$

и с помощью этого выражения, найдя интервальные оценки его числителя и знаменателя, мы оценим интервалы изменения  $x_i$  при изменении  $A \in \mathbf{A}$  и  $b \in \mathbf{b}$ .

Для  $H$ -матрицы  $A_{\neq i, \neq i}$  по Теореме 2.9.1 (стр. 136)

$$|(A_{\neq i, \neq i})^{-1}| \leq \langle A_{\neq i, \neq i} \rangle^{-1}.$$

Тогда для каждого  $i = 1, 2, \dots, n$  справедливо

$$\begin{aligned} |A_{i, \neq i} (A_{\neq i, \neq i})^{-1} A_{\neq i, i}| &\leq |A_{i, \neq i}| |(A_{\neq i, \neq i})^{-1}| |A_{\neq i, i}| \\ &\leq |A_{i, \neq i}| \langle A_{\neq i, \neq i} \rangle^{-1} |A_{\neq i, i}|, \\ |A_{i, \neq i} (A_{\neq i, \neq i})^{-1} b_{\neq i}| &\leq |A_{i, \neq i}| |(A_{\neq i, \neq i})^{-1}| |b_{\neq i}| \\ &\leq |A_{i, \neq i}| \langle A_{\neq i, \neq i} \rangle^{-1} |b_{\neq i}|. \end{aligned}$$

Обозначим правые части этих неравенств через  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  соответственно и покажем, что их значения совпадают с теми, что даются формулами (7.50)–(7.51), указанными в условии теоремы.

Пусть  $I$  — единичная  $n \times n$ -матрица, а  $I_{:i}$  — её  $i$ -ый столбец. Применяя Предложение 7.7.1 к системе уравнений  $\langle A \rangle y = I_{:i}$ , найдём

$$(\langle a_{ii} \rangle - \alpha_i) y_i = 1. \quad (7.55)$$

С другой стороны,  $y = \langle A \rangle^{-1} I_{:i}$ , так что  $y_i = (\langle A \rangle^{-1})_{ii} = d_i$  из (7.50), и сопоставление этого равенства с (7.55) приводит к выражению

$$\alpha_i = \langle a_{ii} \rangle - 1/d_i$$

для всякого  $i = 1, 2, \dots, n$ . Теперь применим Предложение 7.7.1 к системе уравнений  $\langle A \rangle z = |b|$ . Получим

$$(\langle a_{ii} \rangle - \alpha_i) z_i = |b_i| + \beta_i. \quad (7.56)$$

С другой стороны,  $z = \langle \mathbf{A} \rangle^{-1} |\mathbf{b}|$ , т. е.  $z_i = u_i$  из (7.50), и сопоставление этого равенства с (7.56) с учётом уже найденного значения для  $\alpha_i$  даёт

$$\beta_i = u_i/d_i - |\mathbf{b}_i|, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Чтобы завершить обоснование формулы (7.52) остаётся заметить, что в условиях доказываемой теоремы  $\langle \mathbf{a}_{ii} \rangle > \alpha_i$ , коль скоро  $y_i = (\langle \mathbf{A} \rangle^{-1})_{ii} > 0$  в (7.55). Поэтому в дроби (7.54) знаменатель не обращается в нуль, и мы можем взять её интервальное расширение по всем фигурирующим в ней переменным, используя простейшие оценки

$$\begin{aligned} A_{i,\neq i} (A_{\neq i,\neq i})^{-1} A_{\neq i,i} &\in \alpha_i [-1, 1], \\ A_{i,\neq i} (A_{\neq i,\neq i})^{-1} b_{\neq i} &\in \beta_i [-1, 1], \end{aligned}$$

а также тот факт, что  $a_{ii} \in \mathbf{a}_{ii}$  и  $b_i \in \mathbf{b}_i$ .

Приступая к доказательству оптимальности полученных оценок в случае диагональной  $\text{mid } \mathbf{A}$ , будем считать, что

$$\bar{\mathbf{b}} = |\mathbf{b}| \quad \text{и} \quad \langle \mathbf{a}_{kk} \rangle = \underline{\mathbf{a}}_{kk} > 0 \quad \text{для всех } k. \quad (7.57)$$

Эти условия несколько не ограничивают общность рассмотрения, так как путём умножения отдельных уравнений исходной системы на  $(-1)$  можно сделать, чтобы все  $\text{mid } \mathbf{b}_k \geq 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Аналогично, с помощью замены переменных  $x'_k = -x_k$  и соответствующей смены знаков элементов  $k$ -го столбца матрицы можно сделать так, что  $\text{mid } \mathbf{a}_{kk} \geq 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Этот выбор знаков середины диагональных элементов матрицы и компонент правой части обеспечивает справедливость соотношений (7.57). Наконец, неравенство  $\underline{\mathbf{a}}_{kk} > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , следует из того, что диагональные элементы у любой  $H$ -матрицы ненулевые.

Поскольку  $\text{mid } \mathbf{A}$  — диагональная, то  $\mathbf{A}$  содержит матрицу  $\langle \mathbf{A} \rangle$ , а также матрицы, получающиеся из  $\langle \mathbf{A} \rangle$  изменением знаков всех внедиагональных элементов  $i$ -го столбца и/или  $i$ -ой строки на положительные. Обозначая подобные матрицы через  $\tilde{\mathbf{A}}$ , можно видеть, что всего для них имеется четыре варианта

$$\tilde{\mathbf{A}}_{\neq i,\neq i} = \langle \mathbf{A}_{\neq i,\neq i} \rangle, \quad \tilde{\mathbf{A}}_{i,\neq i} = \pm |\mathbf{A}_{i,\neq i}|, \quad \tilde{\mathbf{A}}_{\neq i,i} = \pm |\mathbf{A}_{\neq i,i}|, \quad (7.58)$$

соответствующих независимым выборам знаков перед модулями, причём это верно при любом значении  $a_{ii} \in \mathbf{a}_{ii}$ .

Рассмотрим следующие четыре частных

$$\frac{\underline{\mathbf{b}}_i - \beta_i}{\underline{\mathbf{a}}_{ii} - \alpha_i} = \frac{\underline{\mathbf{b}}_i + (-|\mathbf{A}_{i,\neq i}|) \langle \mathbf{A}_{\neq i,\neq i} \rangle^{-1} |\mathbf{b}_{\neq i}|}{\underline{\mathbf{a}}_{ii} + (-|\mathbf{A}_{i,\neq i}|) \langle \mathbf{A}_{\neq i,\neq i} \rangle^{-1} |\mathbf{A}_{\neq i,i}|}, \quad (7.59)$$

$$\frac{\underline{\mathbf{b}}_i - \beta_i}{\underline{\mathbf{a}}_{ii} + \alpha_i} = \frac{\underline{\mathbf{b}}_i + (-|\mathbf{A}_{i,\neq i}|) \langle \mathbf{A}_{\neq i,\neq i} \rangle^{-1} |\mathbf{b}_{\neq i}|}{\underline{\mathbf{a}}_{ii} + (-|\mathbf{A}_{i,\neq i}|) \langle \mathbf{A}_{\neq i,\neq i} \rangle^{-1} (-|\mathbf{A}_{\neq i,i}|)}, \quad (7.60)$$

$$\frac{\bar{\mathbf{b}}_i + \beta_i}{\underline{\mathbf{a}}_{ii} - \alpha_i} = \frac{\bar{\mathbf{b}}_i + |\mathbf{A}_{i,\neq i}| \langle \mathbf{A}_{\neq i,\neq i} \rangle^{-1} |\mathbf{b}_{\neq i}|}{\underline{\mathbf{a}}_{ii} + |\mathbf{A}_{i,\neq i}| \langle \mathbf{A}_{\neq i,\neq i} \rangle^{-1} (-|\mathbf{A}_{\neq i,i}|)}, \quad (7.61)$$

$$\frac{\bar{\mathbf{b}}_i + \beta_i}{\underline{\mathbf{a}}_{ii} + \alpha_i} = \frac{\underline{\mathbf{b}}_i + |\mathbf{A}_{i,\neq i}| \langle \mathbf{A}_{\neq i,\neq i} \rangle^{-1} |\mathbf{b}_{\neq i}|}{\underline{\mathbf{a}}_{ii} + |\mathbf{A}_{i,\neq i}| \langle \mathbf{A}_{\neq i,\neq i} \rangle^{-1} |\mathbf{A}_{\neq i,i}|}. \quad (7.62)$$



Они являются отношениями минимума числителя дроби (7.54) к минимуму её знаменателя (для (7.59)), минимума числителя к максимуму знаменателя (для (7.60)), максимума числителя к минимуму знаменателя (для (7.61)) и максимума числителя к максимуму знаменателя (для (7.62)). При этом знаменатель дроби (7.54), как было установлено ранее, всегда положителен. Следовательно, левый конец интервального выражения (7.52) достигается на минимальном из частных (7.59)–(7.62), а правый конец — на максимальном из (7.59)–(7.62). С другой стороны, эти же значения достигаются дробью (7.54) на конкретных точечных системах  $\tilde{A}x = \tilde{b}$  из данной ИСЛАУ, имеющих матрицы  $\tilde{A}$  вида (7.58) с  $\tilde{a}_{ii} = \underline{a}_{ii}$  или  $\tilde{a}_{ii} = \overline{a}_{ii}$ , и правые части  $\tilde{b}$ , для которых  $\tilde{b}_{\neq i} = |\underline{b}_{\neq i}|$  и  $\tilde{b}_i = \underline{b}_i$  или  $\tilde{b}_i = \overline{b}_i$ . Таким образом, оценки (7.52) действительно оптимальны. ■

Замечательным свойством процедуры Хансена Блика-Рона является невысокая вычислительная сложность. Фактически, её наиболее трудоёмкая часть — это обращение компаранта  $\langle \mathbf{A} \rangle$ , которое для  $n \times n$ -матриц типично выполняется за  $O(n^3)$  операций. Ещё одно достоинство процедуры Хансена-Блика-Рона — хорошая состыковка с популярным предобуславливанием «обратной средней» (см. §7.5). Напомним, что тогда матрица ИСЛАУ получает среднюю единичную матрицу, и процедура Хансена-Блика-Рона находит оптимальную внешнюю оценку множества решений такой системы.

А. Ноймайер указывает в работе [44] (основываясь на своём результате из [42]), что внешнее оценивание множеств решений ИСЛАУ с помощью Теоремы 7.7.1 всегда даёт результаты, которые заведомо не хуже, чем у метода Кравчика (см. стр. 394). Если же  $\text{mid } \mathbf{A}$  не является диагональной, то можно достичь дальнейшего улучшения оценки, полученной процедурой Хансена-Блика-Рона, применив ещё несколько шагов интервального метода Гаусса-Зейделя. Трудоёмкость подобного итеративного уточнения составляет всего  $O(n^2)$ , и потому на практике его можно рекомендовать к выполнению всегда, когда нет уверенности, что  $\text{mid } \mathbf{A}$  диагональна. Фактически, это идея *мультиметодного* вычислительного алгоритма, который соединяет в единой вычислительной схеме несколько методов, взаимно дополняющих друг друга и коллективно обеспечивающих лучший результат решения задачи. В интервальном анализе она имеет гораздо более широкую применимость, нежели в традиционной вычислительной математике.

Алгоритмическая схема процедуры Хансена-Блика-Рона строится непосредственно из Теоремы 7.7.1, и потому мы не приводим её отдельного псевдокода. Следует лишь иметь в виду, что если при расчётах на ЭВМ мы хотим получить доказательные результаты при работе со стандартной арифметикой с плавающей точкой, то должны быть приняты специальные меры для того, чтобы получающийся брус гарантированно содержал множество решений ИСЛАУ. В частности, необходимо знать строгую оценку сверху для  $\langle \mathbf{A} \rangle^{-1}$ , чтобы далее найти оценки сверху для  $\alpha_i$  и  $\beta_i$ . Подробное рассмотрение этого круга вопросов и конкретные практические рекомендации можно найти в работе [44].

**Пример 7.7.1** У интервальной линейной системы (5.12)

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 1] \\ [-1, 2] & [2, 4] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [-2, 2] \end{pmatrix}$$

интервальная матрица не является  $H$ -матрицей, так что процедура Хансена-Блика-Рона напрямую к ней не применима.

После предобуславливания обратной средней получаем интервальная линейная система (7.39), матрица которой имеет средней диагональную матрицу и уже решается процедурой Хансена-Блика-Рона. Ответ  $-([-14, 14], [-14, 14])^T$  — весьма широк в сравнении с оптимальной внешней оценкой  $([-4, 4], [-4, 4])^T$  (см. Рис. 5.1), и причиной огрубления является предобуславливание. ■

## 7.8 Локальные оценивающие процедуры

Локальными оценивающими процедурами для интервальных линейных систем алгебраических уравнений мы будем называть любые процедуры для локального оценивания множеств решений ИСЛАУ, т. е. не всего множества решений целиком, а лишь той его части, которая лежит в некотором заданном бруске. Строгое определение формулируется следующим образом:

**Определение 7.8.1** Интервальнозначное отображение

$$\text{LocEst}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z}) : \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (7.63)$$

называется локальной оценивающей процедурой для интервальных систем линейных алгебраических уравнений, если для любых  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{z}, \mathbf{z}' \in \mathbb{R}^n$  имеет место

$$(i) \quad \text{LocEst}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z}) \supseteq \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \mathbf{z}, \quad (7.64)$$

$$(ii) \quad \text{LocEst}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z}) \supseteq \text{LocEst}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z}') \quad \text{при } \mathbf{z} \supseteq \mathbf{z}', \quad (7.65)$$

т. е. когда  $\text{LocEst}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z})$  включает в себя подмножество рассматриваемого множества решений ИСЛАУ  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , содержащееся в  $\mathbf{z}$ , и монотонно относительно включения по аргументу  $\mathbf{z}$ .

Зачем нужны локальные оценивающие процедуры?

С одной стороны, практика нередко предъявляет к решению задачи, в самой постановке которых присутствуют двусторонние ограничения на возможные значения неизвестных переменных, вытекающие, например, из физических, экономических и т. п. соображений. Это сразу же суживает область поиска решений, и естественно было бы попытаться учесть подобные ограничения с самого начала этого поиска.

С другой стороны, локальные оценивающие процедуры оказываются полезными как вспомогательное средство решения сложных задач, при котором вся область решений дробится на отдельно исследуемые подобласти меньшего размера. Коль скоро погрешность интервальных методов уменьшается при уменьшении размера области,

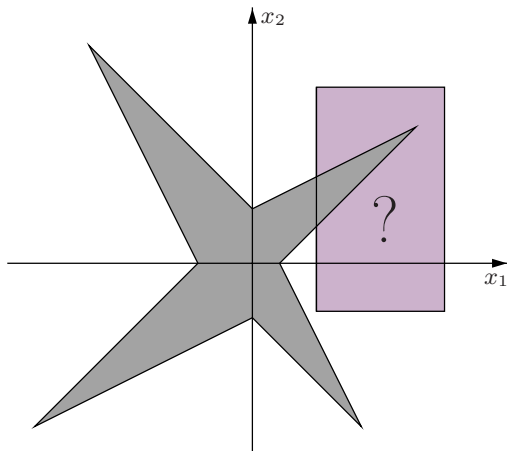


Рис. 7.6. Локальные оценивающие процедуры ищут оценку части множества решений, ограниченной некоторым брусом.

то подобный образ действий делает более вероятным успех различных интервальных тестов. Такова, к примеру, ситуация с интервальными методами решения нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений. Примерно по этой же причине локальные оценивающие процедуры полезны при исчерпывающем оценивании множеств решений; см. §4.36 и Рис. 4.4.

Отметим, что рассмотренные выше в этой главе интервальный метод Гаусса-Зейделя и итерации Кравчика — это примеры итерационных локальных оценивающих процедур. Каждый из этих методов для своей работы требует брус начального приближения, который далее в процессе итерирования ограничивает результирующую оценку.

Ниже мы рассмотрим два простых, но достаточно общих способа построения локальных оценивающих процедур на основе известных методов глобального решения ИСЛАУ.

Пусть  $Encl$  — какой-нибудь прямой (конечный) метод решения «внешней задачи» для интервальной линейной системы  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ . Обозначим посредством  $Encl(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  интервальный вектор внешней оценки множества решений, даваемый с помощью метода  $Encl$ , так что  $Encl(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \supseteq \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ .<sup>1</sup> По-видимому, простейшей локальной оценивающей процедурой является

$$LocEst(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z}) := Encl(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \mathbf{z}. \quad (7.66)$$

Выполнение условий (i) и (ii) из Определения 7.8.1 проверяется тривиально. Но ограничения на решение, накладываемые брусом  $\mathbf{z}$ , учитываются в этой процедуре в самую последнюю очередь и потому влияют на результирующую оценку в самой минимальной степени, так что в целом рассмотренная конструкция неудовлетворительна. В частности, любая компонента ограничивающего бруса  $\mathbf{z}$  влияет в (7.66) только на оценку по той же самой компоненте. Последнее обстоятельство делает непригодной

<sup>1</sup>От английского термина enclosure, означающего «объемлющее множество», «внешняя оценка».

процедуру (7.66) для использования в методах дробления решений для оптимального оценивания множеств решений ИСЛАУ (Глава 9), так как требуемые ими условия (9.30)–(9.29) в общем случае не выполняются. Модифицируем процедуру (7.66).

Вспомним, что алгоритм вычисления  $Encl$  представляется в виде последовательности инструкций, предписывающих, какие действия следует произвести с входными данными —  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$  и  $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_i)$  — для получения ответа  $Encl(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ . Как правило, значения компонент ответа  $Encl(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  вычисляются не все одновременно, и, кроме того, будучи уже найдены, значения тех компонент, которые вычисляются раньше, используются и далее для определения окончательных значений остальных компонент. Выделим в последовательности инструкций, порождающей  $Encl(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , вхождения компонент  $Encl_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , интервального вектора-ответа  $Encl(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  и

- заменим все вхождения  $Encl_i$  пересечениями  $(Encl_i \cap \mathbf{z}_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .
- после каждого такого пересечения поставим условный оператор проверки его непустоты: если  $(Encl_i \cap \mathbf{z}_i) = \emptyset$ , то это служит свидетельством того, что в целом  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \mathbf{z} = \emptyset$ , и потому работа алгоритма завершается.

Получившийся в результате выполненных замен и вставок список инструкций является новым алгоритмом, задающим некоторое отображение

$$LocEst(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z}) : \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

которое имеет хорошие предпосылки к тому, чтобы быть локальной оценивающей процедурой.

Если в методе  $Encl$  все компоненты оценивающего бруса  $Encl(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  получаются из найденных ранее компонент как суперпозиции действий интервальной арифметики (1.3)–(1.6) и операций пересечения и объединения, то очевидна монотонность величины  $LocEst(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z})$  относительно включения по аргументу  $\mathbf{z}$ . Но для полной проверки справедливости для  $LocEst(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z})$  определения локальной оценивающей процедуры и условий (9.29)–(9.30) необходимо, конечно, отталкиваться от свойств конкретного алгоритма  $Encl$ .

Нетрудно, к примеру, показать, что если  $Encl$  — это интервальный метод Гаусса или какая-нибудь из его модификаций, то полученный вышеописанным способом алгоритм для  $LocEst(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z})$  — локальная оценивающая процедура для объединённого множества решений. Её прямой ход является совершенно таким же, как и у обычного интервального метода Гаусса (поскольку  $\mathbf{x}_i$  в нём вообще не встречаются),

а обратный ход выглядит следующим образом

```

DO FOR  $i = n$  TO 1 STEP (-1)


$$\mathbf{x}_i \leftarrow \mathbf{z}_i \cap \left( \mathbf{b}_i - \sum_{j>i} \mathbf{a}_{ij} x_j \right) / \mathbf{a}_{ii} ;$$


IF ( $\mathbf{x}_i = \emptyset$ ) THEN
    STOP, сигнализируя «множество решений
     $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  не пересекает данный брус  $\mathbf{z}$ »
END IF
END DO

```

Но иногда на практике (например, для использования в алгоритмах оптимального оценивания множеств решений ИСЛАУ из Главы 9) нужны значения не всех компонент интервала локального решения ИСЛАУ, а лишь какой-то одной его компоненты. Если для некоторого индекса  $\nu$  в алгоритме  $LocEst(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z})$  значение  $\nu$ -ой компоненты вычисляется не последней по порядку, то может возникнуть неприятная ситуация, когда её величина окажется не зависящей от каких-то из  $\mathbf{z}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Вследствие этого на оценку (9.28), получаемую с помощью локальной оценивающей процедуры  $LocEst(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z})$  никак не будут влиять значения некоторых компонент бруса  $\mathbf{P}$ , и, следовательно, нарушенными окажутся условия (9.29)–(9.30). Поэтому мы рекомендуем предварительно перенумеровывать неизвестные в ИСЛАУ так, чтобы в алгоритмах  $Encl$  и  $LocEst$  значение  $\nu$ -ой компоненты ответа вычислялась бы самой последней. Эта мера достигает цели, если  $Encl$  удовлетворяет «принципу Гаусса-Зейделя» [11], — *вновь полученная информация сразу же используется*, — т.е. если переменные в  $Encl$  «достаточно тесно» завязаны друг с другом. Но в общем случае и она может не спасти положения.

Обратимся теперь к построению локальных оценивающих процедур на основе итерационных методов внешнего оценивания множеств решений. Как следует из результатов §7.5 и §7.6, внешняя оценка для множеств решений  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  может быть найдена как формальное решения уравнения

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \Lambda \mathbf{A}) \mathbf{x} + \Lambda \mathbf{b}$$

при условии  $\rho(|\mathbf{I} - \Lambda \mathbf{A}|) < 1$ , а её вычисление можно организовать в виде итерационного процесса

$$\mathbf{x}^{(k+1)} \leftarrow (\mathbf{I} - \Lambda \mathbf{A}) \mathbf{x}^{(k)} + \Lambda \mathbf{b}. \quad (7.67)$$

**Предложение 7.8.1** Пусть интервальная линейная система уравнений  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  такова, что существует квадратная точечная матрица  $\Lambda$ , удовлетворяющая

$$\rho(|\mathbf{I} - \Lambda \mathbf{A}|) < 1. \quad (7.68)$$

Тогда итерационный процесс в  $\mathbb{R}^n$

$$\mathbf{x}^{(0)} \leftarrow \mathbf{z}, \quad (7.69)$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} \leftarrow \begin{cases} ((I - \Lambda \mathbf{A}) \mathbf{x}^{(k)} + \Lambda \mathbf{b}) \cap \mathbf{z}, & \text{если } \mathbf{x}^{(k)} \neq \emptyset, \\ \emptyset, & \text{иначе} \end{cases} \quad (7.70)$$

сходится (либо к некоторому интервальному вектору, либо к  $\emptyset$ ). Им порождается локальная оценивающая процедура

$$\text{LocEst}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z}) := \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)}$$

для оценивания множества решений  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  интервальной линейной системы.

**Доказательство.** Предположим, что все члены последовательности (7.69)–(7.70) непусты. Поскольку для любых интервальных векторов  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$  с непустыми пересечениями  $\mathbf{x} \cap \mathbf{z}$  и  $\mathbf{y} \cap \mathbf{z}$  имеет место неравенство

$$\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq \text{dist}(\mathbf{x} \cap \mathbf{z}, \mathbf{y} \cap \mathbf{z}),$$

то последовательность (7.69)–(7.70) фундаментальна (т. е. является последовательностью Коши) в полном метрическом пространстве всех правильных интервальных векторов из  $\mathbf{z}$  по тем же самым причинам, по которым, при определённых условиях, в  $\mathbb{R}^n$  фундаментальна любая последовательность вида (7.67). Если же какой-нибудь член последовательности (7.69)–(7.70) является пустым множеством, то таковы и все последующие её члены. Следовательно,  $\lim \mathbf{x}^{(k)}$  существует, и значения  $\text{LocEst}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z})$  определены корректно.

Очевидна также монотонность отображения  $\text{LocEst}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z})$  относительно включения по аргументу  $\mathbf{z}$ .

Свойство (i) из Определения локальной оценивающей процедуры доказывается с помощью традиционных для подобных случаев рассуждений, которые мы проводили, к примеру, при доказательстве Теоремы 7.4.3, и поэтому мы на них здесь не останавливаемся подробно. ■

## Комментарий к Главе 7

Задача внешнего оценивания объединённого множества решений интервальных систем уравнений является одной из классических постановок, с которых начинался интервальный анализ в начале 60-х годов прошлого века. Её формулировка настолько проста и естественна, что, фактически, посвящённые ей работы появлялись ещё до выхода в свет классической книги Р.Е. Мура [38], с которой, как принято считать, и началось быстрое развитие интервального анализа. К настоящему времени среди общей массы публикаций по интервальной тематике доля тех, в которых рассматриваются различные аспекты решения «внешней задачи» для интервальных систем уравнений, — одна из наибольших.

Первой отечественной работой о характеристике и оценивании объединённого множества решений интервальных линейных систем уравнений была статья иркутских математиков Б.И. Белова и Е.Г. Анциферова [4].

Практические приложения «внешней» задачи для ИСЛАУ многочисленны и разнообразны, и в рамках нашей математической книги, к сожалению, нет возможности осветить их даже вкратце. Отметим лишь, что в последние годы трудами многих исследователей интенсивное развитие получили методы идентификации систем управления в условиях ограниченных возмущений их параметров (см. обзор А.Б. Куржанского [10] и книгу французских авторов [8]). Для случая систем, описываемых линейными зависимостями «вход-выход», математической основой некоторых из этих методов также служит решение «внешней задачи» для ИСЛАУ, как правило, с прямоугольными интервальными матрицами.

Кроме приложений в технике и естествознании «внешняя задача» для ИСЛАУ имеет и более опосредованные применения. Например, на каждом шаге популярного интервального метода Ньютона требуется решать «внешние задачи» для некоторых промежуточных ИСЛАУ. С необходимостью решения «внешней задачи» для интервальных систем алгебраических уравнений (линейных или нелинейных) сталкиваются при дискретизации различных интервальных версий краевых задач для дифференциальных уравнений (см. [9]) и интегральных уравнений [7]. В интервальном методе наименьших квадратов [25] построение регрессионной прямой по заданному семейству результатов наблюдений, имеющих интервальную неопределённость, также сводится к решению «внешней задачи» для ИСЛАУ.

За прошедшие десятилетия методология решения «внешней задачи» претерпела эволюцию от подражания известным вещественным методам решения СЛАУ (методы Гаусса, Хаусхолдера, простой итерации и т. п.) до создания самостоятельных «чисто интервальных» концепций и подходов. Обзоры методов решения задачи внешнего оценивания объединённого множества решений ИСЛАУ по состоянию на середину 80-х годов прошлого века были даны А. Ноймайером в [41, 42]. Немало материала, касающегося интервальных систем уравнений (линейных, в частности), можно найти в монографиях Г. Майера [34], Р. Мура [38, 39], Г. Алефельда и Ю. Херцбергера [1], А. Ноймайера [42], С.А. Калмыкова, Ю.И. Шокина и З.Х. Юлдашева [9], Б.С. Добронца [6], Р.Б. Кирфотта [31], Э. Хансена и Дж.У. Уолстера [30], М. Фидлера с соавторами [13], электронном справочнике И. Рона [54]. Тем не менее, на сегодняшний день значительная часть результатов по этой теме всё-таки остаётся разбросанной по журнальным публикациям.

Среди работ разных лет отметим статью Ю. Гарлоффа [23], в которой впервые рассматривались блочные методы для интервальных линейных систем уравнений, работу Д. Гея [24], работы Г. Майера по выяснению условий применимости интервального метода Гаусса [33, 35], обзоры З. Румпа [55, 56].

**К §7.1** Интересно сопоставить саму постановку задачи о внешнем оценивании объединённого множества решений ИСЛАУ и интервальные подходы к её решению с другими методиками, которые применялись и применяются для решения аналогичных задач. Это, во-первых, широко известные методы *анализа чувствительности* решений систем уравнений и, во-вторых, прямое статистическое моделирование неопределённостей задачи (методы Монте-Карло).

Сравнению с методами Монте-Карло посвящено подробное обсуждение в Послесловии к книге. Что же касается традиционного анализа чувствительности для оценки вариаций решений, то ему обычно предшествует линеаризация исходного уравнения относительно некоторого частного решения, на основе которой и выводят заключение о влиянии на решение тех или иных параметров. Так как члены второго и более высоких порядков при этом обычно игнорируются, то подобная методика работоспособна лишь при «достаточно малых» изменениях параметров системы и к тому же не обеспечивает гарантированности оценок решений. Это относится и к технике, основанной на использовании числа обусловленности матрицы системы. Наконец, как вариации параметров системы, так и оценки вариаций решения при этом часто измеряют отклонением по норме (т. е. одним числом), тогда как в интервальном анализе и в постановке задачи, и ответе неопределённость с гораздо большей степенью детализации описывается многомерными интервалами-брусами.

**К §7.2** Интервальный метод Гаусса является одним из немногих успешных вычислительных алгоритмов, сконструированных согласно идеологии «наивного интервального анализа», когда интервальные методы для решения тех или иных задач строятся в виде естественных интервальных расширений аналогичных точечных методов. Его родные братья — интервальный метод Холесского и интервальный метод Хаусхолдера (отражений) являются существенно менее удачными и почти не используются на практике.

Интервальный метод Хаусхолдера был впервые предложен В.В. Шайдуровым в 1984 году в рамках работ по закрытой хоздоговорной тематике на Вычислительном Центре СО АН СССР в г. Красноярске, но, к сожалению, так и не был опубликован в открытой печати. В 2001-м году его перепоткрыл марокканский математик А. Бентбиб [20]. Вычислительная схема метода Хаусхолдера более сложна, чем у метода Гаусса, вычислительные инструкции более длинны и переменные в них больше «завязаны» друг на друга, так что их естественное интервальное расширение приводит к гораздо большему огрублению результатов. На практике интервальный метод Хаусхолдера даёт существенно менее качественные оценки множеств решений ИСЛАУ, чем интервальный метод Гаусса, и его применяют только при решении интервальной линейной задачи наименьших квадратов.

**К §7.3** Интервальный метод Гаусса-Зейделя был предложен и опробован Ф. Рисом в диссертации [47].

Отечественная терминология, касающаяся итерационного метода Гаусса-Зейделя для решения обычных точечных СЛАУ, претерпела за последние полвека некоторую эволюцию. В классической книге [12] аналогичный итерационный процесс назывался «методом Некрасова», а термины «метод Зейделя» и «одношаговый циклический процесс», равносильные друг другу, употреблялись в отношении похожего, но несколько иного вычислительного метода. В популярном учебнике Н.С. Бахвалова [3] и многих других пособиях используется название «метод Зейделя». Но переводные книги по вычислительной линейной алгебре (например, [5] и другие), следуя англоязычным оригиналам, употребляют уже термин «метод Гаусса-Зейделя», и именно это название постепенно укоренилось в русской литературе.

Теорема Барта-Нудинга об оптимальности интервального метода Гаусса-Зейделя



для ИСЛАУ с  $M$ -матрицами обнаружена В. Бартом и Е. Нудингом и впервые опубликована в [18].

**К §7.4** Уравнения вида  $x = Cx + d$ , в которых неизвестная величина выделена в одной из частей «в чистой форме», мы называем «уравнениями в рекуррентном виде». Соответствующий английский термин — fixed-point equation. В математической литературе часто встречается также термин «уравнения второго рода» (особенно в отношении операторных уравнений), тогда как «уравнениями первого рода» называются уравнения обычного вида  $Ax = b$ .

Теорема Майера-Варнке (Теорема 7.4.1), замечательная своей простотой и общностью, была сформулирована и доказана Г. Майером и его ученицей И. Варнке в [36] (она также воспроизведена в книге [34]). Интересно, что Теорема 7.4.2, которая представляет, фактически, другую версию того же результата, получена тридцатью пятью годами раньше в [17]. Мы сочли уместным связать её с именами Н. Апостолатоса и У. Кулиша, хотя в оригинальной форме эти авторы для существования формального решения системы (7.26) требовали усиленное условие  $\|C\| < 1$  для некоторой матричной нормы  $\|\cdot\|$ . Более слабое спектральное условие  $\rho(C) < 1$  было получено позднее О. Майером в [32].

Теорема 7.4.3 — это наша переформулировка результатов Теоремы 4 и Следствия 6 из Главы 11 книги [1].

Предложение 7.4.2 тоже принадлежит Н. Апостолатосу и У. Кулишу [17], хотя оригинально оно было сформулировано без опоры на понятие формального решения или теорему Майера-Варнке. Аналогичный результат позднее получен В. Бартом и Е. Нудингом [18].

Формальный подход к внешнему оцениванию множеств решений как самостоятельная методика, опирающаяся на свои собственные численные методы, предложен С.П. Шарым в [14, 57], но первоначально носил наименование «алгебраического». Используется также термин «формально-алгебраический подход».

При доказательстве Теоремы 7.4.4 мы следуем методике А. Ноймайера [40, 42]. Аналогичный, но более слабый результат был ранее получен Д.М. Геом в [24].

**К §7.5** Термин «предобуславливание» заимствован из традиционной вычислительной линейной алгебры, где похожая процедура широко используется для систем линейных уравнений с целью ускорения сходимости итерационных методов их решения.

Предобуславливание интервальных линейных систем было впервые применено Э. Хансеном и Р. Смитом в [26]. В связи с этим Г. Алефельд и Ю. Херцбергер в книге [1], Глава 16, даже называют предобуславливание «методом Хансена».

Важный результат об асимптотической точности предобуславливания обратной средней матрицей, который назван «леммой Миллера», был получен в работе [37].

**К §7.6** В публикациях школы А.А. Самарского и его последователей одношаговые итерационные методы решения систем уравнений нередко называются «двуслойными итерационными схемами».

Результат Теоремы 7.6.1 впервые был получен Н. Апостолатосом и У. Кулишем [17], но в других терминах, без привлечения понятия формального решения ИСЛАУ. См. также [1, 32].

**К §7.7** Процедура Хансена-Блика-Рона была независимо предложена в 1992-м году К. Бликом в его диссертации [21] (к сожалению, неопубликованной) и Э. Хансенom в работе [28]. Оба этих автора не смогли, впрочем, предложить обоснование своего метода. Это было сделано И. Роном [52], который также модифицировал вычислительную схему нового подхода. Далее С. Нинг и Р.Б. Кирфотт [45] обобщили процедуру Хансена-Блика-Рона на более широкий класс интервальных линейных систем, а А. Ноймайер в [44] предложил удобную и наиболее общую формулировку вместе с изящным обоснованием. В §7.7 математические конструкции следуют этой работе.

Э. Хансен в статье [29], продолжающей [28], даёт элементарное обоснование своей версии процедуры Хансена-Блика-Рона, не опирающееся на теорию интервальных  $H$ -матриц. Результаты И. Рона и предложенная им вычислительная схема опубликованы также в обзорной монографии [13].

Интересно отметить, что процедура Хансена-Блика-Рона по своему характеру не является «чисто интервальной», как, например, интервальные методы Гаусса, Кравчика и другие. Интервальные данные присутствуют на её входе и выходе, но в процессе обоснования этой процедуры мы пользовались интервальной арифметикой в очень небольшой степени. При её компьютерной реализации интервалы, интервальные операции и т. п. вообще играют незначительную роль. По этой причине процедуру Хансена-Блика-Рона можно назвать *полуинтервальной*.

**К §7.8** Впервые локальные оценивающие процедуры (которые назывались «local solvers») рассматривались А. Ноймайером для объединённого множества решений в [40], но эти результаты почему-то не вошли в итоговую книгу [42]. В работе [40] без каких-либо общих определений были рассмотрены некоторые конкретные локальные оценивающие процедуры и выполнен их теоретический анализ, но в полном объёме вопрос конструирования локальных оценивающих процедур никем до сих пор не ставился и не исследовался.

## Литература к Главе 7

- [1] АЛЕФЕЛЬД Г., ХЕРЦБЕРГЕР Ю. *Введение в интервальные вычисления*. – Москва: Мир, 1987.
- [2] АХМЕРОВ Р.Р. Интервально-аффинный метод Гаусса для систем со связями // *Труды XIII Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения», Иркутск-Северобайкальск, 2-8 июля 2005 года. Том 4 «Интервальный анализ.»* – Иркутск: ИСЭМ, 2005. – С. 9–26.
- [3] БАХВАЛОВ Н.С., ЖИДКОВ Н.П., КОБЕЛЬКОВ Г.М. *Численные методы*. – Москва: Наука, 1987.
- [4] БЕЛОВ Б.И., АНЦИФЕРОВ Е.Г. К установлению линейной зависимости в условиях неопределённости исходных данных // *Информационный сборник трудов Вычислительного Центра ИргУ; выпуск II*. – Иркутск: Изд-во Иркутского университета, 1968. – С. 143–147.
- [5] ГОЛУВ ДЖ., ВАН ЛОАН Ч. *Матричные вычисления*. – Москва: Мир, 1999.
- [6] ДОВРОНЕЦ Б.С. *Интервальная математика*. – Красноярск: Издательство КГТУ, 2004.

- [7] ДОБРОНЕЦ Б.С., ШАЙДУРОВ В.В. *Двусторонние численные методы*. – Новосибирск: Наука, 1990.
- [8] ЖОЛЕН Л., КИФЕР М., ДИДРИ О., ВАЛЬТЕР Э. *Прикладной интервальный анализ*. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005.
- [9] КАЛМЫКОВ С.А., ШОКИН Ю.И., ЮЛДАШЕВ Э.Х. *Методы интервального анализа*. – Новосибирск: Наука, 1986.
- [10] КУРЖАНСКИЙ А.Б. Задача идентификации — теория гарантированных оценок // *Автоматика и Телемеханика*. – 1991. – №4. – С. 3–26.
- [11] ОРТЕГА Дж., РЕЙНБОЛДТ В. *Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными*. – Москва: Мир, 1975.
- [12] ФАДДЕЕВ Д.К., ФАДДЕЕВА В.Н. *Вычислительные методы линейной алгебры*. – Москва: Физматгиз, 1963.
- [13] ФИДЛЕР М., НЕДОМА Й., РАМИК Я., РОН И., ЦИММЕРМАНН К. *Задачи линейной оптимизации с неточными данными*. – Москва-Ижевск: Издательство «РХД», 2008.
- [14] ШАРЫЙ С.П. Алгебраический подход во «внешней задаче» для интервальных линейных систем // *Вычислительные Технологии*. – 1998. – Т. 3, №2. – С. 67–114.
- [15] ШАРЫЙ С.П. *Курс вычислительных методов*. – Новосибирск: НГУ, ИВТ СО РАН, 2019.
- [16] AKHMEROV R.R. Interval-affine Gaussian algorithm for constrained systems // *Reliable Computing*. – 2005. – Vol. 11, No. 5. – P. 323–341.
- [17] APOSTOLATOS N., KULISCH U. Grundzüge einer Intervallrechnung für Matrizen und einige Anwendungen // *Electron. Rechenanl.* – 1968. – Bd. 10. – S. 73–83.
- [18] BARTH W., NUDING E. Optimale Lösung von Intervallgleichungssystemen // *Computing*. – 1974. – Vol. 12. – P. 117–125.
- [19] БЕЕК Н. Über die Struktur und Abschätzungen der Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen mit Intervallkoeffizienten // *Computing*. – 1972. – Vol. 10. – P. 231–244.
- [20] BENTBIB A.H. Solving the full rank interval least squares problem // *Applied Numerical Mathematics*. – 2002. – Vol. 41. – P. 283–294.
- [21] BLIEK C. *Computer Methods for Design Automation*. – PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, July 1992.
- [22] CAPRANI O., MADSEN K. Iterative methods for interval inclusion of fixed points // *BIT*. – 1978. – Vol. 18. – P. 42–51.
- [23] GARLOFF J. Block methods for the solution of linear equations // *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. – 1990. – Vol. 11. – P. 87–106.
- [24] GAY D.M. Solving interval linear equations // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1982. – Vol. 19, No. 4. – P. 857–870.
- [25] GAY D.M. Interval least squares — a diagnostic tool // *Reliability in Computing* / Moore R.E., ed. – New York: Academic Press, 1988. – P. 183–205.
- [26] HANSEN E.R., SMITH R. Interval arithmetic in matrix computations. Part II // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1967. – Vol. 4. – P. 1–9.
- [27] HANSEN E.R. On linear algebraic equations with interval coefficients // *Topics in Interval Analysis* / Hansen E., ed. – Oxford: Clarendon Press, 1969. – P. 35–46.

- [28] HANSEN E.R. Bounding the solution of interval linear equations // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1992. – Vol. 29, No. 5. – P. 1493–1503.
- [29] HANSEN E. The hull of preconditioned interval linear equations // *Reliable Computing*. – 2000. – Vol. 6. – P. 95–103.
- [30] HANSEN E., WALSTER G.W. *Global optimization using interval analysis*. – New York: Marcel Dekker, 2003.
- [31] KEARFOTT R.B. *Rigorous global search: continuous problems*. – Dordrecht: Kluwer, 1996.
- [32] MAYER O. Über die in der Intervallrechnung auftretenden Räume und einige Anwendungen. – PhD dissertation, Universität Karlsruhe, 1968.
- [33] MAYER G. Old and new aspects for the interval Gaussian algorithm // *Computer Arithmetic, Scientific Computation and Mathematical Modelling* / Kaucher E., Markov S.M. and Mayer G., eds. – Basel: Baltzer, 1991. – P. 327–349. – (IMACS Annals on Computing and Applied Mathematics; vol. 12)
- [34] MAYER G. *Interval Analysis and Automatic Result Verification*. – Berlin: Walter de Gruyter, 2017.
- [35] MAYER G., ROHN J. On the applicability of the interval Gaussian algorithm // *Reliable Computing*. – 1998. – Vol. 4, No. 3. – P. 205–222.
- [36] MAYER G., WARNKE I. On the fixed points of the interval function  $f([x]) = [A][x] + [b]$  // *Linear Algebra and its Applications*. – 2003. – Vol. 363. – P. 201–216.
- [37] MILLER W. On an interval-arithmetic matrix method // *BIT*. – 1972. – Vol. 12. – P. 213–219.
- [38] MOORE R.E. *Interval analysis*. – Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1966.
- [39] MOORE R.E. *Methods and applications of interval analysis*. – Philadelphia: SIAM, 1979.
- [40] NEUMAIER A. New techniques for the analysis of linear interval equations // *Linear Algebra and its Applications*. – 1984. – Vol. 58. – P. 273–325.
- [41] NEUMAIER A. Linear interval equations // *Interval Mathematics 1985* / Nickel K., ed. – New York: Springer Verlag, 1986. – P. 107–120. – (*Lecture Notes in Computer Science*; vol. 212).
- [42] NEUMAIER A. *Interval methods for systems of equations*. – Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [43] NEUMAIER A. On Shary's algebraic approach for linear interval equations // *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. – 2000. – Vol. 21. – P. 1156–1162.
- [44] NEUMAIER A. A simple derivation of Hansen-Bliek-Rohn-Ning-Kearfott enclosure for linear interval equations // *Reliable Computing*. – 1999. – Vol. 5, No. 2. – P. 131–136.
- [45] NING S., KEARFOTT R. B. A comparison of some methods for solving linear interval equations // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1997. – Vol. 34, No. 4. – P. 1289–1305.
- [46] REICHMANN K. Abbruch beim Intervall-GaußAlgorithmus // *Computing*. – 1979. – Vol. 22. – P. 355–361.
- [47] RIS F. Interval analysis and applications to linear algebra. – PhD thesis, Oxford University, Oxford, 1972.
- [48] ROHN J. Formulae for exact bounds on solutions of linear systems with rank one perturbations // *Freiburger Intervall-Berichte*. – 1987. – No. 6/87. – S. 1–20.

- [49] ROHN J. Systems of linear interval equations // *Linear Algebra and its Applications*. – 1989. – Vol. 126. – P. 37–78.
- [50] ROHN J. A two-sequence method for linear interval equations // *Computing*. – 1989. – Vol. 41, No. 1–2. – P. 137–140.
- [51] ROHN J. An asymptotic result for linear interval systems // *BIT*. – 1989. – Vol. 29, No. 2. – P. 372–374.
- [52] ROHN J. Cheap and tight bounds: the recent result by E. Hansen can be made more efficient // *Interval Computations*. – 1993. – No. 4. – P. 13–21.
- [53] ROHN J. On overestimations produced by the interval Gaussian algorithm // *Reliable Computing*. – 1997. – Vol. 3. – P. 363–368.
- [54] ROHN J. *A handbook of results on interval linear problems*. Czech Academy of Sciences: Prague, 2005. — Электронная книга, доступная на <http://www.nsc.ru/interval/Library/Surveys/ILinProblems.pdf>
- [55] RUMP S.M. Verification methods for dense and sparse systems of equations // *Topics in Validated Numerics* / Herzberger J., ed. – Amsterdam: Elsevier, 1994. – P. 63–135. – (Studies in computational mathematics; vol. 5)
- [56] RUMP S.M. Verification methods: Rigorous results using floating-point arithmetic // *Acta Numerica*. – 2010. – Vol. 19. – P. 287–449.
- [57] SHARY S.P. Algebraic approach in the “outer problem” for interval linear equations // *Reliable Computing*. – 1997. – Vol. 3, No. 2. – P. 103–135.
- [58] WONGWISES P. Experimentelle Untersuchungen zur numerischen Auflösung von linearen Gleichungssystemen mit fehlererfassung // *Interval Mathematics* / Nickel K., ed. – Berlin: Springer Verlag, 1975. – P. 316–325. – (Lecture Notes in Computer Science; vol. 29)

## Глава 8

# Внешнее оценивание решений нелинейных уравнений и систем уравнений

Эта глава книги посвящена задаче нахождения доказательных интервальных оценок решений обычных точечных уравнений и систем уравнений, а также внешнему интервальному оцениванию объединённого множества решений интервальных нелинейных уравнений и их систем.

### 8.1 Интервальный метод Ньютона

В этом параграфе мы рассмотрим простейший случай одного уравнения с одним неизвестным.

Предположим, что  $f : \mathbb{R} \supseteq \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$  — функция, имеющая нуль  $x^*$  на рассматриваемом интервале  $\mathbf{X}$  и дифференцируемая на нём. Тогда для любой точки  $\tilde{x} \in \mathbf{X}$  из этого же интервала в силу теоремы Лагранжа (формулы конечных приращений)

$$f(\tilde{x}) - f(x^*) = (\tilde{x} - x^*) \cdot f'(\xi), \quad (8.1)$$

где  $\xi$  — некоторая точка между  $\tilde{x}$  и  $x^*$ . Но так как  $f(x^*) = 0$ , то при  $f'(\xi) \neq 0$  отсюда следует

$$x^* = \tilde{x} - \frac{f(\tilde{x})}{f'(\xi)}.$$

Если  $\mathbf{f}'(\mathbf{X})$  является какой-либо интервальной оценкой производной от функции  $f(x)$  на  $\mathbf{X}$ , то  $f'(\xi) \in \mathbf{f}'(\mathbf{X})$  и, интервализуя выписанное равенство, получим включение

$$x^* \in \tilde{x} - \frac{f(\tilde{x})}{\mathbf{f}'(\mathbf{X})} \quad (8.2)$$

в случае  $0 \notin \mathbf{f}'(\mathbf{X})$ . Иными словами, для корня  $x^*$  уравнения  $f(x) = 0$  получается новый интервал локализации в виде правой части включения (8.2). Интервальное

выражение, фигурирующее в правой части (8.2), будет играть в дальнейшем важную роль и потому достойно выделения в самостоятельное понятие.

**Определение 8.1.1** Пусть заданы функция  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  и интервальная оценивающая функция  $f'$  для её производной. Отображение

$$\mathcal{N} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

действующее по правилу

$$\mathcal{N}(\mathbf{X}, \tilde{x}) := \tilde{x} - \frac{f(\tilde{x})}{f'(\mathbf{X})},$$

называется (одномерным) интервальным оператором Ньютона для  $f$ .

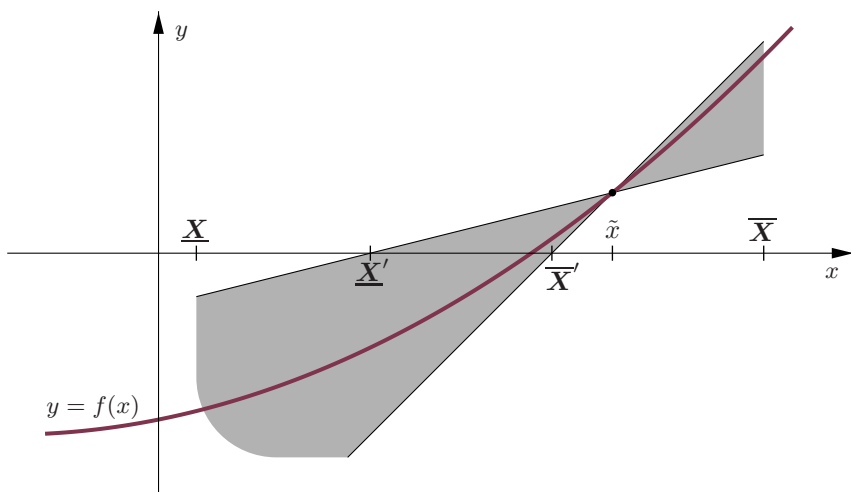


Рис. 8.1. Иллюстрация работы одномерного интервального метода Ньютона.

Итак, пусть  $0 \notin f'(\mathbf{X})$ , так что  $\mathcal{N}(\mathbf{X}, \tilde{x})$  является вполне определённым конечным интервалом. Так как любой нуль функции  $f(x)$  на  $\mathbf{X}$  лежит также в  $\mathcal{N}(\mathbf{X}, \tilde{x})$ , то разумно взять в качестве следующего более точного интервала локализации решения пересечение

$$\mathbf{X} \cap \mathcal{N}(\mathbf{X}, \tilde{x}),$$

которое окажется, по крайней мере, не хуже  $\mathbf{X}$ . Эта ситуация иллюстрируется на Рис. 8.1, где обозначено  $\mathbf{X}' = \mathcal{N}(\mathbf{X}, \tilde{x})$ . Далее, положив  $\mathbf{X}^{(0)} = \mathbf{X}$ , естественно организовать итерационное уточнение

$$\mathbf{X}^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{X}^{(k)} \cap \mathcal{N}(\mathbf{X}^{(k)}, \tilde{x}^{(k)}), \quad \tilde{x}^{(k)} \in \mathbf{X}^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (8.3)$$

которое называется *интервальным методом Ньютона*. В благоприятном случае он порождает последовательность интервалов  $\mathbf{X}^{(k)}$  уменьшающейся ширины, которые содержат искомое решение уравнения. Критерием остановки итераций при этом может быть достижение требуемой точности локализации решения, т. е. ширины  $\mathbf{X}^{(k)}$ .

Ещё одним вариантом развития итераций (8.3) является возможность возникновения на каком-то шаге пустого пересечения  $\mathbf{X}^{(k)} \cap \mathcal{N}(\mathbf{X}^{(k)}, \tilde{x})$ . После него можно прекращать выполнение алгоритма, коль скоро арифметические операции с пустым множеством либо не определены, либо снова приводят к пустому результату (в зависимости от конкретной реализации интервальных вычислений). При этом по самому построению интервального оператора Ньютона мы должны заключить, что на  $\mathbf{X}^{(k)}$ , а значит и на исходном интервале  $\mathbf{X}$ , уравнение  $f(x) = 0$  решений не имеет.

Наконец, наименее благоприятным с точки зрения уточнения информации о решении является «заставивание» итераций интервального метода Ньютона, когда на каком-то шаге мы получаем  $\mathbf{X}^{(k)} \subseteq \mathcal{N}(\mathbf{X}^{(k)}, \tilde{x})$ , так что

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} \cap \mathcal{N}(\mathbf{X}^{(k)}, \tilde{x}) = \mathbf{X}^{(k)}.$$

Ясно, что тогда и все последующие итерации метода будут равны  $\mathbf{X}^{(k)}$ , и решение никак не уточнится. Ниже мы обсудим, как преодолевать эту ситуацию.

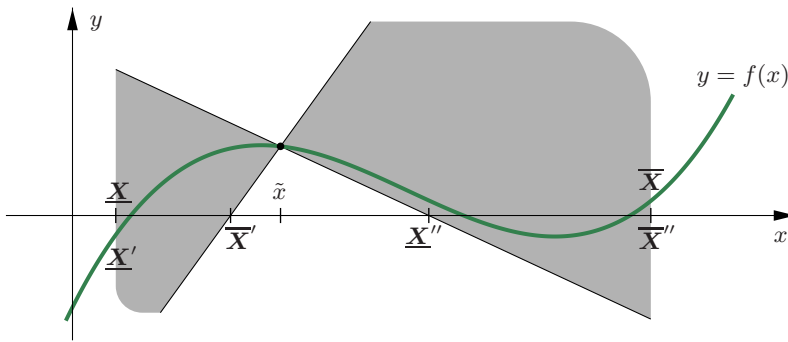


Рис. 8.2. Иллюстрация работы одномерного интервального метода Ньютона. Случай нульсодержащего интервала для производной.

Рассмотрим теперь случай  $0 \in \mathbf{f}'(\mathbf{X})$ . Он встречается, в частности, если на интервале  $\mathbf{X}$  имеется кратное решение  $x^*$ , в котором  $f'(x^*) = 0$ , либо когда интервал  $\mathbf{X}$  настолько широк, что содержит более одного решения уравнения. В этом случае мы также можем придать смысл интервальному оператору Ньютона, воспользовавшись для выполнения деления  $f(\tilde{x})/f'(\mathbf{X})$  интервальной арифметикой Кэхэна, допускающей деление на нульсодержащие интервалы (см. §1.11a). В действительности, эта модификация даже усилит интервальный метод Ньютона, так как мы получим возможность отделять различные решения друг от друга: в результате выполнения шага интервального метода Ньютона при  $0 \in \text{int } \mathbf{f}'(\mathbf{X})$  часто получаются два непересекающихся интервала. Эта ситуация иллюстрируется на Рис. 8.2.

Ещё одно преимущество применения арифметики Кэхэна при реализации интервального метода Ньютона состоит в том, что она позволяет организовать аккуратную обработку ситуаций с бесконечными производными функций, которые входят в уравнения.



**Пример 8.1.1** Рассмотрим уравнение

$$|x|^\alpha \cdot \operatorname{sgn} x = 0,$$

где  $0 < \alpha < 1$ . Из-за его простого вида поведение как обычного (точечного) метода Ньютона, так и интервального метода Ньютона в применении к этому уравнению можно исследовать аналитически.

Уравнение имеет одно решение — нулевое, и на Рис. 8.3 показан типичный график функции  $f(x) = |x|^\alpha \cdot \operatorname{sgn} x$  из левой части уравнения. Производная этой функции равна  $f'(x) = \alpha |x|^{\alpha-1}$ , и она становится бесконечной в нуле.

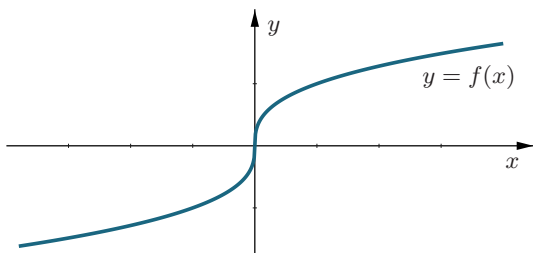


Рис. 8.3. График функции  $y = |x|^{0.36} \cdot \operatorname{sgn} x$ .

Если решаем данное уравнение с помощью обычного метода Ньютона, то

$$x^{(k+1)} \leftarrow x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

В нашем конкретном случае

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{|x^{(k)}| \cdot \operatorname{sgn} x^{(k)}}{\alpha} = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) x^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

то есть итерации метода Ньютона образуют геометрическую прогрессию со знаменателем  $(1 - 1/\alpha)$ . Если  $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ , то

$$\left|1 - \frac{1}{\alpha}\right| \geq 1,$$

и итерации метода Ньютона расходятся из любого начального приближения, отличного от нуля, единственного решения уравнения. Тем не менее, интервальный метод Ньютона позволяет успешно найти это нулевое решение.

Для организации интервального метода Ньютона нужно найти интервальную оценку производной  $f'$ . Если  $\mathbf{X}$  — некоторый интервал, то для рассматриваемых значений  $\alpha$  справедливо

$$|\mathbf{X}|^{\alpha-1} = \begin{cases} [|\underline{\mathbf{X}}|^{\alpha-1}, |\overline{\mathbf{X}}|^{\alpha-1}], & \text{если } \underline{\mathbf{X}} \leq \overline{\mathbf{X}} < 0, \\ [|\underline{\mathbf{X}}|^{\alpha-1}, +\infty], & \text{если } \underline{\mathbf{X}} < 0 < \overline{\mathbf{X}}, \\ [\overline{\mathbf{X}}^{\alpha-1}, \underline{\mathbf{X}}^{\alpha-1}], & \text{если } 0 < \underline{\mathbf{X}} \leq \overline{\mathbf{X}}, \end{cases}$$

Если  $\mathbf{X}$  содержит нуль в своей внутренности, то интервальный оператор Ньютона, взятый относительно середины интервала и с помощью деления в арифметике Кэхэна, равен

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathbf{X}, \text{mid } \mathbf{X}) &= \text{mid } \mathbf{X} - \frac{|\text{mid } \mathbf{X}|^\alpha \cdot \text{sgn } \text{mid } \mathbf{X}}{\alpha |\mathbf{X}|^{\alpha-1}} \\ &= \text{mid } \mathbf{X} - \frac{1}{\alpha} |\text{mid } \mathbf{X}|^\alpha \cdot \text{sgn } \text{mid } \mathbf{X} \cdot [0, |\mathbf{X}|^{1-\alpha}]. \end{aligned}$$

Обозначая  $\mathbf{X}' := \mathbf{X} \cap \mathcal{N}(\mathbf{X}, \text{mid } \mathbf{X})$  — следующую итерацию метода Ньютона, будем иметь, следовательно,

$$\mathbf{X}' \subseteq [\underline{\mathbf{X}}, \text{mid } \mathbf{X}], \text{ если } \text{mid } \mathbf{X} > 0,$$

$$\mathbf{X}' = 0, \text{ если } \text{mid } \mathbf{X} = 0,$$

$$\mathbf{X}' \subseteq [\text{mid } \mathbf{X}, \overline{\mathbf{X}}], \text{ если } \text{mid } \mathbf{X} < 0.$$

В первом и третьем случаях ширина интервала  $\mathbf{X}'$  не превосходит половины ширины исходного интервала  $\mathbf{X}$ . Кроме того,  $\mathbf{X}'$  содержит нуль. Как следствие, интервальный метод Ньютона сходится к нулевому решению рассматриваемого уравнения со скоростью геометрической прогрессии. ■

В работе [19] рассматривается работа интервального метода Ньютона на нескольких тестовых уравнениях, для которых традиционный точечный метод Ньютона не может найти решения или же находит их плохо. Один из этих примеров — известное уравнение Донована-Миллера-Морелэнда

$$h(x) = \sqrt[3]{x} \exp(-x^2) = 0.$$

Оно имеет единственное решение, равное нулю, но, как нетрудно показать, метод Ньютона не сходится к нему ни из какого начального приближения, отличного от самого нуля. Интервальный метод Ньютона, реализованный с помощью арифметики Кэхэна, ведёт себя в этом случае гораздо лучшим образом и позволяет локализовать решение.

В случае, когда производная функции  $f$ , фигурирующей в левой части уравнения, на интервале  $\mathbf{X}$  не зануляется и её оценка  $\mathbf{f}'(\mathbf{X})$  не содержит нуля, интервальный метод Ньютона обладает рядом замечательных качеств. Если  $0 \notin \mathbf{f}'(\mathbf{X})$  для некоторого  $\mathbf{X}$ , то на следующем шаге метода будет исключена по крайней мере половина  $\mathbf{X}$ . При этом асимптотический порядок сходимости метода к нулю функции  $f$  на интервале  $\mathbf{X}$  является квадратичным, т. е. таким же, как у обычного неинтервального метода Ньютона.

**Предложение 8.1.1** Пусть функция  $f$  дифференцируема на интервале  $\mathbf{X}$  и имеет место  $\mathbf{f}'(\mathbf{X}) \not\ni 0$ . Если для некоторой точки  $\tilde{x} \in \mathbf{X}$  справедливо включение  $\mathcal{N}(\mathbf{X}, \tilde{x}) \subseteq \mathbf{X}$ , то интервал  $\mathbf{X}$  содержит ровно одно решение уравнения  $f(x) = 0$ .

**Доказательство.** Помимо  $\tilde{x}$  рассмотрим ещё точку  $y \in \mathbf{X}$ . Согласно теореме Лагранжа о среднем найдётся такая точка  $\xi \in \square\{\tilde{x}, y\} \subset \mathbf{X}$ , что

$$f(\tilde{x}) - f(y) = f'(\xi) (\tilde{x} - y). \quad (8.4)$$

Чтобы подчеркнуть зависимость этой точки от  $\tilde{x}$  и  $y$ , мы обозначим её как  $\xi(\tilde{x}, y)$ . Коль скоро  $f'(\xi) \in \mathbf{f}'(\mathbf{X})$ , то ясно, что  $f'(\xi(\tilde{x}, y)) \neq 0$  при любых  $\tilde{x}$  и  $y$ . По этой причине мы можем определить функцию

$$g(y) = y - \frac{f(y)}{f'(\xi(\tilde{x}, y))}. \quad (8.5)$$

Заметим, что функция  $g(y)$  непрерывна. Если  $y \neq \tilde{x}$ , то это следует из непрерывной зависимости от  $y$  величины

$$f'(\xi(\tilde{x}, y)) = \frac{f(\tilde{x}) - f(y)}{\tilde{x} - y}.$$

При  $y = \tilde{x}$  это следует из существования производной  $f'(\tilde{x})$ . Кроме того, из равенства (8.4) вытекает

$$\tilde{x} - \frac{f(\tilde{x})}{f'(\xi(\tilde{x}, y))} = y - \frac{f(y)}{f'(\xi(\tilde{x}, y))},$$

так что верно альтернативное представление функции  $g$ :

$$g(y) = \tilde{x} - \frac{f(\tilde{x})}{f'(\xi(\tilde{x}, y))}.$$

Как следствие, после интервализации этого выражения по  $y \in \mathbf{X}$ , получаем

$$g(y) = \tilde{x} - \frac{f(\tilde{x})}{f'(\xi(\tilde{x}, y))} \in \tilde{x} - \frac{f(\tilde{x})}{\mathbf{f}'(\mathbf{X})} = \mathcal{N}(\mathbf{X}, \tilde{x}) \subseteq \mathbf{X}.$$

Так как это включение справедливо для любого  $y \in \mathbf{X}$ , то получается, что непрерывное отображение  $g$  переводит интервал  $\mathbf{X}$  в себя. Следовательно, в силу теоремы Брауэра о неподвижной точке, существует такое  $y^* \in \mathbf{X}$ , что  $g(y^*) = y^*$ . Из (8.5) тогда вытекает, что  $f(y^*) = 0$ , т. е.  $y^*$  является решением уравнения  $f(x) = 0$ .

Единственность этого решения вытекает из монотонности функции  $f(x)$ , которая, в свою очередь, следует из условия  $0 \notin \mathbf{f}'(\mathbf{X})$ . ■

Вывод интервального метода Ньютона опирался на разложение (8.1), следующее из дифференцируемости функции  $f$ . Но, как мы видели в Главе 3, совершенно аналогичное разложение можно выписать на основе наклона функции:

$$f(\tilde{x}) - f(x^*) = f^\zeta(\tilde{x}, x^*)(\tilde{x} - x^*),$$

и оно справедливо даже в более общих ситуациях, нежели (8.1). Тогда, если  $f(x^*) = 0$ , то

$$x^* = \tilde{x} - \frac{f(\tilde{x})}{f^\zeta(\tilde{x}, x^*)}$$

при  $f^\zeta(\tilde{x}, x^*) \neq 0$ . Взяв интервальное расширение этого равенства по  $x^* \in \mathbf{X}$ , получим

$$x^* \in \tilde{x} - \frac{f(\tilde{x})}{\mathbf{f}^\zeta(\tilde{x}, \mathbf{X})}.$$

Соответственно, *наклонный интервальный оператор Ньютона* можно определить как отображение  $\mathcal{N} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , действующее по правилу

$$\mathcal{N}(\mathbf{X}, \tilde{x}) := \tilde{x} - \frac{f(\tilde{x})}{\mathbf{f}'(\mathbf{X}, \tilde{x})}.$$

Он обладает почти всеми теми свойствами, которые есть у интервального оператора Ньютона, основанного на производных.

В заключение — необходимый комментарий о реализации интервального метода Ньютона на ЭВМ. Для доказательности вычислений значение  $f(\tilde{x})$ , несмотря на точность аргумента  $\tilde{x}$ , следует находить с помощью машинной интервальной арифметики с внешним направленным округлением. Иначе возможны потеря решений и другие нежелательные феномены.

## 8.2 Многомерный интервальный метод Ньютона

Многомерные версии интервального метода Ньютона, применяемые для решения систем нелинейных уравнений, гораздо более многочисленны, чем одномерные, и отличаются очень большим разнообразием. В многомерном случае мы можем варьировать не только выбор точки  $\tilde{x}$ , вокруг которой осуществляется разложение, форму интервального расширения производных или наклонов функции, как это было в одномерном случае, но также и способ внешнего оценивания множества решений интервальной линейной системы, к которой приводится оценивание бруса решения. В оставшейся части этого параграфа мы рассмотрим простейшую форму многомерного интервального метода Ньютона, а его более специальными версиями, которые связываются с именами Кравчика и Хансена-Сенгупты, будут посвящены отдельные параграфы.

Предположим, что на брусе  $\mathbf{X}$  задана система уравнений

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \end{cases} \quad (8.6)$$

которую в краткой векторной форме будем записывать в виде

$$F(x) = 0, \quad (8.7)$$

где  $F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x))^T$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  и  $F_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  — некоторые функции от  $n$  переменных. Пусть  $\mathbf{L}$  — интервальная матрица Лишшица отображения  $F$  на  $\mathbf{X}$  (см. Определение 3.2.4). В частности  $\mathbf{L}$  может быть интервальным расширением якобиана отображения  $F$  на  $\mathbf{X}$ . Тогда для любых точек  $x, \tilde{x} \in \mathbf{X}$  справедливо представление

$$F(x) \in F(\tilde{x}) + \mathbf{L}(x - \tilde{x}).$$

В частности, если  $x = x^*$  — решение системы уравнений (8.6)–(8.7), т. е.  $F(x^*) = 0$ , то

$$0 \in F(\tilde{x}) + \mathbf{L}(x^* - \tilde{x}). \quad (8.8)$$

Вспомним характеризацию Бекка для объединённого множества решений ИСЛАУ (Теорема 7.1.1). Из неё следует, что точка  $x^*$  удовлетворяет включению (8.8) тогда и только тогда, когда она принадлежит объединённому множеству решений интервальной линейной системы

$$\mathbf{L}(x - \tilde{x}) = -F(\tilde{x}). \quad (8.9)$$

Далее, пусть  $Encl$  — какая-либо процедура внешнего оценивания объединённого множества решений  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  интервальной линейной системы  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ , так что

$$Encl(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \supseteq \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}).$$

Тогда справедливо включение

$$x^* - \tilde{x} \in Encl(\mathbf{L}, -F(\tilde{x})),$$

из которого следует

$$x^* \in \tilde{x} - Encl(\mathbf{L}, F(\tilde{x})),$$

так как  $Encl(\mathbf{L}, -F(\tilde{x})) = -Encl(\mathbf{L}, F(\tilde{x}))$ .

**Определение 8.2.1** Пусть для внешнего оценивания множеств решений ИСЛАУ зафиксирована процедура  $Encl$ , а для отображения  $F : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^n$  известна интервальная матрица Липшица  $\mathbf{L} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ . Отображение

$$\mathcal{N} : \mathbb{ID} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{IR}^n,$$

задаваемое правилом

$$\mathcal{N}(\mathbf{X}, \tilde{x}) = \tilde{x} - Encl(\mathbf{L}, F(\tilde{x})), \quad (8.10)$$

называется интервальным оператором Ньютона на  $\mathbb{ID}$  относительно точки  $\tilde{x}$ .

По поводу этого определения необходим комментарий. В обычном неинтервальном случае расчётную формулу метода Ньютона для решения системы уравнений обычно выписывают в виде

$$X^{(k+1)} \leftarrow X^{(k)} - (J(X^{(k)}))^{-1} F(X^{(k)}),$$

где фигурирует матрица, обратная к якобиану  $J(X^{(k)})$  отображения  $F$  в точке  $X^{(k)}$ . Но нам нужна не сама эта обратная матрица «в чистом виде», а лишь её произведение на вектор  $F(X^{(k)})$ , которое при реализации выгоднее представить как решение системы линейных алгебраических уравнений с матрицей  $J(X^{(k)})$ . Тем самым достигается выигрыш в трудоёмкости и лучшая точность результата. Эти аргументы полностью сохраняют свою силу в интервальном случае и, кроме того, к ним добавляется ещё одна веская причина. Запись интервальной оценки значений произведения  $(J(X^{(k)}))^{-1} F(X^{(k)})$  через внешнее оценивание множества решений соответствующей ИСЛАУ уменьшает огрубление результата (см. §7.1). Именно поэтому

расчётные формулы многомерного интервального метода Ньютона определены в виде, который не вполне соответствует точечному случаю.

Из построения интервального оператора Ньютона следует, что каждое решение системы уравнений  $F(x) = 0$  на брус  $\mathbf{X}$  лежит также в  $\mathcal{N}(\mathbf{X}, \tilde{x})$ . Как следствие, если  $\mathbf{X} \cap \mathcal{N}(\mathbf{X}, \tilde{x}) = \emptyset$ , то в брус  $\mathbf{X}$  нет решений системы  $F(x) = 0$ .

**Теорема 8.2.1** Пусть  $F : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^n$  — дифференцируемое отображение, и для некоторого  $\tilde{x}$  имеет место включение  $\mathcal{N}(\mathbf{X}, \tilde{x}) \subseteq \mathbf{X}$ . Тогда в брус  $\mathbf{X}$  находится ровно одно решение системы  $F(x) = 0$ .

**Доказательство.** Прежде всего отметим, что из существования интервального оператора Ньютона следует неособенность матрицы  $\mathbf{L}$ . Иначе множество решений интервальной линейной системы  $\mathbf{L}x = F(\tilde{x})$  было бы неограниченным, а его внешняя оценка  $\text{Encl}(\mathbf{L}, F(\tilde{x}))$  не существовала бы.

Помимо  $\tilde{x}$  рассмотрим ещё точку  $y \in \mathbf{X}$ . Согласно многомерной версии теоремы Лагранжа о среднем на отрезке, соединяющем  $\tilde{x}$  и  $y$ , найдётся такая точка  $\xi$ , что

$$F(\tilde{x}) - F(y) = F'(\xi)(\tilde{x} - y). \quad (8.11)$$

Чтобы подчеркнуть зависимость этой точки от  $\tilde{x}$  и  $y$ , мы обозначим её как  $\xi(\tilde{x}, y)$ .

Коль скоро  $F'(\xi) \in F'(\mathbf{X})$ , то ясно, что матрица  $F'(\xi(\tilde{x}, y))$  неособенна при любых  $\tilde{x}$  и  $y$ . По этой причине мы можем определить функцию

$$G(y) = y - (F'(\xi(\tilde{x}, y)))^{-1}F(y). \quad (8.12)$$

По условиям Предложения функция  $G(y)$  непрерывна. Кроме того, из равенства (8.11) следует

$$\tilde{x} - (F'(\xi(\tilde{x}, y)))^{-1}F(\tilde{x}) = y - (F'(\xi(\tilde{x}, y)))^{-1}F(y),$$

так что верно альтернативное представление функции  $G$ :

$$G(y) = \tilde{x} - (F'(\xi(\tilde{x}, y)))^{-1}F(\tilde{x}).$$

Как следствие, после интервализации этого выражения по  $y \in \mathbf{X}$ , получаем

$$G(y) = \tilde{x} - (F'(\xi(\tilde{x}, y)))^{-1}F(\tilde{x}) \in \tilde{x} - \text{Encl}(\mathbf{L}, F(\tilde{x})) = \mathcal{N}(\mathbf{X}, \tilde{x}) \subseteq \mathbf{X}.$$

Так как это включение справедливо для любого  $y \in \mathbf{X}$ , то получается, что непрерывное отображение  $G$  переводит брус  $\mathbf{X}$  в себя. Следовательно, в силу теоремы Брауэра о неподвижной точке, существует такое  $y^* \in \mathbf{X}$ , что  $G(y^*) = y^*$ . Из (8.5) тогда вытекает, что  $F(y^*) = 0$ , т. е.  $y^*$  является решением уравнения  $F(x) = 0$ .

Для доказательства единственности решения предположим, что  $F(x^*) = 0$  и  $F(y^*) = 0$  для двух различных точек  $x^*$  и  $y^*$ . Тогда по определению интервальной матрицы Липшица

$$0 = F(x^*) - F(y^*) = L(x^* - y^*)$$

для некоторой матрицы  $L \in \mathbf{L}$ . Но  $L$  неособенна, и потому выписанное равенство возможно лишь при условии  $x^* = y^*$ . ■

Как лучше выбирать центр разложения  $\tilde{x}$ ? Имеет смысл делать это так, чтобы величина  $\|F(\tilde{x})\|$  была, по-возможности, меньшей. Чем меньше будет норма вектор-функции  $F(\tilde{x})$ , тем меньшим будет норма векторов, образующих множество решений интервальной линейной системы

$$L(x - \tilde{x}) = -F(\tilde{x}),$$

которое мы должны пересекать с исходным брусом, тем меньшими будут его размеры. При этом мы, скорее всего, получим более узкую внешнюю оценку множества решений исходной нелинейной системы и точнее определим статус исследуемого бруса. Численные эксперименты, проведённые Э. Хансеном и Р. Гринбергом [24], подтверждают этот вывод. В книге [17] рассматривается простая итерационная процедура, названная «внутренними итерациями», которая предназначена для минимизации  $\|F(\tilde{x})\|$  в пределах заданного бруса.

Как и в одномерном случае, положив  $\mathbf{X}^{(0)} = \mathbf{X}$ , организуем итерационное уточнение

$$\mathbf{X}^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{X}^{(k)} \cap \mathcal{N}(\mathbf{X}^{(k)}, \tilde{x}^{(k)}), \quad \tilde{x}^{(k)} \in \mathbf{X}^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

которое называется *интервальным методом Ньютона*.

Наиболее неблагоприятной ситуацией при работе интервального метода Ньютона является, конечно, появление включения

$$\mathcal{N}(\mathbf{X}, \tilde{x}) \supseteq \mathbf{X}.$$

Тогда все последующие шаги закливаются на брусе  $\mathbf{X}$  и не дают никакой дополнительной информации об искомым решениях системы. Как поступать в этом случае?

Одним их простых и универсальных приёмов, который позволяет сдвинуть уточнение решений с «мертвой точки», является *дробление* исходного бруса на более мелкие подбрусы. Пусть

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}' \cup \mathbf{X}'',$$

тогда мы можем применить интервальный метод Ньютона к  $\mathbf{X}'$  и  $\mathbf{X}''$  по отдельности и объединить полученные результаты. Поскольку подбрусы  $\mathbf{X}'$  и  $\mathbf{X}''$  имеют, вообще говоря, меньшую ширину и содержат меньше изолированных решений, чем исходный брус  $\mathbf{X}$ , то применение интервального метода Ньютона к ним может быть гораздо более успешным. Наиболее часто используется *бисекция* — дробление исходного бруса пополам, на две равные части. Результатом дробления является постоянное увеличение количества обрабатываемых брусов, что вызывает необходимость организовать работу нашего алгоритма специальным образом. Подробному рассмотрению этого вопроса посвящён §8.6.

### 8.3 Метод Кравчика

В этом параграфе мы рассмотрим метод внешнего оценивания решений систем нелинейных уравнений, предложенный немецким математиком Р. Кравчиком в работе [27], который впоследствии приобрёл большую популярность в практических интервальных вычислениях.

Пусть на брус  $\mathbf{X} \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n$  задана система  $n$  нелинейных уравнений с  $n$  неизвестными

$$F(x) = 0,$$

в которой  $F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x))^T$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ . Для неё требуется уточнить двусторонние границы решений, либо убедиться, что в  $\mathbf{X}$  решений нет. Возьмём какую-нибудь точку  $\tilde{x} \in \mathbf{X}$  и организуем относительно неё разложение функции  $F$ :

$$F(x) \in F(\tilde{x}) + \mathbf{L}(x - \tilde{x}),$$

где  $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — интервальная матрица Липшица отображения  $F$  на брус  $\mathbf{X}$ . Если взять  $x = x^*$ , т.е. точкой решения системы, то  $F(x^*) = 0$  и потому выполняется включение (8.8):

$$0 \in F(\tilde{x}) + \mathbf{L}(x^* - \tilde{x}).$$

Но далее, в отличие от интервального метода Ньютона, мы не будем переходить к рассмотрению интервальной линейной системы (8.9), а домножим обе части этого включения слева на точечную  $n \times n$ -матрицу, которую нам будет удобно обозначить как  $(-\Lambda)$ :

$$0 \in -\Lambda F(\tilde{x}) - \Lambda \mathbf{L}(x^* - \tilde{x}).$$

Добавление к обеим частям получившегося соотношения по  $(x^* - \tilde{x})$  приводит к

$$x^* - \tilde{x} \in -\Lambda F(\tilde{x}) - \Lambda \mathbf{L}(x^* - \tilde{x}) + (x^* - \tilde{x}),$$

что равносильно

$$x^* \in \tilde{x} - \Lambda F(\tilde{x}) + (I - \Lambda \mathbf{L})(x^* - \tilde{x}),$$

так как для неинтервального общего множителя  $(x^* - \tilde{x})$  можно воспользоваться дистрибутивным соотношением (1.55). Наконец, если решение  $x$  системы уравнений предполагается принадлежащим брусу  $\mathbf{X}$ , мы можем взять интервальное расширение по  $x \in \mathbf{X}$  правой части полученного включения, придя к соотношению

$$x^* \in \tilde{x} - \Lambda F(\tilde{x}) + (I - \Lambda \mathbf{L})(\mathbf{X} - \tilde{x}).$$

**Определение 8.3.1** Пусть определены некоторые правила, сопоставляющие брусу  $\mathbf{X} \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n$  точку  $\tilde{x} \in \mathbf{X}$  и вещественную  $n \times n$ -матрицу  $\Lambda$  и пусть также  $\mathbf{L} \in \mathbb{I}\mathbb{R}^{n \times n}$  — интервальная матрица Липшица отображения  $F : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^n$  на  $D$ . Отображение

$$\mathcal{K} : \mathbb{I}D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I}\mathbb{R}^n,$$

задаваемое выражением

$$\mathcal{K}(\mathbf{X}, \tilde{x}) := \tilde{x} - \Lambda F(\tilde{x}) + (I - \Lambda \mathbf{L})(\mathbf{X} - \tilde{x}),$$

называется оператором Кравчика на  $\mathbb{I}D$  относительно точки  $\tilde{x}$ .

Нетрудно заметить, что оператор Кравчика — это не что иное, центрированная форма, с центром в  $\tilde{x}$ , для интервального расширения отображения

$$\Phi(x) := x - \Lambda F(x),$$



которое возникает в правой части системы уравнений после её приведения к рекуррентному виду:

$$x = \Phi(x). \quad (8.13)$$

Здесь  $L$  — предобуславливающая матрица, с помощью которой можно управлять свойствами отображения  $\Phi(x)$ .

**Предложение 8.3.1** Пусть  $F : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^n$  — непрерывное отображение,  $L$  — его интервальная матрица Липшица и  $\tilde{x} \in \mathbf{X} \subseteq \mathbb{ID}$ . Тогда

(i) каждое решение системы  $F(x) = 0$  на брус  $\mathbf{X}$  лежит также в  $\mathcal{K}(\mathbf{X}, \tilde{x})$ ;

(ii) если  $\mathbf{X} \cap \mathcal{K}(\mathbf{X}, \tilde{x}) = \emptyset$ , то в брус  $\mathbf{X}$  нет решений системы  $F(x) = 0$ .

Эти два свойства оператора Кравчика непосредственно вытекают из его построения.

**Предложение 8.3.2** Пусть  $F : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^n$  — непрерывное отображение,  $L$  — его интервальная матрица Липшица и  $\tilde{x} \in \mathbf{X} \subseteq \mathbb{ID}$ . Если  $\mathcal{K}(\mathbf{X}, \tilde{x}) \subseteq \mathbf{X}$  и в операторе Кравчика матрица  $L$  неособенна, то в брус  $\mathbf{X}$  находится хотя бы одно решение системы  $F(x) = 0$ .

**Доказательство.** Для отображения  $\Phi$  из рекуррентной формы (8.13) рассматриваемого уравнения справедливо соотношение

$$\{\Phi(x) \mid x \in \mathbf{X}\} \subseteq \mathcal{K}(\mathbf{X}, \tilde{x}),$$

и потому из включения  $\mathcal{K}(\mathbf{X}, \tilde{x}) \subseteq \mathbf{X}$  следует, что образ бруса  $\mathbf{X}$  при непрерывном отображении  $\Phi$  содержится в самом  $\mathbf{X}$ . В силу теоремы Брауэра о неподвижной точке существует  $x^* \in \mathbf{X}$ , такая что  $x^* = \Phi(x^*)$ . Тогда

$$x^* = x^* - LF(x^*),$$

и потому при неособенной матрице  $L$  необходимо  $F(x^*) = 0$ . ■

**Предложение 8.3.3** Пусть  $F : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^n$  — некоторое отображение,  $L$  — его интервальная матрица Липшица и  $\tilde{x} \in \mathbf{X} \subseteq \mathbb{ID}$ , причём брус  $\mathbf{X}$  телесен. Если  $(\mathcal{K}(\mathbf{X}, \tilde{x}))_i \subsetneq \mathbf{X}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , то матрица  $L$  сильно неособенна и в брус  $\mathbf{X}$  содержится ровно одно решение системы  $F(x) = 0$ .

**Доказательство.** В силу левого неравенства (2.12)

$$\begin{aligned} \text{rad } \mathcal{K}(\mathbf{X}, \tilde{x}) &= \text{rad } (\tilde{x} - LF(\tilde{x}) + (I - \Lambda L)(\mathbf{X} - \tilde{x})) \\ &= \text{rad } ((I - \Lambda L)(\mathbf{X} - \tilde{x})) \\ &\geq |I - \Lambda L| \cdot \text{rad } (\mathbf{X} - \tilde{x}) \\ &= |I - \Lambda L| \cdot \text{rad } \mathbf{X}. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Поэтому если  $(\mathcal{K}(\mathbf{X}, \tilde{x}))_i \subsetneq \mathbf{X}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , то

$$\text{rad } \mathbf{X} > \text{rad } \mathcal{K}(\mathbf{X}, \tilde{x}) \geq |I - \Lambda L| \cdot \text{rad } \mathbf{X}$$

для положительного вектора  $\text{rad } \mathbf{X}$ . Вследствие Предложения 2.3.3 (стр. 108) можем заключить, что спектральный радиус неотрицательной матрицы  $|I - \Lambda \mathbf{L}|$  должен быть строго меньше 1. По этой причине  $\mathbf{L}$  сильно неособенна. Более того, для отображения  $\mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , задаваемого правилом  $x \mapsto \Phi(x)$ , оказываются выполненными условия теоремы Шрёдера о неподвижной точке (Теорема 2.4.2, стр. 112).

В самом деле, если  $\mathbf{L}$  — интервальная матрица Липшица для функции  $F(x)$ , то  $I - \Lambda \mathbf{L}$  — интервальная матрица Липшица функции  $\Phi(x) = x - \Lambda F(x)$ , что следует из выкладки

$$\begin{aligned} \Phi(x) - \Phi(y) &= (x - \Lambda F(x)) - (y - \Lambda F(y)) \\ &= (x - y) - \Lambda (F(x) - F(y)) = (I - \Lambda \mathbf{L})(x - y) \end{aligned}$$

для некоторой  $L \in \mathbf{L}$ . Введём на пространстве  $\mathbb{R}^n$  мультиметрику  $\text{Dist}$  по правилу

$$\text{Dist}(x, y) = |x - y| = \begin{pmatrix} |x_1 - y_1| \\ |x_2 - y_2| \\ \vdots \\ |x_n - y_n| \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \text{Dist}(\Phi(x), \Phi(y)) &= |\Phi(x) - \Phi(y)| = |(I - \Lambda \mathbf{L})(x - y)| \\ &\leq |I - \Lambda \mathbf{L}| \cdot |x - y| \leq |I - \Lambda \mathbf{L}| \cdot \text{Dist}(x, y), \end{aligned}$$

и если спектральный радиус матрицы  $|I - \Lambda \mathbf{L}|$  меньше единицы, то по теореме Шрёдера у отображения  $\Phi$  существует единственная неподвижная точка, которая является решением рассматриваемой системы уравнений.

Таким образом, в бресе  $\mathbf{X}$  содержится ровно одно решение системы  $F(x) = 0$ . ■

Дальнейшее уточнение решения можно организовать совершенно так же, как и для интервального метода Ньютона, положив  $\mathbf{X}^{(0)} = \mathbf{X}$  и запустив итерации

$$\mathbf{X}^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{X}^{(k)} \cap \mathcal{K}(\mathbf{X}^{(k)}, \tilde{x}^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

для какой-то последовательности точек  $\tilde{x}^{(k)} \in \mathbf{X}^{(k)}$ . Этот интервальный итерационный процесс называется *методом Кравчика*. Его частным случаем является итерационный метод Кравчика (7.45) для внешнего оценивания множеств решений ИСЛАУ, рассмотренный в §7.6. Как и в интервальном методе Ньютона, чтобы обеспечить доказательность вычислений с оператором Кравчика, значение функции  $F(\tilde{x})$  следует находить с помощью машинной интервальной арифметики с внешним направленным округлением.

Оператор Кравчика и интервальные итерации Кравчика работают при достаточно произвольных  $\tilde{x}$  и  $\Lambda$ , но для получения наилучших результатов желательно выбирать их так, чтобы значением оператора Кравчика был, по-возможности, наиболее узкий брус. Нетрудно видеть, что наименьшая ширина значений оператора Кравчика достигается при выборе  $\tilde{x} = \text{mid } \mathbf{X}$ , т. е. когда точка  $\tilde{x}$  берётся в виде центра бруса

$\mathbf{X}$ : при этом в цепочке соотношений (8.14) для уравновешенного интервала  $(\mathbf{X} - \tilde{x})$  единственное неравенство действительно обращается в равенство.

Далее, для матрицы  $L$  наиболее благоприятным значением является  $(\text{mid } L)^{-1}$ , поскольку при  $\tilde{x} = \text{mid } \mathbf{X}$  тогда минимизируется ширина значений  $\mathcal{K}(\mathbf{X}, \tilde{x})$ .

Коль скоро оператор Кравчика — это центрированная форма интервального расширения для  $\Phi(x) = x - LF(x)$ , мы можем использовать для модификации оператора Кравчика все те средства, которые применимы к центрированным формам вообще. Одним из способов улучшения качества интервальных оценок является варьирование центра разложения  $\tilde{x}$ , и на этом пути итоговый результат — это теорема Бауманна (Теорема 3.5.1).

Как мы видели в §3.5, теорема Бауманна естественно вызывает к жизни так называемую *бицентрированную форму* интервального расширения функций, в которой мы берём пересечение двух обычных центрированных интервальных расширений, взятых относительно оптимальных центров  $\tilde{x}$  и  $\hat{x}$ . Но эта же идея применима и к оператору Кравчика (см. [35]), отдельная компонента которого с номером  $i$  должна снабжаться своими собственными оптимальными центрами  $\tilde{x}^i$  и  $\hat{x}^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Схема вычисления бицентрированной формы интервального оператора Кравчика выглядит следующим образом:

- 1) Вычисляем величины «смещений» центров

$$p_{ij} = \text{cut} \left( \frac{\text{mid}(\Phi'_{ij}(\mathbf{X}))_i}{\text{rad}(\Phi'_{ij}(\mathbf{X}))_i}, [-1, 1] \right), \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

где  $\Phi'_{ij}(\mathbf{X})$  — интервальная оценка на  $\mathbf{X}$  производной  $\partial\Phi_i/\partial x_j$  отображения  $\Phi(x) = x - LF(x)$ , а функция срезки  $\text{cut}$  определена в §3.5.

- 2) Вычисляем «смещённые центры»

$$\tilde{x}_j^i = \text{mid } \mathbf{X}_j - p_{ij} \text{rad } \mathbf{X}_j, \quad \hat{x}_j^i = \text{mid } \mathbf{X}_j + p_{ij} \text{rad } \mathbf{X}_j,$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n.$$

- 3) Вычисляем собственно центрированные формы

$$\mathcal{K}_i(\mathbf{X}, \tilde{x}^i) = (\tilde{x}_i^i - LF(\tilde{x}^i)) + (I - L\mathbf{G})(\mathbf{X} - \tilde{x}^i),$$

$$\mathcal{K}_i(\mathbf{X}, \hat{x}^i) = (\hat{x}_i^i - LF(\hat{x}^i)) + (I - L\mathbf{G})(\mathbf{X} - \hat{x}^i),$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

- 4) Вычисляем бицентрированную форму оператора Кравчика

$$\mathcal{K}_{bic}(\mathbf{X}) = \mathcal{K}(\mathbf{X}, \tilde{x}) \cap \mathcal{K}(\mathbf{X}, \hat{x}).$$

Сформулированные выше свойства, обосновывающие применение оператора Кравчика для тестирования решений систем уравнений, останутся справедливыми и для бицентрированного оператора Кравчика. Но при этом следует специально озаботиться выбором «предобуславливающей» матрицы  $L$ : вопреки традиционному рецепту

её нельзя брать обратной к средней матрице для интервальной оценки производных  $F'(\mathbf{X})$ , так как в этом случае все смещения  $p_{ij}$  получатся нулевыми, и преимущества бицентрированной формы останутся нереализованными.

Ещё одно усовершенствование оператора Кравчика связано с усиленным вариантом теоремы Брауэра о неподвижной точке, в которой требуется проверка условий вложенности образа не для всего бруса, а лишь для его границы. Детальное описание этого приёма читатель также может увидеть в работе [35].

## 8.4 Модификации многомерного интервального метода Ньютона

Крупным недостатком многомерного интервального метода Ньютона в той форме, как он представлен в §8.2, является его неспособность обрабатывать ситуации, в которых интервальная матрица Липшица  $\mathbf{L}$  содержит особенные вещественные матрицы, и множество решений интервальной линейной системы (8.9) поэтому неограниченно. Излагаемый ниже метод Хансена-Сенгупты отчасти исправляет этот недостаток.

Он основывается на том наблюдении, что нас, в действительности, интересует не всё множество решений вспомогательной ИСЛАУ (8.9), а только та его часть, которая ограничена исходным бруском  $\mathbf{X}$ . Таким образом, для осуществления одного шага многомерного интервального метода Ньютона в (8.10) вместо *Encl* достаточно использовать не полноценную процедуру внешнего оценивания множеств решений ИСЛАУ, а лишь локальную оценивающую процедуру в смысле §7.8. В качестве таковой Э. Хансен и С. Сенгуптой в [23] было предложено использовать интервальный метод Гаусса-Зейделя, применённый к системе (8.9), возможно, после предобуславливания её некоторой матрицей  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Чаще всего делают даже всего несколько шагов этого метода или вообще один шаг.

Условимся обозначать посредством  $\Gamma\mathbb{Z}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{X})$  результат применения интервального метода Гаусса-Зейделя к интервальной системе линейных уравнений  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  с бруском начального приближения  $\mathbf{X}$ . При этом мы должны учесть возможность того, что диагональные элементы в матрице  $\mathbf{A}$ , на которые выполняется деление в методе Гаусса-Зейделя, могут содержать нули. В этом случае мы применяем расширенную интервальную арифметику Кэхэна (см. §1.11а), и деление выполняется по формулам (1.101). Тогда в случае принадлежности нуля внутренности делителя результатом  $\Gamma\mathbb{Z}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{X})$  может оказаться пара непересекающихся интервалов.

**Определение 8.4.1** Пусть определены некоторые правила, сопоставляющие брусу  $\mathbf{X} \in \mathbb{IR}^n$  точку  $\tilde{x} \in \mathbf{X}$  и вещественную  $n \times n$ -матрицу  $A$ , а  $\mathbf{L} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  — интервальная матрица Липшица отображения  $F : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^n$  на  $D$ . Отображение

$$\mathcal{H} : \mathbb{ID} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{IR}^n,$$

задаваемое правилом

$$\mathcal{H}(\mathbf{X}, \tilde{x}) := \tilde{x} + \Gamma\mathbb{Z}(A\mathbf{L}, -AF(\tilde{x}), \mathbf{X} - \tilde{x}),$$

называется оператором Хансена-Сенгупты на  $\mathbb{ID}$  относительно точки  $\tilde{x}$ .

**Теорема 8.4.1** Пусть  $F : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^n$  — непрерывное по Липшицу отображение и  $\mathbf{L}$  — его интервальная матрица Липшица. Пусть  $\tilde{x} \in \mathbf{X} \subseteq \mathbb{I}D$ , тогда

- (i) каждое решение системы  $F(x) = 0$  на брус  $\mathbf{X}$  лежит также в  $\mathcal{H}(\mathbf{X}, \tilde{x})$ ;
- (ii) если  $\mathbf{X} \cap \mathcal{H}(\mathbf{X}, \tilde{x}) = \emptyset$ , то в брус  $\mathbf{X}$  нет решений системы  $F(x) = 0$ ;
- (iii) если  $\mathcal{H}(\mathbf{X}, \tilde{x}) \subseteq \text{int } \mathbf{X}$ , то матрица  $\mathbf{L}$  сильно неособенна и в  $\mathbf{X} \cap \mathcal{H}(\mathbf{X}, \tilde{x})$  содержится ровно одно решение системы  $F(x) = 0$ .

**Доказательство.** Свойство (i) следует из построения оператора Хансена-Сенгупты. Свойство (ii) — это следствие свойства (i), сформулированное отдельной строкой ввиду его практической важности.

Если для какого-то бруса  $\mathbf{X}$  справедливо (iii), то множество решений интервальной системы уравнений  $\mathbf{L}\mathbf{L}x = \mathbf{L}F(\tilde{x})$  ограничено. Тогда определён интервальный оператор Ньютона  $\mathcal{N}(\mathbf{X}, \tilde{x})$  и, по крайней мере, имеет место  $\mathcal{N}(\mathbf{X}, \tilde{x}) \subseteq \mathbf{X}$ . Доказываемое утверждение следует тогда из Теоремы 8.2.1. ■

Особенностью оператора Хансена-Сенгупты является то обстоятельство, что в его конструкцию уже встроено пересечение с предыдущей итерацией: оно реализуется в интервальном методе Гаусса-Зейделя. По этой причине итерационным методом Хансена-Сенгупты обычно называют интервальные итерации вида

$$\mathbf{X}^{(k+1)} \leftarrow \mathcal{H}(\mathbf{X}^{(k)}, \tilde{x}^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

для какой-то последовательности точек  $\tilde{x}^{(k)} \in \mathbf{X}^{(k)}$ . Эти итерации несколько отличаются от формул итераций Кравчика или интервального метода Ньютона.

Как соотносятся между собой метод Хансена-Сенгупты и рассмотренные ранее интервальный метод Ньютона и метод Кравчика? Ясно, что если интервальная матрица Липшица  $\mathbf{L}$  неособенна, а процедура внешнего оценивания  $Encl$ , встроенная в интервальный метод Ньютона, — достаточно качественная, то результаты метода Хансена-Сенгупты могут оказаться хуже результатов интервального метода Ньютона.

В книге [32] (раздел 5.1) показывается, что метод Хансена-Сенгупты всегда даёт результаты, которые не хуже (т. е. не больше по включению), чем результаты метода Кравчика. Но на практике не всё так однозначно, как показывает следующий

**Пример 8.4.1** Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0, \\ x_1^3 - x_2 - 1 = 0. \end{cases} \quad (8.15)$$

Её первое уравнение задаёт окружность, а второе — кубическую параболу, сдвинутую по высоте, так что всего система имеет два решения, расположенные в первом и третьем квадрантах (см. Рис. 8.4).

Ясно, что решения системы не могут находиться за пределами области, занимаемой окружностью, так что в качестве начального приближения для того решения, которое расположено в первом квадранте, можно взять, скажем, брус  $([0, 2], [0, 2])^\top$ .

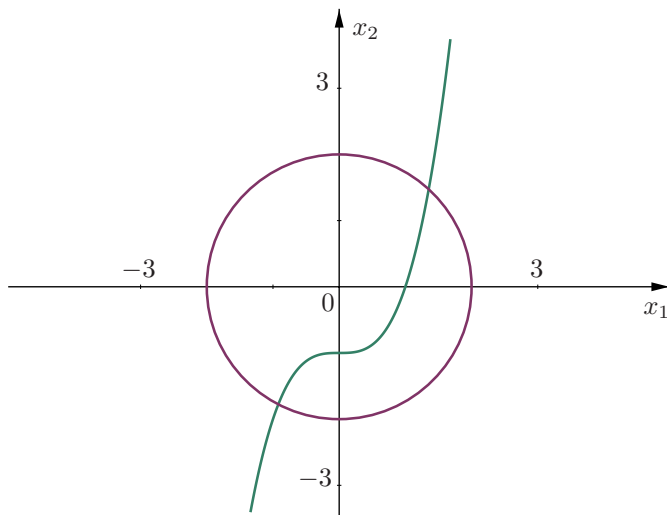


Рис. 8.4. Иллюстрация решений системы уравнений (8.15).

Организуем уточнение этого решения интервальными итерационными методами. Метод Кравчика после 17 итераций получает интервалы, локализирующие решение и имеющие концами числа, совпадающие в десяти знаках после запятой. Методу Хансена-Сенгупты для достижения этого же результата требуется всего 6 итераций.

Но начальный брус  $([-2, 0], [0, 2])^\top$  из второго квадранта, который не содержит решений, никак не улучшается методом Хансена-Сенгупты, построенным относительно средней точки и с помощью предобуславливания обратной средней. В то же время, метод Кравчика, в котором берётся пересечение с предыдущим шагом, активно сжимает этот брус и через 4 итерации получает пустой интервальный вектор. Что означает отсутствие решений системы в этом брус. Таким образом, метод Кравчика ведёт себя в этой ситуации более информативно. ■

Отметим, что вместо интервального метода Гаусса-Зейделя для оценивания пересечения части множества решений с заданным брусом можно взять любую другую локальную оценивающую процедуру из тех, что развиты в §7.8. На этом пути следует ожидать построения новых эффективных интервальных тестов существования решений уравнений и систем уравнений.

## 8.5 Внешнее оценивание для интервальных уравнений и систем уравнений

Предположим, что дано интервальное уравнение

$$f(\mathbf{a}, x) = 0,$$

т. е. уравнение с параметром, который может принимать значения из некоторого интервала  $\mathbf{a}$ . При этом интервальный параметр  $\mathbf{a}$  может быть как одномерным интервалом на вещественной оси, так и многомерным интервалом-брусом. Требуется найти внешнюю оценку той части объединённого множества решений уравнения

$$\Xi(f, \mathbf{a}) = \{x \in \mathbb{R} \mid (\exists a \in \mathbf{a})(f(a, x) = 0)\},$$

которая лежит в заданном интервале  $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}$ .

Аналогичная постановка задачи часто встречается для интервальных систем уравнений вида

$$\begin{cases} F_1(\mathbf{a}, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ F_2(\mathbf{a}, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ F_n(\mathbf{a}, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \end{cases} \quad (8.16)$$

которую в краткой векторной форме будем записывать в виде

$$F(\mathbf{a}, x) = 0, \quad (8.17)$$

где  $F(\mathbf{a}, x) = (F_1(\mathbf{a}, x), \dots, F_n(\mathbf{a}, x))^T$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ,  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^l$ . Необходимо найти внешнюю интервальную оценку для множества решений этой интервальной системы уравнений, т. е.

$$\Xi(F, \mathbf{a}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists a \in \mathbf{a})(F(a, x) = 0)\},$$

в пределах заданного интервального бруса  $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}^n$ . Покажем, как рассмотренные выше методы для внешнего оценивания решений уравнений и систем уравнений — интервальный метод Ньютона, метод Кравчика, метод Хансена-Сенгупты — могут быть модифицированы для решения этой более общей задачи. Начнём с одномерной ситуации.

Пусть  $x^* \in \mathbf{X} \cap \Xi(f, \mathbf{a})$ , т. е. для какого-то  $a^* \in \mathbf{a}$  значение  $x^*$  является решением рассматриваемого уравнения, лежащим в  $\mathbf{X}$ . Если  $\tilde{x}$  — некоторая точка из  $\mathbf{X}$ , то в силу теоремы Лагранжа о конечных приращениях

$$f(a^*, \tilde{x}) - f(a^*, x^*) = (\tilde{x} - x^*) \cdot f'(a^*, \xi), \quad (8.18)$$

где  $\xi$  — точка между  $\tilde{x}$  и  $x^*$ , а производная от  $f$  взята по второму аргументу. Но так как  $f(a^*, x^*) = 0$ , то при  $f'(a^*, \xi) \neq 0$  отсюда следует

$$x^* = \tilde{x} - \frac{f(a^*, \tilde{x})}{f'(a^*, \xi)}.$$

Если  $\mathbf{f}'(a^*, \mathbf{X})$  является какой-либо внешней интервальной оценкой производной по  $x$  от функции  $f(a^*, x)$  на  $\mathbf{X}$ , т. е.  $f'(a^*, \xi) \in \mathbf{f}'(a^*, \mathbf{X})$ , то, интервализуя правую часть выписанного равенства, получим включение

$$x^* \in \tilde{x} - \frac{f(a^*, \tilde{x})}{\mathbf{f}'(a^*, \mathbf{X})} \quad (8.19)$$

в случае  $0 \notin \mathbf{f}'(a^*, \mathbf{X})$ . Иными словами, для точки  $x^*$  из объединённого множества решений уравнения  $f(a, x) = 0$  получается новый интервал локализации в виде правой части включения (8.19).

Далее, если  $\mathbf{f}(a, \tilde{x})$  и  $\mathbf{f}'(a, \mathbf{X})$  — внешние интервальные оценки областей значений для  $f(a, x)$  и  $f'(a, \xi)$  по всем  $a \in \mathbf{a}$  и  $\xi \in \mathbf{X}$ , то в силу монотонности по включению можем заключить, что

$$x^* \in \tilde{x} - \frac{\mathbf{f}(a, \tilde{x})}{\mathbf{f}'(a, \mathbf{X})}$$

для любой точки  $x^* \in \mathbf{X} \cap \Xi(f, \mathbf{a})$ . Иными словами, несложная модификация интервального метода Ньютона превращает его в инструмент для внешнего оценивания множеств решений интервальных уравнений.

Пусть заданы функция  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , зависящая от параметра  $a \in \mathbf{a}$ , и интервальные оценивающие функции  $\mathbf{f}(a, x)$  и  $\mathbf{f}'$  для  $f(a, x)$  и её производной по  $x$  соответственно. Отображение

$$\mathcal{N}: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

действующее по правилу

$$\mathcal{N}(\mathbf{X}, \tilde{x}) := \tilde{x} - \frac{\mathbf{f}(a, \tilde{x})}{\mathbf{f}'(a, \mathbf{X})},$$

назовём (одномерным) *интервальным оператором Ньютона* для  $f$  с интервальным параметром  $a$ . Положив  $\mathbf{X}^{(0)} := \mathbf{X}$ , можно организовать итерационное уточнение

$$\mathbf{X}^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{X}^{(k)} \cap \mathcal{N}(\mathbf{X}^{(k)}, \tilde{x}^{(k)}), \quad \tilde{x}^{(k)} \in \mathbf{X}^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

которое также будем называть *интервальным методом Ньютона*.

В многомерном случае применимы аналогичные конструкции. Пусть на брус  $\mathbf{X}$  задана система уравнений (8.16)–(8.17). Предположим, что известна внешняя интервальная оценка  $\mathbf{L}$  для всех матриц Липшица отображений  $F(a, x)$  на  $\mathbf{X}$ , справедливая для всех значений параметра  $a \in \mathbf{a}$ . В частности  $\mathbf{L}$  может быть интервальным расширением якобиана отображения  $\partial F / \partial x$  на  $\mathbf{X} \times \mathbf{a}$ . Тогда для любых точек  $x, \tilde{x} \in \mathbf{X}$  и при всех  $a \in \mathbf{a}$  имеет место представление

$$F(a, x) \in F(a, \tilde{x}) + \mathbf{L}(x - \tilde{x}).$$

В частности, если точка  $x = x^*$  принадлежит множеству решений системы уравнений (8.16)–(8.17), т. е.  $F(a, x^*) = 0$  для некоторого  $a \in \mathbf{a}$ , то

$$0 \in F(a, \tilde{x}) + \mathbf{L}(x^* - \tilde{x}). \quad (8.20)$$

Вспомним характеризацию Бекка для объединённого множества решений ИС-ЛАУ (Теорема 7.1.1). Из неё следует, что точка  $x^*$  удовлетворяет включению (8.20) тогда и только тогда, когда она принадлежит объединённому множеству решений интервальной линейной системы уравнений

$$\mathbf{L}(x - \tilde{x}) = -F(a, \tilde{x}).$$

Далее, пусть  $Encl$  — какая-либо процедура внешнего оценивания множества решений интервальной линейной системы  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ , так что  $Encl(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \supseteq \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ . Тогда справедливо включение

$$x^* - \tilde{x} \in Encl(\mathbf{L}, -F(a, \tilde{x})),$$



из которого следует

$$x^* \in \tilde{x} - \text{Encl}(\mathbf{L}, F(\mathbf{a}, \tilde{x})),$$

так как  $\text{Encl}(\mathbf{L}, -F(\mathbf{a}, \tilde{x})) = -\text{Encl}(\mathbf{L}, F(\mathbf{a}, \tilde{x}))$ .

Пусть для внешнего оценивания множеств решений ИСЛАУ зафиксирована процедура  $\text{Encl}$ , а для отображения  $F: \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^n$  известна интервальная матрица Лишница  $\mathbf{L} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ . Отображение

$$\mathcal{N}: \mathbb{ID} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{IR}^n,$$

задаваемое правилом

$$\mathcal{N}(\mathbf{X}, \tilde{x}) = \tilde{x} - \text{Encl}(\mathbf{L}, F(\tilde{x})),$$

называется *интервальным оператором Ньютона* на  $\mathbb{ID}$  относительно точки  $\tilde{x}$ .

Принципиальное отличие ситуации с интервальными параметрами от точечных уравнений и систем уравнений состоит в том, что теперь внешние оценки множеств решений, получаемые с помощью интервального метода Ньютона и его модификаций, могут иметь заметные или даже большие погрешности, существенно отличаясь от оптимальных (точных) внешних оценок. Это огрубление, как правило, тем больше, чем больше ширина интервального параметра  $\mathbf{a}$  и чем больше размеры множества решений интервального уравнения или системы уравнений.

**Пример 8.5.1** Рассмотрим интервальную систему уравнений

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - [3.24, 5.76] = 0, \\ x_1^3 - x_2 - [1, 1.6] = 0. \end{cases} \quad (8.21)$$

Её первое уравнение задаёт кольцо, заключённое между окружностями радиусов  $1.8 = \sqrt{3.24}$  и  $2.4 = \sqrt{5.76}$  с центрами в начале координат, а второе уравнение — полосу из кубических парабол, сдвинутых по высоте на числа из интервала  $[1, 1.6]$ . Множество решений интервальной системы — пересечение кольца и криволинейной полосы — распадается на две части, расположенные в первом и третьем квадрантах (см. Рис. 8.5).

При расчётах с начальным приближением  $([1, 3], [1, 3])^\top$  метод Хансена-Сенгупты за 8 итераций получает брус

$$\begin{pmatrix} [1.2552, 1.5885] \\ [1, 2.1968] \end{pmatrix}$$

тогда как метод Кравчика из того же начального приближения получает почти такой же брус

$$\begin{pmatrix} [1.2552, 1.5885] \\ [1, 2.1978] \end{pmatrix}$$

за 16 итераций. Это далеко не оптимальная оценка: точные границы изменения компонент точек из этого куска множества решений образуют брус

$$\begin{pmatrix} [1.3078, 1.5129] \\ [1.1336, 1.9271] \end{pmatrix}.$$

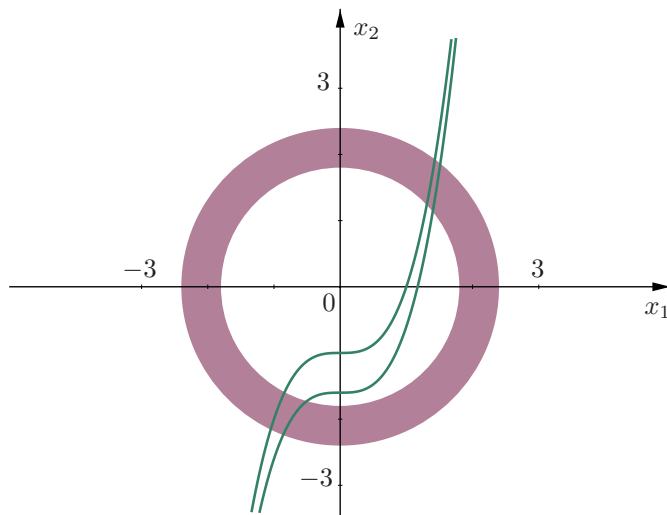


Рис. 8.5. Иллюстрация множества решений системы уравнений (8.21).

Его можно получить, к примеру, решив граничные точечные системы уравнений, которые определяют крайние точки исследуемой части множества решений. ■

## 8.6 Глобальное решение нелинейных систем уравнений

Задача решения уравнений и систем уравнений является одной из классических задач численного анализа, с изучения которой начинается, как правило, курс методов вычислений в высших учебных заведениях. Основные подходы к решению этой задачи — методы хорд и секущих, метод простой итерации, метод Ньютона, их различные модификации и т. п. (см., к примеру, [4, 6, 13, 16, 25]). Преимущества и недостатки этих классических методов хорошо известны, и мы не будем останавливаться на их подробном обсуждении. Для дальнейшего важны следующие факты:

- Для уравнений, в которых фигурируют функции, не обладающие «хорошим» и предсказуемым глобальным поведением, все традиционные методы имеют *локальный характер*, т. е. обеспечивают отыскание решения, находящегося в некоторой (иногда достаточно малой) окрестности начального приближения. Задача нахождения *всех* решений уравнения или системы уравнений, как правило, рассматривается лишь в специализированной литературе и методы её решения оказываются довольно сложными.
- Гарантированные оценки погрешности найденного приближения к решению в традиционных методах дать весьма непросто.

Интервальные методы позволяют успешно решать обе сформулированные проблемы, и в этом разделе мы кратко расскажем об основных интервальных подходах,

позволяющих решать уравнения и системы уравнений с новым качеством.

Итак, пусть необходимо решить систему уравнений (8.6)–(8.7), причём нужно найти все решения и указать их гарантированные погрешности. Указание приближённого значения величины и его погрешности равносильно тому, что мы знаем левую и правую границы возможных значений этой величины, и поэтому можно переформулировать нашу усиленную задачу в следующем виде:

Найти все решения системы уравнений

$$F(x) = 0$$

на данном множестве  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  и указать для каждого гарантированные двусторонние границы (по-возможности, наиболее точные)

(8.22)

Задачу (8.22) будем называть *задачей доказательного глобального решения* системы уравнений. Эпитет «доказательный» означает здесь, что получаемый нами ответ к задаче — количество решений, их двусторонние границы и т. п. — имеет статус математически строго доказанного утверждения о расположении решений (при условии, что ЭВМ работает корректно).<sup>1</sup>

Задача (8.22) оказывается чрезвычайно сложной, а в классическом численном анализе почти полностью отсутствуют развитые методы для её решения. Из часто используемых подходов, имеющих ограниченный успех, следует упомянуть *аналитическое исследование, мультистарт, методы продолжения* [13].

Итак, пусть к решению предъявлена система уравнений

$$F(x) = 0 \tag{8.23}$$

на бруске  $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}^n$ . Отметим, что эту задачу можно переписать в равносильном виде

$$\text{gap}(F, \mathbf{X}) \ni 0, \tag{8.24}$$

т. е. как задачу о присутствии нуля в области значений функции. Поэтому техника интервального оценивания множеств значений функций оказывается чрезвычайно полезной при решении вопроса о существовании или несуществовании решений системы (8.23). В частности, если нуль содержится во внутренней интервальной оценке множества значений  $\text{gap}(F, \mathbf{X})$  отображения  $F$ , то на бруске  $\mathbf{X}$  гарантированно находится решение системы (8.23). С другой стороны, если в нашем распоряжении имеется интервальное расширение  $\mathbf{F}$  функции  $F$  на  $\mathbf{X}$ , которое даёт внешнюю интервальную оценку области значений, и  $0 \notin \mathbf{F}(\mathbf{X})$ , то, очевидно, на  $\mathbf{X}$  нет решений рассматриваемой системы уравнений.

Далее, перепишем исходную систему (8.23) в равносильной рекуррентной форме

$$x = T(x) \tag{8.25}$$

<sup>1</sup>Термин «доказательные вычисления на ЭВМ» ввёл К.И. Бабенко (см. книгу [2] и другие публикации). Этот термин является хорошим русским эквивалентом таких распространённых английских словосочетаний как *verified computation, verification numerics* и др.

с некоторым отображением  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Оно может быть взято, к примеру, в виде

$$T(x) = x - \Lambda F(x)$$

с неособенной  $n \times n$ -матрицей  $\Lambda$ , либо как результат выражения каждой компоненты  $x_i$  вектора неизвестных из соответствующего  $F_i(x)$ , либо как-нибудь ещё. Пусть также  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — интервальное расширение отображения  $T$ . Ясно, что решения системы (8.25) могут лежать лишь в пересечении  $X \cap T(X)$ . Поэтому если

$$X \cap T(X) = \emptyset,$$

то в  $X$  нет решений системы уравнений (8.25).

Коль скоро искомое решение из  $X$  должно содержаться также в  $T(X)$ , то для дальнейшего уточнения бруса, в котором может присутствовать решение, мы можем организовать итерации с пересечением

$$X^{(0)} \leftarrow X, \tag{8.26}$$

$$X^{(k+1)} \leftarrow T(X^{(k)}) \cap X^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{8.27}$$

Следует отметить, что при этом в получающихся брусах  $X^{(k)}$  наличие решения, вообще говоря, не гарантируется. Они являются лишь «подозрительными» на существование решения.

Но вот если для бруса  $X$  выполнено

$$T(X) \subseteq X,$$

то по теореме Брауэра о неподвижной точке (см. стр. 24) в  $X$  гарантированно находится решение системы (8.25). Для уточнения этого решения мы снова можем воспользоваться итерациями (8.26)–(8.27). Таким образом, наихудшим, с точки зрения информации о решении системы, является случай

$$X \not\subseteq T(X). \tag{8.28}$$

Вместо приведения исходной системы уравнений к рекуррентной форме (8.25) и взятия интервального расширения её правой части здесь можно также использовать интервальный оператор Ньютона (см. §8.2), операторы Кравчика или Хансена-Сенгупты (см. §§8.3 и 8.4), что нисколько не меняет сути наших конструкций.

Рассмотренные выше приёмы обнаружения решения системы уравнений и уточнения его границ мы будем называть далее кратко *тестами существования* решения. На практике они могут применяться в различных комбинациях друг с другом. Их результатом является либо просто ответ «да-нет», когда мы исследуем включение (8.24), либо брус пересечения  $X \cap T(X)$ , либо предел последовательности (8.26)–(8.27). Если этот брус непуст, то он либо наверняка содержит решение системы уравнений, либо является подозрительным на наличие в нём решения. Если же результат теста существования пуст, то в исходном брусе решений системы уравнений нет.

В действительности, каждый из изложенных выше приёмов уточнения решения допускает далеко идущие модификации и улучшения. Например, это относится к

итерациям вида (8.26)–(8.27), которые могут быть последовательно применены не к целым брусам  $\mathbf{X}^{(k)}$ , а к отдельным их компонентам в комбинации с различными способами приведения исходной системы к рекуррентному виду (8.25). На этом пути мы приходим к чрезвычайно эффективным алгоритмам решения уравнений, которые получили название *методов распространения ограничений* (см. [11, 14, 15]).

Как простейший тест существования, так и его более продвинутые варианты легко реализуются на ЭВМ и работают тем лучше, чем более качественно вычисляются интервальные расширения функций  $F$  в (8.23) и  $G$  в (8.25), а также чем меньше ширина бруса  $\mathbf{X}$ . Последнее связано с тем, что погрешность оценивания области значений функции посредством любого интервального расширения убывает с уменьшением размеров бруса, на котором производится это оценивание (см. Главу 3). Под «размером» бруса, как и ранее, здесь понимается какая-либо норма вектора ширины его компонент.

Если размеры бруса  $\mathbf{X}$  велики, то на нём описанные выше тесты существования решений могут оказаться малоуспешными и не позволят сделать никакого определённого заключения ни о существовании решения на бруске  $\mathbf{X}$ , ни о его отсутствии. Например, это может произойти при выполнении соотношения (8.28). Кроме того, сам этот брус, как область, потенциально содержащая решение, несколько не будет уточнён (т. е. уменьшен в размерах).

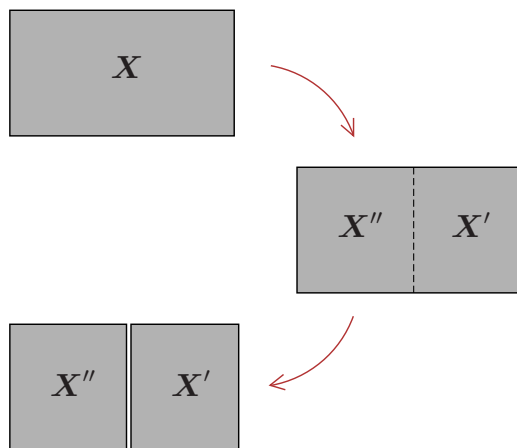


Рис. 8.6. Принудительное дробление бруса.

Тогда практикуют принудительное дробление  $\mathbf{X}$  на более мелкие подбрусы, для которых погрешность интервального оценивания будет меньшей, и потому тесты существования решений имеют больше шансов на успех. Дробление может быть полезно ещё и потому, что позволяет разделять изолированные решения и обрабатывать их далее по отдельности. Ясно, что количество частей, на которые мы дробим брус, а также конкретные детали этого дробления, должны зависеть от архитектуры вычислительной системы (компьютера) и организации алгоритма решения. Для определённости рассмотрим далее *бисекцию* — разбиение бруса  $\mathbf{X}$  на две (равные

или неравные) части вдоль какой-нибудь грани, например, на половинки

$$\mathbf{X}' = (\mathbf{X}_1, \dots, [\underline{\mathbf{X}}_\iota, \text{mid } \mathbf{X}_\iota], \dots, \mathbf{X}_n),$$

$$\mathbf{X}'' = (\mathbf{X}_1, \dots, [\text{mid } \mathbf{X}_\iota, \overline{\mathbf{X}}_\iota], \dots, \mathbf{X}_n)$$

для некоторого номера  $\iota \in \{1, 2, \dots, n\}$ . При этом подбрусы  $\mathbf{X}'$  и  $\mathbf{X}''$  называются *потомками* бруса  $\mathbf{X}$ . Далее эти потомки можно разбить ещё раз, и ещё ... столько, сколько необходимо для достижения желаемой малости их размеров, при которой мы сможем успешно выполнять на этих брусах рассмотренные выше тесты существования решений.

Если мы не хотим упустить при этом ни одного решения системы, то должны хранить все возникающие в процессе такого дробления подбрусы, относительно которых тестом существования не доказано строго, что они решений не содержат. Организуем поэтому *рабочий список*  $\mathcal{L}$  из всех потомков начального бруса  $\mathbf{X}$ , подозрительных на содержание решений.<sup>2</sup> В целом же алгоритм глобального доказательного решения системы уравнений организуем в виде повторяющейся последовательности следующих действий:

- извлечение некоторого бруса из списка  $\mathcal{L}$ ,
- дробление этого бруса на потомки,
- проверка существования решений в каждом из подбрусов-потомков, по результатам которой мы

либо выдаём этот подбрус в качестве ответа к решаемой задаче,  
либо заносим его в рабочий список  $\mathcal{L}$  для последующей обработки,  
либо исключаем из дальнейшего рассмотрения, как не содержащий решений рассматриваемой системы.

Кроме того, чтобы обеспечить ограниченность времени работы алгоритма, на практике имеет смысл задаться некоторым порогом малости размера брусков  $\delta$ , при достижении которого дальше дробить брус уже не имеет смысла. Псевдокод получающегося алгоритма приведён в Табл. 8.1.

Отметим, что неизбежные ограничения на вычислительные ресурсы ЭВМ могут воспрепятствовать решению этим алгоритмом задачи (8.22) «до конца», поскольку могут возникнуть ситуации, когда

- 1) размеры обрабатываемого бруса уже меньше  $\delta$ , но нам ещё не удаётся ни доказать существование на нём решений, ни показать их отсутствие;
- 2) размеры обрабатываемого бруса ещё больше  $\delta$ , но вычислительные ресурсы уже не позволяют производить его обработку дальше: исчерпались выделенное время, память и т.п.

---

<sup>2</sup>Хотя мы называем эту структуру данных «списком», в смысле программной реализации это может быть не обязательно список, но и *стек* (магазин), и *куча* [3].

Таблица 8.1. Интервальный метод ветвлений и отсечений для глобального доказательного решения уравнений

<p><b>Вход</b></p> <p>Система уравнений <math>F(x) = 0</math>. Брус <math>X \in \mathbb{IR}^n</math>.            Интервальное расширение <math>F: \mathbb{IX} \rightarrow \mathbb{IR}^n</math> функции <math>F</math>.            Заданная точность <math>\delta &gt; 0</math> локализации решений системы.</p>
<p><b>Выход</b></p> <p>Список <b>НавернякаРешения</b> из брусов размера не более <math>\delta</math>, которые гарантированно содержат решения системы уравнений в <math>X</math>.            Список <b>ВозможноРешения</b> из брусов размера не более <math>\delta</math>, которые могут содержать решения системы уравнений в <math>X</math>.            Список <b>Недообработанные</b> из брусов размера более <math>\delta</math>, которые могут содержать решения системы уравнений в <math>X</math>.</p>
<p><b>Алгоритм</b></p> <p>инициализируем рабочий список <math>\mathcal{L}</math> исходным брусом <math>X</math> ;            DO WHILE ( (<math>\mathcal{L} \neq \emptyset</math>) и (не исчерпаны выделенные ресурсы ЭВМ) )                извлекаем из списка <math>\mathcal{L}</math> брус <math>Y</math> ;                применяем к <math>Y</math> тесты существования решения,                их результат обозначаем также через <math>Y</math> ;                IF ( в <math>Y</math> доказано отсутствие решений ) THEN                    удаляем брус <math>Y</math> из рассмотрения                ELSE                    IF ( (размер бруса <math>Y</math>) <math>&lt; \delta</math> ) THEN                        вносим <math>Y</math> в соответствующий из списков                        <b>НавернякаРешения</b> или <b>ВозможноРешения</b>                    ELSE                        разрезаем <math>Y</math> на брусы-потомки <math>Y'</math> и <math>Y''</math>                        и заносим их в рабочий список <math>\mathcal{L}</math>                    END IF                END IF              END IF              END DO            все брусы из <math>\mathcal{L}</math> перемещаем в список <b>Недообработанные</b>;</p>

В реальных вычислениях остановка алгоритма Табл. 8.1 может происходить поэтому не только при достижении пустого рабочего списка  $\mathcal{L}$  (когда исчерпана вся область поиска решений), но и, к примеру, при достижении определённого числа шагов или времени счёта и т.п. Тогда все брусы, оставшиеся в рабочем списке  $\mathcal{L}$ , оказываются не до конца обработанными, и мы условимся так и называть их — «недообработанные». Итак, в общем случае результатом работы нашего алгоритма должны быть три списка брусков:

список **НавернякаРешения**, состоящий из брусков размера не больше  $\delta$ , которые гарантированно содержат решения,

список **ВозможноРешения**, состоящий из брусков размера не больше  $\delta$ , подозрительных на содержание решения, и

список **Недообработанные**, состоящий из «недообработанных» брусков, которые имеют размер больше  $\delta$ .

Все решения рассматриваемой системы уравнений, которые не принадлежат брусам из списка **НавернякаРешения**, содержатся в брусах из списков **ВозможноРешения** и **Недообработанные**.

Алгоритмы описанного выше типа, дополненные различными усовершенствованиями, получили большое развитие в интервальном анализе в последние десятилетия (см., например, книги [17, 26, 30, 32]). Обычно называют их *методами ветвлений-и-отсечений*: ветвления — это дробление исходной области поиска решений на подобласти, а отсечения — это отбрасывание бесперспективных частей исходной области, наверняка не содержащих решений.

Что делать в более общем случае, когда необходимо оценивать множества решений интервальных систем уравнений? Представленные в этом разделе методы ветвлений-и-отсечений применимы и к этой задаче. Вместо тестов существования решений, о которых говорилось ранее и которые используются в псевдокоде Табл. 8.1, необходимо применять аналогичные методы для интервальных систем, описанные в разделе 8.5.

Новым моментом является присутствие интервальных параметров, которые огрубляют тесты существования и делают их применение менее эффективным. Для преодоления этого явления имеет смысл организовать дробление интервалов параметров, дополняющее дробление области решений в методе ветвлений-и-отсечений.

## 8.7 Интервальные методы распространения ограничений

В русской литературе методы распространения ограничений иногда называется также *недоопределёнными вычислениями*, термином, введённым А.С. Нариньяни [11] (см. также [14]).



## Комментарий к Главе 8

Решению общих уравнений и систем уравнений интервальными методами посвящена обширная литература, так как методы интервального анализа позволяют привнести новое качество в вычислительные подходы к решению этой классической задачи.

**К §8.1.** Интервальный метод Ньютона, фактически, впервые был рассмотрен в пионерской работе Т. Сунаги [36] (Пример 9.2), хотя и не назывался там таким именем. В книге Р.Е. Мура [29] при описании этого метода используется уже термин «интервальная версия метода Ньютона».

**К §8.6.** Ситуация с локальным характером традиционных неинтервальных вычислительных алгоритмов весьма выразительно описана в книге [16]: «Проблема выбора начального приближения для итерационного метода является одной из наиболее сложных. Полученные в этой области результаты в подавляющем большинстве относятся только к алгебраическим уравнениям . . . » (стр. 238). И далее: «Отличительной чертой полученных нами методов является их локальный характер» (стр. 239).

Методы ветвлений-и-отсечений называются *branch-and-prune methods* в англоязычной литературе.

## Литература к Главе 8

- [1] Алефельд Г., Херцбергер Ю. *Введение в интервальные вычисления*. – Москва: Мир, 1987.
- [2] Бабенко К.И. *Основы численного анализа*. – Москва: Наука, 1986.
- [3] Бауэр Ф.Л., Гооз Г. *Информатика. В 2-х ч.* – Москва: Мир, 1990.
- [4] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. *Численные методы*. – Москва: Наука, 1987.
- [5] Голуб Дж., ван Лоан Ч. *Матричные вычисления*. – Москва: Мир, 1999.
- [6] Дэннис Дж., мл., Шнабель Р. *Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений*. – Москва: Мир, 1988.
- [7] Добронев Б.С. *Интервальная математика*. – Красноярск: Издательство КГТУ, 2004.
- [8] Добронев Б.С., Шайдуров В.В. *Двусторонние численные методы*. – Новосибирск: Наука, 1990.
- [9] Жолен Л., Кифер М., Дидри О., Вальтер Э. *Прикладной интервальный анализ*. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005.
- [10] Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. *Методы интервального анализа*. – Новосибирск: Наука, 1986.
- [11] Нариньяни А.С. Недоопределённость в системах представления и обработки знаний // *Известия АН СССР. Техническая Кибернетика*. – 1986. – №5. – С. 3–28.
- [12] Островский А.М. *Решение уравнений и систем уравнений*. – Москва: Издательство иностранной литературы, 1963.

- [13] ОРТЕГА Дж., РЕЙНБОЛДТ В. *Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными*. – Москва: Мир, 1975.
- [14] СЕМЁНОВ А.Л., ВАЖЕВ И.В., КАШЕВАРОВА Т.П., БРЕВНОВ Е.В., ЕРШОВ А.Г., КЛЕЙМЁНОВ А.Е., ЛЕЩЕНКО А.С., ЛОЕНКО М.Ю., ПЕТУНИН Д.В. Интервальные методы распространения ограничений и их приложения // *Системная информатика. Сб. научных трудов под ред. А.Г.Марчука*. – Новосибирск: Издательство СО РАН, 2004. – С. 245–358.
- [15] УШАКОВ Д.М., ТЕЛЕРМАН В.В. Системы программирования в ограничениях (обзор) // *Системная информатика, вып. 7. Сборник научных трудов под ред. И.В.Поттосина*. – Новосибирск: Наука, 2000. – С. 275–310.
- [16] ТРАУБ Дж. *Итерационные методы решения уравнений*. – Москва: Мир, 1985.
- [17] ХАНСЕН Э., УОЛСТЕР Дж.У. *Глобальная оптимизация с помощью методов интервального анализа*. – Ижевск-Москва: Издательство «РХД», 2012.
- [18] ШАРЫЙ С.П. *Курс вычислительных методов. Электронный учебник*. – Новосибирск: Институт вычислительных технологий СО РАН, НГУ, 2012–2016. Доступен на [http://www.ict.nsc.ru/matmod/index.php?file=u\\_posobiya](http://www.ict.nsc.ru/matmod/index.php?file=u_posobiya)
- [19] AKYILDIZ Y., AL-SUWAIYEL M.I. No pathologies for interval Newton's method // *Interval Computations*. – 1993. – No. 1. – P. 60–72.
- [20] CAPRANI O., MADSEN K. Iterative methods for interval inclusion of fixed points // *BIT*. – 1978. – Vol. 18. – P. 42–51.
- [21] CAPRANI O., MADSEN K. Experiments with interval methods for nonlinear systems // *Freiburger Intervall-Berichte*. – 1981. – No. 7/81. – S. 1–13.
- [22] GAY D.M. Computing perturbation bounds for nonlinear algebraic equations // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1983. – Vol. 20. – P. 637–651.
- [23] HANSEN E.R., SENGUPTA S. Bounding solutions of systems of equations using interval analysis // *BIT*. – 1981. – Vol. 21. – P. 203–211.
- [24] HANSEN E.R., GREENBERG R.I. An interval Newton method // *Applied Mathematics and Computation*. – 1983. – Vol. 12. – P. 87–98.
- [25] KELLEY C.T. *Iterative methods for linear and nonlinear equations*. – Philadelphia: SIAM, 1995.
- [26] KEARFOTT R.B. *Rigorous global search: continuous problems*. – Dordrecht: Kluwer, 1996.
- [27] KRAWCZYK R. Newton-Algorithmen zur Bestimmung von Nullstellen mit Fehlerschranken // *Computing*. – 1969. – Vol. 4. – P. 187–201.
- [28] MAYER O. Über die in der Intervallrechnung auftretenden Räume und einige Anwendungen. – PhD dissertation, Universität Karlsruhe, 1968.
- [29] MOORE R.E. *Interval analysis*. – Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1966.
- [30] MOORE R.E. *Methods and applications of interval analysis*. – Philadelphia: SIAM, 1979.
- [31] NEUMAIER A. Rigorous sensitivity analysis for parameter-dependent systems of equations // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. – 1989. – Vol. 144. – P. 16–25.
- [32] NEUMAIER A. *Interval methods for systems of equations*. – Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [33] RUMP S.M. Solving algebraic problems with high accuracy // *A New Approach to Scientific Computation* / Kulisch U.W. and Miranker W.L., eds. – New York: Academic Press, 1983. – P. 51–120.

- [34] RUMP S.M. Verification methods for dense and sparse systems of equations // *Topics in Validated Numerics* / Herzberger J., ed. – Amsterdam: Elsevier, 1994. – P. 63–135. – (Studies in computational mathematics; vol. 5)
- [35] SHARY S.P. Krawczyk operator revised / *Proceedings of International Conference on Computational Mathematics ICCM-2004. Workshops* / Eds.: Yu.I. Shokin, A.M. Fedotov, S.P. Kovalyov, Yu.I. Molorodov, A.L. Semenov, S.P. Shary. – Novosibirsk: ICM&MG Publisher, 2004. – P. 307–313.
- [36] SUNAGA T. Theory of an interval algebra and its application to numerical analysis // *Res. Assoc. Appl. Geom. Memoirs*. – 1958. – Vol. 2 – P. 29–46.
- [37] WALSTER G.W., HANSEN E.R. Computing interval parameter bounds from fallable measurements using overdetermined (tall) systems of nonlinear equations // *Global optimization and constraint satisfaction* / Blik Ch., Jermann Ch., Neumaier A., eds. – Berlin: Springer, 2003. – P. 171–177. – (Lecture Notes in Computer Science; vol. 2861)

## Глава 9

# Оптимальное внешнее оценивание объединённого множества решений

Цель настоящей главы — развитие численных алгоритмов и общей методологии вычисления оптимальных решений «внешней задачи» для интервальных систем уравнений, главным образом, линейных.

При внешнем оценивании множеств решений особую ценность и в теории и для практики имеет получение интервального вектора, объёмлющего решение и имеющего наименьшую возможную ширину, или, что эквивалентно, нахождение оптимальных (точных) покоординатных оценок множеств решений. Но подобная усиленная постановка «внешней задачи» оказывается NP-трудной (см. §4.4). Неудивительно поэтому, что большинство методов, разработанных для решения этой задачи имеют, в конечном счёте, переборный характер и потому чрезвычайно трудоёмки. Основной итог этой главы книги — построение двух классов алгоритмов, *методов дробления решений* и *методов дробления параметров* (называемых также *PSS-методами* и *PPS-методами*) для нахождения именно оптимальных или гарантированно близких к оптимальным решений «внешней задачи» для интервальных систем уравнений.

В этой главе мы называем объединённое множество решений просто *множеством решений* и обозначаем посредством  $\Xi$ , так как другие множества решений не рассматриваются.

### 9.1 Пассивные переборные алгоритмы

Для интервальных линейных систем уравнений

$$Ax = b, \tag{9.1}$$

как было установлено в Теореме 5.2.5, пересечение множества решений  $\Xi(A, b)$  с каждым из ортантов  $\mathcal{O}$  пространства  $\mathbb{R}^n$  является выпуклым полиэдральным множеством (возможно, пустым). Оно может быть представлено как решение конечной

системы нестрогих линейных алгебраических неравенств, коэффициенты и правые части которых выписываются по данной ИСЛАУ. Таким образом, для всякого фиксированного индекса  $\nu \in \{1, 2, \dots, n\}$  вычисление величины

$$\min\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \mathcal{O}\} \quad (9.2)$$

— это задача линейного программирования, которая может быть эффективно решена каким-либо из известных методов. Например, это может быть сделано хорошо разработанным симплекс-методом или современными методами внутренних точек (см. [4, 17] и другие публикации по теме). Далее нужно перебрать все ортанты  $\mathcal{O}$  пространства  $\mathbb{R}^n$  и среди полученных величин (9.2) выбрать наименьшую. Коль скоро количество ортантов в  $\mathbb{R}^n$  равно  $2^n$ , то и трудоёмкость этого подхода в общем случае экспоненциально растёт с размерностью  $n$ . Но при небольших  $n$ , либо в некоторых специальных постановках задач (например, когда а priori известно в каких ортантах расположено множество решений) его вполне можно применять для оптимального решения «внешней» задачи (5.24).

Выпишем каноническую форму задачи линейного программирования (9.2), которую необходимо решать в каждом из ортантов  $\mathbb{R}^n$ . Для этого воспользуемся характеристикой Оетгли-Прагера, дающей описание точек множеств решений через неравенства с модулями: принадлежность  $x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  равносильна векторному неравенству

$$\left| (\text{mid } \mathbf{A}) \cdot x - \text{mid } \mathbf{b} \right| \leq \text{rad } \mathbf{A} \cdot |x| + \text{rad } \mathbf{b},$$

или

$$\begin{cases} \text{mid } \mathbf{A} \cdot x - \text{mid } \mathbf{b} \leq \text{rad } \mathbf{A} \cdot |x| + \text{rad } \mathbf{b}, \\ -\text{mid } \mathbf{A} \cdot x + \text{mid } \mathbf{b} \leq \text{rad } \mathbf{A} \cdot |x| + \text{rad } \mathbf{b}, \end{cases}$$

что эквивалентно системе

$$\begin{cases} \text{mid } \mathbf{A} \cdot \text{diag}\{\text{sgn } x_1, \dots, \text{sgn } x_n\} \cdot |x| - \text{rad } \mathbf{A} \cdot |x| \leq \text{mid } \mathbf{b} + \text{rad } \mathbf{b}, \\ -\text{mid } \mathbf{A} \cdot \text{diag}\{\text{sgn } x_1, \dots, \text{sgn } x_n\} \cdot |x| - \text{rad } \mathbf{A} \cdot |x| \leq -\text{mid } \mathbf{b} + \text{rad } \mathbf{b}. \end{cases}$$

Правые части полученных неравенств можно упростить и далее, вспомнив что

$$\text{mid } \mathbf{b} + \text{rad } \mathbf{b} = \bar{\mathbf{b}} \quad \text{и} \quad -\text{mid } \mathbf{b} + \text{rad } \mathbf{b} = -\underline{\mathbf{b}}.$$

Пусть  $y$  есть вектор абсолютных значений компонент  $x$ , т.е.  $y_i = |x_i|$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , и

$$S = \text{diag}\{s_1, s_2, \dots, s_n\}, \quad s_i = \text{sgn } x_i = \pm 1,$$

— диагональная матрица, образованная знаками компонент внутренних точек рассматриваемого ортанта  $\mathcal{O}$ , так что  $x = Sy$  для  $x \in \mathcal{O}$ . Тогда условие  $x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \mathcal{O}$  выполнено, если и только если существует вектор  $y \in \mathbb{R}^n$ , удовлетворяющий неравенствам

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \text{mid } \mathbf{A} \cdot S - \text{rad } \mathbf{A} \\ -\text{mid } \mathbf{A} \cdot S - \text{rad } \mathbf{A} \end{pmatrix} y \leq \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{b}} \\ -\underline{\mathbf{b}} \end{pmatrix}, \\ y \geq 0. \end{cases} \quad (9.3)$$

Таблица 9.1. Метод Оеттли для оптимального решения внешней задачи для ИСЛАУ

<p>Вход</p> <p>Интервальная линейная система <math>\mathbf{Ax} = \mathbf{b}</math>.            Натуральный индекс <math>\nu \in \{1, 2, \dots, n\}</math>.</p>
<p>Выход</p> <p>Оптимальная оценка <math>y</math> снизу по <math>\nu</math>-ой координате для множества решений <math>\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})</math>.</p>
<p>Алгоритм</p> <p><math>y \leftarrow +\infty</math> ;            DO FOR <math>i = 0</math> TO <math>2^n - 1</math>                решить задачу линейного                программирования (9.3)–(9.4),                присваивая <math>z \leftarrow \min\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \mathcal{O}_i\}</math> ;                IF ( <math>y &gt; z</math> ) <math>y \leftarrow z</math>            END DO</p>

Следовательно, значение  $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \mathcal{O}\}$  является решением задачи линейного программирования с ограничениями (9.3) и минимизируемым функционалом

$$c^\top y, \quad c^\top = (0, \dots, 0, s_\nu, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n. \quad (9.4)$$

Каждый ортант пространства  $\mathbb{R}^n$  однозначно задаётся знаками компонент своих внутренних точек. Нам будет удобно занумеровать все ортанты в  $\mathbb{R}^n$  целыми числами от 0 до  $2^n - 1$ , для которых  $n$ -значное двоичное представление получается из набора знаков компонент заменой минуса нулем, а плюса единицей. Можно говорить, следовательно, об ортанте  $\mathcal{O}_i$ , где  $i$  — некоторый номер,  $0 \leq i \leq 2^n - 1$ . В целом, искомая оптимальная (точная) оценка значения  $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$  вычисляется с помощью алгоритма, псевдокод которого приведён в Табл. 9.1. Мы будем называть его *методом Оеттли*, так как впервые он был рассмотрен в работе У. Оеттли [46].

Трудоёмкость метода Оеттли можно существенно уменьшить, если воспользоваться информацией о расположении множества решений относительно начала координат, которая даётся его предварительной внешней интервальной оценкой. Она

может быть вычислена, к примеру, каким-нибудь из приёмов, изложенных в §5.8, или же одним из алгоритмов Главы 7. Тогда вместо перебора всех ортантов пространства  $\mathbb{R}^n$  в псевдокоде Табл. 9.1 мы можем рассматривать лишь те ортанты, которые имеют непустое пересечение с этой предварительной внешней оценкой. Дополнительные трудозатраты на вычисление этой предварительной оценки в большинстве случаев окупаются уменьшением глубины перебора в алгоритме Табл. 9.1 [6].

Рассмотрим теперь другой подход к оптимальному внешнему оцениванию множеств решений ИСЛАУ, в определённом смысле двойственный к рассмотренному.

Вспомним, что согласно теореме Бекка-Никеля (теорема 5.3.3, стр. 274) точные значения  $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$  и  $\max\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, n$ , достигаются в крайних значениях матрицы  $A \in \mathbf{A}$  и вектора  $b \in \mathbf{b}$ . На основе этого результата К. Никелем в работе [45] был предложен метод внешнего оценивания объединённого множества решений ИСЛАУ, использующий полный перебор всех возможных комбинаций концов элементов из  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{b}$  и последующее решение получающихся при этом точечных систем  $Ax = b$ . Практическая значимость метода Никеля невелика из-за катастрофического роста вычислительной сложности в зависимости от размерности ИСЛАУ. Так, его выполнение уже для системы с интервальной  $5 \times 5$ -матрицей в общем случае требует решить  $2^{5^2+5} = 2^{30} \approx 10^9$  штук вещественных линейных систем того же размера.

Тем не менее, если в интервальной линейной системе существенно интервальных элементов немного, то метод Никеля может оказаться вполне практичным.

Для того, чтобы аккуратно сформулировать качественные выводы о методах Оеттли и Никеля, нам будет необходимо ввести некоторые новые понятия. Представим работу произвольного алгоритма, как последовательность шагов, называемых также *информационными вычислениями*, на каждом из которых выполняется некоторая вычислительная работа. Окончательный ответ затем формируется в результате обработки итогов отдельных шагов.

**Определение 9.1.1** [8, 16] *Алгоритм называется пассивным, если при проведении любого своего информационного вычисления (шага) он не использует информацию, полученную на своих предыдущих вычислениях.*

*Алгоритм называется адаптивным, если при выполнении любого своего информационного вычисления он в той или иной форме использует информацию о предыдущих информационных вычислениях (шагах).*

Итак, пассивные алгоритмы — это алгоритмы с жёстко заданной программой вычислений, которая не зависит от индивидуальных особенностей решаемой задачи. Напротив, адаптивные алгоритмы позволяют гибко подстраивать процесс решения под каждую конкретную задачу, а потому, при прочих равных условиях, они, несомненно, более предпочтительны в вычислительной практике. Представленные в этом параграфе простейшие методы оптимального внешнего оценивания множеств решений ИСЛАУ являются пассивными, и в этом заключается их главный недостаток. Кроме того, и алгоритм Оеттли и алгоритм Никеля имеют и другой не менее серьёзный недостаток, который мы подробно обсудим в §9.8: они являются лишь *финально гарантирующими*.

## 9.2 Метод Янссона

Ситуация, при которой множество решений ИСЛАУ простирается во многие или даже во все ортанты пространства  $\mathbb{R}^n$ , не является исключительной. К примеру, множество решений интервальной линейной системы  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  имеет непустые пересечения с каждым из ортантов  $\mathbb{R}^n$ , если вектор правой части  $\mathbf{b}$  содержит некоторую окрестность нулевого вектора, в частности, когда мы рассматриваем «приближённо однородную» систему линейных алгебраических уравнений, т. е.  $\mathbf{Ax} \approx 0$ .

Тем не менее, если в интервальной линейной системе ширина матрицы и ширина вектора правой части стремятся к нулю, то и её множество решений стягивается в точку, которая в случае общего положения находится внутри одного определённого ортанта пространства  $\mathbb{R}^n$ . Если же матрица и правая часть имеют ненулевую ширину, то множество решений может пересекать сразу несколько ортантов пространства, и их количество может быть не слишком большим, гораздо меньшим общего числа ортантов  $2^n$ .

В этом случае бóльшую часть времени своей работы описанный в предыдущем параграфе метод Оеттли потратит на проверку того, что для почти всех ортантов их пересечение с множеством решений пусто. Возникает естественный вопрос: нельзя ли модифицировать подход §9.1 так, чтобы он исследовал в точности лишь те ортанты  $\mathbb{R}^n$ , которые имеют непустое пересечение с множеством решений? Такой метод был развит Х. Янссоном в работе [34], и его описанию мы посвящаем настоящий параграф.

Для более формального описания метода введём

**Определение 9.2.1** *Графом множества решений интервальной системы линейных алгебраических уравнений  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  называется граф с множеством вершин*

$$V := \{ s \in \{-1, 1\}^n \mid \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \mathcal{O}_s \neq \emptyset \}$$

*и множеством ребер*

$$E := \left\{ (s, t) \mid \begin{array}{l} s, t \in V, \text{ } s \text{ и } t \text{ различаются} \\ \text{ровно в одной компоненте} \end{array} \right\}.$$

Если интервальная матрица ИСЛАУ неособенна, то множество решений этой системы связно и обоснование метода Янссона не встречает затруднений. Иногда, правда, весьма трудно выявить особенность или неособенность матрицы рассматриваемой системы (см. §2.5). Но оказывается, что метод Янссона обладает бóльшей силой, чем это можно было ожидать из его построения: он сам способен распознавать особенность или неособенность матрицы ИСЛАУ, предъявленной к решению. Это его свойство опирается на альтернативу Янссона — результат о строении объединённого множества решений ИСЛАУ, сформулированный в виде Теоремы 5.3.2 (стр. 272).

Немедленным следствием альтернативы Янссона является то обстоятельство, что множество решений  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  не может быть объединением как ограниченных, так и неограниченных компонент связности. Поэтому всякий алгоритм, вычисляющий оптимальные границы только одной какой-нибудь компоненты связности множества решений оказывается пригодным для решения внешней задачи для ИСЛАУ с неособенной матрицей. Если же оказывается, что эта компонента связности неограничена, то мы приходим к заключению, что матрица системы особенна.



### 9.3 Метод Рона

Характеризация Оеттли-Прагера (5.20) для объединённого множества решений ИСЛАУ — это утверждение о том, что принадлежность  $x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  равносильна векторному неравенству

$$|(\text{mid } \mathbf{A}) \cdot x - \text{mid } \mathbf{b}| \leq \text{rad } \mathbf{A} \cdot |x| + \text{rad } \mathbf{b}. \quad (9.5)$$

Оказывается, что значения  $x$ , обращающие его в равенство, обладают рядом замечательных свойств. Мы будем называть их *экстремальными решениями* неравенства Оеттли-Прагера (9.5).

Для вектора  $x \in \mathbb{R}^n$  условимся обозначать

$$\text{Sgn}(x) := \text{diag} \{ \text{sgn } x_1, \text{sgn } x_2, \dots, \text{sgn } x_n \}$$

— диагональную матрицу образованную знаками компонент вектора  $x$ . Так как  $|r| = r \cdot \text{sgn } r$  для любого вещественного числа  $r$ , то система уравнений

$$|(\text{mid } \mathbf{A}) \cdot x - \text{mid } \mathbf{b}| = \text{rad } \mathbf{A} \cdot |x| + \text{rad } \mathbf{b},$$

определяющая экстремальные решения, может быть переписана в следующем эквивалентном виде

$$\text{Sgn}((\text{mid } \mathbf{A}) \cdot x - \text{mid } \mathbf{b}) \cdot ((\text{mid } \mathbf{A}) \cdot x - \text{mid } \mathbf{b}) = \text{rad } \mathbf{A} \cdot |x| + \text{rad } \mathbf{b},$$

или

$$\text{Sgn}(y) \cdot ((\text{mid } \mathbf{A}) \cdot x - \text{mid } \mathbf{b}) = \text{rad } \mathbf{A} \cdot |x| + \text{rad } \mathbf{b},$$

где  $y = (\text{mid } \mathbf{A}) \cdot x - \text{mid } \mathbf{b}$ . Учитывая, что  $(\text{Sgn}(y))^{-1} = \text{Sgn}(y)$ , получаем ещё одну форму уравнений, которым должны удовлетворять экстремальные решения:

$$(\text{mid } \mathbf{A}) \cdot x - \text{mid } \mathbf{b} = \text{Sgn}(y) \cdot \text{rad } \mathbf{A} \cdot |x| + \text{Sgn}(y) \cdot \text{rad } \mathbf{b}. \quad (9.6)$$

**Теорема 9.3.1** (теорема Рона об экстремальных решениях) *Пусть  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  — интервальная система линейных алгебраических уравнений с неособенной квадратной матрицей  $\mathbf{A}$ . Для любой матрицы знаков  $\text{Sgn}(y)$  соответствующая система уравнений (9.6) имеет ровно одно решение, и оно является экстремальным решением неравенства Оеттли-Прагера. Выпуклая оболочка всех таких экстремальных решений совпадает с выпуклой оболочкой множества решений  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  интервальной линейной системы  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ .*

Доказательство можно найти в работе [51] или в книгах [18, 43].

Таким образом, система неравенств Оеттли-Прагера (9.5) имеет не более  $2^n$  экстремальных решений (по числу возможных матриц знаков  $\text{Sgn}(y)$ ), а оптимальные внешние оценки множества решений  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  можно получить путём нахождения и перебора всех этих экстремальных решений. В этом и заключается метод Рона, пассивный по своей вычислительной схеме, так как нахождение каждого отдельного экстремального решения никак не связано с вычислением других экстремальных решений.

Для уяснения природы экстремальных решений преобразуем далее систему (9.6), введя матрицу знаков  $\text{Sgn}(x)$  для вектора неизвестных  $x$ . Тогда (9.6) равносильно

$$(\text{mid } \mathbf{A}) \cdot x - \text{mid } \mathbf{b} = \text{Sgn}(y) \cdot \text{rad } \mathbf{A} \cdot \text{Sgn}(x) \cdot x + \text{Sgn}(y) \cdot \text{rad } \mathbf{b},$$

а после группировки членов с неизвестными в одной части уравнений и свободных членов в другой получим

$$((\text{mid } \mathbf{A}) - \text{Sgn}(y) \cdot \text{rad } \mathbf{A} \cdot \text{Sgn}(x)) \cdot x = \text{mid } \mathbf{b} + \text{Sgn}(y) \cdot \text{rad } \mathbf{b}.$$

При любых  $\text{Sgn}(x)$  и  $\text{Sgn}(y)$  матрица

$$((\text{mid } \mathbf{A}) - \text{Sgn}(y) \cdot \text{rad } \mathbf{A} \cdot \text{Sgn}(x)), \quad (9.7)$$

как нетрудно сообразить, имеет элементы  $\text{mid } a_{ij} \pm \text{rad } a_{ij}$ , т.е. образована концами интервальных элементов  $a_{ij}$  матрицы  $\mathbf{A}$ . Аналогично, вектор правой части системы (9.7) образован концами интервалов вектора  $\mathbf{b}$ . Следовательно, система уравнений (9.7) — это крайняя точечная система для исходной интервальной системы  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ , а экстремальные решения являются некоторым специальным подмножеством множества крайних решений ИСЛАУ. Их гораздо меньше, чем крайних решений (сравните  $2^n$  и  $2^{n^2+n}$ ), но тем не менее, выпуклая оболочка этого множества совпадает с выпуклой оболочкой всего множества решений.

Как вычислять экстремальные решения неравенства Оетгли-Прагера? Иными словами, как организовать для каждой фиксированной матрицы знаков  $\text{Sgn}(y)$  решение системы уравнений (9.6)?

Из-за наличия модуля  $|x|$  в правой части система (9.6) нелинейна, но фиксация знаков компонент  $x$  превращает её в линейную систему уравнений. Поэтому идейно наиболее простой способ решения (9.6) заключается в переборе всевозможных комбинаций знаков компонент вектора  $x$ , решении получающихся линейных систем и проверке удовлетворения условий, при которых был раскрыт модуль  $|x|$ . Ясно, что трудоёмкость этого способа нахождения экстремальных решений равна  $2^n$ . Подобный подход был детально развит И. Роном в [51], где, в частности, предложен так называемый «знакосогласующий алгоритм» перебора всех комбинаций знаков  $x$ .

Б.Т. Поляк и С.А. Назин [47] предложили для решения системы (9.6) метод ньютоновского типа.

Наконец, если интервальная матрица  $\mathbf{A}$  «не слишком широка» и является сильно неособенной, т.е.

$$\rho(|(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \cdot \text{rad } \mathbf{A}) < 1,$$

для решения (9.6), переписанной в равносильном рекуррентном виде

$$x = (\text{mid } \mathbf{A})^{-1} \cdot \text{Sgn}(y) \cdot \text{rad } \mathbf{A} \cdot |x| + \text{mid } \mathbf{b} + \text{Sgn}(y) \cdot \text{rad } \mathbf{b},$$

можно организовать одношаговый стационарный итерационный процесс

$$x^{(k+1)} \leftarrow (\text{mid } \mathbf{A})^{-1} \cdot \text{Sgn}(y) \cdot \text{rad } \mathbf{A} \cdot |x^{(k)}| + \text{mid } \mathbf{b} + \text{Sgn}(y) \cdot \text{rad } \mathbf{b}.$$

Он сходится из любого начального приближения  $x^{(0)}$ .

## 9.4 Методы дробления решений

В этом параграфе мы конструируем и исследуем *методы дробления решений* (называемые также *PSS-методами*) для вычисления оптимальных внешних оценок множеств решений интервальных линейных систем уравнений. Название этих методов объясняется тем, что они основаны на представлении задачи оценивания множества решений в виде задачи оптимизации, аргументы целевой функции которой находятся в пространстве решений СЛАУ. Нам будет удобно заменить исходную задачу нахождения внешнего бруса для множества решений  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  на ряд задач вычисления отдельных покомпонентных оценок  $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$  и  $\max\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, n$ , и далее сосредоточиться на вычислении  $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$  для какого-то фиксированного  $\nu$ , поскольку

$$\max\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})\} = -\min\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{A}, -\mathbf{b})\}. \quad (9.8)$$

Мы будем считать уже известным некоторое начальное внешнее приближение для множества решений — интервальный вектор  $\mathbf{V} \supseteq \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ . Он может быть найден каким-либо из алгоритмов, описанных, к примеру, в Главе 7, и его размеры не играют в дальнейшем существенной роли, хотя выбор более «узкого» начального приближения способствует более быстрой сходимости.

Матрица  $\mathbf{A}$  в подобных постановках обычно предполагается квадратной и неособенной, и таким образом неявно требуют ограниченности множества решений. Мы не будем стеснять наши рассуждения этим условием и допустим возможность квадратной особенной или даже прямоугольной матрицы  $\mathbf{A}$ , но в случае неограниченного множества решений постановка задачи будет изменена. Как и в §7.8, будем считать, что множество, покоординатные оценки которого мы ищем, является пересечением всего множества решений ИСЛАУ с некоторым заданным бруском. При этом без потери общности можно считать, что он совпадает с интервальным вектором начального приближения  $\mathbf{V}$ .

### 9.4а Основной алгоритм

Обозначим через  $l$  прямую линию, параллельную  $\nu$ -ой координатной оси, где  $\nu \in \{1, 2, \dots, n\}$  — фиксированный индекс. Она имеет в пространстве  $\mathbb{R}^n$  параметрическое уравнение

$$\begin{cases} x_1 & = & r_1, \\ & \vdots & \\ x_{\nu-1} & = & r_{\nu-1}, \\ x_\nu & = & t, \\ x_{\nu+1} & = & r_{\nu+1}, \\ & \vdots & \\ x_n & = & r_n \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R} \text{ — параметр}). \quad (9.9)$$

Каждая такая прямая полностью определяется  $(n-1)$ -мерным вещественным вектором  $r = (r_1, \dots, r_{\nu-1}, r_{\nu+1}, \dots, r_n)^\top$ , и, чтобы явно указать её параметры, мы будем

также обозначать эту прямую через  $l(r)$ . Пусть

$$\Omega(r) := \min\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap l(r)\}$$

— наименьшее значение  $\nu$ -ой координаты точек из пересечения  $l(r)$  с множеством решений системы  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ , а если  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap l(r) = \emptyset$ , то полагаем  $\Omega(r) = +\infty$ . Каким образом можно вычислять значения  $\Omega(r)$ ?

Чтобы ответить на этот вопрос, «подставим» параметрическое уравнение прямой (9.9) в интервальную систему  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ , которая при этом превратится в систему  $m$  одномерных интервальных линейных уравнений с одним единственным неизвестным  $t$  и интервальными коэффициентами:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{1\nu}t + \sum_{j=1, j \neq \nu}^n \mathbf{a}_{1j}r_j = \mathbf{b}_1, \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a}_{m\nu}t + \sum_{j=1, j \neq \nu}^n \mathbf{a}_{mj}r_j = \mathbf{b}_m, \end{cases} \quad (9.10)$$

или, в матричной форме,

$$\mathbf{A}_{:\nu}t + \tilde{\mathbf{A}}r = \mathbf{b}, \quad (9.11)$$

где  $\mathbf{A}_{:\nu}$  —  $\nu$ -ый столбец матрицы  $\mathbf{A}$ ,  
 $\tilde{\mathbf{A}}$  — интервальная  $m \times (n-1)$ -матрица,  
 полученная из  $\mathbf{A}$  удалением  $\nu$ -ого столбца.

Содержательный смысл этой процедуры состоит в следующем. При подстановке параметрического уравнения прямой (9.9) в точечную систему  $Ax = b$  мы получаем некоторую систему из  $m$  одномерных уравнений, которая совпадает по структуре с (9.10), но имеет вещественные коэффициенты. Далее варьируем элементы  $a_{ij}$  матрицы и элементы  $b_i$  вектора правой части в пределах заданных для них границ  $\mathbf{a}_{ij}$  и  $\mathbf{b}_i$  соответственно. Ясно, что множество всех полученных таким образом точечных систем уравнений образует в точности (9.10)–(9.11).

Множество решений каждого отдельно взятого уравнения из этой системы есть

$$\left( \mathbf{b}_i - \sum_{j=1, j \neq \nu}^n \mathbf{a}_{ij}r_j \right) / \mathbf{a}_{i\nu},$$

где «/» — это, в общем случае, деление в интервальной арифметике Кэхэна. Следовательно, решив порознь все одномерные уравнения, образующие систему (9.10), и взяв пересечение их множеств решений друг с другом и с  $\mathbf{V}_\nu$ , мы получим в точности значения  $\nu$ -ой координаты точек из  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap l$ . Это следует из того, что в пределах всех интервалов, входящих в систему (9.10), соответствующие коэффициенты варьируются независимо друг от друга (как и в исходной ИСЛАУ). Заметим, что полученное множество может оказаться пустым, если система (9.10) несовместна. Полученное множество может также оказаться несвязным (как показано на Рис. 9.1), если некоторые уравнения из (9.10) имеют своими множествами решений объединения двух непересекающихся лучей вида  $]-\infty, p] \cup [q, +\infty[$  с  $p < q$ .

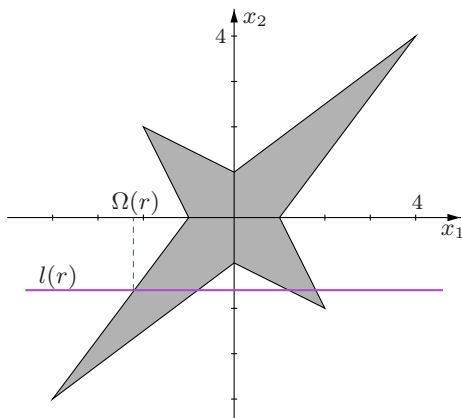


Рис. 9.1. Множество решений интервальной системы уравнений (9.13) и определение функции  $\Omega(r)$ , отслеживающей его границу.

Для построения методов дробления решений принципиальна переформулировка «внешней задачи» для ИСЛАУ как некоторой задачи глобальной оптимизации. Именно,

$$\begin{aligned}
 & \min\{x_\nu \mid x \in \Xi\} \\
 &= \min\left\{x_\nu \mid x \in \bigcup_{l \cap V \neq \emptyset} (\Xi \cap l)\right\} \\
 &= \min\left\{\min\{x_\nu \mid x \in \Xi \cap l(r)\} \mid r \in (V_1, \dots, V_{\nu-1}, V_{\nu+1}, \dots, V_n)\right\} \\
 &= \min\{\Omega(r) \mid r \in (V_1, \dots, V_{\nu-1}, V_{\nu+1}, \dots, V_n)\},
 \end{aligned} \tag{9.12}$$

т. е. нахождение  $\nu$ -ой координатной оценки точек множества решений сводится к задаче минимизации целевой функции  $\Omega(r)$  на бруске  $(V_1, \dots, V_{\nu-1}, V_{\nu+1}, \dots, V_n)$ . Содержательный смысл функции  $\Omega$  хорошо виден из Рис. 9.1: она отслеживает  $\nu$ -ую координату границы множества решений с «нужной» оцениваемой стороны.

Мы уже видели, как вычисляются значения  $\Omega(r)$ , так что естественная идея состоит в том, чтобы далее решить внешнюю задачу для ИСЛАУ применением какого-либо из хорошо разработанных методов глобальной оптимизации. Но построенная нами целевая функция  $\Omega(r)$  обладает специфическими свойствами. Она негладкая, и в общем случае даже не является непрерывной. Например, для интервальной линейной системы

$$\begin{pmatrix} [1, 2] & [-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}] \\ [-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}] & [1, 2] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 1] \end{pmatrix}, \tag{9.13}$$

(её объединённое множество решений изображено на Рис. 9.1) при оценивании  $\min x_1$  мы имеем  $r = x_2$ , и

$$\lim_{r \rightarrow 2-0} \Omega(r) = -2 \neq \frac{4}{3} = \lim_{r \rightarrow 2+0} \Omega(r).$$

Более того,  $\Omega(r)$  претерпевает ещё и разрывы второго рода, в  $+\infty$ . Эти обстоятельства решающим образом суживают набор алгоритмов глобальной оптимизации, применимых к задаче (9.12). Например, методы неравномерных покрытий из [6, 15] очевидным образом неприменимы для решения (9.12), так как они существенно опираются на липшицеву непрерывность целевой функции.

Тем не менее, мы продемонстрируем, что оптимальное решение задачи внешнего оценивания множеств решений может быть вычислено интервальным алгоритмом глобальной оптимизации, основанным на технике «ветвей и границ» и описанном в §3.6. Нам нужно лишь предъявить конструктивный способ вычисления миноранты по области для функции  $\Omega(r)$  (т.е. нижний конец её интервального расширения). Иными словами, для любого  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_{\nu-1}, r_{\nu+1}, \dots, r_n)^\top \in \mathbb{R}^{n-1}$  мы должны уметь оценивать снизу

$$\min\{ \Omega(r) \mid r \in \mathbf{r} \} = \min \left\{ \bigcup_{r \in \mathbf{r}} \{ x_\nu \mid x \in \Xi \cap l(r) \} \right\}. \quad (9.14)$$

Простейший способ сделать это состоит в следующем. Мы поступаем с исходной интервальной системой  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  в точности так же, как в случае определения  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap l$ , но теперь вместо переменных  $x_1, \dots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \dots, x_n$  в эту систему подставляются интервалы  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{\nu-1}, \mathbf{r}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{r}_n$ , а не вещественные числа  $r_1, \dots, r_{\nu-1}, r_{\nu+1}, \dots, r_n$ . Далее, мы вычисляем, как и прежде, пересечение  $\mathcal{S}$  всех множеств решений  $m$  штук одномерных интервальных уравнений, образующих систему

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{1\nu}t + \sum_{j=1, j \neq \nu}^n \mathbf{a}_{1j}\mathbf{r}_j = \mathbf{b}_1, \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ \mathbf{a}_{m\nu}t + \sum_{j=1, j \neq \nu}^n \mathbf{a}_{mj}\mathbf{r}_j = \mathbf{b}_m, \end{cases} \quad (9.15)$$

или

$$\mathbf{A}_\nu t + \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{r} = \mathbf{b}$$

в обозначениях (9.11). Нетрудно понять, что

$$\mathcal{S} \supseteq \bigcup_{r \in \mathbf{r}} \{ x_\nu \mid x \in \Xi \cap l(r) \},$$

поскольку для всех  $r \in \mathbf{r}$

$$\left( \begin{array}{c} \text{множество решений} \\ \text{системы } \mathbf{A}_\nu t + \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{r} \subseteq \mathbf{b} \end{array} \right) \subseteq \left( \begin{array}{c} \text{множество решений} \\ \text{системы } \mathbf{A}_\nu t + \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{r} \subseteq \mathbf{b} \end{array} \right).$$

Следовательно,

$$\Omega(\mathbf{r}) = \min\{ \mathcal{S} \cap \mathbf{V}_\nu \} \quad (9.16)$$

даёт требуемую нижнюю оценку для (9.14). Если же система (9.15) несовместна для некоторого  $\mathbf{r}$  (это соответствует ситуации  $\Xi \cap l(r) = \emptyset$  для всех  $r \in \mathbf{r}$ ), то полагаем  $\Omega(\mathbf{r}) = +\infty$ .

Таблица 9.2. Простейший метод дробления решений  
для оптимального решения ИСЛАУ

<p>Вход</p> <p>Интервальная линейная система <math>\mathbf{Ax} = \mathbf{b}</math>. Брус начального приближения <math>\mathbf{V} \supseteq \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})</math>.</p>
<p>Выход</p> <p>Оценка <math>m^*</math> для <math>\min\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}</math> снизу.</p>
<p>Алгоритм</p> <p>присваиваем <math>\mathbf{Q} \leftarrow (\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{\nu-1}, \mathbf{V}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{V}_n)</math> и <math>q \leftarrow \underline{\mathbf{V}}_\nu</math>; инициализируем список <math>\mathcal{L} \leftarrow \{(\mathbf{Q}, q)\}</math>; DO  <p style="padding-left: 2em;">выбираем компоненту <math>k</math>, по которой брус <math>\mathbf{Q}</math> имеет наибольшую длину, т. е. <math>\text{wid } \mathbf{Q}_k = \max_i \text{wid } \mathbf{Q}_i</math>; рассекаем брус <math>\mathbf{Q}</math> по <math>k</math>-ой координате пополам на брусы <math>\mathbf{Q}'</math> и <math>\mathbf{Q}''</math>, такие что</p> <math display="block">\mathbf{Q}' \leftarrow (\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_{k-1}, [\underline{\mathbf{Q}}_k, \text{mid } \mathbf{Q}_k], \mathbf{Q}_{k+1}, \dots, \mathbf{Q}_n),</math> <math display="block">\mathbf{Q}'' \leftarrow (\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_{k-1}, [\text{mid } \mathbf{Q}_k, \overline{\mathbf{Q}}_k], \mathbf{Q}_{k+1}, \dots, \mathbf{Q}_n);</math> <p style="padding-left: 2em;">вычисляем <math>\Omega(\mathbf{Q}')</math> и <math>\Omega(\mathbf{Q}'')</math> и присваиваем <math>q' \leftarrow \Omega(\mathbf{Q}')</math> и <math>q'' \leftarrow \Omega(\mathbf{Q}'')</math>; удаляем запись <math>(\mathbf{Q}, q)</math> из списка <math>\mathcal{L}</math>; помещаем записи <math>(\mathbf{Q}', q')</math> и <math>(\mathbf{Q}'', q'')</math> в рабочий список <math>\mathcal{L}</math> в порядке возрастания второго поля; обозначаем первую запись списка через <math>(\mathbf{Q}, q)</math>; END DO  <math>m^* \leftarrow q</math>;</p> </p>

Мы используем обозначение  $\Omega(\mathbf{r})$ , чтобы подчеркнуть, что реализованная нами процедура является, в действительности, естественным интервальным расширением точечной функции  $\Omega(r)$ . Имеет смысл ввести в рассмотрение функцию  $\Omega : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}'$  с областью значений в полурасширенной числовой оси  $\mathbb{R}' = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  и областью определения

$$\mathcal{V} = \{ \mathbf{r} \in \mathbb{IR}^{n-1} \mid \mathbf{r} \subseteq (\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{\nu-1}, \mathbf{V}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{V}_n) \}. \quad (9.17)$$

Следует отметить, что  $\Omega(\mathbf{r}') \geq \Omega(\mathbf{r}'')$  для  $\mathbf{r}' \subseteq \mathbf{r}''$ , и оценивание величины (9.14)

посредством  $\Omega(\mathbf{r})$  становится все более точным при уменьшении ширины вектора  $\mathbf{r}$ , т. е. при уменьшении  $\|\text{grad } \mathbf{r}\|$ , если некоторые естественные ограничения наложены на  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{r}$ . Это утверждение будет детально обсуждаться в §9.4б.

Теперь алгоритм, вычисляющий  $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi\}$ , может быть сконструирован как итерационная процедура для последовательного улучшения оценки этого минимума снизу, оформленная в соответствии с широко известной стратегией «метода ветвей и границ», аналогично тому, как это сделано в интервальных методах глобальной оптимизации из Главы 3. В данном случае

«ветви» образуются в результате дробления исходного  $(n - 1)$ -мерного бруса  $(\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{\nu-1}, \mathbf{V}_{\nu+1}, \mathbf{V}_n)$  на более узкие брусы  $\mathbf{P}$ ,

нахождение «границ» — это вычисление значений  $\Omega(\mathbf{P})$ , т. е.  $\nu$ -ой координатной оценки точек из  $\{\Xi \cap l(\mathbf{r}) \mid \mathbf{r} \in \mathbf{P}\}$ .

Более точно, алгоритм порождает список  $\mathcal{L}$ , состоящий из пар  $(\mathbf{P}, \Omega(\mathbf{P}))$ , таких что

$$\mathbf{P} \subseteq (\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{\nu-1}, \mathbf{V}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{V}_n),$$

упорядоченных по возрастанию второго поля, и далее мы будем называть  $\mathcal{L}$  *рабочим списком*. Первая пара  $(\mathbf{Q}, \Omega(\mathbf{Q}))$  списка  $\mathcal{L}$  играет особую роль в наших рассуждениях. Мы будем называть её, а также соответствующие брус  $\mathbf{Q}$  и оценку  $\Omega(\mathbf{Q})$ , *ведущими*. Псевдокод алгоритма представлен в Табл. 9.2.

Выполнение алгоритма имеет результатом неубывающую (начиная со второго шага) последовательность ведущих оценок, которые, как следует из общей теории §3.6, приближают искомым  $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi\}$  снизу. В следующем параграфе мы докажем, что эта последовательность сходится к точному значению  $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi\}$ . Методы решения «внешней задачи» для интервальных систем уравнений, аналогичные только что построенному и основанные на адаптивном дроблении множества решений мы будем называть *методами дробления решений* или *PSS-методами* (от английской фразы «partitioning solution set»).

## 9.4б Доказательство сходимости

В отличие от обоснования сходимости интервальных методов глобальной оптимизации из Главы 3, доказательство сходимости простейшего метода дробления решений является непростым, поскольку целевая функция  $\Omega(\mathbf{r})$  в общем случае разрывна. Для разрывных целевых функций методы глобальной оптимизации рассматриваемого нами типа исследовались Ю.Г. Евтушенко и В.А. Ратькиным [7] и Х. Рачеком [48], но полученные ими критерии сходимости напрямую не применимы к нашей ситуации.

Пусть  $E$  — топологическое пространство. Напомним, что функция  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  называется *полу непрерывной снизу* в точке  $y \in E$ , если  $f(y) = \underline{\lim}_{x \rightarrow y} f(x)$ . Функция называется *полу непрерывной снизу* на  $E$ , если она *полу непрерывна* в любой точке  $E$ . Эквивалентным определением этого свойства является, в частности, следующее [9]: функция  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  *полу непрерывна снизу* на  $E$  тогда и только тогда, когда для любого  $c \in \mathbb{R}$  лебеговское множество  $\{f(x) \leq c\}$  замкнуто в  $E$ .



**Предложение 9.4.1** Пусть интервальная  $m \times n$ -система линейных алгебраических уравнений  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  и интервальный вектор  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{V} \supseteq \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , таковы, что

$$(NZ) \left\{ \begin{array}{l} \text{для каждого } i = 1, 2, \dots, m \text{ выполнено свойство:} \\ \quad \text{нуль не является концом } \mathbf{a}_{i\nu} \\ \quad \text{или} \\ \text{для каждого } \mathbf{r} \subseteq (\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{\nu-1}, \mathbf{V}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{V}_n) \\ \quad \text{нуль не является концом интервала} \\ \quad \left( \mathbf{b}_i - \sum_{j=1, j \neq \nu}^n \mathbf{a}_{ij} \mathbf{r}_j \right). \end{array} \right.$$

Тогда функция  $\Omega : \mathbb{R}^{n-1} \supseteq \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ , определённая посредством (9.16)–(9.17), непрерывна снизу.

**Доказательство.** Обозначим посредством  $\mathcal{B}$  множество всех целых индексов  $i \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$ , для которых  $0 \notin \mathbf{a}_{i\nu}$ , так что множества решений соответствующих уравнений из (9.15) являются ограниченными интервалами  $[\underline{t}_i, \bar{t}_i]$ . При этом мы полагаем для удобства  $\underline{t}_0 = \underline{\mathbf{V}}_\nu$  и  $\bar{t}_0 = \bar{\mathbf{V}}_\nu$ , так что  $\mathcal{B}$  всегда непусто. Обозначим также  $\mathcal{U} = \{0, 1, 2, \dots, m\} \setminus \mathcal{B}$ , и пусть множества  $]-\infty, \underline{t}_i] \cup [\bar{t}_i, +\infty[$  для  $i \in \mathcal{U}$  представляют неограниченные множества решений уравнений из (9.15) с  $0 \in \mathbf{a}_{i\nu}$ . При этом мы предполагаем, что  $\underline{t}_i = -\infty$  или  $\bar{t}_i = +\infty$ , когда соответствующее множество решений есть луч в  $\mathbb{R}$ , и  $\underline{t}_i = \bar{t}_i = 0$ , когда множество решений совпадает со всей числовой осью  $\mathbb{R}$ .

На интервальных пространствах топология задается хаусдорфовой метрикой, относительно которой непрерывны все интервальные арифметические операции (см. Главу 1). Следовательно,  $\underline{t}_i$  и  $\bar{t}_i$ ,  $i \in \mathcal{B}$ , являются непрерывными функциями интервального вектора  $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{\nu-1}, \mathbf{r}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{r}_n)^\top$  из (9.15). Но и в случае  $0 \in \mathbf{a}_{i\nu}$  вещественные числа  $\underline{t}_i$  и  $\bar{t}_i$  определяющие множество решений одномерного уравнения

$$\mathbf{a}_{i\nu} t + \sum_{j=1, j \neq \nu}^n \mathbf{a}_{ij} \mathbf{r}_j = \mathbf{b}_i,$$

зависят от интервального вектора  $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{\nu-1}, \mathbf{r}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{r}_n)^\top$  также непрерывным образом, если

$$\underline{\mathbf{a}}_{i\nu} < 0 < \bar{\mathbf{a}}_{i\nu},$$

либо если интервал

$$\left( \mathbf{b}_i - \sum_{j \neq \nu}^n \mathbf{a}_{ij} \mathbf{r}_j \right)$$

не имеет одним из своих концов нуль. Это следует из формул расширенной интервальной арифметики Кэхэна (см. §1.11a) и обеспечивается условием (NZ) Предложения 9.4.1. Следовательно, мы далее можем считать, что значения  $\max_{i \in \mathcal{B}} \underline{t}_i$ ,  $\min_{i \in \mathcal{B}} \bar{t}_i$ ,  $\max_{i \in \mathcal{U}} \bar{t}_i$ ,  $\min_{i \in \mathcal{U}} \underline{t}_i$  являются непрерывными функциями вектора  $\mathbf{r}$  из (9.15) (как обычно, полагаем  $\min \emptyset = +\infty$ ,  $\max \emptyset = -\infty$ ).

Покажем далее, что эффективная область определения функции  $\Omega(\mathbf{r})$ , т. е. множество

$$\text{dom } \Omega = \{ \mathbf{r} \in \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^{n-1} \mid \Omega(\mathbf{r}) < +\infty \},$$

является компактным множеством. Принадлежность вектора  $\mathbf{r}$  множеству  $\text{dom } \Omega$  означает совместность соответствующей системы (9.15). Тогда, во-первых, непусто пересечение  $\bigcap_{i \in \mathcal{B}} [\underline{t}_i, \bar{t}_i]$  всех ограниченных решений уравнений из (9.15). Это эквивалентно тому, что

$$\min_{i \in \mathcal{B}} \bar{t}_i \geq \max_{i \in \mathcal{B}} \underline{t}_i.$$

Во-вторых,  $\bigcap_{i \in \mathcal{B}} [\underline{t}_i, \bar{t}_i]$  имеет непустое пересечение с неограниченными решениями одномерных уравнений системы (9.15), т. е. с  $]-\infty, \underline{t}_i[ \cup ]\bar{t}_i, +\infty[$ ,  $i \in \mathcal{U}$ . Последнее эквивалентно условию

$$\left( \min_{i \in \mathcal{U}} \underline{t}_i \geq \max_{i \in \mathcal{B}} \underline{t}_i \right) \vee \left( \max_{i \in \mathcal{U}} \bar{t}_i \leq \min_{i \in \mathcal{B}} \bar{t}_i \right),$$

где  $\vee$  — логическая дизъюнкция. В целом множество  $\text{dom } \Omega$  описывается условием

$$\min \left\{ \min_{i \in \mathcal{B}} \bar{t}_i - \max_{i \in \mathcal{B}} \underline{t}_i, \max \left\{ \min_{i \in \mathcal{U}} \underline{t}_i - \max_{i \in \mathcal{B}} \underline{t}_i, \min_{i \in \mathcal{B}} \bar{t}_i - \max_{i \in \mathcal{U}} \bar{t}_i \right\} \right\} \geq 0.$$

Поскольку функция в левой части этого неравенства непрерывна по  $\mathbf{r}$ , мы тем самым доказали замкнутость множества  $\text{dom } \Omega$ . Кроме того,  $\text{dom } \Omega$  очевидно ограничено, а потому компактно.

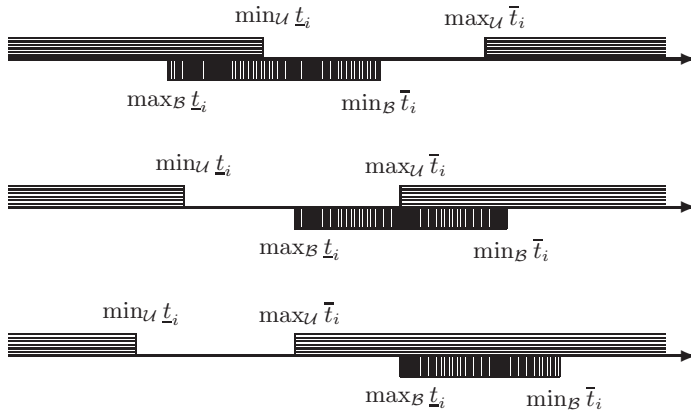


Рис. 9.2. Различные ситуации при определении функции  $\Omega(\mathbf{r})$ .

Как мы уже отмечали, в общем случае функция  $\Omega(\mathbf{r})$  не является даже непрерывной на своей эффективной области определения. Если  $\mathbf{r} \in \text{dom } \Omega$ , то

$$\Omega(\mathbf{r}) = \max_{i \in \mathcal{B}} \underline{t}_i, \quad \text{если } \min_{i \in \mathcal{U}} \underline{t}_i \geq \max_{i \in \mathcal{B}} \underline{t}_i,$$

$$\text{и } \Omega(\mathbf{r}) = \max \left\{ \max_{i \in \mathcal{B}} \underline{t}_i, \max_{i \in \mathcal{U}} \bar{t}_i \right\}, \quad \text{если } \min_{i \in \mathcal{U}} \underline{t}_i < \max_{i \in \mathcal{B}} \underline{t}_i$$

(Рис. 9.2 изображает различные возможные ситуации). Пусть

$$\text{dom } \Omega = \mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1,$$

где

$$\mathcal{D}_0 = \left\{ \mathbf{r} \in \text{dom } \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \mid \min_{i \in \mathcal{U}} \underline{t}_i \geq \max_{i \in \mathcal{B}} \underline{t}_i \right\},$$

$$\mathcal{D}_1 = \left\{ \mathbf{r} \in \text{dom } \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \mid \min_{i \in \mathcal{U}} \underline{t}_i < \max_{i \in \mathcal{B}} \underline{t}_i \right\}.$$

Тогда функция  $\Omega(\mathbf{r})$  может быть определена следующим образом:

$$\Omega(\mathbf{r}) = \begin{cases} \max_{i \in \mathcal{B}} \underline{t}_i, & \text{если } \mathbf{r} \in \mathcal{D}_0, \\ \max \left\{ \max_{i \in \mathcal{B}} \underline{t}_i, \max_{i \in \mathcal{U}} \bar{t}_i \right\}, & \text{если } \mathbf{r} \in \mathcal{D}_1, \\ +\infty, & \text{если } \mathbf{r} \in \mathcal{V} \setminus (\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1), \end{cases}$$

и  $\Omega(\mathbf{r}') < \Omega(\mathbf{r}'') < +\infty$  для любых  $\mathbf{r}' \in \mathcal{D}_0$ ,  $\mathbf{r}'' \in \mathcal{P}\mathcal{D}_1$ .

Будучи заданным нестрогими неравенствами между непрерывными функциями, множество  $\mathcal{D}_0$  замкнуто, а  $\Omega(\mathbf{r})$  непрерывна как на  $\mathcal{D}_0$ , так и на  $\mathcal{D}_1$ . По этой причине лебегово множество  $\{\Omega \leq c\}$  замкнуто для любого  $c \leq \sup\{\Omega(\mathbf{r}) \mid \mathbf{r} \in \mathcal{D}_0\}$ . Предположим теперь, что  $c > \sup\{\Omega(\mathbf{r}) \mid \mathbf{r} \in \mathcal{D}_0\}$ . Тогда все предельные точки  $\{\Omega \leq c\}$  могут принадлежать лишь  $\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1$  в силу открытости дополнения  $\mathcal{V} \setminus (\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1)$ . Но множество  $\{\Omega \leq c\} \cap \mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_0$  замкнуто в  $\mathbb{R}^{n-1}$ , а множество  $\{\Omega \leq c\} \cap \mathcal{D}_1$  замкнуто в  $\mathcal{D}_1$ . Следовательно,  $\{\Omega \leq c\} \cap \mathcal{D}_0$  содержит все предельные точки  $\{\Omega \leq c\}$ , принадлежащие  $\mathcal{D}_0$ , в то время как  $\{\Omega \leq c\} \cap \mathcal{D}_1$  содержит все предельные точки  $\{\Omega \leq c\}$ , принадлежащие  $\mathcal{D}_1$ . Поскольку

$$\{\Omega \leq c\} = (\{\Omega \leq c\} \cap \mathcal{D}_0) \cup (\{\Omega \leq c\} \cap \mathcal{D}_1),$$

то мы тем самым получаем замкнутость лебеговых множеств  $\{\Omega \leq c\}$  также и для  $c > \sup\{\Omega(\mathbf{r}) \mid \mathbf{r} \in \mathcal{D}_0\}$ . Это завершает доказательство полунепрерывности снизу функции  $\Omega(\mathbf{r})$ . ■

**Теорема 9.4.1** Пусть интервальная линейная система  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  и интервальный вектор  $\mathbf{V} \supseteq \Xi$  таковы, что выполнено условие (NZ). Тогда в методе дробления решений из Табл. 9.2 с начальным приближением  $\mathbf{V}$  последовательность ведущих оценок сходится снизу к  $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi\}$ .

**Доказательство.** Для интервальных алгоритмов глобальной оптимизации, основанных на адаптивном дроблении и стратегии «ветвей и границ», оценка

$$\Omega(\mathbf{Q}) \leq \min\{x_\nu \mid x \in \Xi\} \quad (9.18)$$

для ведущих брусов  $\mathbf{Q}$  была установлена в Предложении 3.6.1, а потому нам остается доказать собственно сходимость метода.

Обозначим через  $\mathcal{W}$  множество всех точечных векторов  $\mathcal{V}$ , т. е.

$$\mathcal{W} := \mathcal{V} \cap \mathbb{R}^{n-1}.$$

Пусть также множества  $\mathcal{D}_0$  и  $\mathcal{D}_1$  имеют тот же смысл, как они были определены в Предложении 9.4.1. Наши дальнейшие рассуждения существенно зависят от того, имеем ли место  $\mathcal{W} \cap \mathcal{D}_0 \neq \emptyset$  или  $\mathcal{W} \cap \mathcal{D}_0 = \emptyset$ ,

Если  $\mathcal{W} \cap \mathcal{D}_0 \neq \emptyset$ , то все ведущие брусы  $\mathbf{Q}$  принадлежат  $\mathcal{D}_0$ . Действительно, для любого  $p \in \mathcal{W} \cap \mathcal{D}_0$  справедливо неравенство  $\Omega(p) \geq \min\{x_\nu \mid x \in \Xi\}$ . В случае  $\mathbf{Q} \in \mathcal{D}_1$  мы имели бы  $\Omega(\mathbf{Q}) > \Omega(p)$ , а потому

$$\Omega(\mathbf{Q}) > \min\{x_\nu \mid x \in \Xi\},$$

что противоречит (9.18).

Каким бы ни было  $\mathbf{r} \in \mathcal{D}_0$ ,

$$\min\{\Omega(r) \mid (r \in \mathbb{R}^{n-1}) \& (r \in \mathbf{r})\} = \Omega(\check{r}) \tag{9.19}$$

для некоторого точечного  $\check{r} \in \mathbf{r}$ ,  $\check{r} \in \mathbb{R}^{n-1}$ , так как полунепрерывная снизу функция  $\Omega(\mathbf{r})$  достигает своего наименьшего значения на компактном множестве  $\{r \in \mathbb{R}^{n-1} \mid r \in \mathbf{r}\}$  [9]. Но

$$\|\check{r} - \mathbf{r}\| \leq 2 \|\text{grad } \mathbf{r}\|.$$

Следовательно, в силу равномерной непрерывности  $\Omega(\mathbf{r})$  на  $\mathcal{D}_0$  для любого  $\epsilon > 0$  найдётся такое  $\delta > 0$ , что

$$0 \leq \min\{\Omega(r) \mid r \in \mathbf{r}\} - \Omega(\mathbf{r}) \leq \epsilon \tag{9.20}$$

при  $\|\text{grad } \mathbf{r}\| \leq \delta$ . Тем самым при условии (NZ) мы строго обосновали утверждение §9.4а о том, что точность оценивания (9.14) посредством  $\Omega(\mathbf{r})$  тем выше, чем уже (тоньше) интервальный вектор  $\mathbf{r}$ ).

Теперь мы легко можем доказать сходимость простейшего метода дробления решений из §9.4а. Если  $\{\mathbf{Q}^{(k)}\}$  — последовательность ведущих брусков (как и прежде,  $k$  обозначает номер шага алгоритма), то  $\|\text{grad } \mathbf{Q}^{(k)}\| \rightarrow 0$  в силу Теоремы 3.6.1. Поэтому для любого  $\epsilon > 0$  существует положительное целое  $K_\epsilon$ , такое что аналогично неравенству (9.20), для  $k \geq K_\epsilon$  имеет место

$$0 \leq \min\{\Omega(r) \mid r \in \mathbf{Q}^{(k)}\} - \Omega(\mathbf{Q}^{(k)}) \leq \epsilon.$$

Используя также неравенства

$$\begin{aligned} \Omega(\mathbf{Q}^{(k)}) &\leq \min\{x_\nu \mid x \in \Xi\} \\ &= \min\{\Omega(r) \mid r \in (\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{\nu-1}, \mathbf{V}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{V}_n)\} \\ &\leq \min\{\Omega(r) \mid r \in \mathbf{Q}^{(k)}\}, \end{aligned}$$

мы можем заключить, что

$$0 \leq \min\{x_\nu \mid x \in \Xi\} - \Omega(\mathbf{Q}^{(k)}) \leq \epsilon \quad \text{для } k \geq K_\epsilon.$$

Это и означает сходимость простейшего метода дробления решений.

Ясно также, что наш вывод останется справедливыми и в случае  $\mathcal{D}_0 = \emptyset$  (при этом  $\text{dom } \Omega = \mathcal{D}_1$ ). Для доказательства этого достаточно лишь заменить  $\mathcal{D}_0$  на  $\mathcal{D}_1$  во всех предшествующих рассуждениях, начиная с (9.19).

Рассмотрим теперь случай  $\mathcal{D}_0 \neq \emptyset$  и  $\mathcal{W} \cap \mathcal{D}_0 = \emptyset$ . Пусть

$$\min\{\|\mathbf{r} - r\| \mid (\mathbf{r} \in \mathcal{D}_0) \& (r \in \mathcal{W})\} = 2\tau.$$

Нетрудно понять, что  $\tau > 0$ , так как  $\mathcal{W}$  и  $\mathcal{D}_0$  являются непересекающимися компактными. Тогда множество

$$\left\{ \mathbf{r} \in \text{dom } \Omega \mid \min_{r \in \mathcal{W}} \|\mathbf{r} - r\| \leq \tau \right\} \quad (9.21)$$

также не пересекает  $\mathcal{D}_0$ , т. е. оно целиком содержится в  $\mathcal{D}_1$ . Для любых  $\mathbf{r}$  и  $r$ , очевидно,  $\|\mathbf{r} - r\| \geq \|\text{rad } \mathbf{r}\|$ , а потому

$$\min_{\mathbf{r}} \|\mathbf{r} - r\| \geq \|\text{rad } \mathbf{r}\|.$$

Таким образом, множество (9.21) как и множество  $\mathcal{D}_1$ , содержит подмножество

$$\mathcal{D}_\tau = \{ \mathbf{r} \in \text{dom } \Omega \mid \|\text{rad } \mathbf{r}\| \leq \tau \},$$

которому принадлежат, начиная с некоторой итерации, все ведущие брусы. Дальнейшие рассуждения совершенно аналогичны тем, что мы проводили в ранее рассмотренном случае: так как функция  $\Omega(\mathbf{r})$  равномерно непрерывна на компакте  $\mathcal{D}_\tau$ , то выполняется неравенство (9.20), и т. д.

Тем самым теорема оказывается полностью доказанной. ■

Второй член дизъюнкции в условии (NZ) является практически труднопроверяемым в своей исходной форме, но, используя интервальную арифметику, мы можем дать простое достаточное условие выполнения (NZ):

для каждого  $i = 1, 2, \dots, m$   
 нуль не является концом  $\mathbf{a}_{i\nu}$   
 или  $0 \notin \left( \mathbf{b}_i - \sum_{j=1, j \neq \nu}^n \mathbf{a}_{ij} \mathbf{V}_j \right).$

## 9.4в Трудоемкость методов дробления решений

В этом параграфе мы обсуждаем результаты численных экспериментов с методами дробления решений. Модельной тестовой задачей нам служила интервальная линейная система уравнений

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} [n-1, N]x_1 + [\alpha-1, 1-\beta]x_2 + \dots + [\alpha-1, 1-\beta]x_n & = & [1-n, n-1], \\ [\alpha-1, 1-\beta]x_1 + [n-1, N]x_2 + \dots + [\alpha-1, 1-\beta]x_n & = & [1-n, n-1], \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ [\alpha-1, 1-\beta]x_1 + [\alpha-1, 1-\beta]x_2 + \dots + [n-1, N]x_n & = & [1-n, n-1], \end{array} \right. \quad (9.22)$$

где  $n$  обозначает размерность ( $n \geq 2$ ),  $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ , а  $N$  — вещественное число, не меньшее  $(n-1)$ . Она была предложена в работе автора [57], и её интересной особенностью является тот факт, что множество решений никак не зависит от параметра  $N$ .

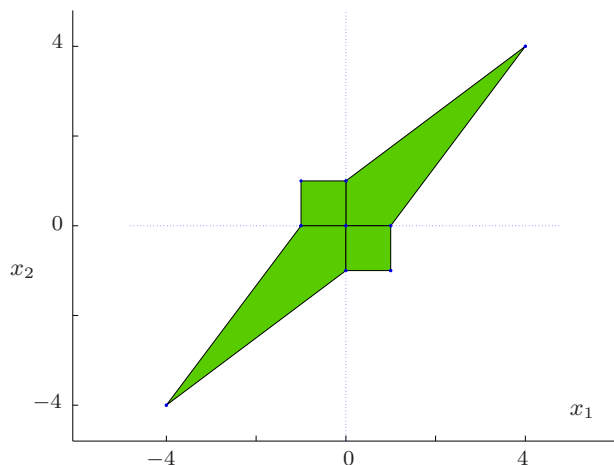


Рис. 9.3. Объединённое множество решений системы (9.23).

Для  $n = 2$  и  $\alpha = \frac{1}{4}$ ,  $\beta = \frac{1}{2}$ , объединённое множество решений этой системы показано на Рис. 9.1, для  $n = 2$ ,  $\alpha = \frac{1}{4}$ ,  $\beta = 1$ , т. е. для системы

$$\begin{pmatrix} 1 & [-\frac{3}{4}, 0] \\ [-\frac{3}{4}, 0] & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 1] \end{pmatrix}, \quad (9.23)$$

объединённое множество решений показано на Рис. 9.3, а Рис. 9.4 изображает его<sup>1</sup> для  $n = 3$ ,  $\alpha = 0.23$  и  $\beta = 0.35$ , т. е. для системы

$$\begin{pmatrix} [2, 3] & [-0.77, 0.65] & [-0.77, 0.65] \\ [-0.77, 0.65] & [2, 3] & [-0.77, 0.65] \\ [-0.77, 0.65] & [-0.77, 0.65] & [2, 3] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [-2, 2] \\ [-2, 2] \end{pmatrix}. \quad (9.24)$$

Варьируя значения  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $n$  и  $N$ , из (9.22) нетрудно получить широкий набор интервальных линейных систем для тестирования алгоритмов решения «внешней задачи». Когда  $\beta$  уменьшается, приближаясь к нулю, матрица системы (9.22) становится все более близкой к особенной, а множество решений неограниченно увеличивается в размерах. Изменяя отношение  $\alpha$  и  $\beta$ , мы можем модифицировать форму множества решений и т. п.

Структуру множества решений  $\tilde{\Xi}$  для (9.22) легко выявить из соображений симметрии. Начнем с того, что рассматриваемая интервальная линейная система инвариантна относительно изменения знаков всех компонент решения на противоположный, так как вектор правой части уравновешен. Следовательно, множество решений

<sup>1</sup>Эти рисунки были построены с помощью пакетов `IntLinIncr2` и `IntLinIncr3`, созданных И.А. Шарой для визуализации множеств решений интервальных линейных систем отношений.

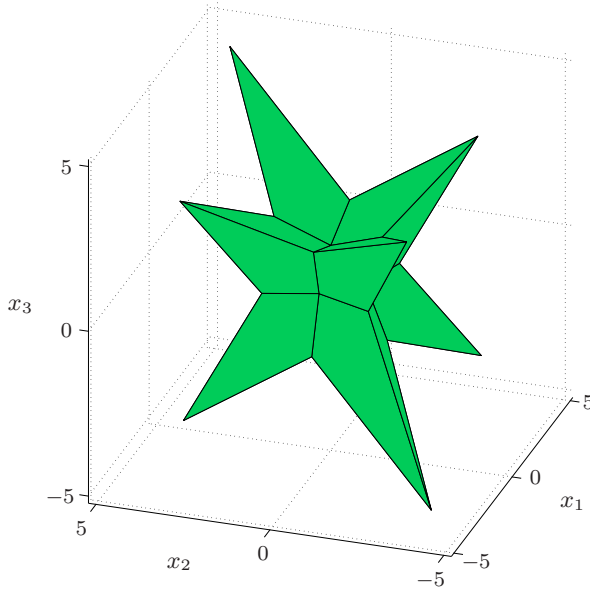


Рис. 9.4. Объединённое множество решений для системы (9.24).

$\tilde{\Xi}$  является центрально симметричным относительно начала координат, и, в частности,

$$\min\{x_i \mid x \in \tilde{\Xi}\} = -\max\{x_i \mid x \in \tilde{\Xi}\}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (9.25)$$

Далее, для любых  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  после замены  $x_i$  на  $x_j$  и наоборот интервальная система (9.22) также остается неизменной. Из этого можно заключить, что множество  $\tilde{\Xi}$  симметрично относительно биссектрисы положительного и отрицательного ортантов пространства  $\mathbb{R}^n$ , так что

$$\min\{x_i \mid x \in \tilde{\Xi}\} = \min\{x_j \mid x \in \tilde{\Xi}\},$$

$$\max\{x_i \mid x \in \tilde{\Xi}\} = \max\{x_j \mid x \in \tilde{\Xi}\}$$

для любых  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Сопоставляя эти соотношения с (9.25), можно, наконец, прийти к выводу, что интервальная оболочка множества решений  $\tilde{\Xi}$ , т. е. оптимальное интервальное решение задачи внешнего оценивания объединённого множества решений системы (9.22), является гиперкубом с центром в начале координат. Для определения его размеров положим  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$  в (9.22), в результате чего все уравнения системы сольются в одно

$$[n-1, N] \cdot x_1 + (n-1)[\alpha-1, 1-\beta] \cdot x_1 = [1-n, n-1],$$

или

$$\left[1, \frac{N}{n-1}\right] \cdot x_1 + [\alpha-1, 1-\beta] \cdot x_1 = [-1, 1].$$

При решении для этого уравнения «внешней задачи» переменная  $x_1$  должна рассматриваться как *вещественное число*, которое, в силу дистрибутивности, можно

вынести в качестве общего множителя. Мы приходим к

$$\left[ \alpha, 1 - \beta + \frac{N}{n-1} \right] \cdot x_1 = [-1, 1].$$

Объединённое множество решений этого одномерного интервального уравнения есть

$$x_1 = [-1/\alpha, 1/\alpha],$$

и потому оптимальными (точными) покомпонентными оценками объединённого множества решений системы (9.22) являются

$$\begin{aligned} \min\{x_i \mid x \in \tilde{\Xi}\} &= -1/\alpha, \\ \max\{x_i \mid x \in \tilde{\Xi}\} &= 1/\alpha, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

причём они не зависят от конкретного значения  $N$ .

Результаты вычислительных экспериментов с простейшими методами дробления решений из §9.4, применёнными к модельной ИСЛАУ (9.22) с увеличивающейся размерностью для различных  $\alpha$  и  $\beta$  показывают, что его трудозатраты растут экспоненциально с размерностью задачи. Этот тезис может быть также обоснован посредством рациональных рассуждений.

Сложность выполнения методов дробления решений в применении к каждой конкретной ИСЛАУ зависит, конечно же, от структуры её множества решений, но худший случай обеспечивается как раз таки тестовой системой (9.22) при  $\alpha = \beta$ . Действительно, смоделируем процесс исполнения алгоритма Табл. 9.2 как процедуру глобальной оптимизации функции  $\Omega(r)$  из представления (9.12). На начальном этапе исполнения алгоритма ведущие брусы концентрируются вокруг локальных минимумов целевой функции  $\Omega(r)$  на её области определения  $(\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{\nu-1}, \mathbf{V}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{V}_n)$ . Далее, по мере того, как достигается достаточное уточнение этих локальных минимумов (т. е. вместе с измельчением ведущих брусков), алгоритм постепенно отсеивает те из них, которые не являются глобальными минимумами. Более точно, всякий неглобальный локальный минимум имеет такую окрестность, что в неё, начиная с некоторого шага алгоритма, ведущие брусы уже не попадают. Раньше или позже, но все ведущие брусы будут сконцентрированы лишь вокруг глобальных минимумов (их может быть несколько), после чего алгоритм выполняет окончательное уточнение результата, т. е. значения этих глобальных минимумов. Естественно, в приведённой выше схеме некоторые этапы могут отсутствовать для тех или иных конкретных ИСЛАУ.

Если  $0 < \alpha = \beta < 1$ , то множество решений системы (9.22) является совершенно симметричным, а его пересечения с органами пространства  $\mathbb{R}^n$  конгруэнтны друг другу. Соответственно, в каждом из пересечений вектора области определения  $(\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{\nu-1}, \mathbf{V}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{V}_n)$  с органами  $\mathbb{R}^{n-1}$  имеется лишь один локальный минимум целевой функции  $\Omega(r)$  из представления (9.12) (так что всего их  $2^{n-1}$  штук), причём величины всех этих локальных минимумов одинаковы и равны  $-1/\alpha$ . Выполнение алгоритма Табл. 9.2 в применении системе (9.22) с  $\alpha = \beta$  происходит в соответствии с описанным выше стандартным сценарием: после некоторого количества шагов список  $\mathcal{L}$  разбивается на непересекающиеся подмножества  $\mathcal{L}', \mathcal{L}'', \dots$  записей,



принадлежащие каждому из которых записи сгущаются в окрестности некоторого локального минимума целевой функции  $\Omega(r)$ . Но теперь, поскольку все локальные минимумы равны друг другу, их уточнение, сколь бы тщательным оно ни было, не может выделить из них ни наименьших (т. е. наилучших), ни бесперспективных, а каждое из подмножеств  $\mathcal{L}'$ ,  $\mathcal{L}''$ , ... никогда не станет пустым.

Но, как мы уже отмечали, у целевой функции  $\Omega(r)$ , соответствующей ИСЛАУ (9.22) с  $\alpha = \beta$ , количество локальных минимумов растёт экспоненциально с размерностью  $n$ , и каждый из них требует от алгоритма отдельного уточнения, на которое затрачивается как минимум линейное по  $n$  время и память. Следовательно, сложность выполнения методов дробления решений, которая необходима для достижения заданной относительной или абсолютной погрешности, по крайней мере пропорциональна  $2^n$  в худшем случае. Этот же вывод справедлив и для гибридных методов дробления решений, вводимых ниже в §9.5.

## 9.5 Модификации методов дробления решений

Несмотря на доказанную выше сходимости простейшего метода дробления решений, он не вполне пригоден для решения серьёзных практических задач из-за своей невысокой эффективности. Но исходный алгоритм может быть значительно улучшен несколькими возможными способами, ряд из которых мы перечисляли в §3.6.

В этом параграфе мы обсудим возможности модификации методов дробления решений для ИСЛАУ с помощью каждого из приёмов, перечисленных на стр. 183, за исключением самого первого. Дело в том, что разрывность целевой функции  $\Omega(r)$  чрезвычайно осложняет обнаружение её монотонности по тем или иным переменным на брусах  $\mathbf{P} \subseteq (\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{\nu-1}, \mathbf{V}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{V}_n)$ . Применяемый обычно для этого стандартный способ — исследование знака области значений на  $\mathbf{P}$  производных  $\partial\Omega(r)/\partial r_k$ ,  $k = 1, \dots, \nu-1, \nu+1, \dots, n$ , — в общем случае теперь уже не проходит. Так же непросто определить, является ли  $\Omega(r)$  непрерывной на данном брусе  $\mathbf{P}$ . В связи с этим мы будем развивать эту модификацию лишь для ИСЛАУ с знакопостоянными коэффициентами на основе техники из Главы 11.

### 9.5а Оценивание по знакоопределённым брусам

Наиболее радикальным усовершенствованием методов дробления решений в применении к интервальным линейным системам является «встраивание» в них эффективных локальных оптимизационных процедур, которые эксплуатируют факт локальной полиэдральности целевой функции  $\Omega(r)$ .

Действительно, пересечение множества решений ИСЛАУ с каждым органтом в  $\mathbb{R}^n$  (а в некоторых частных случаях даже и с несколькими объединениями органтов) — выпуклое полиэдральное множество. Пусть  $(n-1)$ -мерный брусок  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{P} \subseteq (\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{\nu-1}, \mathbf{V}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{V}_n)$ , имеет своими компонентами интервалы, не содержащие внутри себя нуль. Мы будем называть такие бруски *знакоопределёнными*. Тогда множество прямых  $\{l(r) \mid r \in \mathbf{P}\}$  пересекает всего лишь два органта  $\mathcal{O}'$  и  $\mathcal{O}''$  в  $\mathbb{R}^n$ , образованные точками, у которых знаки 1-ой, ...,  $(\nu-1)$ -ой,  $(\nu+1)$ -ой, ...,  $n$ -ой

компонент те же, что и у  $\mathbf{P}$ , а  $\nu$ -ая компонента, соответственно, неположительна или неотрицательна. Следовательно,

$$\begin{aligned} \min\{ \Omega(r) \mid r \in \mathbf{P} \} &= \min\{ x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \ \& \ (x_1, \dots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \dots, x_n) \in \mathbf{P} \} \\ &= \min\{ \ell', \ell'' \}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \ell' &= \min\{ x_\nu \mid x \in \Xi \cap \mathcal{O}' \ \& \ (x_1, \dots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \dots, x_n) \in \mathbf{P} \}, \\ \ell'' &= \min\{ x_\nu \mid x \in \Xi \cap \mathcal{O}'' \ \& \ (x_1, \dots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \dots, x_n) \in \mathbf{P} \}. \end{aligned}$$

Но  $\Xi \cap \mathcal{O}'$  и  $\Xi \cap \mathcal{O}''$  — выпуклые полиэдральные множества, которые определяются несложно выписываемыми системами линейных неравенств, и потому значения  $\ell'$  и  $\ell''$  могут быть эффективно найдены путём решения задач линейного программирования. Укажем их каноническую форму аналогично тому, как это было сделано в §9.1.

Пусть  $S' = \text{diag} \{ s'_1, s'_2, \dots, s'_n \}$  — диагональная матрица знаков внутренних точек ортанта  $\mathcal{O}'$ , т. е.  $x = S'|x|$  для  $x \in \mathcal{O}'$ , а вектор  $p' \in \mathbb{R}^{2n}$  определяется как

$$p' = \left( -\underline{\mathbf{P}}_1, \dots, -\underline{\mathbf{P}}_{\nu-1}, +\infty, -\underline{\mathbf{P}}_{\nu+1}, \dots, -\underline{\mathbf{P}}_n, \right. \\ \left. \overline{\mathbf{P}}_1, \dots, \overline{\mathbf{P}}_{\nu-1}, +\infty, \overline{\mathbf{P}}_{\nu+1}, \dots, \overline{\mathbf{P}}_n \right)^\top.$$

Тогда оценка  $\ell'$  является решением задачи линейного программирования

$$c^\top y \rightarrow \min, \quad c = (0, \dots, 0, s'_\nu, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n, \quad (9.26)$$

с ограничениями

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \begin{array}{c} \text{mid } \mathbf{A} \cdot S' - \text{rad } \mathbf{A} \\ -\text{mid } \mathbf{A} \cdot S' - \text{rad } \mathbf{A} \end{array} \right) y \leq \left( \begin{array}{c} \overline{\mathbf{b}} \\ -\underline{\mathbf{b}} \end{array} \right), \\ \left( \begin{array}{c} -S' \\ S' \end{array} \right) y \leq p', \\ y \geq 0. \end{array} \right. \quad (9.27)$$

Аналогичным образом выписывается и задача линейного программирования, определяющая оценку  $\ell''$ .

Отметим, что при  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \mathcal{O}' \neq \emptyset$  справедливо неравенство  $\ell' < \ell''$ , а потому практическое нахождение  $\min\{ \Omega(r) \mid r \in \mathbf{P} \}$  для знакоопределённых брусков  $\mathbf{P}$  целесообразно начинать с вычисления оценки  $\ell'$ . Если определяемое неравенствами (9.27) множество пусто, то

$$\min\{ \Omega(r) \mid r \in \mathbf{P} \} = \ell'$$

и можно даже не приступать к решению задачи линейного программирования для нахождения  $\ell''$ . В противном случае, когда система ограничений (9.27) несовместна,

$$\min\{ \Omega(r) \mid r \in \mathbf{P} \} = \ell''.$$

### 9.56 Использование локальных оценивающих процедур

В §9.4 при построении миноранты по области для целевой функции  $\Omega(r)$  мы применили процедуру её естественного интервального расширения. Другой, более совершенный способ приближённого оценивания величины

$$\min\{\Omega(r) \mid r \in \mathbf{P}\} \quad (9.14)$$

снизу может быть основан на использовании локальных оценивающих процедур (см. §7.8).

Если мы располагаем какой-либо локальной оценивающей процедурой  $LocEst$ , то, очевидно, требуемой оценкой снизу для  $\min\{\Omega(r) \mid r \in \mathbf{P}\}$ ,  $\mathbf{P} \in \mathbb{IR}^{n-1}$ , может быть взята

$$LocEst(\mathbf{A}, \mathbf{b}, (\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_{\nu-1}, \mathbf{V}_\nu, \mathbf{P}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{P}_n)),$$

а если в методе дробления решений брус  $\mathbf{P}$  является потомком бруса  $\mathbf{Q} \supseteq \mathbf{P}$ , то и более точная величина

$$LocEst(\mathbf{A}, \mathbf{b}, (\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_{\nu-1}, [\Omega(\mathbf{Q}), \bar{\mathbf{V}}_\nu], \mathbf{P}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{P}_n)). \quad (9.28)$$

Но не все локальные оценивающие процедуры одинаково пригодны для использования посредством этой конструкции в методах дробления решений. Анализ доказательства сходимости простейшего метода дробления решений показывает, что для оптимальности даваемых им результатов необходимо и достаточно выполнение следующего условия:

$$\boxed{\begin{aligned} \min\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \mathbf{z}\} - (\underline{LocEst}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z}))_\nu &\rightarrow 0 \\ \text{при } \text{wid}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{\nu-1}, \mathbf{z}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{z}_n) &\rightarrow 0 \end{aligned}}. \quad (9.29)$$

Это довольно сильное требование, тем более, что, в конечном счёте, нам важно не асимптотическое поведение оценки, а, по-возможности, наиболее точное оценивание по брусам конечной ширины. Кроме того, теперь мы располагаем для оценивания  $\min\{\Omega(r) \mid r \in \mathbf{P}\}$  по знакоопределённым брусам  $\mathbf{P}$  мощной методикой §9.5а. Рекомендуем поэтому ограничиться для решения вопроса о пригодности тех или иных локальных оценивающих процедур в методах дробления решений более слабыми условиями:

$$\boxed{\begin{aligned} (\min\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \mathbf{z}\} - (\underline{LocEst}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z}))_\nu) \\ \text{уменьшается при уменьшении бруса} \\ (\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{\nu-1}, \mathbf{z}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{z}_n) \text{ по включению} \end{aligned}},$$

или даже совсем грубым

$$\boxed{(\underline{LocEst}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z}))_\nu \text{ возрастает при уменьшении бруса } (\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{\nu-1}, \mathbf{z}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{z}_n) \text{ по включению}}. \quad (9.30)$$

Как и прежде, вопрос о дальнейшем использовании полученной локальной оценивающей процедуры в методах дробления решений, т. е. выполнение условий (9.29)–(9.30), должен исследоваться отдельно в каждом конкретном случае.

Суммируя итоги параграфов §§9.4 и 9.5а–9.5б, условимся обозначать через  $\Omega(\mathbf{P})$  оценку для величины  $\min\{\Omega(r) \mid r \in \mathbf{P}\}$ , получаемую

способом, изложенным в §9.5а, т. е. посредством решения задач линейного программирования вида (9.26), если брус  $\mathbf{P}$  знакоопределённый;

с помощью техники §§9.4 или 9.5б, — либо как естественное интервальное расширение  $\Omega(r)$  на  $\mathbf{P}$ , либо в виде (9.28) с привлечением какой-нибудь из локальных оценивающих процедур, — если брус  $\mathbf{P}$  не знакоопределённый.

## 9.5в Новая стратегия дробления

Изменение способа вычисления оценок для  $\min\{\Omega(r) \mid r \in \mathbf{P}\}$  в методах дробления решений естественно приводит к необходимости модификации и самого способа дробления ведущих брусов. Рассмотрим простой пример. Если при существующей стратегии дробления при решении «внешней задачи» для двумерной ИСЛАУ ведущим брусом  $\mathbf{Q}$  сделался отрезок  $[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ , то одним из его потомков от дальнейшего дробления «ровно пополам» всегда будут нульсодержащие интервалы

$$[-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}], [-\frac{1}{12}, \frac{1}{6}], \dots,$$

общими формулами для которых являются

$$[-\frac{1}{3 \cdot 2^{k+1}}, \frac{1}{3 \cdot 2^k}] \quad \text{и} \quad [-\frac{1}{3 \cdot 2^k}, \frac{1}{3 \cdot 2^{k+1}}], \quad k = 1, 2, \dots$$

Точная оценка величины (9.14) по таким брусам может быть получена лишь в результате бесконечного уточняющего итерационного процесса, при котором придется оценивать столько же измельчающихся знакоопределённых брусов. С учётом построений §9.5а неразумность подобных действий очевидна: гораздо проще и экономнее, разбив  $\mathbf{Q}$  на два неравных, но знакоопределённых интервала  $[\mathbf{Q}, 0]$  и  $[0, \mathbf{Q}]$ , решить в каждом из них задачу линейного программирования вида (9.26), и взять затем  $\min\{x \mid x \in \mathbf{X}\}$  как минимум получившихся результатов.

Более того, порождение знакоопределённых брусов может быть сделано одной из конечных целей процедуры дробления и в многомерной ситуации (наряду с измельчением ведущих брусов). При этом, правда, следует учесть, что для многомерного вектора  $\mathbf{Q}$  рассечение какой-либо одной нульсодержащей компоненты  $Q_i$  на  $[\underline{Q}_i, 0]$  и  $[0, \overline{Q}_i]$  в общем случае ещё не делает знакоопределёнными брусы-потомки

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}' &= (\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_{i-1}, [\underline{Q}_i, 0], \mathbf{Q}_{i+1}, \dots, \mathbf{Q}_n) \\ \text{и } \mathbf{Q}'' &= (\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_{i-1}, [0, \overline{Q}_i], \mathbf{Q}_{i+1}, \dots, \mathbf{Q}_n), \end{aligned}$$

и потому мы вынуждены будем прибегнуть для оценивания величин

$$\min\{\Omega(r) \mid r \in \mathbf{Q}'\} \quad \text{и} \quad \min\{\Omega(r) \mid r \in \mathbf{Q}''\}$$

к приближенным методам из §§9.4 и 9.5б. Но слишком большое различие размеров потомков  $Q'$  и  $Q''$  нежелательно потому, что оно ставит их в «неравное» положение перед процедурами приближённого оценивания, точность которых, как правило, тем выше, чем меньше ширина брусов. Следовательно, стратегия дробления должна обеспечивать компромисс между двумя противоположными требованиями —

- нульсодержащие интервалы должны быть в конце концов рассечены на знакоопределённые потомки,
- при каждом дроблении потомки не должны слишком сильно различаться своими размерами.

Мы формализуем эти эвристические рекомендации в следующем правиле дробления:

<p>Пусть <math>Q_i</math> — самая длинная компонента ведущего бруса <math>Q = (Q_1, \dots, Q_n)</math>.</p> <p>Если <math>-2 &lt; \overline{Q}_i / \underline{Q}_i &lt; -1/2</math>, то</p> <p style="padding-left: 40px;">рассекаем <math>Q</math> на потомки <math>Q'</math> и <math>Q''</math>, такие что</p> $Q'_k = Q''_k = Q_k \text{ для } k \neq i$ $\text{и } Q'_i = [\underline{Q}_i, 0], Q''_i = [0, \overline{Q}_i],$ <p style="padding-left: 40px;">иначе</p> <p style="padding-left: 40px;">рассекаем <math>Q</math> на потомки <math>Q'</math> и <math>Q''</math>, такие что</p> $Q'_k = Q''_k = Q_k \text{ для } k \neq i$ $\text{и } Q'_i = [Q_i, \text{mid } Q_i], Q''_i = [\text{mid } Q_i, Q_i].$	(9.31)
---	--------

При небольшом общем количестве компонент  $V$ , содержащих внутри себя нуль, лишь их можно и дробить в ведущих брусах, ограничив, таким образом, цели дробления только порождением знакоопределённых потомков:

<p>Пусть <math>Q_i</math> — самая длинная компонента ведущего бруса <math>Q = (Q_1, \dots, Q_n)</math>, которая содержит нуль в своей внутренности.</p> <p>Если <math>-2 &lt; \overline{Q}_i / \underline{Q}_i &lt; -1/2</math>, то</p> <p style="padding-left: 40px;">рассекаем <math>Q</math> на потомки <math>Q'</math> и <math>Q''</math>, такие что</p> $Q'_k = Q''_k = Q_k \text{ для } k \neq i$ $\text{и } Q'_i = [\underline{Q}_i, 0], Q''_i = [0, \overline{Q}_i],$ <p style="padding-left: 40px;">иначе</p> <p style="padding-left: 40px;">рассекаем <math>Q</math> на потомки <math>Q'</math> и <math>Q''</math>, такие что</p> $Q'_k = Q''_k = Q_k \text{ для } k \neq i$ $\text{и } Q'_i = [Q_i, \text{mid } Q_i], Q''_i = [\text{mid } Q_i, Q_i].$	(9.32)
---	--------

Фактически, следствием правила (9.32) является перебор всех знакоопределённых потомков  $V$ .

Принятие стратегий дробления (9.31) и (9.32) в сочетании с новым уточнённым способом вычисления оценок для  $\min\{\Omega(r) \mid r \in P\}$ , использующим алгоритмы линейного программирования, коренным образом меняет сам характер исходного метода дробления решений из §9.4. Он становится конечным (т. е. даёт точное решение за конечное число шагов), и теперь уже дробление брусов играет в нём не столь важную роль. С другой стороны, при этом возрастает значимость выбора качественного (достаточно узкого) начального приближения  $V \supseteq \Xi(A, b)$ .

### 9.5г Итоговая схема

Наконец, дополняя метод дробления решений наиболее очевидной модификацией из списка стр. 183, которая предусматривает «отслеживание средних значений» целевой функции по брусам, мы приходим к наиболее совершенной версии алгоритма для вычисления  $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi(A, b)\}$ . Его основа — адаптивное дробление множества решений ИСЛАУ — несмотря на значительные модификации осталась неизменной. Он также оперирует со списком  $\mathcal{L}$ , но состоящим из записей двух видов —

$$(P, p) \quad \text{и} \quad (p),$$

где  $p = \Omega(P)$ ,  $P \subseteq (V_1, \dots, V_{\nu-1}, V_{\nu+1}, \dots, V_n)$ . Записи второго типа, состоящие из одного числа, мы будем называть *короткими записями*. Они предназначены для хранения информации о тех брусах  $P$ , для которых

$$\Omega(P) = \min\{\Omega(r) \mid r \in P\},$$

т. е. оценка  $\Omega(P)$  — точная. Дробить далее такие брусy, очевидно, уже не имеет смысла, а потому мы можем не хранить и сами координаты  $P$ . Список  $\mathcal{L}$  поддерживается упорядоченным по возрастанию значений оценки  $\Omega(P)$ , и, кроме того, с алгоритмом связывается определённый в (3.41) параметр  $\omega$ . Перед началом работы алгоритма  $\omega = \bar{V}_\nu$ , список  $\mathcal{L}$  состоит из единственной пары

$$((V_1, \dots, V_{\nu-1}, V_{\nu+1}, \dots, V_n), \underline{V}_\nu),$$

а псевдокод нового алгоритма имеет вид, представленный в Табл. 9.3.

Как и прежде, результатом работы Алгоритма 9.3 является (конечная) последовательность ведущих оценок  $\{\Omega(Q)\}$ , приближающая  $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi(A, b)\}$  снизу. При этом  $\epsilon$  — заданная абсолютная точность. В том случае, когда требуется обеспечить относительную точность  $\epsilon$ , условием остановки внешнего цикла DO WHILE в алгоритме следует взять

$$(\omega - \Omega(Q))/\Omega(Q) \leq \epsilon \quad \text{или} \quad (\omega - \Omega(Q))/\text{wid } V_\nu \leq \epsilon.$$

Методы, аналогичные представленному в Табл. 9.3, которые используют

- 1) нестандартную схему дробления ведущих брусy из §9.5в и
- 2) разнотипные специализированные процедуры для оценки целевой функции (основанные на аккуратном учёте её свойств в соответствующих брусах),

Таблица 9.3. Гибридный метод дробления решений

```

присваиваем  $Q \leftarrow (V_1, \dots, V_{\nu-1}, V_{\nu+1}, \dots, V_n)$ ,  $q \leftarrow \underline{V}_\nu$ ,  $\omega \leftarrow \overline{V}_\nu$ ;
инициализируем список  $\mathcal{L} \leftarrow \{(Q, q)\}$ ;
DO WHILE ( ( ведущая запись не короткая ) AND (  $\omega - q > \epsilon$  ) )
    пересекаем ведущий брус  $Q$  на потомки  $Q'$  и  $Q''$  в соответствии
    с правилом (9.31) (или (9.32));
    удаляем бывшую ведущую пару  $(Q, q)$  из списка  $\mathcal{L}$ ;
    вычисляем  $q' \leftarrow \Omega(Q')$  и  $q'' \leftarrow \Omega(Q'')$ ;
    IF (  $q' < \omega$  ) THEN
        IF ( оценка  $\Omega(Q')$  точна ) THEN
            заносим в список  $\mathcal{L}$  в нужном порядке (по возрастанию
            второго поля) короткую запись  $(q')$ ;
             $\eta' \leftarrow q'$ ;
        ELSE
            заносим в список  $\mathcal{L}$  в нужном порядке запись  $(Q', q')$ ;
             $\eta' \leftarrow \Omega(\text{mid } Q')$ ;
        END IF
    ELSE
         $\eta' \leftarrow +\infty$ ;
    END IF
    IF (  $q'' < \omega$  ) THEN
        IF ( оценка  $\Omega(Q'')$  точна ) THEN
            заносим в  $\mathcal{L}$  в нужном порядке короткую запись  $(q'')$ ;
             $\eta'' \leftarrow q''$ ;
        ELSE
            заносим в список  $\mathcal{L}$  в нужном порядке запись  $(Q'', q'')$ ;
             $\eta'' \leftarrow \Omega(\text{mid } Q'')$ ;
        END IF
    ELSE
         $\eta'' \leftarrow +\infty$ ;
    END IF
    полагаем  $\eta \leftarrow \min\{\eta', \eta''\}$ ;
    IF (  $\omega > \eta$  ) THEN
        полагаем  $\omega \leftarrow \eta$ ;
        удаляем из  $\mathcal{L}$  все такие записи  $(P, p)$  или  $(p)$ , что  $p > \omega$ ;
    END IF
    обозначаем первую запись списка  $\mathcal{L}$  через  $(Q, q)$ ;
END DO

```

мы будем называть *гибридными методами дробления решений*.

Теперь несколько практических советов по реализации вышеописанного алгорит-

ма.

После нахождения значений  $\Omega(Q')$  и  $\Omega(Q'')$  целесообразно первой заносить в список  $\mathcal{L}$  запись с меньшей оценкой (пусть, для определённости, это будет  $\Omega(Q')$ ). Тогда для занесения в  $\mathcal{L}$  второго потомка, соответствующего  $Q''$ , просмотр рабочего списка можно начинать не с самого начала, а с записи, непосредственно следующей за  $(Q'', q'')$  (или  $(q'')$ ). Реализуя это соображение практически, можно специально ввести в Алгоритм 9.3 операцию переобозначения, при необходимости,  $Q'$  на  $Q''$ , а  $Q''$  на  $Q'$ .

Аналогичным образом модифицируется и последняя инструкция цикла DO WHILE алгоритма. Если к началу её исполнения запись, соответствующая брусу  $Q''$ , была занесена нами в список  $\mathcal{L}$ , то это уже свидетельствует о неравенстве  $\Omega(Q'') < \omega$ . Опять таки, чтобы сэкономить машинное время, при  $\Omega(Q') < \Omega(Q'')$  просмотр  $\mathcal{L}$  для его последующей чистки можно начинать сразу со следующей за  $(Q'', q'')$  (или  $(q'')$ ) записи. Если же в этой ситуации  $Z'' \notin \mathcal{L}$ , то просмотр-чистку  $\mathcal{L}$  следует начинать с записи, стоящей за  $Z'$ .

Отметим также, что выбранная нами форма последней инструкции цикла DO WHILE с дорогостоящей чисткой рабочего списка нацелена, прежде всего, на экономии оперативной памяти ЭВМ. Если размер выделяемой алгоритму памяти не критичен, а более важно его быстрое действие, то чистку списка  $\mathcal{L}$  от бесперспективных записей следует проводить не после каждого очередного уменьшения параметра  $\omega$ , а, к примеру, лишь через некоторое количество последовательных уменьшений  $\omega$ .

Псевдокод из Табл. 9.3 представляет собой, скорее, общую схему целого класса однотипных алгоритмов для решения «внешней задачи» для ИСЛАУ, поскольку содержит несколько подлежащих конкретизации «свободных параметров» —

способ получения оценки  $\Omega(P)$ ,

стратегию дробления ведущих брусов,

способ чистки рабочего списка  $\mathcal{L}$

и некоторые другие. В алгоритмах Таблиц 9.2 и 9.3 мы упорядочивали рабочий список  $\mathcal{L}$  по возрастанию оценки  $\Omega(P)$ , так что первая запись рабочего списка являлась одновременно и ведущей. Но в отношении конкретной организации рабочего списка справедливо всё сказанное ранее в §3.6: его может быть удобнее сделать кучей, стекком и т. п. в зависимости от конкретных особенностей решаемой задачи, архитектуры ЭВМ и языка реализации.

В §9.4в мы показали, что трудоёмкость выполнения методов дробления решений в худшем случае экспоненциальная, построив в явном виде пример ИСЛАУ, на котором она достигается. Если так, то в чём преимущество методов дробления решений перед «переборными» методами из §§9.1–9.3? Во-первых, несомненно, что методы дробления решений являются адаптивными. Имея более гибкую вычислительную схему, позволяющую им хорошо «приспосабливаться» к каждой конкретной задаче, в среднем они работают гораздо быстрее, и этот выигрыш тем значительней, чем больше размерность задачи. Другое важное преимущество методов дробления решений и состоящее в том, что они являются *последовательно гарантирующими*, будет рассмотрено далее в §9.8.



### 9.6 Методы дробления параметров

В этом и следующем параграфах конструируется ещё один класс вычислительных алгоритмов, нацеленных на нахождение оптимальных решений «внешней задачи» для интервальных систем алгебраических уравнений. Мы называем их *методами дробления параметров* (или *PPS-методами*), и их основная идея является той же, что и для методов дробления решений — представить «внешнюю задачу» как оптимизационную и далее применить для её решения подходы, развитые для задач глобальной оптимизации в Главе 3 (см. §3.6). Но реализуем мы эту идею существенно по-другому, с помощью техники, которая в определённом смысле двойственна вычислительной схеме методов дробления решений, так как теперь в рассматриваемой оптимизационной задаче аргументы целевой функции являются интервальными параметрами задачи.

#### 9.6а Общая схема методов

Пусть дана интервальная система уравнений

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l) = 0, \\ F_2(x_1, \dots, x_n, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l) = 0, \\ \vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ F_m(x_1, \dots, x_n, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l) = 0, \end{cases} \tag{9.33}$$

с интервальными параметрами  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l$ , которую мы будем также записывать в краткой форме

$$F(x, \mathbf{a}) = 0, \tag{9.34}$$

где  $F = (F_1(\mathbf{a}, x), \dots, F_m(\mathbf{a}, x))^T$ ,  $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l)^T$  и  $F_i : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, m$ , — некоторые отображения. В этом пункте мы не будем рассматривать множества кванторных решений и ограничимся только задачей оптимального внешнего оценивания объединённого множества решений интервальной системы (9.33)–(9.34), т. е. множества

$$\Xi(F, \mathbf{a}) = \{ x \in \mathbb{R} \mid (\exists \mathbf{a} \in \mathbf{a})(F(x, \mathbf{a}) = 0) \},$$

образованного всевозможными решениями точечных систем уравнений  $F(\mathbf{a}, x) = 0$ , когда параметры  $a_1, a_2, \dots, a_l$  независимо пробегает  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l$ . По этой же причине мы рассматриваем упрощённый вид системы уравнений (9.33)–(9.34), имеющий нулевую правую часть.

Итак, нас интересует следующая постановка:

Найти (по-возможности, точнее) внешнюю интервальную оценку объединённого множества решений  $\Xi(F, \mathbf{a})$  для интервальной системы уравнений  $F(x, \mathbf{a}) = 0$ .

Но, как и в случае с методами дробления решений, нам будет удобно находить отдельные покомпонентные оценки для множества решений, т. е. переформулировать

нашу задачу в виде

Для интервальной системы уравнений  $F(\mathbf{a}, x) = 0$  и  $\nu = 1, 2, \dots, n$  найти  $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi(F, \mathbf{a})\}$  и  $\max\{x_\nu \mid x \in \Xi(F, \mathbf{a})\}$ , либо

наболее точные их оценки снизу и сверху соответственно.

(9.35)

Далее, как и раньше, мы сосредоточимся на оценивании  $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi(F, \mathbf{a})\}$ , поскольку вычисление  $\max\{x_\nu \mid x \in \Xi\}$  можно стандартным приёмом свести к нахождению оценки минимума множества решений для модифицированной системы уравнений с функцией  $(-F)$  в левой части.

Рассматриваемая нами задача эквивалентна задаче глобальной минимизации величины

$$\min\{x_\nu \mid F(\mathbf{a}, x) = 0\} \quad (9.36)$$

как функции параметров  $a \in \mathbf{a}$ . Как могут быть вычислены значения (9.36) или хотя бы оценки для них снизу? Как мы видели в Главе 8 (§8.5), это может быть сделано с помощью интервальных методов для решения нелинейных систем уравнений, к примеру, с помощью интервального метода Ньютона, метода Кравчика или Хансена-Сенгупты, которые позволяют находить внешнюю интервальную оценку множества всех решений системы уравнений, лежащих в заданном бруске. Далее с помощью этих же методов мы сможем находить интервальные расширения функции (9.36) по аргументам  $a \in \mathbf{a}$ .

Зафиксируем какой-нибудь метод  $Encl$  внешнего оценивания объединённого множества решений для интервальной системы уравнений  $F(\mathbf{a}, x) = 0$ , мы будем называть этот метод *базовым*. Пусть  $Encl(F, \mathbf{a})$  — получаемый с его помощью интервальный вектор внешней оценки для множества решений системы  $F(\mathbf{a}, x) = 0$ , т. е.  $Encl(F, \mathbf{a}) \in \mathbb{IR}^n$  и

$$Encl(F, \mathbf{a}) \supseteq \Xi(F, \mathbf{a}).$$

Тогда величины

$$\left(\underline{Encl}(F, \mathbf{a})\right)_\nu$$

являются нижними концами интервальных расширений целевой функции (9.36). В этих условиях для решения задачи глобальной минимизации (9.36) применим соответствующим образом адаптированный алгоритм `GlobalOpt`. Псевдокод получающегося нового алгоритма приведён в Табл. 9.4.

При достаточно общих условиях на систему  $F(\mathbf{a}, x) = 0$  и метод  $Encl$  порождаемая алгоритмом последовательность ведущих оценок сходится, как можно показать, к оптимальным (точным) по координатным оценкам  $\Xi$ .

Этот алгоритм и другие, ему подобные, предназначенные для решения «внешней задачи» для интервальных систем алгебраических уравнений, и имеющие в своей основе адаптивное дробление множества параметров, мы будем называть *методами дробления параметров* или PPS-методами (от английской фразы «partitioning parameter set»).

Таблица 9.4. Простейший метод дробления параметров  
для внешнего оценивания множеств решений

<p><b>Вход</b></p> <p>Интервальная система уравнений <math>F(x, \mathbf{a}) = 0</math>.          Номер <math>\nu</math> оцениваемой компоненты множества решений.          Метод <i>Encl</i> для внешнего оценивания множеств решений.          Заданная точность <math>\epsilon &gt; 0</math>.</p>
<p><b>Выход</b></p> <p>Оценка <math>M^*</math> с точностью <math>\epsilon</math> для <math>\min\{x_\nu \mid x \in \Xi(F, \mathbf{a})\}</math>.</p>
<p><b>Алгоритм</b></p> <p>инициализируем рабочий список <math>\mathcal{L} \leftarrow \{(\mathbf{a}, -\infty)\}</math>;          DO WHILE (<math>\text{wid}(Encl(F, \mathbf{a})) \geq \epsilon</math>)              в интервальном векторе параметров <math>\mathbf{a}</math> выбираем              компоненту <math>\mathbf{a}_k</math>, которая имеет наибольшую ширину;              дробим интервальный вектор <math>\mathbf{a}</math> на <math>\mathbf{a}'</math> и <math>\mathbf{a}''</math>, присваивая              <math>\mathbf{a}'_k \leftarrow [\underline{a}_k, \text{mid } \mathbf{a}_k]</math>, <math>\mathbf{a}''_k \leftarrow [\text{mid } \mathbf{a}_k, \bar{a}_k]</math>,              <math>\mathbf{a}'_i \leftarrow \mathbf{a}_i</math> и <math>\mathbf{a}''_i \leftarrow \mathbf{a}_i</math> для <math>i \neq k</math>;              порождаем системы-потомки <math>F(\mathbf{a}', x) = 0</math> и <math>F(\mathbf{a}'', x) = 0</math>;              вычисляем внешние оценки <math>Encl(F, \mathbf{a}')</math> и <math>Encl(F, \mathbf{a}'')</math>;              присваиваем <math>v' \leftarrow (Encl(F, \mathbf{a}'))_\nu</math> и <math>v'' \leftarrow (Encl(F, \mathbf{a}''))_\nu</math>;              удаляем бывшую ведущую запись <math>(\mathbf{a}, v)</math> из рабочего списка <math>\mathcal{L}</math>;              помещаем записи <math>(\mathbf{a}', v')</math> и <math>(\mathbf{a}'', v'')</math> в рабочий список <math>\mathcal{L}</math>              в порядке возрастания второго поля;              обозначаем первую запись рабочего списка <math>\mathcal{L}</math> через <math>(\mathbf{a}, v)</math>;          END DO  <math>M^* \leftarrow v</math>;</p>

## 9.66 Решение интервальных линейных систем

Пусть  $\mathbf{A}$  — интервальная  $n \times n$ -матрица, содержащая лишь неособенные вещественные матрицы,  $\mathbf{b}$  — интервальный  $n$ -вектор. Опираясь на идею, сформулированную в §9.6а, мы построим в этом параграфе эффективный численный метод для нахождения оптимальных внешних покоординатных оценок множеств решений интервальных линейных систем, т. е. для вычисления  $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$

и  $\max\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, n$ . Как и ранее в этой главе, далее рассматривается вычисление только  $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$ , поскольку в силу (9.8) оценки максимума легко получаются из оценок минимума для системы с изменённым знаком правой части.

Основа алгоритма предыдущего параграфа — адаптивное дробление интервальных параметров системы уравнений. Для интервальных линейных систем  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  непосредственное применение этого принципа означало бы необходимость измельчения элементов матрицы  $\mathbf{A}$  и вектора правых частей  $\mathbf{b}$ . Оказывается, что, учтя специфику линейного случая, мы можем фактически до предела упростить этот процесс.

Обозначим посредством  $Encl$  какой-нибудь фиксированный метод внешнего оценивания множеств решений ИСЛАУ (мы будем называть его *базовым*). Пусть также  $Encl(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$  — получаемый с его помощью интервальный вектор внешней оценки для множества решений  $\Xi(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$  системы  $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$ , т. е.  $Encl(\mathbf{Q}, \mathbf{r}) \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n$  и

$$Encl(\mathbf{Q}, \mathbf{r}) \supseteq \Xi(\mathbf{Q}, \mathbf{r}).$$

Наконец, зафиксируем номер  $\nu \in \{1, 2, \dots, n\}$  оцениваемой компоненты множества решений и обозначим

$$\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}) := \underline{Encl(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}_\nu \quad (9.37)$$

— нижний конец  $\nu$ -ой компоненты внешней интервальной оценки множества решений, получаемой методом  $Encl$ . Ясно, что величина  $\Upsilon(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  может служить предварительной оценкой снизу для искомого  $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$ .

Мы потребуем также от базового метода удовлетворения следующему «свойству монотонности»:

оценка  $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$  монотонна по включению относительно матрицы  $\mathbf{Q}$  и вектора  $\mathbf{r}$ , т. е. для всех  $\mathbf{Q}, \mathbf{Q}' \in \mathbb{I}\mathbb{R}^{n \times n}$  и  $\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n$  при  $\mathbf{Q}' \subseteq \mathbf{Q}$  и  $\mathbf{r}' \subseteq \mathbf{r}$  верно неравенство

$$\Upsilon(\mathbf{Q}', \mathbf{r}') \geq \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}).$$

(9.38)

Если базовый метод является естественным интервальным расширением какого-либо точечного метода (как, например, интервальный метод Гаусса), или, более общо, дерево Канторовича базового метода  $Encl$  своими узлами имеет только интервальные арифметические операции и операции теоретико-множественного пересечения, объединения и взятия интервальной оболочки, то свойство (9.38) очевидным образом выполняется в силу свойства монотонности по включению для всех перечисленных выше операций. Сказанное справедливо, в частности, для представленных в Главе 7 методов внешнего оценивания объединённого множества решений ИСЛАУ (интервальный метод Гаусса, интервальный метод Гаусса-Зейделя, метод Кравчика и др.), а также для многих других алгоритмов (интервальные методы прогонки [11], методы Д. Гея [29], разнообразные модификации метода простой итерации) — все они удовлетворяют условию (9.38).

Если в алгоритме базового метода встречаются операции, не являющиеся монотонными по включению, то свойство (9.38) может и нарушаться. Проверку того,

что данный конкретный базовый метод обладает «свойством монотонности» (9.38), естественно возложить на разработчиков вычислительного алгоритма.

В силу теоремы Бекка-Никеля (теорема 5.3.3)

$$\min\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})\} = (\tilde{A}^{-1}\tilde{\mathbf{b}})_\nu$$

для некоторых точечных матрицы  $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и вектора  $\tilde{\mathbf{b}} = (\tilde{b}_i) \in \mathbb{R}^n$ , составленных из концов элементов матрицы  $\mathbf{A}$  и вектора  $\mathbf{b}$ . При этом по самому определению оценки  $\Upsilon$  справедливо

$$\Upsilon(\tilde{A}, \tilde{\mathbf{b}}) \leq (\tilde{A}^{-1}\tilde{\mathbf{b}})_\nu.$$

Предположив, что в матрице  $\mathbf{A}$  некоторый элемент  $\mathbf{a}_{kl}$  имеет ненулевую ширину,  $\text{wid } \mathbf{a}_{kl} \neq 0$ , раздробим его на концы  $\underline{\mathbf{a}}_{kl}$  и  $\overline{\mathbf{a}}_{kl}$  и обозначим

$\mathbf{A}'$  и  $\mathbf{A}''$  — матрицы, полученные из  $\mathbf{A}$  заменой элемента  $\mathbf{a}_{kl}$  на  $\underline{\mathbf{a}}_{kl}$  и  $\overline{\mathbf{a}}_{kl}$ , соответственно,

$\tilde{A}'$  и  $\tilde{A}''$  — матрицы, полученные из  $\tilde{A}$  заменой элемента  $\tilde{a}_{kl}$  на  $\underline{\tilde{a}}_{kl}$  и  $\overline{\tilde{a}}_{kl}$ , соответственно.

Ясно, что одна из матриц  $\mathbf{A}'$ ,  $\mathbf{A}''$  совпадает с самой  $\tilde{A}$ .

Далее, так как

$$\mathbf{A}' \subseteq \mathbf{A}' \subset \mathbf{A}, \quad \mathbf{A}'' \subseteq \mathbf{A}'' \subset \mathbf{A} \quad \tilde{\mathbf{b}} \subseteq \mathbf{b},$$

то свойство (9.38) влечёт неравенства

$$\Upsilon(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \leq \Upsilon(\mathbf{A}', \mathbf{b}) \leq \Upsilon(\tilde{A}', \tilde{\mathbf{b}}) \quad \text{и} \quad \Upsilon(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \leq \Upsilon(\mathbf{A}'', \mathbf{b}) \leq \Upsilon(\tilde{A}'', \tilde{\mathbf{b}}).$$

Беря почленный минимум от соответствующих частей неравенств, получим

$$\Upsilon(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \leq \min\{\Upsilon(\mathbf{A}', \mathbf{b}), \Upsilon(\mathbf{A}'', \mathbf{b})\} \leq \min\{\Upsilon(\tilde{A}', \tilde{\mathbf{b}}), \Upsilon(\tilde{A}'', \tilde{\mathbf{b}})\}.$$

Кроме того, по построению матриц  $\mathbf{A}'$  и  $\mathbf{A}''$

$$\min\{\Upsilon(\tilde{A}', \tilde{\mathbf{b}}), \Upsilon(\tilde{A}'', \tilde{\mathbf{b}})\} \leq (\tilde{A}^{-1}\tilde{\mathbf{b}})_\nu = \min\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})\},$$

и потому

$$\Upsilon(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \leq \min\{\Upsilon(\mathbf{A}', \mathbf{b}), \Upsilon(\mathbf{A}'', \mathbf{b})\} \leq \min\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}.$$

Полученное неравенство приводит к следующему практическому выводу: раздробив интервальный элемент на концы и решив две интервальных «системы-потомка»  $\mathbf{A}'x = \mathbf{b}$  и  $\mathbf{A}''x = \mathbf{b}$ , мы найдём, вообще говоря, более точную, чем  $\Upsilon(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , оценку снизу для искомого  $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$  в виде

$$\min\{\Upsilon(\mathbf{A}', \mathbf{b}), \Upsilon(\mathbf{A}'', \mathbf{b})\}.$$

Совершенно тот же эффект имеет и распадение в векторе правых частей  $\mathbf{b}$  каково-нибудь интервального элемента  $\mathbf{b}_k$  на концы  $\underline{\mathbf{b}}_k$  и  $\overline{\mathbf{b}}_k$ . В этом можно легко убедиться с помощью выкладок, аналогичных проведённым выше для элемента матрицы. Поэтому впредь для единообразия договоримся обозначать ИСЛАУ-потомки, получающиеся из  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  расчленением на концы одного интервального элемента либо в матрице  $\mathbf{A}$ , либо в векторе  $\mathbf{b}$ , через  $\mathbf{A}'x = \mathbf{b}'$  и  $\mathbf{A}''x = \mathbf{b}''$ .

Таблица 9.5. Алгоритм GLinPPS — простейший метод дробления параметров для интервальных линейных систем уравнений.

<p>Вход</p> <p>Интервальная система линейных уравнений <math>Ax = b</math>.          Номер <math>\nu</math> оцениваемой компоненты множества решений.          Метод внешнего оценивания множества решений ИСЛАУ,          с помощью которого вычисляется оценка <math>\Upsilon</math> в (9.37).</p>
<p>Выход</p> <p>Значение <math>M^* = \min\{x_\nu \mid x \in \Xi(A, b)\}</math>.</p>
<p>Алгоритм</p> <p>присваиваем <math>Q \leftarrow A</math> и <math>r \leftarrow b</math>;          вычисляем оценку <math>v \leftarrow \Upsilon(Q, r)</math>;          инициализируем рабочий список <math>\mathcal{L} \leftarrow \{(Q, r, v)\}</math>;          DO WHILE ( система <math>Qx = r</math> интервальная )              в матрице <math>Q = (q_{ij})</math> и векторе <math>r = (r_i)</math> выбираем              элемент <math>s</math>, имеющий наибольшую ширину;              порождаем интервальные линейные              системы-потомки <math>Q'x = r'</math> и <math>Q''x = r''</math>:              если <math>s = q_{kl}</math> для некоторых <math>k, l \in \{1, 2, \dots, n\}</math>, то              полагаем                  <math>q'_{ij} \leftarrow q''_{ij} \leftarrow q_{ij}</math> для <math>(i, j) \neq (k, l)</math>,                  <math>q'_{kl} \leftarrow [q_{kl}, \underline{q}_{kl}]</math>, <math>q''_{kl} \leftarrow [\bar{q}_{kl}, \overline{q}_{kl}]</math>, <math>r' \leftarrow r'' \leftarrow r</math>;              если <math>s = r_k</math> для некоторого <math>k \in \{1, 2, \dots, n\}</math>, то              полагаем                  <math>Q' \leftarrow Q'' \leftarrow Q</math>, <math>r'_k \leftarrow [\underline{r}_k, \underline{r}_k]</math>, <math>r''_k \leftarrow [\bar{r}_k, \bar{r}_k]</math>,                  <math>r'_i \leftarrow r''_i \leftarrow r_i</math> для <math>i \neq k</math>;              вычисляем оценки <math>v' \leftarrow \Upsilon(Q', r')</math> и <math>v'' \leftarrow \Upsilon(Q'', r'')</math>;              удаляем из <math>\mathcal{L}</math> бывшую ведущей запись <math>(Q, r, v)</math>;              записываем записи <math>(Q', r', v')</math> и <math>(Q'', r'', v'')</math> в список <math>\mathcal{L}</math>              в порядке возрастания третьего поля;              обозначаем первую запись списка через <math>(Q, r, v)</math>;          END DO  <math>M^* \leftarrow v</math>;</p>

Процедуру улучшения оценки для  $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$  посредством дробления исходной системы (9.1) можно повторить по отношению к системам-потомкам  $\mathbf{A}'x = \mathbf{b}'$  и  $\mathbf{A}''x = \mathbf{b}''$ , затем снова разбить потомков от  $\mathbf{A}'x = \mathbf{b}'$  и  $\mathbf{A}''x = \mathbf{b}''$  и снова улучшить оценку и т.д. Мы оформим этот процесс последовательного улучшения оценки снизу для  $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$  совершенно аналогично тому, как это делается в известном из комбинаторной оптимизации «методе ветвей и границ» (см., к примеру, [14]):

во-первых, организуем все возникающие в процессе дробления исходной ИСЛАУ системы  $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$  вместе с их оценками  $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$  в некоторый список  $\mathcal{L}$ , и,

во-вторых, дроблению каждый раз будем подвергать лишь ту из интервальных систем-потомков  $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$ , которая обеспечивает рекордную (наихудшую) на данный момент оценку  $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$ .

Итак, в процессе выполнения алгоритма мы будем поддерживать *рабочий список*  $\mathcal{L}$ , состоящий из записей-троек

$$(\mathbf{Q}, \mathbf{r}, \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})), \quad (9.39)$$

где  $\mathbf{Q}$  — интервальная  $n \times n$ -матрица,  $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{r}$  — интервальный  $n$ -вектор,  $\mathbf{r} \subseteq \mathbf{b}$ . Кроме того, образующие  $\mathcal{L}$  записи упорядочены по возрастанию значений оценки  $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$ , а первую запись списка, так же как и соответствующие ИСЛАУ  $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$  и оценку  $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$  (наименьшую в списке), мы будем называть ведущими (на данном шаге). Полный псевдокод получающегося нового алгоритма, который мы назовём аббревиатурой **GLinPPS**, представлен в Табл. 9.5.

Если  $T$  — общее количество интервальных (с ненулевой шириной) элементов в матрице  $\mathbf{A}$  и векторе  $\mathbf{b}$  исходной ИСЛАУ (в общем случае  $T \leq n(n+1)$ ), то алгоритм **GLinPPS** остановится не более чем через  $2^T$  шагов, и его результатом явится оценка снизу для  $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$ . То, насколько близкими окажутся результат работы алгоритма и  $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi\}$ , зависит, прежде всего, от способа получения оценки  $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$ , т.е. от выбранного нами базового метода для решения промежуточных ИСЛАУ. В частности, для оптимальности вычисленного значения (т.е. для того, чтобы оно было в точности равно  $\Upsilon = \min\{x_\nu \mid x \in \Xi\}$ ) необходимым и достаточным является выполнение следующего «условия точности»:

оценка  $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$  является точной на вещественных  
линейных алгебраических системах, т.е.  
 $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}) = (\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{r})_\nu$  для всех  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ .

(9.40)

Этому условию удовлетворяют не все из известных методов решения «внешней задачи для ИСЛАУ». Таков, например, известный метод Румпа [52, 53, 54].

Впрочем, если задача имеет сколько-нибудь значительные размеры и величина  $T$  превосходит 20–30, то на современных ЭВМ среднего класса алгоритм **GLinPPS**, как правило, никогда не будет прорабатывать до конца. Потому целесообразно рассматривать его как итерационную уточняющую процедуру.

## 9.7 Модификации методов дробления параметров

Займёмся построением более эффективных методов дробления параметров для решения задачи внешнего оценивания множеств решений ИСЛАУ. При этом алгоритм **GLinPPS** будет играть роль основы, которую мы будем развивать и дополнять посредством ряда уже стандартных усовершенствований, в соответствии со списком §3.6. Необходимость глубокой модификации алгоритма **GLinPPS** диктуется, в частности, его большой информационной сложностью: фактически, каждый шаг алгоритма сопровождается ростом рабочего списка, так что начиная с некоторого момента оперативная память ЭВМ может стать дефицитным ресурсом, а обмен с внешними носителями может фатально замедлить общую скорость вычислений.

### 9.7а Тест на монотонность

Пусть дана интервальная система линейных алгебраических уравнений  $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$ , и нам известны

$$\frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial q_{ij}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial r_i}$$

— интервальные расширения соответствующих производных

$$\frac{\partial x_\nu(Q, r)}{\partial q_{ij}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial x_\nu(Q, r)}{\partial r_i}$$

от  $\nu$ -ой компоненты вектора решения системы уравнений  $Qx = r$  по  $ij$ -ому элементу матрицы  $Q$  и  $i$ -ому элементу вектора  $r$ . Если интервальные  $n \times n$ -матрица  $\tilde{Q}$  и  $n$ -вектор  $\tilde{r}$  образованы из элементов

$$\tilde{q}_{ij} = \begin{cases} [\underline{q}_{ij}, \bar{q}_{ij}], & \text{при} \quad \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial q_{ij}} \geq 0, \\ [\bar{q}_{ij}, \underline{q}_{ij}], & \text{при} \quad \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial q_{ij}} \leq 0, \\ q_{ij}, & \text{при} \quad \text{int} \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial q_{ij}} \ni 0, \end{cases} \quad (9.41)$$

$$\tilde{r}_i = \begin{cases} [\underline{r}_i, \bar{r}_i], & \text{при} \quad \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial r_i} \geq 0, \\ [\bar{r}_i, \underline{r}_i], & \text{при} \quad \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial r_i} \leq 0, \\ r_i, & \text{при} \quad \text{int} \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial r_i} \ni 0, \end{cases} \quad (9.42)$$

то, очевидно,

$$\min\{x_\nu \mid x \in \Xi(\tilde{Q}, \tilde{r})\} = \min\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{Q}, \mathbf{r})\}.$$



А поскольку количество существенно интервальных (с ненулевой шириной) элементов в  $\tilde{\mathbf{Q}}$  и  $\tilde{\mathbf{r}}$  может быть, вообще говоря, существенно меньшим, чем в  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{r}$ , то, переходя от исходной ИСЛАУ  $\mathbf{Q}\mathbf{x} = \mathbf{r}$  к решению системы  $\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{r}}$ , мы, тем самым, добьёмся упрощения задачи вычисления  $\min\{x_\nu \mid \mathbf{x} \in \Xi(\mathbf{Q}, \mathbf{r})\}$ .

Как найти фигурирующие в (9.41)–(9.42) интервальные расширения производных? Традиционно это делается следующим образом. Из курса математического анализа известно, что если  $\mathbf{Z} = (z_{ij})$  — обратная матрица для  $\mathbf{Q} = (q_{ij})$ , то производные решения вещественной линейной системы  $\mathbf{Q}\mathbf{x} = \mathbf{r}$  по её коэффициентам даются формулами

$$\frac{\partial x_\nu}{\partial q_{ij}} = -z_{\nu i} x_j, \quad \frac{\partial x_\nu}{\partial r_i} = z_{\nu i}$$

(см., например, [10]). Следовательно, в случае, когда  $\mathbf{Z} = (z_{ij})$  — «обратная интервальная матрица» для  $\mathbf{Q}$ , т. е.

$$\mathbf{Z} \supseteq \{ \mathbf{Q}^{-1} \mid \mathbf{Q} \in \mathbf{Q} \},$$

а  $x_j$  —  $j$ -ая компонента некоторого интервального вектора  $\mathbf{x}$ , такого что  $\mathbf{x} \supseteq \Xi(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$ , то мы можем принять следующие интервальные оценки производных

$$\frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial q_{ij}} = -z_{\nu i} x_j, \quad \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial r_i} = z_{\nu i}. \quad (9.43)$$

Обычно для вычисления  $\mathbf{Z}$  и  $\mathbf{x}$  используют какие-нибудь дешёвые приближенные алгоритмы (вроде метода Хансена [42] для локализации «обратной интервальной матрицы»). Тем не менее, в целом процедура интервального оценивания производных из (9.41)–(9.42) всё равно остается весьма дорогостоящей. Поэтому с точки зрения эффективности было бы неразумным выполнять это оценивание на каждом шаге алгоритма. Мы будем «замораживать» обратную интервальную матрицу на некоторое фиксированное число шагов (подобно тому, как это делается в отношении якобиана в ряде квазиньютоновских методов для решения алгебраических систем [5]). При этом, правда, несколько усложнится доступ к обратным интервальным матрицам и их обработка, поскольку PPS-алгоритм является, по существу, ветвящимся процессом.

Целесообразно, хранить обратные интервальные матрицы в виде *кучи*  $\mathcal{H}$ , обращаясь к ним с помощью *указателей*, или *ссылок* (см., например, [2]). Соответственно, в образующие список  $\mathcal{L}$  записи-тройки  $(\mathbf{Q}, \mathbf{r}, \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}))$  добавится ещё одно поле  $p$ , — указатель на интервальную матрицу  $\mathbf{Z}$  из  $\mathcal{H}$ , объемлющую  $\{ \mathbf{Q}^{-1} \mid \mathbf{Q} \in \mathbf{Q} \}$ . В такой ситуации мы станем говорить, что запись  $(\mathbf{Q}, \mathbf{r}, \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}), p)$  *обслуживается* матрицей  $\mathbf{Z}$ . С каждой обратной интервальной матрицей  $\mathbf{Z}$  будут связаны ещё два натуральных параметра  $\tau$  и  $\varsigma$ , так что, фактически, куча  $\mathcal{H}$  оказывается состоящей из записей  $(\mathbf{Z}, \tau, \varsigma)$ . Параметр  $\tau$  — счетчик шагов алгоритма, на которых происходило обращение к  $\mathbf{Z}$ , а  $\varsigma$  учитывает количество записей рабочего списка  $\mathcal{L}$ , обслуживаемых посредством  $\mathbf{Z}$ . Если  $\tau$  велико, — превосходит некоторый эмпирически устанавливаемый порог, — то это свидетельствует о предыдущем длительном использовании матрицы  $\mathbf{Z}$  в алгоритме, т. е. о необходимости её перевычисления и

замены на новую, возможно более узкую. Напротив, если  $\varsigma = 0$ , то соответствующая обратная матрица не обслуживает ни одной записи списка  $\mathcal{L}$ , и потому тройка  $(\mathbf{Z}, \tau, \varsigma)$  может быть удалена из  $\mathcal{H}$  без какого-либо влияния на работу алгоритма.

Закон изменения для  $\tau$  очевиден. Параметр  $\varsigma$  полагается равным 2 в момент занесения записи  $(\mathbf{Z}, \tau, \varsigma)$  в  $\mathcal{H}$ , а далее, как нетрудно понять, порядок его перевычисления должен быть таким:

- если запись, обслуживаемая  $\mathbf{Z}$ , дробится на потомки без перевычисления обратной матрицы, то увеличиваем  $\varsigma$  на единицу;
- если запись, обслуживаемая  $\mathbf{Z}$ , дробится на потомки с перевычислением обратной матрицы, то уменьшаем  $\varsigma$  на единицу;
- если обслуживаемая  $\mathbf{Z}$  запись удаляется из рабочего списка  $\mathcal{L}$ , то уменьшаем  $\varsigma$  на единицу.

## 9.76 Стратегия дробления

Способ дробления ведущих брусков параметров должен, прежде всего, обеспечивать сходимость алгоритма, т. е. стремление к нулю диаметров ведущих брусков. Это особенно важно, когда результатом разбиения интервала являются два подинтервала ненулевой ширины (а не два его конца, как в рассматриваемых нами алгоритмах). Как отмечалось в Главе 3, при циклической бисекции компонент сходимости в общем случае может и не быть.

В простейших методах подобного типа ведущие брусы параметров на каждом шаге дробятся по самой широкой грани, что обеспечивает сходимость размеров ведущих брусков к нулю (см. §3.6). Мы тоже применили этот способ дробления в алгоритме GLinPPS, хотя в силу его конечности проблема сходимости для него, строго говоря, не возникает.

После того, как собственно сходимость достигнута, на первый план выходит требование наиболее быстрого улучшения целевой функции в процессе работы алгоритма, т. е. обеспечение наиболее быстрой сходимости алгоритма. Строгая и точная оптимизация алгоритма в указанном смысле трудна и вряд ли целесообразна в полном объёме. Мы будем решать этот вопрос, руководствуясь разумными эвристическими соображениями, на основе знания оценок производных целевой функции.

Ясно, что дробление ведущей ИСЛАУ целесообразно выполнять уже после исследования её на монотонность и овеществления («сжатия») соответствующих интервальных элементов. Следовательно, теперь в дробимой ИСЛАУ  $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$  ненулевую ширину будут иметь лишь те элементы, производные по которым оцениваются интервалами, содержащими внутри себя нуль. Если  $\check{\mathbf{Q}} = (\hat{q}_{ij})$  и  $\hat{\mathbf{Q}} = (\hat{q}_{ij})$  — интервальные матрицы, отличающиеся друг от друга лишь  $(i, j)$ -м элементом, такие что

$$\check{q}_{ij} = [\bar{q}_{ij}, \bar{q}_{ij}], \quad \hat{q}_{ij} = [\underline{q}_{ij}, \underline{q}_{ij}]$$

то в силу известной теоремы Лагранжа о среднем

$$\min\{x_\nu \mid x \in \Xi(\check{\mathbf{Q}}, \mathbf{r})\} - \min\{x_\nu \mid x \in \Xi(\hat{\mathbf{Q}}, \mathbf{r})\} = \frac{\partial x_\nu(\check{\mathbf{Q}}, \mathbf{r})}{\partial q_{ij}} \cdot \text{wid } \mathbf{q}_{ij}$$

для некоторых матрицы  $\hat{Q} \in \mathbf{Q}$  и вектора  $\hat{r} \in \mathbf{r}$ . Аналогично, если  $\check{r} = (\check{r}_i)$  и  $\hat{r} = (\hat{r}_i)$  отличаются только  $i$ -ым элементом и

$$\check{r}_i = [\bar{r}_i, \bar{r}_i], \quad \hat{r}_i = [\underline{r}_i, \underline{r}_i],$$

то

$$\min\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{Q}, \check{r})\} - \min\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{Q}, \hat{r})\} = \frac{\partial x_\nu(\hat{Q}, \hat{r})}{\partial r_i} \cdot \text{wid } r_i$$

для некоторых матрицы  $\hat{Q} \in \mathbf{Q}$  и вектора  $\hat{r} \in \mathbf{r}$ . Поэтому в известном смысле мерой того, как влияет рассечение какого-либо элемента в  $\mathbf{Q}$  или  $\mathbf{r}$  на точное значение  $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{Q}, \mathbf{r})\}$  может служить величина произведения модуля интервальной оценки производной на ширину соответствующего интервала.

Далее, получаемые большинством существующих методов решения ИСЛАУ оценки множеств решений являются тем более точными, чем меньше размеры этих множеств решений (см. Главу 7). С подобными базовыми методами требование наиболее быстрого улучшения целевой функции за один шаг метода дробления параметров становится, по существу, равносильным наиболее быстрому уменьшению размеров множества решений при дроблении ведущей ИСЛАУ. Учитывая сделанный выше вывод, мы рекомендуем поэтому рассекать ведущие ИСЛАУ по элементам, на которых достигается максимум величин

$$\left| \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial q_{ij}} \right| \cdot \text{wid } q_{ij}, \quad \left| \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial r_i} \right| \cdot \text{wid } r_i, \quad (9.44)$$

$i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , т. е. по элементам, на которых достигается максимум произведения оценки производной решения на ширину интервала, а не просто по самым широким элементам ИСЛАУ. Вычислительные эксперименты свидетельствуют, что такая модификация методов дробления параметров в самом деле значительно ускоряет их работу.

## 9.7в Модификация Рона

Результат теоремы Бекка-Никеля, который мы использовали в §9.6б при выводе метода дробления параметров, был усилен И. Роном, уточнившим описания наборов вершин матрицы и вектора правой части системы, на которых достигаются минимальное и максимальное значения компонент точек из объединённого множества решений ИСЛАУ [51]. Мы разбирали результаты И. Рона в §9.3, но здесь будет удобно дать их переформулировку, чтобы практически использовать для модификации методов дробления параметров.

Пусть, как и прежде,  $\mathcal{E}$  — это множество  $n$ -векторов с компонентами  $\pm 1$ . Для данной интервальной матрицы  $\mathbf{A}$  и фиксированных векторов  $\sigma, \tau \in \mathcal{E}$  обозначим через  $A^{\sigma\tau} = (a_{ij}^{\sigma\tau})$  точечную матрицу размера  $n \times n$ , образованную элементами

$$a_{ij}^{\sigma\tau} := \begin{cases} \bar{a}_{ij}, & \text{если } \sigma_i \tau_j = -1, \\ \underline{a}_{ij}, & \text{если } \sigma_i \tau_j = 1. \end{cases}$$

Кроме того, через  $b^\sigma = (b_i^\sigma)$  мы будем обозначать точечный  $n$ -вектор, составленный из элементов

$$b_i^\sigma := \begin{cases} \bar{\mathbf{b}}_i, & \text{если } \sigma_i = 1, \\ \underline{\mathbf{b}}_i, & \text{если } \sigma_i = -1. \end{cases}$$

Матрица  $A^{\sigma\tau}$  и вектор  $b^\sigma$  образованы, таким образом, наборами концов элементов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{b}$  соответственно, и всего имеется  $2^n \cdot 2^n = 4^n$  различных матрично-векторных пар вида  $(A^{\sigma\tau}, b^\sigma)$  для  $\sigma$  и  $\tau$ , независимо пробегающих множество  $\mathcal{E}$ .

Из рассмотренных в §9.3 результатов И. Рона, следует, что для неособенной матрицы  $\mathbf{A}$  как минимальное так и максимальное значения компонент точек множества решений  $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  могут достигаться лишь на множестве  $4^n$  матриц  $A^{\sigma\tau}$  и ассоциированных с ними векторов  $b^\sigma$ , т. е.

$$\min\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})\} = \min_{\sigma, \tau \in \mathcal{E}} \left( (A^{\sigma\tau})^{-1} b^\sigma \right)_\nu, \quad (9.45)$$

$$\max\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})\} = \max_{\sigma, \tau \in \mathcal{E}} \left( (A^{\sigma\tau})^{-1} b^\sigma \right)_\nu \quad (9.46)$$

для каждого индекса  $\nu = 1, 2, \dots, n$ . Как можно использовать этот факт в методах дробления параметров?

Важно осознавать, что приведённый выше результат не накладывает никаких ограничений на концы отдельно взятого интервального элемента матрицы  $\mathbf{A}$  либо правой части  $\mathbf{b}$ , если в рассмотрение не привлечена информация о концах других элементов. Ограничение на ту или иную комбинацию концов интервалов, следующее из (9.45)–(9.46), является существенно коллективным, и, чтобы принять его во внимание, мы должны отслеживать концы задействованных интервальных элементов по всей матрице  $\mathbf{A}$  и всему вектору  $\mathbf{b}$ . Для практической реализации этих идей с каждой интервальной линейной системой  $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{Q} = (\mathbf{q}_{ij})$ ,  $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_i)$ , порождённой в процессе дробления исходной интервальной системы  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ , мы связываем

- 1) вспомогательную целочисленную  $n \times n$ -матрицу  $W = (w_{ij})$ , элементы которой равны  $\pm 1$  или 0, такую что

$$w_{ij} := \begin{cases} -1, & \text{если } \mathbf{q}_{ij} = \bar{\mathbf{a}}_{ij}, \\ 0, & \text{если } \mathbf{q}_{ij} = \mathbf{a}_{ij}, \\ 1, & \text{если } \mathbf{q}_{ij} = \underline{\mathbf{a}}_{ij}, \end{cases}$$

и

- 2) вспомогательные целочисленные  $n$ -векторы  $s = (s_i)$  и  $t = (t_j)$  с компонентами  $\pm 1$  или 0, такие что

$$w_{ij} = s_i t_j \quad (9.47)$$

для всех  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , и

$$s_i := \begin{cases} -1, & \text{если } \mathbf{r}_i = \underline{\mathbf{b}}_i, \\ 0, & \text{если } \mathbf{r}_i = \mathbf{b}_i, \\ 1, & \text{если } \mathbf{r}_i = \bar{\mathbf{b}}_i. \end{cases}$$

Матрицу  $W$  и векторы  $s, t$  мы будем называть *контрольными*, имея в виду с их помощью контролировать в нашем алгоритме процесс дробления ведущих ИСЛАУ на потомки. Как видим, значения элементов  $t_j$  определяются опосредованно, через матрицу  $W$ , вектор  $s$  и соотношения (9.47). Рабочий список  $\mathcal{L}$ , кроме того, будет состоять теперь из длинных записей

$$\left( \mathbf{Q}, \mathbf{r}, \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}), W, s, t \right), \quad (9.48)$$

имеющих *шесть* полей за счёт добавления трёх полей для хранения значений  $W, s$  и  $t$ , которые получаются с предыдущих шагов алгоритма.

Контрольным векторам  $s$  и  $t$  предстоит быть «приближениями» соответственно к векторам  $\sigma$  и  $\tau$ , входящим в равенства (9.45)–(9.46), в то время как  $W = st^T$  — это «приближение» к матрице  $(\sigma\tau^T)$ . В начале работы алгоритма мы инициализируем все элементы контрольной матрицы  $W$  и контрольных векторов  $s$  и  $t$  нулями, а затем перевычисляем их с целью заменить нулевые элементы (соответствующие нашему незнанию того, какой именно конец интервала задействован в той или иной комбинации) на ненулевые (соответствующие определённому концу интервала). Контрольные матрица  $W$  и векторы  $s, t$ , взаимно влияя друг на друга и перевычисляясь в процессе работы алгоритма, предназначены, следовательно, для наблюдения над процессом дробления исходной интервальной линейной системы и его корректировки таким образом, чтобы порождать лишь варианты, допускаемые равенствами (9.45)–(9.46). Это реализуется следующим образом.

На каждом шаге алгоритма при разбиении интервального элемента  $\mathbf{h}$  ведущей ИСЛАУ  $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$ , мы смотрим на соответствующее значение

матрицы  $W = (w_{ij})$ , если элемент  $\mathbf{h}$  есть  $q_{kl}$  из матрицы  $\mathbf{Q}$ ,

вектора  $s = (s_i)$ , если элемент  $\mathbf{h}$  есть  $r_k$  из вектора правой части  $\mathbf{r}$ .

В случае  $w_{kl} = 0$  ( $s_k = 0$  соответственно), мы порождаем, согласно обычной процедуре бисекции из простейшего метода дробления параметров Табл. 9.5, *две* интервальных системы-потомка  $\mathbf{Q}'x = \mathbf{r}'$  и  $\mathbf{Q}''x = \mathbf{r}''$ , которые отвечают обоим концам рассекаемого интервала  $\mathbf{h}$ . Но если  $w_{kl} \neq 0$  ( $s_k \neq 0$  соответственно), то после бисекции ведущей ИСЛАУ мы можем оставить в рабочем списке только *одного* потомка от  $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$ . Какого именно, зависит от знака элемента  $w_{kl}$  ( $s_k$  соответственно). Более точно, вместо традиционной бисекции мы выполняем процедуру, представленную в Табл. 9.6.

Почему это в принципе возможно? Другими словами, не может ли отбрасывание второй интервальной системы-потомка в вышеописанной процедуре нарушить то свойство ведущих оценок  $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$ , что они приближают искомым  $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$  снизу?

Для ответа на этот вопрос заметим, что в новой процедуре дробления из Табл. 9.6 мы отбрасываем лишь те системы, которые

не принадлежат множеству точечных систем  $\{A^{\sigma\tau}x = b^\sigma \mid \sigma, \tau \in \mathcal{E}\}$ ,

не содержат такие системы.

Следовательно, в силу свойства (9.38) базисного оценивающего метода и, принимая

Таблица 9.6. Порождение систем-потомков

```

IF ( пересекается  $q_{kl}$  ) THEN
  IF (  $w_{kl} = 0$  ) THEN
    порождаем системы  $Q'x = r'$  и  $Q''x = r''$  так, что
       $q'_{ij} \leftarrow q''_{ij} \leftarrow q_{ij}$  для  $(i, j) \neq (k, l)$ ,
       $q'_{kl} \leftarrow \underline{q}_{kl}$ ,  $q''_{kl} \leftarrow \bar{q}_{kl}$ ,  $r' \leftarrow r'' \leftarrow r$ ;
  ELSE
    порождаем систему  $Q'x = r'$  так, что
       $r' \leftarrow r$ ,  $q'_{ij} \leftarrow q_{ij}$  для  $(i, j) \neq (k, l)$ ,
       $q'_{kl} \leftarrow \begin{cases} \underline{q}_{kl}, & \text{для } w_{kl} = 1, \\ \bar{q}_{kl}, & \text{для } w_{kl} = -1; \end{cases}$ 
  END IF
END IF

IF ( пересекается  $r_k$  ) THEN
  IF (  $s_k = 0$  ) THEN
    порождаем системы  $Q'x = r'$  и  $Q''x = r''$  так, что
       $Q' \leftarrow Q'' \leftarrow Q$ ,
       $r'_i \leftarrow r_i$  для  $i \neq k$ ,  $r'_k \leftarrow \underline{r}_k$ ,  $r''_k \leftarrow \bar{r}_k$ ,
  ELSE
    порождаем систему  $Q'x = r'$  так, что
       $Q' \leftarrow Q$ ,  $r'_i \leftarrow r_i$  для  $i \neq k$ ,
       $r'_k \leftarrow \begin{cases} \underline{r}_k, & \text{для } s_k = -1, \\ \bar{r}_k, & \text{для } s_k = 1; \end{cases}$ 
  END IF
END IF

```

во внимание равенство (9.45), мы получаем

$$\begin{aligned} \min\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})\} &= \min_{\sigma, \tau \in \mathcal{E}} \left( (A^{\sigma\tau})^{-1} b^\sigma \right)_\nu \geq \min_{\sigma, \tau \in \mathcal{E}} \Upsilon(A^{\sigma\tau}, b^\sigma) \\ &\geq \min\{\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}) \mid \mathbf{Q} \ni A^{\sigma\tau} \text{ и } \mathbf{r} \ni b^\sigma \text{ для некоторых } \sigma, \tau \in \mathcal{E}\} \\ &\geq \min\{\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}) \mid \text{система } \mathbf{Q}x = \mathbf{r} \text{ присутствует в списке } \mathcal{L}\} \\ &= \text{ведущая оценка } \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}). \end{aligned}$$

Таким образом, с новой процедурой дробления Табл. 9.6 ведущая оценка действительно приближает  $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$  снизу.

Приступая к описанию формальной вычислительной схемы «модификации Рона», мы начнём с установления правил перевычисления контрольных матрицы  $W$  и векторов  $s$  и  $t$  в процессе работы алгоритма. Если в результате дробления ведущей ИСЛАУ порождаются системы-потомки  $\mathbf{Q}'x = \mathbf{r}'$  и  $\mathbf{Q}''x = \mathbf{r}''$ , то соответствующие им новые контрольные матрицы будем обозначать через  $W'$  и  $W''$ , а пары новых контрольных векторов — через  $s'$ ,  $t'$  и  $s''$ ,  $t''$ .

Существует взаимно-однозначное соответствие между вектором  $s$  и правой частью интервальной системы  $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$ , в то время как дробление интервальной матрицы  $\mathbf{Q}$  рассматриваемой ИСЛАУ влияет на векторы  $s$  и  $t$  лишь неявно, посредством матрицы  $W$  и условий (9.47). Последнее, тем не менее, позволяет организовать перевычисление  $W$ ,  $s$  и  $t$  на каждом таком шаге алгоритма, который завершается дроблением интервального элемента ведущей системы *на два конца*. В противном случае, если ведущая интервальная система порождает только одного потомка  $\mathbf{Q}'x = \mathbf{r}'$  в соответствии с Табл. 9.6, векторы  $s$ ,  $t$  и матрица  $W$  остаются неизменными, так что

$$s' := s, \quad t' := t, \quad W' := W.$$

Итак, пусть ведущая интервальная система  $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$  рассечена на два ИСЛАУ-потомка  $\mathbf{Q}'x = \mathbf{r}'$  и  $\mathbf{Q}''x = \mathbf{r}''$ , определённые в Табл. 9.6. Каким должен быть закон, в соответствии с которым формируются матрицы  $W'$ ,  $W''$  и векторы  $s'$ ,  $s''$ ,  $t'$ ,  $t''$  соответствующие системам-потомкам? Сначала мы можем присвоить

$$W'' \leftarrow W' \leftarrow W, \quad s'' \leftarrow s' \leftarrow s, \quad t'' \leftarrow t' \leftarrow t,$$

а затем выполнить следующую двухэтапную процедуру перевычисления:

Во-первых, модифицируем  $W'$ ,  $W''$  и  $s'$ ,  $s''$  на основе информации о только что выполненной бисекции ведущей ИСЛАУ. Именно,

(I) если рассечённым элементом был  $q_{kl}$  из матрицы  $\mathbf{Q}$ , то в матрицах  $W' = (w'_{ij})$  и  $W'' = (w''_{ij})$  мы присваиваем

$$w'_{kl} \leftarrow 1 \quad \text{и} \quad w''_{kl} \leftarrow -1;$$

(II) если рассечённым элементом был  $r_k$  из вектора правой части  $\mathbf{r}$ , то в векторах  $s' = (s'_i)$  и  $s'' = (s''_i)$  мы присваиваем

$$s'_k \leftarrow -1 \quad \text{и} \quad s''_k \leftarrow 1.$$

Таблица 9.7. Перевычисление  $W'$ ,  $W''$ ,  $s'$ ,  $s''$ ,  $t'$ ,  $t''$ .

```

W'Change ← false;   s'Change ← false;   t'Change ← false;
W''Change ← false;  s''Change ← false;  t''Change ← false;
IF ( ( рассекается  $q_{kl}$  из  $Q$  ) AND (  $q_{kl}$  рассекается на два конца ) ) THEN
   $w'_{kl} \leftarrow 1$ ;  $w''_{kl} \leftarrow -1$ ; W'Change ← true; W''Change ← true;
END IF
IF ( ( рассекается  $r_k$  из  $r$  ) AND (  $r_k$  рассекается на два конца ) ) THEN
   $s'_k \leftarrow -1$ ;  $s''_k \leftarrow 1$ ; s'Change ← true; s''Change ← true;
END IF
DO WHILE ( W'Change OR s'Change OR t'Change )
  IF ( s'Change OR t'Change ) THEN
    пытаемся перевычислить матрицу  $W'$  согласно (9.47);
    IF (  $W'$  изменилась ) THEN  $W'C \leftarrow true$ 
    ELSE  $W'C \leftarrow false$  END IF
  END IF
  IF ( W'Change OR t'Change ) THEN
    пытаемся перевычислить вектор  $s'$  согласно (9.47);
    IF (  $s'$  изменился ) THEN  $s'C \leftarrow true$ 
    ELSE  $s'C \leftarrow false$  END IF
  END IF
  IF ( W'Change OR s'Change ) THEN
    пытаемся перевычислить вектор  $t'$  согласно (9.47);
    IF (  $t'$  изменился ) THEN  $t'C \leftarrow true$ 
    ELSE  $t'C \leftarrow false$  END IF
  END IF
   $W'Change \leftarrow W'C$ ;  $s'Change \leftarrow s'C$ ;  $t'Change \leftarrow t'C$ ;
END DO
DO WHILE ( W''Change OR s''Change OR t''Change )
  IF ( s''Change OR t''Change ) THEN
    пытаемся перевычислить матрицу  $W''$  согласно (9.47);
    IF (  $W''$  изменилась ) THEN  $W''C \leftarrow true$ 
    ELSE  $W''C \leftarrow false$  END IF
  END IF
  IF ( W''Change OR t''Change ) THEN
    пытаемся перевычислить вектор  $s''$  согласно (9.47);
    IF (  $s''$  изменился ) THEN  $s''C \leftarrow true$ 
    ELSE  $s''C \leftarrow false$  END IF
  END IF
  IF ( W''Change OR s''Change ) THEN
    пытаемся перевычислить вектор  $t''$  согласно (9.47);
    IF (  $t''$  изменился ) THEN  $t''C \leftarrow true$ 
    ELSE  $t''C \leftarrow false$  END IF
  END IF
   $W''Change \leftarrow W''C$ ;  $s''Change \leftarrow s''C$ ;  $t''Change \leftarrow t''C$ ;
END DO

```



Во-вторых, перевычисляем каждое из двух семейств взаимосвязанных объектов, —  $W', s', t'$  и  $W'', s'', t''$  соответственно, — используя соотношения (9.47). Именно,

- (I) если  $s'$  или  $t'$  изменился, пытаемся перевычислить матрицу  $W'$ ;
- (II) если  $W'$  или  $t'$  изменился, пытаемся перевычислить вектор  $s'$ ;
- (III) если  $W'$  или  $s'$  изменился, пытаемся перевычислить вектор  $t'$ .

Инструкции (I)–(III) повторяются последовательно одна за другой в цикле до тех пор, пока изменения в  $W', s'$  и  $t'$  не прекратятся. Та же самая процедура применяется затем к  $W'', s'', t''$ .

Полная алгоритмическая схема приведённой выше процедуры оказывается довольно сложной, так что имеет смысл снабдить читателя более строгим и детальным её описанием. Таблица 9.7 представляет соответствующий псевдокод и ниже мы даём объяснения к нему. Булевские переменные

$$W'Change, \quad s'Change, \quad t'Change, \quad W'C, \quad s'C, \quad t'C$$

и

$$W''Change, \quad s''Change, \quad t''Change, \quad W''C, \quad s''C, \quad t''C$$

— это «флаги», введённые с целью отображения текущего статуса изменений в  $W', s', t'$  и  $W'', s'', t''$  соответственно. Значения `true` означают, что объект, с которым связан флаг, был изменен на текущей итерации процесса перевычисления, тогда как значение `false` означает «без изменений».  $W'C, s'C, t'C, W''C, s''C, t''C$  — это вспомогательные булевские переменные, необходимые для организации работы программы. Фактически, алгоритм из Табл. 9.7. Во-первых, это перевычисление контрольных матриц  $W'$  и  $W''$  по итогам дробления ведущей ИСЛАУ. Во-вторых, это попытка улучшить уже насчитанные значения контрольных матриц и векторов, основываясь на связывающих их соотношениях (9.47).

Для того, чтобы завершить формальное описание модификации Рона, нам нужно лишь определить, что имеется в виду под «пытаемся перевычислить матрицу  $W'$  согласно (9.47)», «пытаемся перевычислить вектор  $s'$  согласно (9.47)» и тому подобные инструкции из Табл. 9.7.

Обозначим прописными греческими буквами  $K', \Lambda'$  и  $\Omega'$  подмножества индексов элементов вектора  $s'$ , вектора  $t'$  и матрицы  $W'$  соответственно, которые изменили свои значения (с 0 на  $\pm 1$ ) на текущем шаге процедуры перевычисления Табл. 9.7.  $K'$  и  $\Lambda'$  — это, следовательно, подмножества множества первых  $n$  натуральных чисел

$$\{1, 2, \dots, n\},$$

тогда как  $\Omega$  есть подмножество множества всех пар, составленных из первых  $n$  натуральных чисел, т. е. подмножество множества

$$\{(1, 1), (1, 2), \dots, (1, n), (2, 1), \dots, (n, n)\}.$$

Каждое из множеств  $K', \Lambda', \Omega'$  может быть пустым, но может содержать и более чем один элемент. Тогда наша «попытка перевычислить вектор  $s'$ » может быть организована следующим образом:

Таблица 9.8. Перевычисление  $s'$ 

```

IF (  $W'$ Change ) THEN
  DO FOR  $(k, l) \in \Omega'$ 
    IF  $(t'_l \neq 0)$   $s'_k \leftarrow w'_{kl}/t'_l$ 
  END DO
END IF
IF (  $t'$ Change ) THEN
  DO FOR  $l \in \Lambda'$ 
    DO FOR  $k = 1$  TO  $n$ 
      IF  $(s_k = 0 \text{ AND } w'_{kl} \neq 0)$   $s'_k \leftarrow w'_{kl}/t'_l$ 
    END DO
  END DO
END IF

```

«Попытка перевычислить вектор  $t'$ » может быть выполнена аналогично приведённому выше с тем единственным отличием, что цикл «DO FOR  $l \in \Lambda'$ » во втором IF-операторе должен быть заменен на «DO FOR  $k \in K'$ ».

Далее в Табл. 9.9 приводится процедура перевычисления  $W'$ . То же самое следует организовать для перевычисления  $s''$ ,  $t''$  и  $W''$ . При этом нам необходимо организовать индексные подмножества  $K''$ ,  $\Lambda''$  и  $\Omega''$  для представления индексов компонент вектора  $s''$ , вектора  $t''$  и матрицы  $W''$  соответственно, которые изменились на текущем шаге перевычислительного процесса.

Наконец, мы должны упомянуть следующее замечательное свойство контрольной матрицы  $W$ : в каждой её  $2 \times 2$ -подматрице любой элемент равен произведению остальных трех элементов. Чтобы убедиться в этом, обозначим через  $i_1$ ,  $i_2$  номера строк и через  $j_1$ ,  $j_2$  — номера столбцов, образующих рассматриваемую подматрицу. Тогда в соответствии с определением (9.47)

$$w_{i_1 j_1} = \sigma_{i_1} \tau_{j_1},$$

$$w_{i_1 j_2} = \sigma_{i_1} \tau_{j_2},$$

$$w_{i_2 j_1} = \sigma_{i_2} \tau_{j_1},$$

$$w_{i_2 j_2} = \sigma_{i_2} \tau_{j_2}.$$

Перемножая любые три из вышеприведённых равенств, к примеру, первое, второе и четвертое, получим

$$w_{i_1 j_1} w_{i_1 j_2} w_{i_2 j_2} = \sigma_{i_1} \tau_{j_1} \sigma_{i_1} \tau_{j_2} \sigma_{i_2} \tau_{j_2}.$$

Квадрат любой компоненты векторов  $\sigma$  и  $\tau$  есть 1, так что

$$w_{i_1 j_1} w_{i_1 j_2} w_{i_2 j_2} = \tau_{j_1} \sigma_{i_2} = w_{i_2 j_1}. \quad (9.49)$$

Таблица 9.9. Перевычисление  $W'$ 

```

IF ( s'Change ) THEN
  DO FOR  $k \in K'$ 
    DO FOR  $l = 1$  TO  $n$ 
      IF (  $t'_l \neq 0$  )  $w'_{kl} \leftarrow s'_k t'_l$ 
    END DO
  END DO
END IF
IF ( t'Change ) THEN
  DO FOR  $l \in \Lambda'$ 
    DO FOR  $k = 1$  TO  $n$ 
      IF (  $s'_k \neq 0$  )  $w'_{kl} \leftarrow s'_k t'_l$ 
    END DO
  END DO
END IF

```

То же самое с остальными элементами подматрицы:

$$w_{i_1 j_1} w_{i_1 j_2} w_{i_2 j_1} = w_{i_2 j_2}, \quad (9.50)$$

$$w_{i_1 j_2} w_{i_2 j_1} w_{i_2 j_2} = w_{i_1 j_1}, \quad (9.51)$$

$$w_{i_1 j_1} w_{i_2 j_1} w_{i_2 j_2} = w_{i_1 j_2}. \quad (9.52)$$

Таблица 9.10. Уточнение  $W$  с помощью  $2 \times 2$ -подматриц

```

DO FOR  $i = 1$  TO  $n$ 
  DO FOR  $j = 1$  TO  $n$ 
    IF (  $i \neq k$  AND  $j \neq l$  ) THEN
      IF (  $w_{ij} \neq 0$  AND  $w_{il} \neq 0$  AND  $w_{kj} \neq 0$  ) THEN
         $w_{kl} \leftarrow w_{ij} w_{il} w_{kj}$ ;
        EXIT
      END IF
    END IF
  END DO
END DO

```

Соотношения (9.49)–(9.52) могут быть полезными для дальнейшего уточнения контрольной матрицы  $W$ . Например, пусть мы намереваемся рассечь ведущую ин-

тервальную систему  $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$  по элементу  $q_{kl}$ , в то время как соответствующий элемент  $w_{kl}$  матрицы  $W$  равен нулю. При этом согласно обычному правилу дробления мы должны были бы породить две системы-потомка вместо ИСЛАУ  $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$ . Но разумно сделать попытку доопределить  $w_{kl}$ , поискав  $2 \times 2$ -подматрицы в  $W$ , имеющие ненулевыми все элементы за исключением  $w_{kl}$ . Если такая подматрица в  $W$  найдётся, то мы присваиваем элементу  $w_{kl}$  значение произведения остальных трёх элементов. Сказанное может быть реализовано в виде алгоритма Табл. 9.10, где оператор EXIT означает выход из всех блоков и циклов выписанного псевдокода.

### 9.7г Влияние базового алгоритма

Обсудим теперь очень важный вопрос о влиянии базового метода *Encl* и, следовательно, способа получения оценки  $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$  на вычислительную схему конкретных реализаций методов дробления параметров.

Для работы многих методов внешнего оценивания объединённого множества решений ИСЛАУ требуются некоторые начальные приближения, содержащие оцениваемое множество решений. Таковы, например, интервальный метод Гаусса-Зейделя, методы Кравчика, Гея и др. Нетрудно понять, что интервальный вектор внешней оценки объединённого множества решений ИСЛАУ  $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$ , уже найденный на предшествующих шагах алгоритма, может служить начальным приближением для процедуры внешнего оценивания объединённых множеств решений систем-потомков  $\mathbf{Q}'x = \mathbf{r}'$  с  $\mathbf{Q}' \subseteq \mathbf{Q}$  и  $\mathbf{r}' \subseteq \mathbf{r}$ . То же самое относится и к вычислению «обратной интервальной матрицы», которая нужна в тесте на монотонность из §9.7а и при выборе рассекаемого интервального элемента из §9.7б.

Имеет смысл поэтому при выборе соответствующих базовых методов хранить интервальные векторы внешней оценки множеств решений и «обратную интервальную матрицу» с предыдущих шагов алгоритма. Для этого потребуется расширить образующие рабочий список  $\mathcal{L}$  записи ещё на два поля, так что теперь мы будем оперировать не тройками (9.39) или шестёрками (9.48), а восьмерками

$$(\mathbf{Q}, \mathbf{r}, \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}), W, s, t, \mathbf{Y}, \mathbf{x}), \quad (9.53)$$

т. е. записями, состоящими из восьми членов, где

$\mathbf{Q}$  — интервальная  $n \times n$ -матрица,  $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{A}$ ,

$\mathbf{r}$  — интервальный  $n$ -вектор,  $\mathbf{r} \subseteq \mathbf{b}$ ,

$\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$  — нижний конец  $\nu$ -ой компоненты (для заданного фиксированного номера  $\nu$ ) внешней интервальной оценки множества решений  $\Xi(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$ ,

$W, s, t$  — контрольные матрица и векторы, необходимые для реализации модификации Рона и определённые в §9.7в,

$\mathbf{Y}$  — обратная интервальная матрица для  $\mathbf{Q}$ , т. е. такая интервальная  $n \times n$ -матрица, что  $\mathbf{Y} \supseteq \{Q^{-1} \mid Q \in \mathbf{Q}\}$ ,

$\mathbf{x}$  — интервальный  $n$ -вектор, такой что  $\mathbf{x} \supseteq \Xi(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$ .

Ещё одно соображение. Как правило, любая из методик решения внешней задачи для ИСЛАУ, удовлетворяющая «условию точности» (9.40), даёт точную оценку  $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$  не только тогда, когда  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{r}$  — точечные (неинтервальные), но и на некотором более широком множестве начальных данных, когда часть элементов в  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{r}$  могут быть интервалами. Например, интервальный метод Гаусса-Зейделя, методы Гея [29] и другие итерационные методы, основанные на теореме о сжимающем отображении (см. Главу 7), обеспечивают точную оценку  $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$  в случае вещественной матрицы  $\mathbf{Q}$ , а вектор правых частей  $\mathbf{r}$  может быть при этом любым. Получаемая с помощью интервального метода Гаусса оценка  $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$ , очевидно, точна для верхних треугольных матриц  $\mathbf{Q}$ , и т. д. Возможны и более хитроумные условия на взаимное расположение элементов интервальной матрицы  $\mathbf{Q}$ , их знак, ширину и т. п. Как правило, выявление всех практически наиболее значимых подобных ситуаций нетрудно алгоритмизовать.

Таким образом, для естественной остановки метода дробления параметров совсем не обязательно дожидаться полного «овеществления» ведущей ИСЛАУ  $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$  (условие завершения цикла «DO WHILE» в Табл. 9.5). Достаточно уже и того, чтобы ведущая оценка  $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$  являлась точной.

Можно пойти ещё дальше и предусмотреть возможность динамической смены базового метода *Encl* в ходе выполнения алгоритма. Первоначально это может быть какой-нибудь метод с широкой сферой применимости, но и с большой погрешностью внешнего оценивания. Затем, по мере достижения в процессе дробления заданной узости интервальных систем-потомков, он заменяется на более точный специализированный алгоритм.

Мораль, вытекающая из вышеизложенного, прежняя: для достижения наибольшей эффективности методов дробления параметров все составляющие реального алгоритма, применяемого к той или иной конкретной задаче — структура записей в рабочем списке  $\mathcal{L}$ , способ их обработки, способ дробления ведущих ИСЛАУ и др. — должны быть тщательно увязаны с особенностями решаемой задачи.

## 9.7д Отбраковка бесперспективных записей

Рассмотрим модификацию простейшего алгоритма GLinPPS, связанную с вычислением оценок  $\Upsilon(\text{mid } \mathbf{Q}, \text{mid } \mathbf{r})$  для «середин» ведущих систем. Она позволит отчасти контролировать точность вычисления  $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$ , а также удалять из рабочего списка  $\mathcal{L}$  *бесперспективные записи*, т. е. такие, которые никогда не сделаются ведущими. Последнее свойство позволяет ограничивать рост длины рабочего списка  $\mathcal{L}$ .

Действительно, пусть наряду с оценкой  $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$  для интервальных систем  $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$ , порождаемых алгоритмом, вычисляются ещё и величины  $\Upsilon(\square\mathbf{Q}, \square\mathbf{r})$ , где, как и ранее, символом  $\square$  обозначена операция взятия какой-то фиксированной точки из интервала. Очевидно, что

$$\Upsilon(\square\mathbf{Q}, \square\mathbf{r}) \geq \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}),$$

и значения  $\Upsilon(\square\mathbf{Q}, \square\mathbf{r})$  приближают  $\min\{x \mid x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$  сверху: если для каждого шага алгоритма определять

$$\omega = \min \Upsilon(\square\mathbf{Q}, \square\mathbf{r}) \tag{9.54}$$

по всем интервальным линейным системам  $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$ , когда-либо побывавшим в списке  $\mathcal{L}$  до этого шага, то

$$\min\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})\} \leq \omega.$$

С другой стороны, если  $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$  — ведущая ИСЛАУ, то

$$\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}) \leq \min\{x_\nu \mid x \in \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})\},$$

и потому ещё одним критерием естественной остановки алгоритма может служить достижение требуемой малости величины  $(\omega - \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}))$ .

Далее, запись  $(\mathbf{Q}, \mathbf{r}, \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}), p) \in \mathcal{L}$ , удовлетворяющая на некотором шаге условию

$$\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}) > \omega, \tag{9.55}$$

при дальнейшем выполнении алгоритма уже никогда не станет ведущей, и её удаление из рабочего списка  $\mathcal{L}$  не окажет никакого влияния на результат работы алгоритма. Вообще, тестироваться неравенством (9.55) должны на каждом шаге алгоритма все вновь заносимые в список  $\mathcal{L}$  записи, тогда как «чистки» списка, — его просмотр и удаление всех удовлетворяющих (9.55) записей, — имеет смысл проводить лишь после изменений (т. е. уменьшений) параметра  $\omega$ .

Конечно, было бы идеальным выбирать точечные матрицу  $\square\mathbf{Q}$  и вектор  $\square\mathbf{r}$  так, чтобы  $(\square\mathbf{Q}, \square\mathbf{r}) \in \text{Arg min}\{\Upsilon(Q, r) \mid Q \in \mathbf{Q}, r \in \mathbf{r}\}$ . Фактически, мы так и будем поступать, если оценка  $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$  — точная, полагая

$$\Upsilon(\square\mathbf{Q}, \square\mathbf{r}) = \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}).$$

Но в общем случае подобный «удачный» выбор не менее труден, чем решение исходной задачи, и потому в целях минимизации возможных отклонений  $(\square\mathbf{Q}, \square\mathbf{r})$  от множества  $\text{Arg min}\{\Upsilon(Q, r) \mid Q \in \mathbf{Q}, r \in \mathbf{r}\}$  целесообразней всего брать тогда в качестве  $\square\mathbf{Q}$  и  $\square\mathbf{r}$  середины матрицы  $\mathbf{Q}$  и вектора  $\mathbf{r}$ , т. е.  $\text{mid } \mathbf{Q}$  и  $\text{mid } \mathbf{r}$ , соответственно.

## 9.7е Итоговая схема

Приводимые ниже псевдокоды Табл. 9.11 и 9.12 охватывают развитые в предшествующих пунктах модификации методов дробления параметров для внешнего оценивания объединённого множеств решений ИСЛАУ.

Теоретически модификация Рона позволяет нам уменьшить экспоненциальный множитель в верхней оценке трудоёмкости PPS-методов с  $2^{n^2+n}$  до  $4^n$ , но

- это сделано ценой существенного утяжеления алгоритма, так что его программная сложность становится весьма высокой,
- при решении практических задач с размерностью, превосходящей несколько десятков, как  $2^{n^2+n}$ , так и  $4^n$  делаются недостижимыми величинами, а методы дробления параметров следует рассматривать, скорее, как итерационную уточняющую процедуру, которая никогда не выполняется до своего естественного завершения.

Таблица 9.11. Алгоритм LinPPS1

DO WHILE ( (ведущая оценка  $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$  не точна) и  $(\omega - \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}) > \epsilon)$  )

по формулам (9.43) вычисляем интервальные расширения для

$$\frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial q_{ij}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial r_i},$$

соответствующие элементам  $q_{ij}$  и  $r_i$  с ненулевой шириной;

«сжимаем» в соответствии с (9.41)–(9.42) в  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{r}$  элементы, на которых была выявлена монотонная зависимость  $x_\nu$  от  $q_{ij}$  и  $r_i$ ;

ищем в ведущей ИСЛАУ  $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$  интервальный элемент  $s$ , которому соответствует наибольшее из произведений

$$\left| \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial q_{ij}} \right| \cdot \text{wid } q_{ij}, \quad \left| \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial r_i} \right| \cdot \text{wid } r_i, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\};$$

порождает интервальные системы-потомки  $\mathbf{Q}'x = \mathbf{r}'$  и  $\mathbf{Q}''x = \mathbf{r}''$ :

если  $s = q_{kl}$  для некоторых  $k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$ , то полагаем

$$q'_{ij} \leftarrow q''_{ij} \leftarrow q_{ij} \text{ для } (i, j) \neq (k, l), \quad q'_{kl} \leftarrow \underline{q}_{kl}, \quad q''_{kl} \leftarrow \bar{q}_{kl}, \\ r' \leftarrow r'' := r;$$

если  $s = r_k$  для некоторого  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , то полагаем

$$r'_i \leftarrow r''_i \leftarrow r_i \text{ для } i \neq k, \quad r'_k \leftarrow \underline{r}_k, \quad r''_k \leftarrow \bar{r}_k, \\ \mathbf{Q}' \leftarrow \mathbf{Q}'' \leftarrow \mathbf{Q};$$

вычисляем брусы  $x' \leftarrow \text{Encl}(\mathbf{Q}', r')$  и  $x'' \leftarrow \text{Encl}(\mathbf{Q}'', r'')$ ;

вычисляем оценки  $\Upsilon(\mathbf{Q}', r')$  и  $\Upsilon(\mathbf{Q}'', r'')$ ;

вычисляем внешние оценки для «обратных интервальных матриц»  $\mathbf{Y}' \supseteq (\mathbf{Q}')^{-1}$  и  $\mathbf{Y}'' \supseteq (\mathbf{Q}'')^{-1}$ ;

вычисляем оценки  $\Upsilon(\text{mid } \mathbf{Q}', \text{mid } r')$  и  $\Upsilon(\text{mid } \mathbf{Q}'', \text{mid } r'')$ , полагаем  $\mu \leftarrow \min\{\Upsilon(\text{mid } \mathbf{Q}', \text{mid } r'), \Upsilon(\text{mid } \mathbf{Q}'', \text{mid } r'')\}$ ;

удаляем из  $\mathcal{L}$  бывшую ведущей запись  $(\mathbf{Q}, \mathbf{r}, \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}), \mathbf{Y}, \mathbf{x})$ ;

если  $\Upsilon(\mathbf{Q}', r') \leq \omega$ , то заносим запись  $(\mathbf{Q}', r', \Upsilon(\mathbf{Q}', r'), \mathbf{Y}', x')$  в список  $\mathcal{L}$  в порядке возрастания значений третьего поля;

если  $\Upsilon(\mathbf{Q}'', r'') \leq \omega$ , то заносим запись  $(\mathbf{Q}'', r'', \Upsilon(\mathbf{Q}'', r''), \mathbf{Y}'', x'')$  в список  $\mathcal{L}$  в порядке возрастания значений третьего поля;

если  $\omega > \mu$ , то полагаем  $\omega \leftarrow \mu$  и чистим список  $\mathcal{L}$ : удаляем из него все такие записи  $(\mathbf{Q}, \mathbf{r}, \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}), \mathbf{Y}, \mathbf{x})$ , что  $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}) > \omega$ ;

обозначаем ведущую (первую) запись рабочего списка  $\mathcal{L}$  через  $(\mathbf{Q}, \mathbf{r}, \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}), \mathbf{Y}, \mathbf{x})$ ;

END DO

На наш взгляд, в каждом конкретном случае пользователь, основываясь на информации о размере задачи, её структуре, наличных вычислительных ресурсах и т. п., самостоятельно должен решать вопрос о целесообразности включения модификации Рона в ту или иную реализацию метода дробления параметров. По этой причине мы приводим ниже две итоговые вычислительные схемы методов дробления параметров — с модификацией Рона и без неё.

В Табл. 9.11 и 9.12 предполагается, что в качестве базового метода внешнего оценивания *Encl* взят интервальный метод Гаусса-Зейделя, но это сделано лишь для определённости. Подчеркнем, что методы дробления параметров — это общая схема, а Табл. 9.11 и 9.12 представляют лишь две её возможные конкретизации. Разработанные нами выше конструкции содержат ряд «свободных параметров», которые должны быть настраиваемы под конкретную задачу, так что мы можем, следовательно, говорить о целом *классе методов*, основанных на общей идее дробления интервальных параметров системы.

Алгоритм Табл. 9.11 описывает метод дробления параметров без модификации Рона. Его рабочий список  $\mathcal{L}$  образуется пятичленными записями вида

$$(\mathbf{Q}, \mathbf{r}, \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}), \mathbf{Y}, \mathbf{x}),$$

а для начала работы этого алгоритма, который мы называем **LinPPS1**, нам нужно

- найти предварительные («грубые») внешние оценки для объединённого множества решений исходной интервальной системы и «обратной интервальной матрицы», т. е. вычислить  $\mathbf{x} \supseteq \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  и  $\mathbf{Y} \supseteq \mathbf{A}^{-1}$ .
- назначить точность  $\epsilon > 0$ ,
- положить  $\Upsilon(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \leftarrow \underline{\mathbf{x}}$  и  $\omega \leftarrow +\infty$ ,
- инициализировать рабочий список  $\mathcal{L}$  записью  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \underline{\mathbf{x}}, \mathbf{Y}, \mathbf{x})$ .

Алгоритм Табл. 9.12, названный нами **LinPPS2**, представляет метод дробления параметров с модификацией Рона, который оперирует с восьмичленными записями вида (9.53). Для начала его работы необходимо выполнить первые три пункта из перечисленных выше для алгоритма **LinPPS1**, а далее положить

$$W \leftarrow 0, \quad s \leftarrow 0, \quad t \leftarrow 0$$

для контрольной матрицы  $W$  и контрольных векторов  $s$  и  $t$ , введённых в §9.7в, и инициализировать рабочий список  $\mathcal{L}$  записью  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \underline{\mathbf{x}}, W, s, t, \mathbf{Y}, \mathbf{x})$ .

Сказанное выше мы проиллюстрируем результатами вычислительных экспериментов, выполненных с несколькими версиями методов дробления параметров. Для того, чтобы выявить влияние на их работу различных факторов, были проанализированы результаты тестовых расчётов с четырьмя методами:

- A — простейший метод дробления параметров (т. е. алгоритм **GLinPPS**) дополненный процедурой удаления из списка  $\mathcal{L}$  бесперспективных записей;
- B — тот же алгоритм, что и A, но дополненный процедурой сжатия элементов матрицы ИСЛАУ на основе информации о монотонности оценки (см. §9.7а);



Таблица 9.12. Алгоритм LinPPS2

DO WHILE ( ( ведущая оценка  $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$  не точна ) и  $(\omega - \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}) > \epsilon)$  )

по формулам (9.43) вычисляем интервальные расширения для

$$\frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial q_{ij}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial r_i};$$

«сжимаем» в соответствии с (9.41)–(9.42) в  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{r}$  элементы,

на которых выделена монотонность зависимости  $x_\nu$  от  $q_{ij}$  и  $r_i$ ;

уточняем контрольную матрицу  $W$  с помощью процедуры Табл. 9.10;

находим среди элементов системы  $\mathbf{Q}\mathbf{x} = \mathbf{r}$  интервал  $\mathbf{h}$ , который соответствует наибольшему из произведений

$$\left| \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial q_{ij}} \right| \cdot \text{wid } \mathbf{q}_{ij}, \quad \left| \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial r_i} \right| \cdot \text{wid } \mathbf{r}_i, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\};$$

«дробим» элемент  $\mathbf{h}$  и порождаем одну или две ИСЛАУ-потомки  $\mathbf{Q}'\mathbf{x} = \mathbf{r}'$  и  $\mathbf{Q}''\mathbf{x} = \mathbf{r}''$  процедурой из Табл. 9.6;

если порождены две системы-потомка, перевычисляем матрицы

$W'$ ,  $W''$  и векторы  $s'$ ,  $s''$ ,  $t'$ ,  $t''$  процедурами из Табл. 9.7

и Табл. 9.8–9.9; иначе присваиваем  $W' \leftarrow W$ ,  $s' \leftarrow s$ ,  $t' \leftarrow t$ ;

вычисляем интервальный вектор  $\mathbf{x}' \leftarrow \text{Encl}(\mathbf{Q}', \mathbf{r}')$  и, возможно,

$\mathbf{x}'' \leftarrow \text{Encl}(\mathbf{Q}'', \mathbf{r}'')$ , беря  $\mathbf{x}$  в качестве начального приближения;

присваиваем оценку  $v' \leftarrow \Upsilon(\mathbf{Q}', \mathbf{r}')$  и, возможно,  $v'' \leftarrow \Upsilon(\mathbf{Q}'', \mathbf{r}'')$ ;

уточняем оценку обратной интервальной матрицы  $\mathbf{Y}' \supseteq (\mathbf{Q}')^{-1}$

и, возможно,  $\mathbf{Y}'' \supseteq (\mathbf{Q}'')^{-1}$ , беря  $\mathbf{Y}$  начальным приближением;

вычисляем оценку  $\Upsilon(\text{mid } \mathbf{Q}', \text{mid } \mathbf{r}')$  и, возможно,  $\Upsilon(\text{mid } \mathbf{Q}'', \text{mid } \mathbf{r}'')$

и присваиваем  $\mu \leftarrow \min\{\Upsilon(\text{mid } \mathbf{Q}', \text{mid } \mathbf{r}'), \Upsilon(\text{mid } \mathbf{Q}'', \text{mid } \mathbf{r}'')\}$ ;

удаляем бывшую ведущую запись  $(\mathbf{Q}, \mathbf{r}, v, W, s, t, \mathbf{Y}, \mathbf{x})$  из списка  $\mathcal{L}$ ;

если  $v' \leq \omega$ , то помещаем запись  $(\mathbf{Q}', \mathbf{r}', v', W', s', t', \mathbf{Y}', \mathbf{x}')$  в рабочий список  $\mathcal{L}$  в порядке возрастания третьего поля;

если ведущая ИСЛАУ породила две системы-потомка и  $v'' \leq \omega$ , то

помещаем запись  $(\mathbf{Q}'', \mathbf{r}'', v'', W'', s'', t'', \mathbf{Y}'', \mathbf{x}'')$  в рабочий список  $\mathcal{L}$  в порядке возрастания третьего поля;

если  $\omega > \mu$ , то присваиваем  $\omega \leftarrow \mu$  и чистим список  $\mathcal{L}$ , т. е. удаляем

из него все такие записи  $(\mathbf{Q}, \mathbf{r}, v, W, s, t, \mathbf{Y}, \mathbf{x})$ , что  $v > \omega$ ;

END DO

- С — тот же алгоритм, что и В, но дополненный процедурой сжатия компонент правой части ИСЛАУ на основе информации о монотонности оценки (см. §9.7a);
- D — алгоритм `LinPPS1`. Он отличается от алгоритма С тем, что рассекаемый элемент в нём выбирается из условия максимизации произведения оценки производной на ширину интервала (как это описано в §9.7б).

Модификация Рона из §9.7в нами в этих алгоритмах не использовалась. Фактически на основании приводимых ниже результатов можно сравнивать даже пять алгоритмов, включая самый простейший алгоритм `GLinPPS` поскольку он отличается от алгоритма А лишь длиной списка.

В качестве базового метода мы использовали интервальный метод Гаусса-Зейделя со стандартным предобуславливанием обратной средней матрицей, и этот же метод использовался для внешнего оценивания «обратной интервальной матрицы» ИСЛАУ. Модельной задачей нам служила интервальная линейная система Ноймайера

$$\begin{pmatrix} \theta & [0, 2] & \cdots & [0, 2] \\ [0, 2] & \theta & \cdots & [0, 2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0, 2] & [0, 2] & \cdots & \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 1] \\ \vdots \\ [-1, 1] \end{pmatrix}, \quad (9.56)$$

которая была предложена в [43] и уже встречалась в Главе 5.

Как и для рассмотренной ранее тестовой системы (9.22), некоторую информацию о строении объединённого множества решений интервальной линейной системы (9.56) можно получить из соображений симметрии. Из-за уравниваемости вектора правой части рассматриваемая ИСЛАУ инвариантна относительно изменения знаков всех компонент решения на противоположный, так что её множество решений  $\Xi'$  является центрально симметричным относительно начала координат, и, в частности,

$$\min\{x_i \mid x \in \Xi'\} = -\max\{x_i \mid x \in \Xi'\}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (9.57)$$

Так как для любых  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  после замены  $x_i$  на  $x_j$  и наоборот интервальная система (9.56) остается неизменной, то множество  $\Xi'$  симметрично относительно биссектрисы положительного и отрицательного ортантов пространства  $\mathbb{R}^n$ , так что

$$\begin{aligned} \min\{x_i \mid x \in \Xi'\} &= \min\{x_j \mid x \in \Xi'\}, \\ \max\{x_i \mid x \in \Xi'\} &= \max\{x_j \mid x \in \Xi'\} \end{aligned}$$

для любых  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Сопоставляя эти соотношения с (9.57), можно заключить, что интервальная оболочка множества решений  $\Xi'$  системы (9.56) является гиперкубом с центром в начале координат. В частности, для размерности  $n = 3$  и значения диагонального параметра  $\theta = 3.5$  оптимальные внешние оценки множества решений системы Ноймайера (изображённого на Рис. 5.3) равны  $[-1.76471, 1.76471]$  по каждой координате.

При приближении значения  $\theta$  к границам неособенности ( $n$  для чётных размерностей и  $\sqrt{n^2 - 1}$  для нечётных) размеры объединённого множества решений ИСЛАУ (9.56) неограниченно возрастают. Варьируя  $\theta$  легко получить набор тестов для

проверки развитых нами алгоритмов оптимального решения «внешней задачи» для ИСЛАУ.

Наконец, для интервальной  $7 \times 7$ -системы Ноймайера с диагональю 10 алгоритмы А, В и С вообще не просчитывают оптимальную оценку объединённого множества решений до конца даже за время порядка часов. Дело в том, что примерно после 50000 итераций алгоритма «быстрая» оперативная память ЭВМ оказывается исчерпанной списком  $\mathcal{L}$  и начинающийся обмен с «медленной» памятью на жёстком магнитном диске практически сводит на нет производительность процессора, так что вычисления делаются чрезвычайно медленными. Но наиболее продвинутый алгоритм D всё же позволяет успешно решить задачу до конца за 112 секунд процессорного времени, сделав 5246 итераций-бисекций при максимальной длине списка 4050.

Из анализа результатов прогонов можно сделать выводы об эффективности тех или иных модификаций методов дробления параметров. Довольно неожиданными являются данные о процессорном времени решения задач, согласно которым алгоритм В оказывается наименее эффективным. То есть, затраты на исследование монотонности только по элементам матрицы оборачиваются (по крайней мере, для систем Ноймайера) лишь утяжелением алгоритма.

## 9.8 Последовательно гарантирующие и финально гарантирующие алгоритмы

Предположим, что нам предъявлена труднорешаемая интервальная задача (можно даже отвлечься от требования оптимальности её решения). При сколько-нибудь значительных её размерах типична ситуация, когда

*количество машинных операций и/или памяти, необходимых для полного и точного решения поставленной задачи, превосходит ресурсы вычислительной системы, имеющейся в распоряжении.*

Это условие столь важно для наших последующих рассуждений, что достойно выделения специальным именем, и мы будем называть его *допущением о преобладании сложности* задачи над возможностями ЭВМ. В подобной ситуации мы, скорей всего, столкнемся с необходимостью насильственной остановки вычислений (например, из-за истечения срока аренды ЭВМ, либо в силу необходимости получения хоть каких-то результатов в установленный срок и т. п.) и довольствоваться тем, что уже насчитано к моменту остановки. Главная неприятность при таком развитии событий состоит в том, что поспешно выдаваемый интервальный ответ может даже не удовлетворять нужному способу оценивания, и, следовательно, не является решением поставленной интервальной задачи оценивания (т.к. используемый нами алгоритм «до конца» не доработал). В этом случае затраченное нами машинное время и другие ресурсы фактически пропадут впустую.<sup>2</sup>

<sup>2</sup>Возможный выход из этого положения — не дожидаясь полного исчерпания ресурсов ЭВМ, остановить трудоёмкий алгоритм и попытаться за оставшееся время получить хоть какое-то решение задачи другим, «быстрым» методом. Но мы не будем рассматривать таких вычислительных процессов. Следуя терминологии А.Г. Сухарева [16], можно сказать, что в наших рассуждениях итоговая операция алгоритма остается неизменной.

Целесообразно поэтому разделить все интервальные алгоритмы на «хорошие» и «плохие» в зависимости от того, обеспечивают ли они требуемый задачей способ оценивания интервального ответа лишь в момент своей естественной остановки, когда проработывают «до конца», или же этот способ оценивания достигается для последовательного ряда эффективно вычисляемых промежуточных результатов, каждый из которых, следовательно, может быть выдан в качестве правильного ответа задачи при прерывании алгоритма в любой момент. При сделанном нами допущении о преобладании сложности, когда трудоёмкость решения задачи значительно превосходит возможности ЭВМ именно алгоритмы второго класса более предпочтительны с точки зрения обеспечения гарантированности (удовлетворения заданному способу оценивания) результата вычислений. Далее будем называть такие алгоритмы *последовательно гарантирующими* (пошагово гарантирующими) или же *алгоритмами с последовательной гарантией*, в отличие от *финально гарантирующих*, или *алгоритмов с финальной гарантией*, которые обеспечивают нужный способ оценивания результата лишь по завершении их работы. В известном смысле проведенное нами разделение «интервальных» алгоритмов является аналогом существующего в традиционной вычислительной математике противопоставления «итерационные методы — прямые методы».

Таким образом, мы принимаем следующее

**Определение 9.8.1** *Алгоритм для решения интервальной задачи оценивания назовём последовательно гарантирующим, если при своём выполнении он порождает последовательность (конечную или бесконечную) эффективно вычисляемых ответов решаемой задачи (т. е. приближённых оценок решения, удовлетворяющих требуемому способу оценивания).*

*Алгоритм, решающий интервальную задачу оценивания, назовём финально гарантирующим, если он выдаёт ответ к решаемой задаче лишь при естественном завершении своей работы.*

Итоговый результат последовательно гарантирующего алгоритма может быть пределом бесконечной последовательности промежуточных ответов, или последним членом некоторой конечной последовательности, или же ещё чем то иным. Кроме того, при конкретизации определения последовательно гарантирующего алгоритма можно исходить из того, что по современным представлениям эффективно вычисляемыми считаются алгоритмы с полиномиальной верхней оценкой сложности.

Естественно, что сфера действия введённой нами классификации интервальных алгоритмов не является строго очерченной, поскольку не вполне строг смысл самого понятия труднорешаемости. Несомненную пользу она способна принести и при рассмотрении, например, полиномиально сложных алгоритмов, не являющихся «трудными» в традиционном понимании, но которые имеется в виду использовать в ситуации, когда выполнено допущение о преобладании сложности. Поэтому будет более правильным, хотя и менее строгим, определить последовательно гарантирующие алгоритмы, как противоположность к финально гарантирующим, т. е. к таким, которые обеспечивают правильный ответ задачи лишь при своём естественном завершении.

Впервые понятия последовательно гарантирующего алгоритма и финально гарантирующего алгоритма были введены автором в работе [57] применительно к алгоритмам для нахождения оптимальных решений «внешней задачи» для интервальных

алгебраических систем, но, основные его положения и выводы, как нетрудно понять, в равной мере применимы к алгоритмам для любых труднорешаемых интервальных задач оценивания. Мы, в свою очередь, имея общее понимание того, что является интервальной задачей смогли корректно распространить концепцию последовательной гарантии на все алгоритмы для решения подобных задач.

Для иллюстрации вышесказанного обратимся к рассмотренной в этой главе задаче оптимального внешнего оценивания объединённого множества решений ИСЛАУ. На сегодняшний день существуют четыре принципиально различных подхода к вычислению оптимальных (точных) оценок объединённого множества решений для общих интервальных линейных систем. Первый из них восходит к работе У. Оеттли [46], который обнаружил, что пересечение объединённого множества решений с ортантами пространства  $\mathbb{R}^n$  является выпуклым полиэдром. Таким образом, точное значение  $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi\}$  может быть найдено путём решения в каждом из ортантов некоторой задачи линейного программирования и последующим взятием минимума из результатов. Но этот алгоритм, как нетрудно понять, основывается на пассивной переборной стратегии, а трудоёмкость его экспоненциально растёт в зависимости от размерности  $n$ . Поэтому практическая значимость его невелика.

Следующий подход к оптимальному решению «внешней задачи» для ИСЛАУ — это метод Рона, изложенный в §9.3. Отталкиваясь от характеристики Оеттли-Прагера (5.20) для объединённого множества решений, он показал, что для случая квадратной неособенной матрицы  $\mathbf{A}$  искомые значения  $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi\}$  и  $\max\{x_\nu \mid x \in \Xi\}$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, n$ , достигаются на множестве не более чем  $2^n$  так называемых экстремальных решений системы неравенств Оеттли-Прагера (9.5). Вычисляя все возможные экстремальные решения и сравнивая их между собой, мы получим оптимальные оценки множества решений за конечное число шагов. Поскольку процесс определения каждого последующего экстремального решения для системы неравенств Оеттли-Прагера никак не зависит от решений, уже найденных раньше, метод Рона в целом является пассивным (т. е. подобен переборным алгоритмам), в то время как его трудоёмкость пропорциональна  $2^n$  в худшем случае.

Наконец, ещё два вычислительных подхода к оптимальному решению «внешней задачи» для квадратных интервальных линейных систем — это методы дробления решений и методы дробления параметров (PSS-методы и PPS-методы), рассмотренные в §§9.4–9.7. Хотя в худшем случае сложность выполнения методов дробления решений пропорциональна  $2^n$ , а верхняя оценка сложности выполнения методов дробления параметров равна даже  $2^{2^n}$ , эти методы являются *адаптивными* в отличие от подхода Оеттли. При исполнении каждого последующего шага как в методах дробления решений, так и в методах дробления параметров мы, основываясь на стратегии «метода ветвей и границ», существенно используем информацию о ходе и результатах исполнения предыдущих шагов. Алгоритмы подобного типа являются более предпочтительными в практических вычислениях, поскольку имеют более гибкую вычислительную схему, позволяющую им подстраиваться под конкретную решаемую задачу.

Таким образом, все подходы, разработанные к настоящему моменту для вычисления оптимальных решений «внешней задачи» для общих интервальных линейных систем имеют экспоненциальную в наихудшем случае трудоёмкость. Но этот факт не является следствием «плохости» самих алгоритмов, а отражает глубокие свойства

самого объединённого множества решений интервальных линейных систем. Как мы уже неоднократно отмечали (см. §4.4 и далее), даже задача распознавания того, пусто или нет множество  $\Xi$ , является NP-полной. NP-трудна также задача вычисления оптимальных по координатным оценкам объединённого множества решений. Следовательно, экспоненциальная сложность всех перечисленных выше алгоритмов является существенной и не может быть устранена (при повсеместно принимаемом условии « $P \neq NP$ ») [3].

Каковы же преимущества и недостатки методов дробления решений и методов дробления параметров в сравнении с другими подходами для нахождения оптимальных решений «внешней задачи»? Наиболее важная особенность методов дробления решений и параметров состоит в том, что они порождают последовательности приближённых оценок искомым величин «с нужной стороны», т. е. для  $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi\}$  снизу, а для  $\max\{x_\nu \mid x \in \Xi\}$  сверху. Именно такие оценки и требуются в соответствии со смыслом «внешней задачи». Процесс выполнения метода дробления параметров, например, разбивается на ряд эффективно вычисляемых этапов-шагов, в результате каждого из которых мы получаем некоторое решение «внешней задачи». После того, как в подобном алгоритме проработал хотя бы один из этих этапов, остановка алгоритма приведёт к тому, что в любой момент мы всё равно будем иметь в своём распоряжении некоторое решение «внешней задачи». Иными словами, если у нас имеются достаточные вычислительные мощности, то, реализуя методы дробления параметров (равно как и методы дробления решений) мы можем быть вполне уверены, что некоторый ответ к задаче будет наверняка получен, хотя, возможно, и не оптимальный. Следовательно, как методы дробления решений, так и методы дробления параметров являются *последовательно гарантирующими*. С учётом труднорешаемости «внешней задачи» для интервальных линейных систем, это свойство радикальным образом выделяет методы дробления решений и методы дробления параметров из всех других подходов для вычисления оптимального решения.

Напротив, два других рассмотренных подхода к нахождению оптимальных решений «внешней задачи», — Оеттли и Рона, — имея экспоненциальную в худшем случае трудоёмкость, дают желаемые «внешние» оценки объединённого множества решений лишь в финале, при естественном завершении своей работы, поскольку раньше мы не можем гарантировать то, что вычисленная оценка в действительности не превосходит  $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi\}$  (соответственно, не меньше  $\max\{x_\nu \mid x \in \Xi\}$ ). Следовательно, эти алгоритмы являются *финально гарантирующими*. Если размерность интервальной линейной системы достаточно велика (всего несколько десятков), то, в силу труднорешаемости «внешней задачи», количество арифметических и логических операций, необходимое для того, чтобы задача была наверняка решена, начинает превосходить количество операций, выполнимое на сколь угодно мощном компьютере за любое разумное время (час, день, год или даже столетие). В этих условиях совершенно нельзя быть уверенным, что финально гарантирующий алгоритм, будучи применённым к задаче, вообще завершит свою работу и будет получено решение поставленной задачи. Иначе говоря, применяя финально гарантирующий алгоритм, мы рискуем совершенно попусту растратить время и деньги без того, чтобы получить хоть какой-то ответ к нашей задаче.

Этот пессимистичный прогноз особенно справедлив для пассивных переборных алгоритмов, которыми являются подходы Оеттли-Прагера и Рона к оптимальному

решению «внешней задачи» для ИСЛАУ. Ситуация была бы более благоприятной, если бы эти алгоритмы являлись адаптивными: в этом случае их экспоненциальная трудоёмкость достигалась бы лишь на наихудших вариантах, а в среднем, для «не очень плохих задач», алгоритмы работали бы с приемлемыми трудозатратами. Но, к сожалению, это не так.

Итак, финально гарантирующие алгоритмы малопригодны для практического решения больших труднорешаемых задач, ответ на которые должен удовлетворять некоторым качественным требованиям. Естественный выход из создавшегося затруднения состоит в переконструировании алгоритма таким образом, чтобы он выдавал в процессе своего выполнения, до своего полного естественного завершения, некоторые несложно вычисляемые промежуточные результаты, которые могут служить более или менее точными ответами к решаемой задаче. Именно это подразумевается определением последовательно гарантирующего алгоритма.

Отметим, что алгоритмы из [46, 45, 51] для нахождения оптимальных решений «внешней задачи» являются последовательно гарантирующими, но относительно «слабого внутреннего» оценивания, описанного в примере (С) из §4.3б. Фактически, эти алгоритмы решают не «внешнюю», а некоторую другую задачу для интервальной линейной системы, требующую оценивания  $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi\}$  сверху и  $\max\{x_\nu \mid x \in \Xi\}$  снизу, иными словами, когда оценивание должно проводиться *слабым внутренним* образом.

Обратимся к линейной задаче о допусках для интервальной системы линейных уравнений  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , т. е. к задаче о внутреннем интервальном оценивании «допускового множества решений»  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ . Изложенный в Главе 6 «центровой подход» к её решению является, очевидно, последовательно гарантирующим: отыскание центра интервального решения сводится к максимизации вогнутого функционала и, следовательно, эффективно осуществляется за полиномиальное время, а дальнейшее «раздувание» центра до интервального решения задачи о допусках хотя и выполняется экспоненциально сложными алгоритмами, но все его промежуточные результаты содержатся в  $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ .

Естественно, что признание какого-либо алгоритма последовательно гарантирующим или же финально гарантирующим не должно восприниматься как «окончательный приговор» для него. Лучше рассматривать наличие последовательной гарантии или её отсутствие лишь как ещё одну, дополнительную характеристику этого алгоритма, которая в некоторых случаях позволит более компетентно решить вопрос о его практической применимости. Несомненно, что ценность обладания этим качеством различна для различных алгоритмов и наивысшей она является для наиболее трудоёмких алгоритмов.

К примеру, значительная часть этой книги посвящена развитию так называемого «формального подхода» к решению различных задач внутреннего и внешнего оценивания множеств решений интервальных систем уравнений. Это подход является финально гарантирующим, так как искомая интервальная оценка находится лишь по завершении процесса решения вспомогательного «уравнения в дуализациях», т. е. задачи, которая, как было показано А.В. Лакеевым [39, 40], в большинстве случаев NP-трудна (труднорешаема). Тем не менее, при практическом решении с помощью формального подхода различных постановок для интервальных линейных систем  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  с «не слишком широкими» интервальными матрицами субдифференциаль-

ный метод Ньютона (см. Главу 12) демонстрирует столь высокую вычислительную эффективность, что даже не вполне ясно, нужно ли в данной ситуации что-либо лучшее.

## 9.9 Методы дробления параметров для интервальных систем со связями

Предмет этого параграфа — задачи оценивания множеств решений интервальных систем уравнений, на элементы которых наложены некоторые связи. Мы подробно исследуем случай интервальных симметричных линейных систем, которые были введены и рассматривались в §5.6. На некоторые другие типы ИСЛАУ со связями — имеющими кососимметричные, персимметричные, ганкелевы, тёплицевы или циркулянтные матрицы — наши рассуждения могут быть перенесены с небольшими модификациями.

Пусть дана интервальная симметричная система линейных алгебраических уравнений, т. е. интервальная система вида

$$Ax = b, \quad A^T = A,$$

которая понимается как совокупность всех линейных систем уравнений  $Ax = b$  с  $A \in \mathbf{A}$  и  $b \in \mathbf{b}$ , удовлетворяющих условию симметричности матрицы  $A^T = A$ . Нас интересует внешнее интервальное оценивание её объединённого множества решений

$$\Xi^{sym}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(A = A^T \text{ и } Ax = b)\}.$$

Мы решаем, таким образом, задачу:

Найти (по-возможности, меньший) брус  $U$ , содержащий множество решений  $\Xi^{sym}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  интервальной симметричной системы линейных алгебраических уравнений  $Ax = b$ .

(9.58)

В свою очередь, эта задача может быть редуцирована к следующей покомпонентной форме:

Для симметричной интервальной линейной системы уравнений  $Ax = b$  найти как можно более точные оценки для  $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi^{sym}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$  снизу и для  $\max\{x_\nu \mid x \in \Xi^{sym}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$  сверху,  $\nu = 1, 2, \dots, n$ .

(9.59)

В этой постановке, как и ранее, можно ограничиться вычислением только минимума  $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi^{sym}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$ , поскольку

$$\max\{x_\nu \mid x \in \Xi^{sym}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\} = -\min\{x_\nu \mid x \in \Xi^{sym}(\mathbf{A}, -\mathbf{b})\}.$$



Ниже мы предполагаем неособенность интервальной матрицы  $\mathbf{A}$ , т. е. неособенность всех точечных матриц из  $\mathbf{A}$ .

## 9.9а Теория

Для уточнения внешних оценок множеств решений интервальных систем уравнений в §§9.6–9.7 были подробно разработаны *методы дробления параметров*, основанные на идее адаптивного (т. е. подстраивающегося под задачу и текущий результат) дробления интервалов входных данных. Для интервальных линейных систем с независимыми величинами в интервальных параметрах вычислительная схема методов дробления параметров выглядит особенно просто, так как экстремальные оценки их множества решений достигаются на крайних матрицах и правых частях (теорема Бекка-Никеля, стр. 274). Дробление интервальных параметров системы сводится в этом случае, фактически, к распадению интервалов на концы.

Но для систем со связанными параметрами этот факт, как уже отмечалось, в общем случае неверен. Таким образом, описанная в §§9.6–9.7 вычислительная схема методов дробления параметров не применима напрямую для решения задач (9.58)–(9.59). Тем не менее, путём несложной модификации исходной схемы мы можем исправить это положение, получив в результате методы для вычисления точных (оптимальных) оценок множеств решений ИСЛАУ со связями.

Основная идеи этой модификации просты и естественны:

- мы отказываемся от поконцевого дробления элементов интервальной системы и дробим интервальные параметры системы на подинтервалы ненулевой длины, в объединении дающие исходный дробимый интервал, т. е. так, как это обычно делается в интервальных методах глобальной оптимизации,
- мы дробим интервальные параметры системы уравнений так, чтобы получающиеся системы-потомки соответствовали связям, накладываемым на систему.

Например, если рассматривается интервальная симметричная система уравнений, то в единичном акте дробления должны одновременно дробиться симметричные относительно главной диагонали элементы матрицы, чтобы получающиеся ИСЛАУ снова имели интервальные симметричные системы. Если же матрица исходной системы была интервальной кососимметричной (персимметричной, ганкелевой, тёплицевой, циркулянтной и т. п.), то и системы-потомки на каждом шаге алгоритма должны порождаться так, чтобы иметь кососимметричную (персимметричную, ганкелеву, тёплицеву, циркулянтную и т. п.) матрицу. Аналогично нужно поступать и с более сложными видами связей.

Дробление интервалов на части ненулевой ширины сразу же замедляет алгоритм и увеличивает его трудоёмкость, и это необходимая цена за учёт связей (зависимостей) произвольного вида. Но для некоторых частных видов интервальных зависимостей между элементами системы всё-таки можно сохранить упрощённое дробление некоторых элементов на концы. В частности, для интервальных симметричных систем достаточно дробить на половинки только интервальные элементы матрицы, сохраняя симметричность потомков, а компоненты правой части ИСЛАУ можно дробить «поконцевым» образом. Это следует из результата Теоремы 5.6.3, уточняющей

теорему Бекка-Никеля. В этом параграфе мы подробно рассмотрим именно такую модификацию PPS-алгоритма.

Для реализации наших планов, обозначим, как и ранее,

$Encl$  — некоторый фиксированный метод внешнего оценивания множеств решений ИСЛАУ, который будем называть *базовым методом*;

$Encl(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$  — получаемый с его помощью интервальный вектор внешней оценки  $\Xi^{sym}(\mathbf{Q}\mathbf{r})$  для множества решений системы  $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$ , т. е.  $Encl(\mathbf{Q}, \mathbf{r}) \in \mathbb{R}^n$  и

$$Encl(\mathbf{Q}, \mathbf{r}) \supseteq \Xi^{sym}(\mathbf{Q}, \mathbf{r});$$

$\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$  — нижний конец  $\nu$ -ой компоненты (для заданного фиксированного номера  $\nu \in \{1, 2, \dots, n\}$ ) внешней интервальной оценки  $\Xi^{sym}(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$  множества решений, получаемой методом  $Encl$ , т. е.

$$\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}) := \left( \underline{Encl(\mathbf{Q}, \mathbf{r})} \right)_\nu. \quad (9.60)$$

Подчеркнем, что, коль скоро  $\Xi^{sym}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \subseteq \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , то в качестве базовых методов можно брать традиционные и хорошо разработанные методы внешнего оценивания множеств решений ИСЛАУ без связей, описанные, к примеру, в Главе 7. Получается, что алгоритм оценивания множеств решений ИСЛАУ со связями конструируется из более простых и грубых методов решения ИСЛАУ с независимыми данными.

Мы потребуем лишь от базового метода  $Encl$  удовлетворения «условию монотонности» (9.38) и «условию точности» (9.40) из §9.6б. Имеем

$$\min\{x_\nu \mid x \in \Xi^{sym}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\} = \left( \tilde{A}^{-1}\tilde{b} \right)_\nu$$

для некоторых точечной симметричной матрицы  $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и точечного вектора  $\tilde{b} = (\tilde{b}_i) \in \mathbb{R}^n$ , составленных из представителей элементов матрицы  $\mathbf{A}$  и вектора  $\mathbf{b}$ , причём по самому определению оценки  $\Upsilon$

$$\Upsilon(\tilde{A}, \tilde{b}) \leq \left( \tilde{A}^{-1}\tilde{b} \right)_\nu.$$

Предположив, что в матрице  $\mathbf{A}$  симметричные относительно главной диагонали элементы  $\mathbf{a}_{ij}$  и  $\mathbf{a}_{ji}$  имеют ненулевую ширину, обозначим

$\mathbf{A}'$  — матрицу, полученную из  $\mathbf{A}$  заменой элементов  $\mathbf{a}_{ij}$  и  $\mathbf{a}_{ji}$  на  $[\underline{\mathbf{a}}_{ij}, \text{mid } \mathbf{a}_{ij}]$ ,

$\mathbf{A}''$  — матрицу, полученную из  $\mathbf{A}$  заменой элементов  $\mathbf{a}_{ij}$  и  $\mathbf{a}_{ji}$  на  $[\text{mid } \mathbf{a}_{ij}, \bar{\mathbf{a}}_{ij}]$ ,

$\tilde{\mathbf{A}}'$  — матрицу, полученную из  $\tilde{\mathbf{A}}$  заменой элементов  $\tilde{a}_{ij}$  и  $\tilde{a}_{ji}$  на  $[\underline{\mathbf{a}}_{ij}, \text{mid } \mathbf{a}_{ij}]$ ,

$\tilde{\mathbf{A}}''$  — матрицу, полученную из  $\tilde{\mathbf{A}}$  заменой элементов  $\tilde{a}_{ij}$  и  $\tilde{a}_{ji}$  на  $[\text{mid } \mathbf{a}_{ij}, \bar{\mathbf{a}}_{ij}]$ .

Интервальные системы линейных алгебраических уравнений  $\mathbf{A}'x = \mathbf{b}$  и  $\mathbf{A}''x = \mathbf{b}$ , полученные из исходной системы путём рассечения пары симметричных относительно главной диагонали интервальных элементов пополам, мы будем называть *системами-потомками* для  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ .

Далее, так как

$$\tilde{\mathbf{A}}' \subseteq \mathbf{A}' \subseteq \mathbf{A}, \quad \tilde{\mathbf{A}}'' \subseteq \mathbf{A}'' \subseteq \mathbf{A},$$

и  $\tilde{\mathbf{b}} \subseteq \mathbf{b}$ , то «свойство монотонности» (9.38) имеет своим следствием неравенства

$$\Upsilon(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \leq \Upsilon(\mathbf{A}', \mathbf{b}) \leq \Upsilon(\tilde{\mathbf{A}}', \tilde{\mathbf{b}})$$

и

$$\Upsilon(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \leq \Upsilon(\mathbf{A}'', \mathbf{b}) \leq \Upsilon(\tilde{\mathbf{A}}'', \tilde{\mathbf{b}}).$$

Следовательно, беря почленный минимум от соответствующих частей неравенств, мы получим

$$\Upsilon(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \leq \min\{\Upsilon(\mathbf{A}', \mathbf{b}), \Upsilon(\mathbf{A}'', \mathbf{b})\} \leq \min\{\Upsilon(\tilde{\mathbf{A}}', \tilde{\mathbf{b}}), \Upsilon(\tilde{\mathbf{A}}'', \tilde{\mathbf{b}})\}. \quad (9.61)$$

Кроме того, поскольку матрица  $\tilde{\mathbf{A}}$  обязательно содержится либо в  $\tilde{\mathbf{A}}'$ , либо в  $\tilde{\mathbf{A}}''$ , то справедливо, по крайней мере, одно из неравенств

$$\Upsilon(\tilde{\mathbf{A}}', \tilde{\mathbf{b}}) \leq \Upsilon(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{b}}) \quad \text{или} \quad \Upsilon(\tilde{\mathbf{A}}'', \tilde{\mathbf{b}}) \leq \Upsilon(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{b}}),$$

так что

$$\begin{aligned} \min\{\Upsilon(\tilde{\mathbf{A}}', \tilde{\mathbf{b}}), \Upsilon(\tilde{\mathbf{A}}'', \tilde{\mathbf{b}})\} &\leq \Upsilon(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{b}}) \leq (\tilde{\mathbf{A}}^{-1}\tilde{\mathbf{b}})_{\nu} \\ &= \min\{x_{\nu} \mid x \in \Xi^{sym}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}. \end{aligned} \quad (9.62)$$

Сопоставление неравенств (9.61) и (9.62) приводит к соотношению

$$\Upsilon(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \leq \min\{\Upsilon(\mathbf{A}', \mathbf{b}), \Upsilon(\mathbf{A}'', \mathbf{b})\} \leq \min\{x_{\nu} \mid x \in \Xi^{sym}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\},$$

и, как следствие, к следующему практическому рецепту:

*решив две интервальных линейных «системы-потомка»*

$$\mathbf{A}'x = \mathbf{b} \quad \text{и} \quad \mathbf{A}''x = \mathbf{b},$$

*мы можем прийти, вообще говоря, к более точной оценке снизу для искомого значения  $\min\{x_{\nu} \mid x \in \Xi^{sym}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$  в виде*

$$\min\{\Upsilon(\mathbf{A}', \mathbf{b}), \Upsilon(\mathbf{A}'', \mathbf{b})\}.$$

Такой же эффект имеет и дробление в векторе правых частей  $\mathbf{b}$  какой-нибудь компоненты  $\mathbf{b}_i$  на подинтервалы  $[\underline{\mathbf{b}}_i, \text{mid } \mathbf{b}_i]$  и  $[\text{mid } \mathbf{b}_i, \overline{\mathbf{b}}_i]$ , что может быть обосновано выкладками, подобными (9.61)–(9.62). Но такой способ дробления был бы упрощённым решением вопроса. Основываясь на результате Теоремы 5.6.3, мы можем провести более тонкие рассуждения и оценки, касающиеся дробления интервалов правой части и аналогичные тем, что были проделаны при обосновании базового варианта PPS-методов в §9.6б. Они показывают, что правую часть в симметричной интервальной линейной системе мы можем дробить «по концам», а не на половинки. Поэтому впредь для единообразия договоримся посредством  $\mathbf{A}'x = \mathbf{b}'$  и  $\mathbf{A}''x = \mathbf{b}''$  обозначать ИСЛАУ-«потомки», получающиеся из  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  с помощью

Таблица 9.13. Простейший метод дробления параметров для интервальных симметричных линейных систем

<p>Вход</p> <p>Интервальная симметричная линейная система <math>\mathbf{Ax} = \mathbf{b}</math>.            Номер оцениваемой компоненты <math>\nu \in \{1, 2, \dots, n\}</math>. Допуск <math>\delta &gt; 0</math>.            Метод <i>Encl</i>, формирующий оценку <math>\Upsilon</math> по правилу (9.60).</p>
<p>Выход</p> <p>Оценка <math>Z</math> снизу для <math>\min\{x_\nu \mid x \in \Xi^{sym}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}</math>.</p>
<p>Алгоритм</p> <p>присваиваем <math>\mathbf{Q} \leftarrow \mathbf{A}</math> и <math>\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{b}</math>;            вычисляем оценку <math>v \leftarrow \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})</math>;            инициализируем рабочий список <math>\mathcal{L} \leftarrow \{(\mathbf{Q}, \mathbf{r}, v)\}</math>;            DO WHILE ( максимум ширины элементов в <math>\mathbf{Q}</math> и <math>\mathbf{r}</math> больше <math>\delta</math> )              в матрице <math>\mathbf{Q} = (q_{ij})</math> и векторе <math>\mathbf{r} = (r_i)</math> выбираем элемент <math>\mathbf{s}</math>, имеющий наибольшую ширину;              порождаем интервальные линейные системы-потомки <math>\mathbf{Q}'x = \mathbf{r}'</math> и <math>\mathbf{Q}''x = \mathbf{r}''</math> следующим образом:              если <math>\mathbf{s} = q_{kl}</math> для некоторых <math>k, l \in \{1, 2, \dots, n\}</math>, то                <math>q'_{ij} \leftarrow q''_{ij} \leftarrow q_{ij}</math> для <math>(i, j) \neq (k, l)</math> или <math>(i, j) \neq (l, k)</math>,                <math>q'_{lk} \leftarrow q'_{kl} \leftarrow [\underline{q}_{kl}, \text{mid } q_{kl}]</math>, <math>q''_{lk} \leftarrow q''_{kl} \leftarrow [\text{mid } q_{kl}, \bar{q}_{kl}]</math>,                <math>r'_i \leftarrow r''_i \leftarrow r_i</math>;              если <math>\mathbf{s} = r_k</math> для некоторого <math>k \in \{1, 2, \dots, n\}</math>, то                <math>Q' \leftarrow Q'' \leftarrow Q</math>, <math>r'_k \leftarrow [\underline{r}_k, \text{mid } r_k]</math>, <math>r''_k \leftarrow [\text{mid } r_k, \bar{r}_k]</math>,                <math>r'_i \leftarrow r''_i \leftarrow r_i</math> для <math>i \neq k</math>;              вычисляем оценки <math>v' \leftarrow \Upsilon(\mathbf{Q}', \mathbf{r}')</math> и <math>v'' \leftarrow \Upsilon(\mathbf{Q}'', \mathbf{r}'')</math>;              удаляем из <math>\mathcal{L}</math> бывшую ведущей запись <math>(\mathbf{Q}, \mathbf{r}, v)</math>;              заносим записи <math>(\mathbf{Q}', \mathbf{r}', v')</math> и <math>(\mathbf{Q}'', \mathbf{r}'', v'')</math> в список <math>\mathcal{L}</math>              в порядке возрастания третьего поля;              обозначаем первую запись списка через <math>(\mathbf{Q}, \mathbf{r}, v)</math>;            END DO  <math>Z \leftarrow v</math>;</p>

- дробления пополам одного интервального элемента в матрице  $\mathbf{A}$  или
- дробления одной интервальной компоненты в векторе  $\mathbf{b}$  на её концы.

Процедуру улучшения оценки  $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi^{sym}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$  с помощью дробления элементов интервальной системы (9.1) можно повторить по отношению к системам-потомкам  $\mathbf{A}'x = \mathbf{b}'$  и  $\mathbf{A}''x = \mathbf{b}''$ , затем снова разбить потомков от  $\mathbf{A}'x = \mathbf{b}'$  и  $\mathbf{A}''x = \mathbf{b}''$  и снова улучшить оценку и т. д. Мы оформим подобный процесс последовательного улучшения оценки снизу для  $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi^{sym}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$  так, как это делается в широко известном в комбинаторной оптимизации «методе ветвей и границ» [14] и как это было адаптировано для интервальных методов глобальной оптимизации (см. §3.6):

во-первых, организуем все интервальные системы  $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$ , которые возникают в процессе дробления исходной ИСЛАУ  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ , вместе с их оценками  $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$  в некоторый список  $\mathcal{L}$ ;

во-вторых, дробить будем лишь ту интервальную систему  $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$  из рабочего списка  $\mathcal{L}$ , которая обеспечивает рекордную (наилучшую) на данный момент оценку  $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$  для искомой величины  $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi^{sym}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$ ;

в-третьих, в подвергаемой дроблению ИСЛАУ мы будем дробить лишь самый широкий из интервальных элементов.

Итак, в процессе выполнения алгоритма мы будем поддерживать список  $\mathcal{L}$ , состоящий из записей-троек вида

$$(\mathbf{Q}, \mathbf{r}, \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})),$$

где

$\mathbf{Q}$  — интервальная  $n \times n$ -матрица,  $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{A}$ ,

$\mathbf{r}$  — интервальный  $n$ -вектор,  $\mathbf{r} \subseteq \mathbf{b}$ .

Кроме того, образующие список  $\mathcal{L}$  записи будут упорядочены по возрастанию значений оценки  $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$ , а первую запись рабочего списка, так же как и соответствующие ИСЛАУ  $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$  и оценку  $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$  (рекордную в списке), мы будем называть *ведущими* на данном шаге. Полный псевдокод получающегося нового алгоритма, который мы аналогично [20] также назовём *методом дробления параметров*, представлен в Табл. 9.13 (где через « $\leftarrow$ » обозначен оператор присваивания). Он отличается от метода дробления параметров, представленного ранее способом порождения интервальных систем-потомков из ведущей интервальной системы и условием остановки.

Погрешность результата алгоритма, т.е. расстояние его до искомого  $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi^{sym}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$ , зависит, с одной стороны, от способа получения оценки  $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$ , т.е. от выбранного базового метода для решения ИСЛАУ-потомков, а с другой — от обусловленности точечных систем, образующих последнюю ведущую систему (её можно оценивать в процессе выполнения алгоритма). В частности, для того, чтобы при  $\delta \rightarrow 0$  вычисленное алгоритмом значение стремилось бы к  $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi^{sym}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$ , необходимо и достаточно выполнения «условия точности» (9.40). Если же в исходной ИСЛАУ суммарная ширина интервальных элементов оказывается «большой» в

сравнении с  $\delta$ , то, как правило, простейший метод дробления параметров не будет прорабатывать до конца, и потому целесообразней рассматривать его как итеративную уточняющую процедуру.

### 9.96 Тест на монотонность

Пусть дана интервальная система линейных алгебраических уравнений  $Qx = r$ , и нам известны

$$\frac{\partial x_\nu(Q, r)}{\partial q_{ij}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial x_\nu(Q, r)}{\partial r_i}$$

— интервальные расширения соответствующих производных

$$\frac{\partial x_\nu(Q, r)}{\partial q_{ij}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial x_\nu(Q, r)}{\partial r_i}$$

от  $\nu$ -ой компоненты вектора решения системы уравнений  $Qx = r$  по  $ij$ -ому элементу матрицы  $Q = (q_{ij})$  и  $i$ -ому элементу вектора  $r = (r_i)$ , взятых с учётом наложенных на систему связей. Если интервальные  $n \times n$ -матрица  $\tilde{Q} = (\tilde{q}_{ij})$  и  $n$ -вектор  $\tilde{r} = (\tilde{r}_i)$  образованы из элементов

$$\tilde{q}_{ij} = \begin{cases} [\underline{q}_{ij}, \overline{q}_{ij}], & \text{при} \quad \frac{\partial x_\nu(Q, r)}{\partial q_{ij}} \geq 0, \\ [\overline{q}_{ij}, \underline{q}_{ij}], & \text{при} \quad \frac{\partial x_\nu(Q, r)}{\partial q_{ij}} \leq 0, \\ q_{ij}, & \text{при} \quad \text{int} \frac{\partial x_\nu(Q, r)}{\partial q_{ij}} \ni 0, \end{cases} \quad (9.63)$$

$$\tilde{r}_i = \begin{cases} [\underline{r}_i, \overline{r}_i], & \text{при} \quad \frac{\partial x_\nu(Q, r)}{\partial r_i} \geq 0, \\ [\overline{r}_i, \underline{r}_i], & \text{при} \quad \frac{\partial x_\nu(Q, r)}{\partial r_i} \leq 0, \\ r_i, & \text{при} \quad \text{int} \frac{\partial x_\nu(Q, r)}{\partial r_i} \ni 0, \end{cases} \quad (9.64)$$

где «int» обозначает внутренность интервала, то, очевидно,

$$\min\{x_\nu \mid x \in \Xi^{sym}(\tilde{Q}, \tilde{r})\} = \min\{x_\nu \mid x \in \Xi^{sym}(Q, r)\}.$$

А поскольку количество существенно интервальных (с ненулевой шириной) элементов в  $\tilde{Q}$  и  $\tilde{r}$  может быть, вообще говоря, меньшим, чем в  $Q$  и  $r$ , то, переходя от исходной ИСЛАУ  $Qx = r$  к системе  $\tilde{Q}x = \tilde{r}$ , мы упрощаем задачу вычисления  $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi^{sym}(Q, r)\}$ .

Ранее в интервальном анализе в ряде численных методик уже использовались производные решений систем линейных уравнений по элементам матрицы и правой

части (см., к примеру, Главу 17 книги [1]). Выведем формулы для этих производных с учётом симметричности матрицы системы уравнений.

Пусть  $k$  и  $l$  — некоторые фиксированные индексы, такие что  $1 \leq k \leq l \leq n$ . Распишем систему уравнений  $Qx = r$  в виде

$$\sum_{j=1}^n q_{ij} x_j = r_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (9.65)$$

и продифференцируем по  $q_{kl}$ . Учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial q_{kl}} (q_{ij} x_j) = \frac{\partial q_{ij}}{\partial q_{kl}} x_j + q_{ij} \frac{\partial x_j}{\partial q_{kl}},$$

где

$$\frac{\partial q_{ij}}{\partial q_{kl}} = \begin{cases} 0, & \text{если } (i, j) \neq (k, l), \\ 1, & \text{если } (i, j) = (k, l), \end{cases}$$

мы получим из (9.65)

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n q_{ij} \frac{\partial x_j}{\partial q_{kl}} = 0, \quad \text{если } i \neq k \text{ и } i \neq l, \\ \sum_{j=1}^n q_{ij} \frac{\partial x_j}{\partial q_{kl}} + x_l = 0, \quad \text{если } i = k, \\ \sum_{j=1}^n q_{ij} \frac{\partial x_j}{\partial q_{kl}} + x_k = 0, \quad \text{если } i = l. \end{array} \right.$$

Таким образом, если

$$\frac{\partial x}{\partial q_{kl}} = \left( \frac{\partial x_1}{\partial q_{kl}}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial q_{kl}} \right)^\top,$$

то

$$Q \cdot \frac{\partial x}{\partial q_{kl}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -x_l \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow k\text{-е место} \\ \\ \\ \\ \leftarrow l\text{-е место.} \\ \\ \end{array}$$

По этой причине

$$\frac{\partial x}{\partial q_{kl}} = Q^{-1} \cdot \left( 0, \dots, 0, -x_l, 0, \dots, 0, -x_k, 0, \dots, 0 \right)^\top,$$

и если  $Y = (y_{ij})$  — обратная матрица для  $Q$ , то производные решения вещественной симметричной линейной системы  $Qx = r$  по элементам матрицы даются формулами

$$\frac{\partial x_\nu}{\partial q_{kl}} = -y_{\nu k}x_l - y_{\nu l}x_k.$$

Дифференцирование уравнений (9.65) по  $r_k$  приводит к более простым соотношениям

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n q_{ij} \frac{\partial x_j}{\partial r_k} = 0, & \text{если } i \neq k, \\ \sum_{j=1}^n q_{ij} \frac{\partial x_j}{\partial r_k} = 1, & \text{если } i = k. \end{cases}$$

Таким образом, если

$$\frac{\partial x}{\partial r_k} = \left( \frac{\partial x_1}{\partial r_k}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial r_k} \right)^\top,$$

то

$$Q \cdot \frac{\partial x}{\partial r_k} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow k\text{-е место.}$$

По этой причине

$$\frac{\partial x}{\partial r_k} = Q^{-1} \cdot (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^\top,$$

и если  $Y = (y_{ij})$  — обратная матрица для  $Q$ , то производные решения вещественной симметричной линейной системы  $Qx = r$  по элементам вектора правой части даются формулами

$$\frac{\partial x_\nu}{\partial r_k} = y_{\nu k}.$$

Следовательно, если  $Y = (y_{ij})$  — «обратная интервальная матрица» для  $Q$ , т. е. внешняя интервальная оценка для множества обратных матриц из  $Q$ ,

$$Y \supseteq \{Q^{-1} \mid Q \in Q\},$$

а  $x_k$  и  $x_l$  —  $k$ -ая и  $l$ -ая компоненты некоторого интервального вектора  $x \supseteq \Xi^{sym}(Q, r)$ , то мы можем принять следующие интервальные оценки производных

$$\frac{\partial x_\nu(Q, r)}{\partial q_{kl}} = -y_{\nu k}x_l - y_{\nu l}x_k, \quad \frac{\partial x_\nu(Q, r)}{\partial r_k} = y_{\nu k}.$$

Для интервальных линейных систем с кососимметричными матрицами аналогичные интервальные оценки производных, как нетрудно убедиться, имеют вид

$$\frac{\partial x_\nu(Q, r)}{\partial q_{kl}} = -y_{\nu k}x_l + y_{\nu l}x_k, \quad \frac{\partial x_\nu(Q, r)}{\partial r_k} = y_{\nu k}.$$



Вычисление «обратной интервальной матрицы» для  $Q$  можно выполнить как решение задачи внешнего оценивания объединённого множества решений интервального матричного уравнения

$$QY = I, \quad I — \text{единичная матрица,}$$

применив, к примеру,  $n$  раз (для каждого столбца) тот же самый метод внешнего оценивания *Encl*, который выбран базовым для всего алгоритма. Соответствующие инструкции — пересчёт обратной интервальной матрицы и проверку на монотонность с возможным последующей заменой некоторых интервальных элементов на их концы по формулам (9.63)–(9.64) — следует выполнять сразу после порождения интервальных систем потомков в основном цикле алгоритма.

## 9.9в Стратегия дробления

В простейшем методе дробления параметров мы отсекали на каждом шаге самый широкий из интервальных элементов ведущей ИСЛАУ. Можно ли путём специального выбора элемента для дробления обеспечить наиболее значительное улучшение целевой функции на каждом шаге алгоритма? Строгая и точная оптимизация методов дробления параметров в таком виде трудна и вряд ли целесообразна в полном объёме. Мы будем решать этот вопрос, руководствуясь следующими эвристическими соображениями: величина произведения ширины (или радиуса) интервального элемента на модуль интервального расширения соответствующей производной решения может служить, в некотором смысле, мерой того, как бисекция элементов из  $Q$  либо  $r$  влияет на  $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi^{sym}(Q, r)\}$  и размеры объединённого множества решений ИСЛАУ.

Далее, оценки объединённого множества решений ИСЛАУ, получаемые по большинству существующих методов, являются тем более точными, чем меньше размеры этого множества решений. С подобными базовыми методами уменьшение размеров множества решений  $\Xi^{sym}(Q, r)$  должно приводить к аналогичному и сравнимому по величине изменению в оценке  $\mathcal{Y}(Q, r)$ . При этом, следовательно, требование наиболее быстрого улучшения целевой функции за один шаг метода дробления параметров становится, по существу, эквивалентным условию наиболее быстрого уменьшения размеров множества решений при дроблении ведущей ИСЛАУ.

Учитывая сделанные выше заключения, мы, как и ранее, рекомендуем дробить ведущие ИСЛАУ по элементам, на которых достигается максимальная из величин

$$\left| \frac{\partial x_\nu(Q, r)}{\partial q_{ij}} \right| \cdot \text{wid } q_{ij}, \quad \left| \frac{\partial x_\nu(Q, r)}{\partial r_i} \right| \cdot \text{wid } r_i, \quad (9.44)$$

$i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , т. е. по элементам, на которых достигается максимум произведения оценки производной решения на ширину интервала, а не просто по самым широким элементам ИСЛАУ. Стратегия дробления, требующая максимизации величин (9.44), была впервые рассмотрена автором в статье [56].

### 9.9г Численный пример

В качестве примера применения разработанного нами подхода рассмотрим интервальную симметричную линейную систему

$$\begin{pmatrix} [1, 10] & [0, 1] \\ [0, 1] & [-4, -1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0, 2] \\ [0, 2] \end{pmatrix}, \quad (9.66)$$

которая отличается от системы (5.40) из работы Г. Алефельда, В. Крейновича и Г. Майера [24] единственным элементом  $\mathbf{a}_{11}$  в матрице. Кажется, что в авторы намеренно взяли его точечным, так как иначе выполненные ими вручную выкладки (и без того весьма длинные), приводящие к точному описанию формы множества решений системы (5.40) ещё бы значительно усложнились. Мы не стеснены подобными ограничениями и легко можем вычислить оценки множеств решений этой системы с существенно интервальным элементом  $\mathbf{a}_{11}$ .

Метод дробления параметров, в котором в качестве базового метода использовался интервальный метод Гаусса-Зейделя (см. §7.3), снабженный проверкой монотонности (из §9.9б) и модифицированной стратегией выбора дробимого элемента §9.9в, надёжно находит внешнюю оценку множества решений этой ИСЛАУ в виде

$$\begin{pmatrix} [-7.61868 \cdot 10^{-8}, 2.41421] \\ [-2.00000, 1.00000] \end{pmatrix}$$

(мы сохранили по шесть значащих цифр результата). При этом брус начальной оценки, вычисленный с помощью процедуры Хансена-Блика-Рона из §7.7, оказался равным

$$\begin{pmatrix} [-14.9333, 23.7333] \\ [-44.6667, 38.0000] \end{pmatrix},$$

т. е. весьма грубым. Для нахождения нижних оценок множества решений системы (9.66) мы затратили по каждой координате по 1000 итераций, и уточнение этих оценок шло исключительно за счет бисекции элементов ИСЛАУ, хотя (любопытный факт!) диагностика свидетельствует, что тест на монотонность (9.63)–(9.64) почти на каждом шаге сужал те или иные интервальные элементы в системах-потомках, появляющихся по ходу работы алгоритма. Но, как ни странно, это не привело к повышению эффективности всего алгоритма в целом. Что касается верхних оценок, то здесь тесты монотонности сыграли свою положительную роль, и количества шагов метода дроблений параметров оказались равными всего 40 по первой компоненте и 33 по второй.

Как видим, оценки множества решений системы (9.66) не изменились в сравнении с системой (5.40), т. е. интервализация элемента  $\mathbf{a}_{11}$  никак не повлияла на них.

## Комментарий к Главе 9

**К §9.1.** Оценивание объединённого множества решений ИСЛАУ, основанное на переборе всех ортантов пространства  $\mathbb{R}^n$  и решении в каждом из них задачи линейного

программирования, восходит к работе У. Оеттли [46]. Приводимый нами вывод канонической формы задачи линейного программирования основан на результатах из [27].

Иногда адаптивные алгоритмы называют также «последовательными», но мы не придерживаемся этого словоупотребления потому, что в последнее время термин «последовательные алгоритмы» все более применяется как антитеза параллельным алгоритмам вычислений и обработки информации.

В определённом смысле разделение алгоритмов на пассивные/адаптивные соответствует отмеченному в Главе 4 противопоставлению программных и позиционных способов управления динамическим объектом.

**К §9.3.** Метод Рона был развит И. Роном в цикле статей начала 80-х годов прошлого века и затем представлен в итоговой статье [51]. Его дальнейшему развитию и реализации посвящены многие работы, см., к примеру, [41, 43, 60].

**К §§9.4-9.7.** Методы дробления решений и методы дробления параметров предложены и развиты автором в работах [19, 20, 55, 56, 57, 58, 59]. Отметим, что имеется глубокая связь (фактически, являющаяся своего рода двойственностью) между методами дробления параметров и методами дробления решений.

К идее построения методов дробления параметров для интервальных линейных систем можно прийти, доводя до логического завершения некоторые из давно известных в интервальном анализе подходов к решению ИСЛАУ. Одним из прародителей алгоритма *LinPPS1* можно, по-видимому, считать процедуру Купермана-Хансена (см. [1]), в которой внешние интервальные оценки для объединенного множества решений ИСЛАУ ищутся на основе пассивного однократного использования информации о производных компонент решения по элементам матрицы и правой части системы, подобно тому как это делается в §9.7а. Но в реальных интервальных системах не всегда удастся выявить определённый знак этих производных, а потому какие-то интервальные элементы всё равно останутся интервальными и после применения теста на монотонность. И. Куперман и Э. Хансен в этом месте останавливались и завершали процесс решения «внешней задачи». Дальнейшее уточнение искомой оценки на этом пути возможно лишь при добавлении активной процедуры измельчения элементов матрицы ИСЛАУ, хотя рассматривать при этом будет нужно все получающиеся при таком измельчении-дроблении интервальные системы.

Фактически, это и реализуется в методах дробления параметров, в частности, в алгоритмах *LinPPS1* и *LinPPS2*. Их рабочий список  $\mathcal{L}$  хранит все возникшие в процессе работы варианты (за исключением тех заведомо бесперспективных, которые выявляются посредством теста из (6.48)), а обрабатывается на каждом шаге алгоритма «самый перспективный» вариант, если мерой этой перспективности считать значение оценки  $\Upsilon(Q, r)$ .

**К §9.7б.** За рубежом имеется тенденция связывать такой способ выбора отсекаемой компоненты в интервальных методах глобальной оптимизации, типа описанных в §3.6, с именем Д. Ратца, рассматривавшего его в своих работах [49, 50]. Мы не следуем этой моде потому, что раньше Д. Ратца и независимо от него стратегия дробления, требующая максимизации величин (9.44), была предложена автором в статье [56].

**К §9.8.** Понятия последовательно гарантирующего и финально гарантирующего алгоритмов были предложены автором в конце 80-х годов XX века и впервые опубликованы в работе [57] (ожидавшей печати пять лет). Моделируемая ими ситуация является весьма типичной, так как эффект преобладания сложности задач над возможностями вычислительных устройств характерен не только для интервального анализа, и с ним постоянно сталкиваются специалисты самых различных областей математического моделирования и практической информатики. В частности, в 1988 году, исследуя большие задачи теории расписаний и планирования, Т. Дин и М. Бодди [28] предложили термин *anytime algorithm* для обозначения алгоритмов, в которых

- ответ доступен в любой момент выполнения алгоритма,
- по мере продолжения выполнения алгоритма качество ответа улучшается.

Как видим, понятие *anytime algorithms* (что можно вольно перевести как «алгоритмы, в любое время готовые предъявить ответ») соответствует понятию последовательно гарантирующих алгоритмов интервального анализа. Но термин *anytime algorithm* представляется неудачным в интервальном контексте (и не только), а потому заменять им термины «последовательно/финально гарантирующий», на наш взгляд, нецелесообразно.

К понятию последовательно гарантирующего алгоритма близко понятие *монотонного вычислительного алгоритма*, введённое К. Никелем в связи с потребностями общей теории интервальных алгоритмов, разработавшейся им в 70-е годы [44].

Пусть  $X$  — метрическое пространство,  $n, l$  — натуральные индексы. Для каждого фиксированного номера  $l \in \mathbb{N}$  вычислительный алгоритм по К. Никелю — это четвёрка

$$(x, \{x_\nu\}, \{\tilde{x}_\nu(l)\}, n(l))_l, \tag{9.67}$$

в которой  $x, x_\nu, \tilde{x}_\nu \in X$  и

- $x$  — искомое точное решение задачи,
- $\{x_\nu\}$  — последовательность приближений к  $x$ , порождаемая идеальным алгоритмом (в отсутствие ошибок округления на ЭВМ и пр.), так что  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} x_\nu = x$ ,
- $\{\tilde{x}_\nu(l)\}$  — реальная возмущённая последовательность приближений к решению, имеющая параметром возмущения  $l$ , причём  $\lim_{l \rightarrow \infty} \tilde{x}_\nu(l) = x_\nu$ ,
- $n(l)$  — момент окончания алгоритма, т. е. такое натуральное число, что реальным алгоритмом строится лишь конечная последовательность  $\{x_1(l), x_2(l), \dots, x_{n(l)}(l)\}$ .

Предположим, что на пространстве  $X$  задано некоторое частичное упорядочение « $\preceq$ ». Алгоритм (9.67) назовём монотонным [44], если для всех  $n, l \in \mathbb{N}$

$$x \preceq x_\nu \quad \text{и} \quad x_\nu \preceq \tilde{x}_\nu(l), \tag{9.68}$$

и

$$\text{либо } x_{\nu+1} \preceq x_\nu, \quad \text{либо } x_\nu = x. \tag{9.69}$$

Таким образом, согласно (9.68), монотонный алгоритм приближает искомое решение всегда «с одной стороны», и с той же «стороны» действуют его возможные возмущения, а условия (9.69) означают, что невозмущённая последовательность приближений — либо монотонно убывающая, либо достигающая точного результата за конечное число шагов.

Как видим, формальное сходство определений последовательно гарантирующего алгоритма и монотонного алгоритма весьма велико, тем более что в случае, когда порядок на  $X$  задаётся способом оценивания (см. §4.4), любой последовательно гарантирующий алгоритм может быть превращён в монотонный взятием на каждом шаге минимума с результатом предыдущей итерации. Тем не менее это различные понятия, каждое из которых имеет самостоятельную ценность и свою сферу применимости.

Мотивы, которыми руководствовался К. Никель, выделяя монотонные алгоритмы, не были связаны с алгоритмической сложностью, а диктовались удобством машинной реализации таких алгоритмов и потребностями конструируемой им теории устойчивости и сходимости. Основное отличие монотонного алгоритма от последовательно гарантирующего — отсутствие какой-либо связи между упорядочением пространства  $X$  и формулировкой исходной задачи. Иначе говоря, свойство алгоритма быть или не быть монотонным никак не связывается К. Никелем с постановкой решаемой этим алгоритмом задачи (а само понятие способа оценивания или аналогичное ему вообще не фигурирует в работе [44]). Поэтому монотонный алгоритм может и не быть последовательно гарантирующим, как, например, рассмотренные в §§9.1–9.3 переборные методы оптимального решения «внешней задачи» для интервальных линейных систем: они — монотонные, если для множеств  $P, Q$  из  $\mathbb{R}^n$  считать  $P \preceq Q$  равносильным теоретико-множественному включению  $P \subseteq Q$ .

Очевидно также, что и свойство быть последовательно гарантирующим не влечет монотонности алгоритма. Следовательно, понятия монотонного алгоритма и последовательно гарантирующего алгоритма являются пересекающимися, но не равнозначными, и потому оба имеют право на самостоятельное существование.

**К §9.9.** Содержание этого параграфа следует работам [21, 22, 59].

## Литература к Главе 9

- [1] Алефельд Г., Херцбергер Ю. *Введение в интервальные вычисления*. — Москва: Мир, 1987.
- [2] Базэр Ф.Л., Гооз Г. *Информатика. В 2-х ч.* — Москва: Мир, 1990.
- [3] Гэри М., Джонсон Д. *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи*. — Москва: Мир, 1982.
- [4] Данциг Дж. *Линейное программирование, его обобщения и применения*. — Москва: Прогресс, 1966.
- [5] Дэннис Дж., мл., Шнабель Р. *Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений*. — Москва: Мир, 1988.
- [6] Евтушенко Ю.Г. Численный метод нахождения глобального экстремума функции // *Журнал Вычисл. Математики и Матем. Физики*. — 1971. — Т. 11. — С. 1390–1403.

- [7] Евтушенко Ю.Г., Ратькин В.А. Метод половинных делений для глобальной оптимизации функции многих переменных // *Известия АН СССР. Техническая кибернетика.* – 1987. – №1. – С. 119–128.
- [8] Жиглявский А.А., Жилинскас А.Г. *Методы поиска глобального экстремума.* – Москва: Наука, 1991.
- [9] Заманский М. *Введение в современную алгебру и анализ.* – Москва: Наука, 1974.
- [10] Зорич В.А. *Математический анализ.* Т. 1. – Москва: Наука, 1981. Т. 2. – Москва: Наука, 1984.
- [11] Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. *Методы интервального анализа.* – Новосибирск: Наука, 1986.
- [12] Никайдо Х. *Выпуклые структуры и математическая экономика.* – Москва: Мир, 1972.
- [13] Ортега Дж., Рейнболдт В. *Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными.* – Москва: Мир, 1975.
- [14] Пападимитриу Х., Стайглиц К. *Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность.* – Москва: Мир, 1985.
- [15] Пиявский С.А. Один алгоритм отыскания абсолютного экстремума функции // *Журнал Вычисл. Математики и Матем. Физики.* – 1972. – Т. 12, №4. – С. 888–896.
- [16] Сухарев А.Г. *Минимаксные алгоритмы в задачах численного анализа.* – Москва: Наука, 1989.
- [17] Схрейвер А. *Теория линейного и целочисленного программирования. Том 1.* – Москва: Мир, 1991.
- [18] Фидлер М., Недома Й., Рамик Я., Рон И., Циммерманн К. *Задачи линейной оптимизации с неточными данными.* – Москва-Ижевск: Издательство «РХД», 2008.
- [19] Шарый С.П. Новый класс алгоритмов для оптимального решения интервальных линейных систем // *Конференция «Актуальные проблемы прикладной математики», Саратов, 20 – 22 мая 1991 г.* – Саратов, 1991. – С. 113–119.
- [20] Шарый С.П. Оптимальное внешнее оценивание множеств решений интервальных систем уравнений. Часть 1 // *Вычислительные Технологии.* – 2002. – Т. 7, №6. – С. 90–113.  
Шарый С.П. Оптимальное внешнее оценивание множеств решений интервальных систем уравнений. Часть 2 // *Вычислительные Технологии.* – 2003. – Т. 8, №1. – С. 84–109.
- [21] Шарый С.П. Метод дробления параметров для интервальных линейных систем со связями // *Пятая международная конференция «Перспективы систем информатики» памяти акад. А.П.Ершова – PSI'03. Международное рабочее совещание по интервальной математике и методам распространения ограничений, 8–9 июля 2003 года, Новосибирск, Академгородок.* – Новосибирск: ИСИ СО РАН, 2003. – С. 1–12.
- [22] Шарый С.П. Решение интервальных линейных систем со связями // *Сибирский Журнал Вычислительной Математики.* – 2004. – Том 7, №4. – С. 363–376.
- [23] Шарый С.П., Джаныбеков Б.С. Модификация подхода Оеттли для оптимального оценивания множеств АЕ-решений интервальных линейных систем // *Вычислительные Технологии.* – 2005. – Т. 10, №3. – С. 117–126.
- [24] ALEFELD G., KREINOVICH V., MAYER G. On symmetric solution sets // *Inclusion methods for nonlinear problems with applications in engineering, economics, and physics /*

- Herzberger J., ed. – Wien, New York: Springer, 2003. – P. 1–23. – (Computing Supplement; 16)
- [25] ALEFELD G., MAYER G. The Cholesky method for interval data // *Linear Algebra and its Applications*. – 1993. – Vol. 194. – P. 161–182.
- [26] BEECK H. Über die Struktur und Abschätzungen der Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen mit Intervallkoeffizienten // *Computing*. – 1972. – Vol. 10. – P. 231–244.
- [27] COPE J., RUST B. Bounds on solutions of linear systems with inaccurate data // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1979. – Vol. 16, No. 6. – P. 950–963.
- [28] DEAN T.L., BODDY M. An analysis of time dependent planning // *Proceedings of AAAI-88 Conference*. – St. Paul, 1988. – P. 49–54.
- [29] GAY D.M. Solving interval linear equations // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1982. – Vol. 19, No. 4. – P. 858–870.
- [30] HANSEN E.R. On linear algebraic equations with interval coefficients // *Topics in Interval Analysis* / Hansen E., ed. – Oxford: Clarendon Press, 1969. – P. 35–46.
- [31] HANSEN E. Bounding the solution of interval linear equations // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1992. – Vol. 29, No. 5. – P. 1493–1503.
- [32] HARTFIEL D.J. Concerning the solution set of  $Ax = b$  where  $P \leq A \leq Q$  and  $p \leq b \leq q$  // *Numerische Mathematik*. – 1980. – Vol. 35, No. 3. – P. 355–359.
- [33] JANSSON CH. Interval linear systems with symmetric matrices, skew-symmetric matrices, and dependencies in the right hand side // *Computing*. – 1991. – Vol. 46. – P. 265–274.
- [34] JANSSON C. Calculation of exact bounds for the solution sets of linear interval systems // *Linear Algebra and its Applications*. – 1997. – Vol. 251. – P. 321–340.
- [35] KEARFOTT R.B. *Rigorous global search: Continuous problems*. – Dordrecht: Kluwer, 1996.
- [36] KREINOVICH V., LAKEYEV A.V., NOSKOV S.I. Optimal solution of interval linear systems is intractable (NP-hard) // *Interval Computations*. – 1993. – No. 1. – P. 6–14.
- [37] KREINOVICH V., LAKEYEV A.V., NOSKOV S.I. Approximate linear algebra is intractable // *Linear Algebra and its Applications*. – 1996. – Vol. 232. – P. 45–54.
- [38] KREINOVICH V., LAKEYEV A., ROHN J., KAHL P. *Computational complexity and feasibility of data processing and interval computations*. – Dordrecht: Kluwer, 1997.
- [39] LAKEYEV A.V. Linear algebraic equations in Kaucher arithmetic // *Reliable Computing, 1995, Supplement* (Extended Abstracts of APIC'95: International Workshop on Applications of Interval Computations, El Paso, TX, Febr. 23–25, 1995). – P. 130–133.
- [40] LAKEYEV A.V. On the computational complexity of the solution of linear systems with moduli // *Reliable Computing*. – 1996. – Vol. 2, No. 2. – P. 125–131.
- [41] MADSEN K., TOFT O. A parallel method for linear interval equations // *Interval Computations*. – 1994. – No. 3. – P. 81–105.
- [42] MOORE R.E. *Interval analysis*. – Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1966.
- [43] NEUMAIER A. *Interval methods for systems of equations*. – Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [44] NICKEL K. Stability and convergence of monotonic algorithms // *J. Math. Anal. Appl.* – 1976. – Vol. 54, No. 1. – P. 157–172.
- [45] NICKEL K. Die Überschätzung des Wertebereiches einer Funktion in der Intervallrechnung mit Anwendungen auf lineare Gleichungssysteme // *Computing*. – 1977. – Vol. 18. – P. 15–36.

- [46] OETTLI W. On the solution set of a linear system with inaccurate coefficients // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1965. – Vol. 2, No. 1. – P. 115–118.
- [47] POLYAK B.T., NAZIN S.A. Interval solutions for interval algebraic equations // *Mathematics and Computers in Simulation*. – 2004. – Vol. 66. – P. 207–217.
- [48] RATSCHKEK H. Inclusion functions and global optimization // *Mathematical Programming*. – 1985. – Vol. 33. – P. 300–317.
- [49] RATZ D. *Automatische Ergebnisverifikation bei globalen Optimierungsproblemen. Ph.D. dissertation*. – Karlsruhe: Universitat Karlsruhe, 1992.
- [50] RATZ D., CSENDES T. On the selection of subdivision directions in interval branch-and-bound methods for global optimization // *Journal of Global Optimization*. – 1995. – Vol. 7. – P. 183–207.
- [51] ROHN J. Systems of linear interval equations // *Linear Algebra and its Applications*. – 1989. – Vol. 126. – P. 39–78.
- [52] RUMP S.M. Solution of linear and nonlinear algebraic problems with sharp guaranteed bounds // *Computing Supplement*. – 1984. – Vol. 5. – P. 147–168.
- [53] RUMP S.M. Verification methods for dense and sparse systems of equations // *Topics in Validated Numerics* / Herzberger J., ed. – Amsterdam: Elsevier, 1994. – P. 63–135. – (Studies in computational mathematics; 5)
- [54] RUMP S.M., KAUCHER E. Small bounds for the solution of systems of linear equations // *Computing Supplement*. – 1980. – Vol. 2. – P. 157–164.
- [55] SHARY S.P. Optimal solution of interval linear algebraic systems. I // *Interval Computations*. – 1991. – Vol. 1, No. 2. – P. 7–30.
- [56] SHARY S.P. A new class of algorithms for optimal solution of interval linear systems // *Interval Computations*. – 1992. – No. 2(4). – P. 18–29.
- [57] SHARY S.P. On optimal solution of interval linear equations // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1995. – Vol. 32, No. 2. – P. 68–630.
- [58] SHARY S.P. Parameter partitioning methods for optimal numerical solution of interval linear systems // *Computational Science and High Performance Computing III. The 3rd Russian-German Advanced Research Workshop, Novosibirsk, Russia, July 23–27, 2007*. – Berlin: Springer, 2007. – P. 161–183.
- [59] SHARY S.P., MORADI B. Solving interval linear least squares problems by PPS-methods // *Numerical Algorithms*. – 2021. – Vol. 87, Issue 1. – P. 41–75.
- [60] TOFT O. Sequential and parallel solution of linear interval equations // Eksamensprojekt: NI-E-92-04, Numerisk Institute, Danmarks Tekniske Højskole. – Lyngby, 1992. – 98 p.



## Глава 10

# Внешнее оценивание множеств АЕ-решений

В этой главе мы обращаемся к задаче внешнего оценивания множеств АЕ-решений интервальных систем уравнений. Эта задача более молода и более трудна, чем внешнее оценивание объединённого множества решений, и потому мы сможем представить меньшее разнообразие идей и подходов, чем то, что было характерно для Глав 7–9, посвящённых оцениванию объединённого множества решений. Тем не менее, ряд результатов на этом пути, особенно касающихся интервальных линейных систем уравнений, уже устоялся и достоин подробного изложения.

### 10.1 Формальный подход

Пусть дана интервальная система линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b, \quad (10.1)$$

и нас интересует получение внешней оценки её множества АЕ-решений  $\Xi_{A\beta}(A, b)$ , соответствующего характеристической матрице  $A^c$  и характеристическому вектору правой части  $b^c$ . В этом параграфе мы покажем, как исходная задача оценивания сводится к задаче нахождения формального решения некоторого вспомогательного уравнения в полной интервальной арифметике  $\mathbb{KR}$ . Соответственно, весь подход, который оказывается целиком аналогичным развитому в §7.4, мы также называем *формальным подходом*.

Ниже, помимо результатов §5.2б, нам понадобится ещё одна характеристика множеств АЕ-решений интервальных систем линейных алгебраических уравнений в рекуррентной форме. Отправная точка наших рассуждений — результат Теоремы 5.2.3:

$$x \in \Xi_{A\beta}(A, b) \iff A^c \cdot x \subseteq b^c. \quad (10.2)$$

Добавляя к обеим частям (10.2) по  $(x \ominus A^c x)$ , получим равносильное включение

$$x \subseteq x + \text{opp}(A^c x) + b^c.$$

Но  $\text{орр}(\mathbf{A}^c x) = \text{орр}(\mathbf{A}^c) x$  для вещественных  $x$ . Следовательно, имеем

$$x \subseteq x + (\text{орр} \mathbf{A}^c) x + \mathbf{b}^c,$$

и далее, опять-таки в силу вещественности  $x$ , в правой части мы можем воспользоваться дистрибутивностью и вынести переменную за скобки. В целом мы получим

$$x \in \Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \iff x \subseteq (I \ominus \mathbf{A}^c) x + \mathbf{b}^c.$$

Заметим, что при  $x \in \Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$  из проведённых нами рассуждений следует, что  $((I \ominus \mathbf{A}^c) x + \mathbf{b}^c)$  — правильный интервальный вектор.

Итак, имеет место

**Теорема 10.1.1** *Точка  $x \in \mathbb{R}^n$  принадлежит множеству АЕ-решений  $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  интервальной линейной системы  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  тогда и только тогда, когда*

$$x \subseteq (I \ominus \mathbf{A}^c) x + \mathbf{b}^c$$

в полной интервальной арифметике Каухера.

**Теорема 10.1.2** *Пусть интервальная матрица  $\mathbf{C} \in \mathbb{KR}^{n \times n}$  такова, что*

$$\rho(|\mathbf{C}|) < 1,$$

т.е. спектральный радиус матрицы  $|\mathbf{C}|$ , составленной из модулей элементов  $\mathbf{C}$ , меньше единицы. Тогда формальное решение интервальной линейной системы

$$x = \mathbf{C}x + \mathbf{d} \tag{10.3}$$

существует и единственно для любого интервального вектора  $\mathbf{d} \in \mathbb{KR}^n$ .

**Доказательство.** В силу неравенства (2.22) для любых  $\mathbf{d}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{KR}^n$

$$\begin{aligned} \text{Dist}(\mathbf{C}\mathbf{u} + \mathbf{d}, \mathbf{C}\mathbf{v} + \mathbf{d}) &= \text{Dist}(\mathbf{C}\mathbf{u}, \mathbf{C}\mathbf{v}) \\ &\leq |\mathbf{C}| \cdot \text{Dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Если спектральный радиус матрицы  $|\mathbf{C}|$  меньше единицы, то мы оказываемся в условиях применимости конечномерного варианта теоремы Шрёдера о неподвижной точке (теорема 2.4.2). Именно, отображение  $\mathbb{KR}^n \rightarrow \mathbb{KR}^n$ , действующее по правилу

$$x \mapsto \mathbf{C}x + \mathbf{d},$$

является сжимающим относительно мультиметрики  $\text{Dist}$  и поэтому имеет единственную неподвижную точку, которая есть не что иное как формальное решение интервальной линейной системы (10.3). ■

**Теорема 10.1.3** *Пусть для интервальной линейной системы  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  множество АЕ-решений  $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  непусто, а  $\mathbf{A}^c$  и  $\mathbf{b}^c$  — характеристические матрица и правая часть этого множества решений — таковы что*

$$\rho(|I \ominus \mathbf{A}^c|) < 1. \tag{10.4}$$

Тогда формальное решение интервальной линейной системы

$$x = (I \ominus \mathbf{A}^c) x + \mathbf{b}^c \quad (10.5)$$

(которое существует и единственно в силу Теоремы 10.1.2) является правильным интервальным вектором, содержащим множество решений  $\Xi_{\mathbf{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ .

**Доказательство.** Пусть  $\mathbf{x}^*$  — формальное решение интервальной линейной системы (10.5). Возьмём какую-нибудь точку  $\tilde{x} \in \Xi_{\mathbf{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  и покажем, что необходимо  $\tilde{x} \in \mathbf{x}^*$ .

В силу Теоремы 10.1.1 принадлежность  $\tilde{x} \in \Xi_{\mathbf{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  равносильна включению

$$\tilde{x} \in (I \ominus \mathbf{A}^c) \tilde{x} + \mathbf{b}^c. \quad (10.6)$$

Организуем в  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$  итерационный процесс по следующим формулам

$$\mathbf{x}^{(0)} \leftarrow \tilde{x}, \quad (10.7)$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} \leftarrow (I \ominus \mathbf{A}^c) \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}^c. \quad (10.8)$$

Пользуясь математической индукцией, нетрудно показать, что все последовательные приближения этого процесса содержат  $\tilde{x}$ . Действительно, для  $\mathbf{x}^{(0)}$  это верно по построению. Если же  $\tilde{x} \in \mathbf{x}^{(k)}$ , то в силу (10.6) и свойства монотонности интервальных арифметических операций в  $\mathbb{K}\mathbb{R}$  по включению

$$\tilde{x} \in (I \ominus \mathbf{A}^c) \tilde{x} + \mathbf{b}^c \subseteq (I \ominus \mathbf{A}^c) \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}^c = \mathbf{x}^{(k+1)}. \quad (10.9)$$

Итак,  $\tilde{x} \in \mathbf{x}^{(k)}$  для любого натурального номера  $k$ . В частности, отсюда следует правильность всех интервальных векторов  $\mathbf{x}^{(k)}$ .

Далее, условие

$$\rho(|I \ominus \mathbf{A}^c|) < 1 \quad (10.4)$$

влечёт сходимость итерационного процесса, определяемого формулами (10.7)–(10.8), в метрическом пространстве  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ . Ясно также, что сходится последовательность  $\mathbf{x}^{(k)}$  к неподвижной точке отображения

$$\mathbf{x} \mapsto (I \ominus \mathbf{A}^c) \mathbf{x} + \mathbf{b}^c,$$

т. е. к единственному формальному решению  $\mathbf{x}^*$  уравнения (10.5). Поскольку принадлежность  $x \in \mathbf{x}^{(k)}$  равносильна системе  $2n$  нестрогих неравенств, то она должна сохраниться и в пределе:

$$\tilde{x} \in \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^*.$$

Это и требовалось доказать. ■

В заключение параграфа — необходимый комментарий по поводу практической реализации развитого выше формального подхода, т. е. методов нахождения формального решения основного уравнения (10.5). Теоремы 10.1.2–10.1.3, собственно уже дают теоретический фундамент для построения стационарных итерационных алгоритмов, основанных на теореме Шрёдера о сжимающем отображении. Именно, в

условиях Теоремы 10.1.3 можно организовать интервальный итерационный процесс по формуле (10.8) (или какой-либо её модификации), который будет сходиться к внешней оценке множества АЕ-решений  $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  из любого начального приближения  $\mathbf{x}^{(0)}$ . При этом наиболее удобным выбором  $\mathbf{x}^{(0)}$  является интервальный вектор, который уже гарантированно содержит множество решений  $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ . Из включения (10.9) следует тогда, что все последовательные приближения  $\mathbf{x}^{(k)}$  процесса (10.8) также содержат оцениваемое множество АЕ-решений. Например, в качестве  $\mathbf{x}^{(0)}$  можно взять внешнюю интервальную оценку объединённого множества решений ИСЛАУ, отыскание которой является хорошо изученной задачей (см. предшествующую главу).

Другая возможность вычисления требуемого формального решения — субдифференциальный метод Ньютона (см. главу 12), — применимость которого к настоящему моменту строго обоснована для интервальной систем (10.5) с матрицами  $\mathbf{A}^c$ , в каждой строке которых все элементы либо правильные, либо неправильные. Но на практике этот метод очень хорошо работает и для общих интервальных систем, в которых правильные и неправильные элементы в характеристической матрице  $\mathbf{A}^c$  перемешаны произвольно (хотя в этом случае он уже не субдифференциальный, а *квазидифференциальный* метод Ньютона).

Наконец, следует отметить, что спектральное условие применимости развитого нами подхода —

$$\rho(|I \ominus \mathbf{A}^c|) < 1 \quad (10.4)$$

— является очень обременительным для матрицы интервальной линейной системы. Ниже в §10.5 мы обсудим один из способов достижения этого неравенства — так называемое *предобуславливание*.

Как читатель мог убедиться из предыдущего изложения, для внешнего оценивания множеств решений интервальных систем критичным оказывается тот факт, что спектральный радиус модуля некоторой интервальной матрицы меньше единицы. Соответствующее условие определяет применимость формального подхода, описанного в §7.4 и выше в этом параграфе, а также сходимость итерационных методов из §7.6. Решение проблемы собственных значений, полной либо частичной, — это отдельная непростая вычислительная задача, а в данном случае получение информации о спектре матрицы носит вспомогательный характер, так что скольконибудь значительные трудозатраты на неё нежелательны. Наша ближайшая цель — рассмотреть простые способы оценки спектрального радиуса матриц, возникающих в процессе внешнего оценивания множеств решений интервальных систем уравнений.

Прежде всего отметим неотрицательность этих матриц. Следовательно, в силу теории Перрона-Фробениуса [5] у рассматриваемых матриц модулей всегда существует вещественное и даже положительное собственное значение, равное искомому спектральному радиусу, и ему отвечает неотрицательный ненулевой собственный вектор. Поэтому, в принципе, для его оценивания с произвольной точностью может быть применен известный степенной метод [2, 4], заключающийся в последовательном вычислении

$$r^{(k+1)} \leftarrow \frac{Ar^{(k)}}{\|r^{(k)}\|}, \quad \lambda^{(k+1)} \leftarrow \frac{\|Ar^{(k)}\|}{\|r^{(k)}\|}.$$

В качестве начального приближения этого процесса мы можем взять вектор со всеми единичными компонентами.

Иногда этот способ может оказаться неприемлемым из-за излишней трудоемкости, и потому имеет смысл продумать более дешевые способы оценивания спектра.

Широко известна оценка спектрального радиуса сверху любой матричной нормой. Но в общем случае, если мы не уделяем выбору матричной нормы специального внимания, этот рецепт может оказаться весьма грубым и потому будет давать лишь самую предварительную информацию о спектре рассматриваемой матрицы. С другой стороны, для любого  $\epsilon > 0$  существует такая матричная норма  $\|\cdot\|$ , что

$$\|A\| - \epsilon \leq \rho(A) \leq \|A\|.$$

Следовательно, подобрав используемую матричную норму некоторым специальным образом, мы сможем существенно улучшить качество нашей оценки спектрального радиуса. Этим соображением и руководствовался Д.Гей в [9], предлагая специальную процедуру для итерационного уточнения весов во взвешенной максимум-норме. Изложим ее подробно.

Наш практический опыт свидетельствует о довольно высокой эффективности процедуры Гея, которая в некоторых случаях позволяла уменьшать оценку для нормы матрицы более чем на порядок в сравнении с исходной, приводя, в конце концов, к заключению о том, что она меньше единицы и итерационный процесс внешнего оценивания объединенного множества решений ИСЛАУ применим, тогда как по исходной величине нормы такого заключения сделать было совершенно нельзя.

## 10.2 Оптимальность внешнего оценивания

Каково качество внешнего интервального оценивания множеств АЕ-решений ИСЛАУ с помощью формального подхода? Иными словами, насколько близка получаемая интервальная оценка к оптимальному решению внешней задачи? В этой работе мы не будем исследовать этот интересный вопрос в общем случае, так как он требует отдельного кропотливого рассмотрения. Недавние теоретические результаты А.В. Лакеева [14] свидетельствуют о том, что в самом общем случае, когда мы не накладываем на матрицу ИСЛАУ никаких ограничений, задача оценивания множеств АЕ-решений может оказаться труднорешаемой. Более точно, если в интервальной матрице системы  $A$  «достаточно много» элементов имеют Е-неопределённость, то как задача распознавания соответствующего множества решений (т. е. задача выяснения того, пусто оно или нет), так и задача его внешнего оценивания являются NP-полными. Это свойство на нынешнем этапе развития теории сложности вычислений считается равносильным «труднорешаемости» задачи. По этой причине надеяться на качественное внешнее оценивание множеств решений ИСЛАУ с помощью методики §10.1 в общем случае нельзя.

Основным результатом этого параграфа является следующая

**Теорема 10.2.1** Пусть для интервальной линейной системы  $Ax = b$  множество АЕ-решений  $\Xi_{A^c}(A, b)$  непусто и  $A^c, b^c$  — соответствующие характеристические матрица и правая часть ИСЛАУ. Если матрица  $(I \ominus A^c)$  неотрицательна,

$$\rho(|I \ominus A^c|) < 1 \tag{10.4}$$

и все компоненты вектора  $\mathbf{b}^c$  имеют одинаковый определённый знак, то формальное решение интервальной линейной системы

$$x = (I \ominus \mathbf{A}^c)x + \mathbf{b}^c \quad (10.5)$$

(которое существует, единственно и правильно в силу Теорем 10.1.2–10.1.3) является интервальной оболочкой для  $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , т. е. оптимальным решением задачи внешнего оценивания множества решений  $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ .

**Теорема 10.2.2** Пусть для интервальной линейной системы  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  множество АЕ-решений  $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  непусто и  $\mathbf{A}^c, \mathbf{b}^c$  — соответствующие характеристические матрица и правая часть ИСЛАУ. Если матрица  $\mathbf{A}$  является М-матрицей, и все компоненты вектора  $\mathbf{b}^c$  имеют одинаковый определённый знак, то формальное решение интервальной линейной системы

$$x = (I \ominus \mathbf{A}^c)x + \mathbf{b}^c \quad (10.5)$$

(которое существует, единственно и правильно в силу Теорем 10.1.2–10.1.3) является интервальной оболочкой для  $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , т. е. оптимальным решением задачи внешнего оценивания множества решений  $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ .

**Предложение 10.2.1** В условиях Теоремы 10.2.1 множество решений  $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  интервальной линейной системы (10.1) содержит точки  $\hat{x}$  и  $\acute{x}$ , имеющие соответственно наименьшие и наибольшие координаты относительно покомпонентного порядка в  $\mathbb{R}^n$ , т. е. такие, что  $\hat{x} \leq x \leq \acute{x}$  для любого  $x \in \Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ . При этом

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \max_{\hat{A} \in \mathbf{A}^\vee} \min_{\check{A} \in \mathbf{A}^\exists} (\hat{A} + \check{A})^{-1} \underline{\mathbf{b}}^c, \\ \acute{x} &= \min_{\hat{A}' \in \mathbf{A}^\vee} \max_{\check{A}'' \in \mathbf{A}^\exists} (\hat{A}' + \check{A}'')^{-1} \overline{\mathbf{b}}^c. \end{aligned}$$

**Доказательство.** Мы проведём его только для точки  $\hat{x}$  с наименьшими координатами, для  $\acute{x}$  оно выглядит совершенно аналогично.

Воспользуемся представлением множества решений  $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , которое даёт Теорема 5.2.1:

$$\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \bigcap_{\hat{A} \in \mathbf{A}^\vee} \bigcup_{\check{A} \in \mathbf{A}^\exists} \bigcap_{\hat{b} \in \mathbf{b}^\vee} \bigcup_{\check{b} \in \mathbf{b}^\exists} (\hat{A} + \check{A})^{-1}(\hat{b} + \check{b}).$$

Матрица  $(\hat{A} + \check{A})^{-1}$  неотрицательна, поэтому при каждом фиксированном  $\hat{b}$  во множестве

$$\bigcup_{\check{b} \in \mathbf{b}^\exists} (\hat{A} + \check{A})^{-1}(\hat{b} + \check{b})$$

точка

$$\min_{\check{b} \in \mathbf{b}^\exists} (\hat{A} + \check{A})^{-1}(\hat{b} + \check{b}) = (\hat{A} + \check{A})^{-1}(\hat{b} + \underline{\mathbf{b}}^\exists)$$

имеет наименьшие координаты относительно покомпонентного порядка. Аналогично, при дальнейшем взятии пересечений по  $\hat{b} \in \mathbf{b}^\forall$  точка

$$\begin{aligned} & \max_{\hat{b} \in \mathbf{b}^\forall} (\hat{A} + \check{A})^{-1}(\hat{b} + \underline{\mathbf{b}}^\exists) \\ &= (\hat{A} + \check{A})^{-1}(\overline{\mathbf{b}}^\forall + \underline{\mathbf{b}}^\exists) \\ &= (\hat{A} + \check{A})^{-1}\underline{\mathbf{b}}^c \end{aligned}$$

имеет наименьшие координаты в каждом из непустых множеств

$$\bigcap_{\hat{b} \in \mathbf{b}^\forall} \bigcup_{\check{b} \in \mathbf{b}^\exists} (\hat{A} + \check{A})^{-1}(\hat{b} + \check{b}).$$

Далее, коль скоро во множестве обратных матриц  $\{A^{-1} \mid A \in \mathbf{A}\}$  имеются наименьшая и наибольшая матрицы, то при одинаковости всех знаков компонент  $\underline{\mathbf{b}}^c$  векторный минимум

$$\min_{\check{A} \in \mathbf{A}^\exists} (\hat{A} + \check{A})^{-1}\underline{\mathbf{b}}^c \quad (10.10)$$

необходимо существует. Следовательно, объединение

$$\bigcup_{\check{A} \in \mathbf{A}^\exists} (\hat{A} + \check{A})^{-1}\underline{\mathbf{b}}^c$$

также имеет наименьшую точку, равную (10.10).

Наконец, пересечение

$$\bigcap_{\hat{A} \in \mathbf{A}^\forall} \left( \bigcup_{\check{A} \in \mathbf{A}^\exists} (\hat{A} + \check{A})^{-1}\underline{\mathbf{b}}^c \right), \quad (10.11)$$

совпадающее с множеством решений  $\Xi_{A\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , обязано иметь наименьшую точку, так как достигается

$$\max_{\hat{A} \in \mathbf{A}^\forall} \min_{\check{A} \in \mathbf{A}^\exists} (\hat{A} + \check{A})^{-1}\underline{\mathbf{b}}^c. \quad (10.12)$$

Нетрудно понять, что аналитическое выражение для этой наименьшей точки пересечения (10.11) как раз-таки совпадает с (10.12). ■

**Предложение 10.2.2** Если  $\mathbf{a} \geq 0$ , то для любого интервала  $\mathbf{x} \in \mathbb{K}\mathbb{R}$  имеет место

$$\underline{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{x} = \underline{\underline{\mathbf{a}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{x}}}, \quad (10.13)$$

$$\overline{\mathbf{a}} \cdot \overline{\mathbf{x}} = \overline{\overline{\mathbf{a}}} \cdot \overline{\overline{\mathbf{x}}}. \quad (10.14)$$

**Доказательство.** Оно непосредственно следует из из рассмотрения первой строки Табл. 2.1 — таблицы Кэли для умножения в полной интервальной арифметике.

Согласно приведённым в ней формулам

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{x} &= [\underline{\mathbf{a}} \mathbf{x}, \overline{\mathbf{a}} \overline{\mathbf{x}}], & \text{если } \mathbf{x} \geq 0, \\ \underline{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{x} &= [\overline{\mathbf{a}} \mathbf{x}, \overline{\mathbf{a}} \overline{\mathbf{x}}], & \text{если } \mathbf{x} \supseteq 0, \\ \underline{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{x} &= [\overline{\mathbf{a}} \mathbf{x}, \underline{\mathbf{a}} \overline{\mathbf{x}}], & \text{если } \mathbf{x} \leq 0, \\ \underline{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{x} &= [\underline{\mathbf{a}} \mathbf{x}, \underline{\mathbf{a}} \overline{\mathbf{x}}], & \text{если } \mathbf{x} \subseteq 0. \end{aligned}$$

Это и доказывает равенства (10.13)–(10.14), так как любой интервал из  $\mathbb{KR}$  либо неотрицателен, либо неположителен, либо содержит нуль, либо сам содержится в нуле. ■

**Доказательство** Теоремы 10.2.1. Покажем, что в условиях, налагаемых на интервальную линейную систему этой теоремой, для наименьшей  $\hat{x}$  и наибольшей  $\check{x}$  точек из множества решений  $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  (существование которых обеспечено Предложением 10.2.1) достигаются равенства

$$\underline{\mathbf{A}}^c \hat{x} = \underline{\mathbf{b}}^c \quad \text{и} \quad \overline{\mathbf{A}}^c \check{x} = \overline{\mathbf{b}}^c. \quad (10.15)$$

Мы докажем подробно только первое из этих равенств, и обоснование будем вести «от противного».

Если первое из равенств не достигается ни для какого  $x$ , то

$$\underline{\mathbf{A}}^c x \geq \underline{\mathbf{b}}^c \quad \text{и} \quad (\underline{\mathbf{A}}^c x)_i > (\underline{\mathbf{b}}^c)_i \quad \text{хотя бы для одного } i.$$

Мы будем условно записывать это соотношение в виде

$$\underline{\mathbf{A}}^c x \not\geq \underline{\mathbf{b}}^c, \quad (10.16)$$

где  $x \in \Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ . Расписывая результаты интервальных операций через минимакс, получим

$$\min_{\hat{A} \in \mathbf{A}^\vee} \max_{\check{A} \in \mathbf{A}^\exists} (\hat{A} + \check{A}) x \not\geq \underline{\mathbf{b}}^c,$$

или

$$(\forall \hat{A} \in \mathbf{A}^\vee)(\exists \check{A} \in \mathbf{A}^\exists) ((\hat{A} + \check{A}) x \not\geq \underline{\mathbf{b}}^c).$$

Домножение обеих частей неравенства

$$(\hat{A} + \check{A}) x \not\geq \underline{\mathbf{b}}^c$$

на неотрицательную неособенную матрицу  $(\hat{A} + \check{A})^{-1}$  приводит к неравенству

$$x \not\geq (\hat{A} + \check{A})^{-1} \underline{\mathbf{b}}^c.$$

Таким образом, следствием (10.16) является

$$(\forall \hat{A} \in \mathbf{A}^\vee)(\exists \check{A} \in \mathbf{A}^\exists) (x \not\geq (\hat{A} + \check{A})^{-1} \underline{\mathbf{b}}^c).$$

и, наконец,

$$x \not\geq \max_{\hat{A} \in \mathbf{A}^\vee} \min_{\check{A} \in \mathbf{A}^\exists} (\hat{A} + \check{A})^{-1} \underline{\mathbf{b}}^c$$



для любой точки  $x \in \Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ . Но, согласно Предложению 10.2.1, во множестве решений  $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  присутствует точка  $\hat{x}$ , точное выражение для которой имеет вид (10.12). Противоречие!

Теперь мы готовы доказать основной результат этого параграфа. Нетрудно понять, что соотношения (10.15) эквивалентны

$$\underline{(\text{орр } \mathbf{A}^c) \hat{x} + \mathbf{b}^c} = 0 \quad \text{и} \quad \overline{(\text{орр } \mathbf{A}^c) \hat{x} + \mathbf{b}^c} = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \underline{(I \ominus \mathbf{A}^c)[\hat{x}, \hat{x}] + \mathbf{b}^c} &= \underline{(I \ominus \mathbf{A}^c)[\hat{x}, \hat{x}] + \mathbf{b}^c} \\ &= \underline{(I \ominus \mathbf{A}^c) \hat{x} + \mathbf{b}^c} \quad \text{в силу соотношения (10.13)} \\ &= \underline{\hat{x} + (\text{орр } \mathbf{A}^c) \hat{x} + \mathbf{b}^c} \quad \begin{array}{l} \text{так как умножение на} \\ \text{вещественные числа} \\ \text{дистрибутивно} \end{array} \\ &= \hat{x} + \underline{(\text{орр } \mathbf{A}^c) \hat{x} + \mathbf{b}^c} \\ &= \hat{x}. \end{aligned}$$

Аналогично показывается, что

$$\overline{(I \ominus \mathbf{A}^c)[\hat{x}, \hat{x}] + \mathbf{b}^c} = \hat{x}.$$

Следовательно, в целом

$$(I \ominus \mathbf{A}^c)[\hat{x}, \hat{x}] + \mathbf{b}^c = [\hat{x}, \hat{x}],$$

интервальный вектор  $[\hat{x}, \hat{x}]$  является формальным решением уравнения (10.5) и, по Теореме 10.1.3,  $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \subseteq [\hat{x}, \hat{x}]$ . Но, коль скоро точки  $\hat{x}$  и  $\hat{x}$  сами лежат во множестве решений  $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , то можем заключить, что  $[\hat{x}, \hat{x}]$  — это действительно интервальная оболочка для  $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ . ■

Как хорошо известно, классический аналог доказанного нами результата формулируется следующим образом (см., например, [1]):

**Теорема 10.2.3** *Если  $\mathbf{A}$  — неотрицательная правильная интервальная квадратная матрица и  $\rho(|I - \mathbf{A}|) < 1$ , то формальное решение интервальной линейной системы*

$$x = (I - \mathbf{A})x + \mathbf{b}$$

*существует, единственно и является оптимальной внешней интервальной оценкой объединённого множества решений ИСЛАУ (10.1).*

Таким образом, для оптимальности внешней оценки объединённого множества решений требуется неотрицательность только матрицы  $\mathbf{A}^c$ , тогда как вектор  $\mathbf{b}^c$  может быть любым. В Теореме 10.2.1 мы потребовали ещё знакоопределённости компонент вектора  $\mathbf{b}^c$  и существенно использовали это ограничение в своих рассуждениях.

Можно ли освободиться от него в общем случае? Это интересный вопрос, ответа на который автор пока не знает.

Отметим, что Теорема 10.2.1 носит вполне практический характер, так как существуют рабочие модели, удовлетворяющие её условиям. Такова, в частности, рассмотренная нами в §5.2 межотраслевая балансовая модель В. Леонтьева. Нетрудно показать (это сделано, к примеру, в работе [11]), что матрица Леонтьева является  $M$ -матрицей. Кроме того, компоненты вектора  $\mathbf{b}$  — величины конечного потребления по различным отраслям — по самому своему смыслу неотрицательны.

### 10.3 Обобщённый интервальный метод Гаусса-Зейделя

Цель настоящего параграфа — адаптировать рассмотренный в Главе 7 интервальный метод Гаусса-Зейделя на задачи внешнего оценивания множеств кванторных решений интервальных линейных систем уравнений. Мы будем предполагать, что в рассматриваемой ИСЛАУ интервальная матрица  $\mathbf{A}$  неособенна, т.е. то, что неособенны все точечные матрицы  $A \in \mathbf{A}$ . Ясно, что тогда путём перестановки уравнений системы (строк матрицы ИСЛАУ) можно добиться того, чтобы в новой матрице  $\mathbf{A}$  все диагональные элементы  $\mathbf{a}_{ii}$  не содержали нулей. Именно это условие и будет существенно использоваться в наших построениях.

Основой точечного метода Гаусса-Зейделя является, как известно, расписывание системы уравнений  $Ax = b$  в явном покомпонентном виде

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

и последующее решение  $i$ -го уравнения,  $i = 1, 2, \dots, n$ , относительно  $x_i$  в предположении  $a_{ii} \neq 0$ . Аналогичным образом мы будем действовать и при построении интервального метода.

Воспользуемся аналитической характеристикой множеств АЕ-решений, которую даёт Теорема 5.2.3: точка  $x$  принадлежит множеству решений  $\Xi_{\mathbf{A}\mathbf{b}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{A}^c \cdot x \subseteq \mathbf{b}^c.$$

Представляя это включение покомпонентно, получим

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij}^c x_j \subseteq \mathbf{b}_i^c, \quad i = 1, \dots, n,$$

что равносильно

$$\mathbf{a}_{ii}^c x_i \subseteq \text{орр} \sum_{j \neq i} \mathbf{a}_{ij}^c x_j + \mathbf{b}_i^c, \quad i = 1, \dots, n.$$

Если же  $0 \notin \text{пр} \mathbf{a}_{ii}^c = \mathbf{a}_{ii}$ , то обе части этого включения можно домножить на  $(\text{inv } \mathbf{a}_{ii}^c)$ , придя к

$$x_i \in \left( \text{орр} \sum_{j \neq i} \mathbf{a}_{ij}^c x_j + \mathbf{b}_i^c \right) \odot \mathbf{a}_{ii}^c, \quad i = 1, \dots, n.$$

Таблица 10.1. Обобщённый интервальный метод Гаусса-Зейделя

<p><b>Вход</b></p> <p>Характеристическая матрица <math>\mathbf{A}^c \in \mathbb{K}\mathbb{R}^{n \times n}</math> и вектор правой части <math>\mathbf{b}^c \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n</math>, соответствующие оцениваемому множеству АЕ-решений <math>\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})</math> интервальной линейной системы <math>\mathbf{Ax} = \mathbf{b}</math>.          Интервальный вектор <math>\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n</math>, который ограничивает желаемую часть множества решений <math>\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})</math>.          Константа <math>\epsilon &gt; 0</math>.</p>
<p><b>Выход</b></p> <p>Новая внешняя оценка <math>\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)^\top \subseteq \Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \mathbf{x}</math>, либо информация «множество решений <math>\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})</math> не пересекает <math>\mathbf{x}</math>».</p>
<p><b>Алгоритм</b></p> <pre> q ← +∞ ; DO WHILE ( q ≥ ε )   DO FOR i = 1 TO n     <math display="block">\tilde{x}_i \leftarrow \left( \sum_{j=1}^{i-1} (\text{opp } \mathbf{a}_{ij}^c) \tilde{x}_j + \sum_{j=i+1}^n (\text{opp } \mathbf{a}_{ij}^c) x_j + \mathbf{b}_i^c \right) \oslash \mathbf{a}_{ii}^c;</math>     IF ( <math>\tilde{x}_i</math> : есть неправильный интервал ) THEN       STOP, сигнализируя «<math>\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})</math> не пересекает <math>\mathbf{x}</math>»     END IF     <math>\tilde{x}_i \leftarrow x_i \cap \tilde{x}_i</math>     IF ( <math>\tilde{x}_i</math> : есть пустое множество <math>\emptyset</math> ) THEN       STOP, сигнализируя «<math>\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})</math> не пересекает <math>\mathbf{x}</math>»     END IF   END DO   q ← расстояние между <math>\mathbf{x}</math> и <math>\tilde{\mathbf{x}}</math> ;   <math>\mathbf{x} \leftarrow \tilde{\mathbf{x}}</math> ; END DO</pre>

Предположим, что нам уже известен некоторый интервальный вектор  $\mathbf{x}$ , содержащий множество решений  $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , т. е.  $\mathbf{x} \supseteq \Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ . Тогда, если  $x \in \Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ,

то должна быть справедливой следующая цепочка соотношений

$$\begin{aligned}
 x_i &\in \left( \text{орр} \sum_{j \neq i} \mathbf{a}_{ij}^c x_j + \mathbf{b}_i^c \right) \circledast \mathbf{a}_{ii}^c \\
 &= \left( \sum_{j \neq i} \text{орр} (\mathbf{a}_{ij}^c x_j) + \mathbf{b}_i^c \right) \circledast \mathbf{a}_{ii}^c \\
 &= \left( \sum_{j \neq i} (\text{орр} \mathbf{a}_{ij}^c) x_j + \mathbf{b}_i^c \right) \circledast \mathbf{a}_{ii}^c && \text{поскольку все } x_j \\
 & && \text{суть точечные} \\
 &\subseteq \left( \sum_{j \neq i} (\text{орр} \mathbf{a}_{ij}^c) \mathbf{x}_j + \mathbf{b}_i^c \right) \circledast \mathbf{a}_{ii}^c && \text{так как } x_j \in \mathbf{x}_j \text{ и} \\
 & && \text{арифметические} \\
 & && \text{операции в } \mathbb{K}\mathbb{R} \\
 & && \text{монотонны по} \\
 & && \text{включению.}
 \end{aligned}$$

Таким образом, если определить интервальный вектор  $\tilde{\mathbf{x}}$  посредством покомпонентных равенств

$$\tilde{\mathbf{x}}_i := \left( \sum_{j \neq i} (\text{орр} \mathbf{a}_{ij}^c) \mathbf{x}_j + \mathbf{b}_i^c \right) \circledast \mathbf{a}_{ii}^c, \quad i = 1, \dots, n, \quad (10.17)$$

то в рассматриваемых нами условиях он

- является правильным интервалом, несмотря на возможное наличие неправильных интервалов  $\mathbf{a}_{ij}^c$  и  $\mathbf{b}_i^c$ , взятие противоположных элементов и т. п. в выражении (10.17),
- также даёт внешнюю интервальную оценку множества решений  $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ .

Естественно поэтому взять пересечение

$$\mathbf{x} \cap \tilde{\mathbf{x}} \supseteq \Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}),$$

как более точную внешнюю интервальную оценку множества решений  $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ . Наконец, чтобы сразу же воспользоваться получаемой в ходе работы алгоритма информацией, мы организуем, как и в классическом точечном методе Гаусса-Зейделя, немедленное вовлечение полученной новой оценки каждой компоненты (которая заведомо не хуже старой) в вычислительный процесс. Таким образом,  $i$ -ая компонента нового приближения  $\tilde{\mathbf{x}}$  будет вычисляться по формуле (10.17) на основе уже вычисленных компонент  $\tilde{\mathbf{x}}$  с номерами  $i = 1, 2, \dots, i - 1$ , а также  $i + 1$ -ой,  $\dots$ ,  $n$ -ой компонент старого приближения  $\mathbf{x}$ . Детальная вычислительная схема интервального метода Гаусса-Зейделя для уточнения внешней интервальной оценки множеств АЕ-решений представлена в Табл. 10.1.

Если  $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \mathbf{x} \neq \emptyset$ , то результатом работы выписанного алгоритма является последовательность  $\{\tilde{\mathbf{x}}\}$  вложенных правильных интервалов, которая обязана иметь предел в  $\mathbb{R}^n$  (см. §1.9). Критерием остановки итерирования может служить, как обычно, достижение достаточной степени близости (в некоторой метрике, или же мультиметрике  $\text{Dist}$  (2.19)) между двумя последовательными приближениями. Для начала работы интервального метода Гаусса-Зейделя нужно знать некоторое начальное интервальное приближение  $\mathbf{x} \supseteq \Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ . Мы всегда можем получить его как внешнюю интервальную оценку объединённого множества решений  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  для соответствующей интервальной линейной системы (коль скоро оно наиболее широкое), применив какой-либо из большого количества хорошо разработанных для этой цели методов (см. Главу 7).

Обсудим, наконец, выбор величины  $\epsilon$ , которая влияет на критерий остановки алгоритма. Строго говоря, она не является точностью в общепринятом смысле, расстоянием от приближенного ответа до точного решения.

## 10.4 Исследование обобщённого интервального метода Гаусса-Зейделя

Теорию интервального метода Гаусса-Зейделя, представленную в Главе 7, можно частично перенести и на случай оценивания множеств кванторных решений ИСЛАУ. Это и делается ниже.

**Теорема 10.4.1** *Если  $\mathbf{x}^*$  — предел последовательных приближений, получаемых с помощью обобщённого интервального метода Гаусса-Зейделя для оценивания некоторого множества АЕ-решений интервальной линейной системы  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , то*

$$\langle \mathbf{A} \mid \mathbf{x}^* \mid \leq \mid \mathbf{b} \mid. \quad (10.18)$$

*Если же  $\mathbf{A}$  является интервальной Н-матрицей, то*

$$\mid \mathbf{x}^* \mid \leq \langle \mathbf{A} \rangle^{-1} \mid \mathbf{b} \mid. \quad (10.19)$$

**Доказательство.** Коль скоро мы рассматриваем только неособенные интервальные матрицы  $\mathbf{A}$ , то без ограничения общности можно считать, что  $0 \notin \mathbf{a}_{ii}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Переходя к пределу в расчётных формулах, определяющих обобщённый интервальный метод Гаусса-Зейделя, и учитывая, что  $\lim \mathbf{x} = \lim \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^*$ , получим

$$\mathbf{x}_i^* = \mathbf{x}_i^* \cap \left( \left( \sum_{j \neq i} (\text{орр } \mathbf{a}_{ij}^c) \mathbf{x}_j^* + \mathbf{b}_i^c \right) \oslash \mathbf{a}_{ii}^c \right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Следовательно, по крайней мере

$$\mathbf{x}_i^* \subseteq \left( \sum_{j \neq i} (\text{орр } \mathbf{a}_{ij}^c) \mathbf{x}_j^* + \mathbf{b}_i^c \right) \oslash \mathbf{a}_{ii}^c, \quad (10.20)$$

и потому

$$\mid \mathbf{x}_i^* \mid \leq \left| \left( \sum_{j \neq i} (\text{орр } \mathbf{a}_{ij}^c) \mathbf{x}_j^* + \mathbf{b}_i^c \right) \oslash \mathbf{a}_{ii}^c \right|$$

для всех  $i = 1, 2, \dots, n$ , так как в обеих частях включения (10.20) стоят правильные интервалы. Оценим сверху правые части полученных неравенств:

$$\begin{aligned} \left| \left( \sum_{j \neq i} (\text{opp } \mathbf{a}_{ij}^c) \mathbf{x}_j^* + \mathbf{b}_i^c \right) \oslash \mathbf{a}_{ii}^c \right| &= |\text{inv } \mathbf{a}_{ii}^c| \cdot \left| \sum_{j \neq i} (\text{opp } \mathbf{a}_{ij}^c) \mathbf{x}_j^* + \mathbf{b}_i^c \right| \\ &\leq |\mathbf{a}_{ii}^{-1}| \left( \sum_{j \neq i} |(\text{opp } \mathbf{a}_{ij}^c) \mathbf{x}_j^*| + |\mathbf{b}_i^c| \right) \\ &\leq \langle \mathbf{a}_{ii} \rangle^{-1} \left( \sum_{j \neq i} |\mathbf{a}_{ij}| |\mathbf{x}_j^*| + |\mathbf{b}_i| \right) \end{aligned}$$

для всякого  $i = 1, 2, \dots, n$ . Таким образом, в целом имеем

$$|\mathbf{x}_i^*| \leq \langle \mathbf{a}_{ii} \rangle^{-1} \left( \sum_{j \neq i} |\mathbf{a}_{ij}| |\mathbf{x}_j^*| + |\mathbf{b}_i| \right),$$

что равносильно

$$\langle \mathbf{a}_{ii} \rangle |\mathbf{x}_i^*| - \sum_{j \neq i} |\mathbf{a}_{ij}| |\mathbf{x}_j^*| \leq |\mathbf{b}_i|,$$

или

$$(\langle \mathbf{A} | \mathbf{x}^* \rangle)_i \leq |\mathbf{b}_i|$$

для всех  $i = 1, 2, \dots, n$ , т. е. совпадает с (10.18).

Если же  $\mathbf{A}$  — интервальная  $H$ -матрица, то  $\langle \mathbf{A} \rangle$  — это  $M$ -матрица и, домножая обе части (10.18) на  $\langle \mathbf{A} \rangle^{-1} \geq 0$ , получим (10.19). ■

Из неравенства (10.19) следует, что если в системе  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  интервальная матрица  $\mathbf{A}$  является  $H$ -матрицей, то любой достаточно широкий начальный интервальный вектор  $\mathbf{x}$  уточняется (т. е. уменьшается в размерах) обобщённым интервальным методом Гаусса-Зейделя. Напротив, если  $\mathbf{A}$  не есть  $H$ -матрица, то такого вывода сделать уже нельзя. Но и аналога Теоремы 7.3.2 о существовании сколь угодно широких неулучшаемых начальных приближений для обобщённого интервального метода Гаусса-Зейделя теперь доказать не удаётся. Старое доказательство Ноймайера (как и значительная часть его теории вообще) уже не проходит, так как в нём существенно используется тот факт (неверный в полной интервальной арифметике Каухера), что абсолютная величина произведения интервалов равна произведению абсолютных величин сомножителей. Тем не менее, гарантировать улучшение начального интервала методом Гаусса-Зейделя в случае, если матрица ИСЛАУ не является  $H$ -матрицей, мы всё-таки не можем.

В Главе 7 мы познакомились со свойством оптимальности интервальных итераций Гаусса-Зейделя в применении к объединённому множеству решений ИСЛАУ (теорема Барта-Нудинга). Нам удалось распространить этот классический результат и на обобщённый интервальный метод Гаусса-Зейделя:

**Теорема 10.4.2** Если в интервальной линейной системе  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  матрица  $\mathbf{A}$  является интервальной  $M$ -матрицей а все компоненты вектора правой части имеют одинаковый определённый знак, то обобщённый интервальный метод Гаусса-Зейделя сходится к оптимальной внешней интервальной оценке множества АЕ-решений рассматриваемой системы из любого начального приближения, содержащего оцениваемое множество решений.

**Доказательство.** Введём следующие обозначения

$\mathbf{E} = (\mathbf{e}_{ij})$  — матрица, полученная из матрицы системы  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$  заменой её диагональных элементов на нули,

$\mathbf{D} = (\mathbf{d}_{ij})$  — диагональная матрица с элементами  $\mathbf{d}_{ii} = \mathbf{a}_{ii}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , по главной диагонали,

$\mathbf{E}^c = (\mathbf{e}_{ij}^c)$  — матрица, полученная из характеристической матрицы  $\mathbf{A}^c = (\mathbf{a}_{ij}^c)$  заменой её диагональных элементов на нули,

$\mathbf{D}^c = (\mathbf{d}_{ij}^c)$  — диагональная матрица с элементами  $\mathbf{d}_{ii}^c = \mathbf{a}_{ii}^c$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , по главной диагонали.

Тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \mathbf{D} + \mathbf{E}, \\ \mathbf{A}^c &= \mathbf{D}^c + \mathbf{E}^c,\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_{ij} &= \mathbf{d}_{ij}^c = 0 && \text{для } i \neq j, \\ \mathbf{e}_{ij} &= \mathbf{e}_{ij}^c = 0 && \text{для } i = j.\end{aligned}$$

Если  $\mathbf{x}^*$  — предел обобщённого интервального метода Гаусса-Зейделя, применённого к ИСЛАУ  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , то, очевидно,

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^* \cap (\text{inv } \mathbf{D}^c) ((\text{opp } \mathbf{E}^c) \mathbf{x}^* + \mathbf{b}^c),$$

а потому

$$\mathbf{x}^* \subseteq (\text{inv } \mathbf{D}^c) ((\text{opp } \mathbf{E}^c) \mathbf{x}^* + \mathbf{b}^c). \quad (10.21)$$

Далее, если  $\mathbf{A}$  есть  $M$ -матрица, то её диагональ состоит из положительных элементов,  $|\text{inv } \mathbf{D}^c| = \langle \mathbf{D} \rangle^{-1}$ , и поэтому

$$|\text{inv } \mathbf{D}^c| |\text{opp } \mathbf{E}^c| = \langle \mathbf{D} \rangle^{-1} |\mathbf{E}|. \quad (10.22)$$

Кроме того,  $\mathbf{D}$  также есть  $M$ -матрица.

Но и матрица сравнения  $\langle \mathbf{A} \rangle$  является  $M$ -матрицей, будучи одной из точечных матриц в пределах  $\mathbf{A}$ . Следовательно, поскольку  $\langle \mathbf{A} \rangle = \langle \mathbf{D} \rangle - |\mathbf{E}|$ , из результата Ноймайера (Теорема 2.8.1) вытекает

$$\rho(\langle \mathbf{D} \rangle^{-1} |\mathbf{E}|) < 1,$$

что вместе с (10.22) приводит к неравенству

$$\rho(|(D^c)^{-1}| | \text{opp } E^c |) < 1.$$

Мы можем, таким образом, заключить, что итерационный процесс в  $\mathbb{KR}^n$ , определяемый формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(0)} &\leftarrow \mathbf{x}^*, \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &\leftarrow (\text{inv } D^c)((\text{opp } E^c) \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}^c), \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

сходится к единственной неподвижной точке  $\mathbf{x}^*$  отображения  $\mathbb{KR}^n \rightarrow \mathbb{KR}^n$ , действующего по правилу

$$\mathbf{x} \mapsto (\text{inv } D^c)((\text{opp } E^c) \mathbf{x} + \mathbf{b}^c).$$

При этом  $\mathbf{x}^*$  является формальным решением интервальной линейной системы

$$x = (\text{inv } D^c)((\text{opp } E^c) x + \mathbf{b}^c). \quad (10.23)$$

Далее, из включения (10.21) по индукции можно вывести, что

$$\mathbf{x}^* \subseteq \mathbf{x}^*. \quad (10.24)$$

Действительно,  $\mathbf{x}^* \subseteq \mathbf{x}^{(0)}$ , и если  $\mathbf{x}^* \subseteq \mathbf{x}^{(k)}$ , то, принимая во внимание свойство монотонности интервальных арифметических операций в  $\mathbb{KR}$  по включению, нетрудно заключить

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &\subseteq (\text{inv } D^c)((\text{opp } E^c) \mathbf{x}^* + \mathbf{b}^c) \\ &\subseteq (\text{inv } D^c)((\text{opp } E^c) \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}^c) = \mathbf{x}^{(k+1)}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу  $k \rightarrow \infty$ , получаем (10.24).

Для завершения доказательства следует лишь сослаться на Теорему 10.2.1: коль скоро  $\mathbf{x}^*$  есть формальное решение системы (10.23) и  $\mathbf{A}$  является  $M$ -матрицей, то  $\mathbf{x}^*$  — это интервальная оболочка множества решений  $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  и  $\mathbf{x}^* \supseteq \Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ . Следовательно, в силу (10.24) вектор  $\mathbf{x}^*$  также является интервальной оболочкой  $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ . ■

## 10.5 Предобуславливание

Обе развитые выше методики для внешнего интервального оценивания множеств АЕ-решений ИСЛАУ, — формальный подход и обобщённый интервальный метод Гаусса-Зейделя — имеют существенные ограничения на сферу своей приложимости. Ключевым моментом применимости формального подхода является приведение исходной интервальной линейной системы (10.1) к виду (10.5) таким образом, чтобы выполнялось условие

$$\rho(|I \ominus \mathbf{A}^c|) < 1.$$

В свою очередь, из результатов §10.4 следует, что для хорошей работы обобщённого интервального метода Гаусса-Зейделя желательно, чтобы интервальная линейная



система имела  $H$ -матрицу. Оба эти условия довольно обременительны и на практике выполняются далеко не всегда. Как же находить внешние оценки множеств АЕ-решений интервальных линейных систем в общем случае?

Далее, даже если в (10.5) мы имеем  $\rho(|I \ominus \mathbf{A}^c|) < 1$  и формальный подход применим, ширина неподвижной точки уравнения (10.5) также решающим образом зависит от величины  $\rho(|I \ominus \mathbf{A}^c|)$ . Чем меньше  $\rho(|I \ominus \mathbf{A}^c|)$ , тем лучшую, при прочих равных условиях, внешнюю интервальную оценку множества решений мы получаем.

Как мы знаем из Главы 7, в задаче внешнего интервального оценивания объединённого множества решений поставленные вопросы обычно решаются с помощью предобуславливания — домножения обеих частей системы слева на некоторую вещественную матрицу, так что вместо исходной системы

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b} \quad (10.1)$$

мы получаем *предобусловленную интервальную систему*

$$(\mathbf{L}\mathbf{A})x = \mathbf{L}\mathbf{b}, \quad (7.37)$$

$\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , объединённое множество решений которой не уже, чем для (10.1) (см. §7.5). К сожалению, этот рецепт, который можно называть *наивным предобуславливанием*, напрямую не применим при оценивании множеств кванторных решений. При простом домножении интервальной матрицы и правой части ИСЛАУ слева на вещественную матрицу кванторные множества решений не обязательно расширяются, но могут изменяться довольно сложным образом.

**Пример 10.5.1** Для интервальной линейной системы

$$\begin{pmatrix} 1 & [0, 1] \\ 0 & [2, 3] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1, 2] \\ [-6, 6] \end{pmatrix}$$

множество  $(\exists \exists)(\exists)$ -решений изображено тёмно-серым тоном на Рис. 10.1.

Обратная к средней матрице рассматриваемой системы есть

$$\mathbf{Q} = (\text{mid } \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -0.2 \\ 0 & 0.4 \end{pmatrix},$$

так что «наивно предобусловленная» с её помощью ИСЛАУ имеет вид

Из Рис. 10.1 нетрудно видеть, что множество  $(\exists \exists)(\exists)$ -решений «наивно предобусловленной» системы (10.26) в первом ортанте не содержит вершину  $(\frac{4}{3}, \frac{5}{3})$  и прилегающую к ней часть (например, точку  $(1, 1)^T$ ) множества  $(\forall \exists)(\exists)$ -решений для исходной ИСЛАУ (10.25). Более того, нижняя оценка второй координаты точек этого множества решений, которая для исходной системы равна нулю и достигается на вершине  $(\frac{1}{2}, 0)$ , при наивном предобуславливании увеличивается! ■

**Пример 10.5.2** Рассмотрим интервальную линейную систему,

$$\begin{pmatrix} 2 & [-3, -1]^E \\ -1 & [2, 5]^A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1, 3]^E \\ [1, 10]^E \end{pmatrix} \quad (10.25)$$

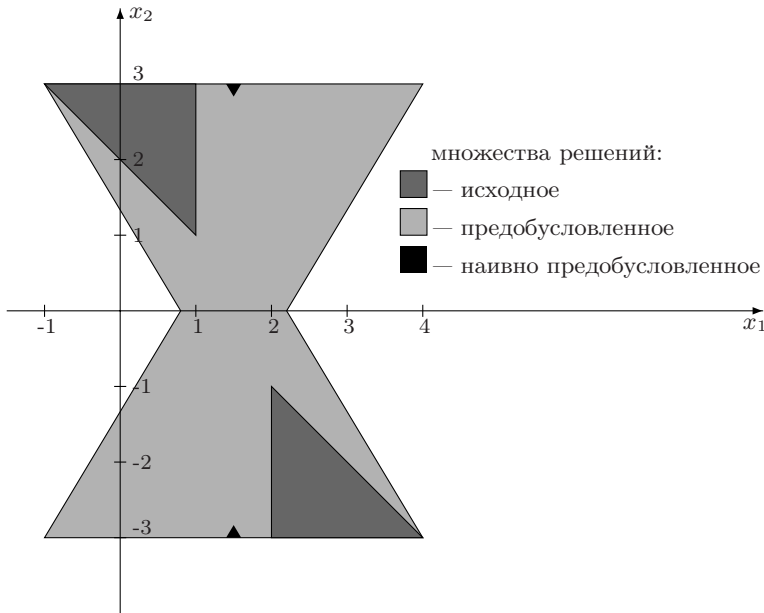


Рис. 10.1. Сравнение множеств решений исходной, предобусловленной и наивно-предобусловленной интервальных линейных систем.

для которой

$$\text{mid } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3.5 \end{pmatrix}, \quad (\text{mid } \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix},$$

а интервальная система, «наивно предобусловленная» с помощью обратной средней, есть

$$\frac{2}{37} \begin{pmatrix} [11, 26] & [-10, 10] \\ [-10, 10] & [11, 26] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{2}{37} \begin{pmatrix} [7, 14] \\ [4, 11] \end{pmatrix}. \quad (10.26)$$

■

Итак, множество решений «наивно предобусловленной» ИСЛАУ не обязательно содержит множество решений исходной ИСЛАУ, а внешняя оценка множества решений «наивно предобусловленной» системы может и не быть внешней оценкой соответствующего множества решений исходной системы. Тем не менее, выход из создавшегося затруднения есть и он состоит в том, что мы должны предобуславливать не исходную интервальную линейную систему вообще, а *характеристическую матрицу* и *характеристический вектор правой части*, соответствующие конкретному рассматриваемому множеству АЕ-решений.

Вновь обратимся к Теореме 5.2.3 из §5.2б, дающей удобную аналитическую характеристику множеств АЕ-решений интервальных линейных систем:

$$x \in \Xi_{A\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \quad \iff \quad \mathbf{A}^c \cdot x \subseteq \mathbf{b}^c.$$

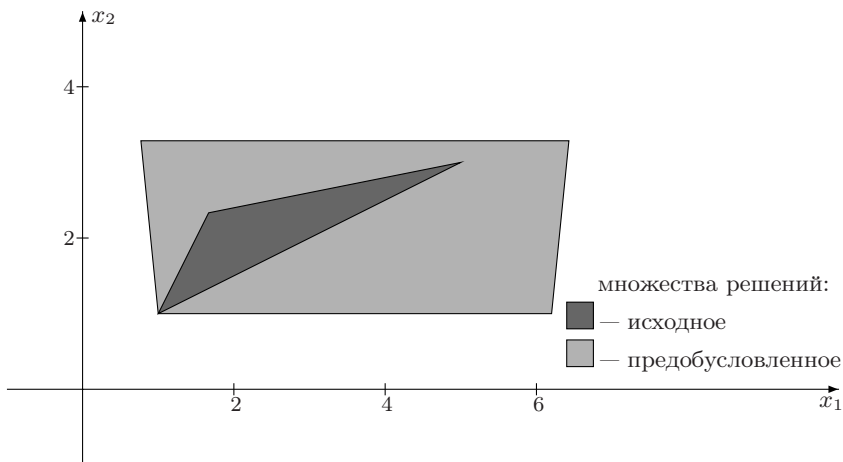


Рис. 10.2. Сравнение множеств решений интервальных линейных систем: исходной, предобусловленной и наивно предобусловленной. Наивно предобусловленное — пусто.

Если  $A$  — какая-нибудь квадратная точечная  $n \times n$ -матрица, то следствием включения, выписанного в этой эквивалентности справа, является

$$A(A^c \cdot x) \subseteq Ab^c.$$

Известно, что произведение интервальных матриц в общем случае неассоциативно. Тем не менее, для точечных  $A$  и  $x$  в силу Предложения 2.2.3 имеет место равенство

$$A(A^c \cdot x) = (AA^c)x.$$

Следовательно, в целом приходим к импликации

$$x \in \Xi_{A\beta}(A, b) \quad \implies \quad (AA^c)x \subseteq Ab^c,$$

содержательный смысл которой может быть выражен следующим образом

**Теорема 10.5.1** Если  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — квадратная точечная матрица, то множество АЕ-решений  $\Xi(A^c, b^c)$  для интервальной линейной системы (10.1), соответствующее характеристической матрице  $A^c$  и вектору правой части  $b^c$ , содержится во множестве АЕ-решений ИСЛАУ, соответствующих характеристической матрице  $AA^c$  и вектору правых частей  $Ab^c$ , т. е. в  $\Xi(AA^c, Ab^c)$ .

Мы будем называть домножение характеристических матрицы и правой части слева на вещественную матрицу *обобщённым предобуславливанием* интервальной линейной системы. Как видим, его результатом может быть лишь увеличение множества АЕ-решений, но для новой характеристической матрицы может оказаться выполненным условие

$$\rho(|I \ominus A^c|) < 1,$$

которое так желательно для применимости наших подходов. Таким образом, исходную задачу внешнего интервального оценивания некоторого множества решений ИСЛАУ действительно можно будет заменить на успешно решаемую задачу внешнего оценивания другого множества решений, которое соответствует преобусловленным характеристической матрице и характеристической правой части ИСЛАУ.

Например, для множества  $(\begin{smallmatrix} \forall \\ \exists \end{smallmatrix}) (\begin{smallmatrix} \exists \\ \exists \end{smallmatrix})$ -решений интервальной линейной системы уравнений (10.25) характеристические матрица и вектор правой части есть

$$\mathbf{A}^c = \begin{pmatrix} [2, 4] & [1, -2] \\ [2, -1] & [4, 2] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}^c = \begin{pmatrix} [1, 2] \\ [1, 2] \end{pmatrix},$$

а потому

$$(\text{mid } \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^c = \frac{2}{37} \begin{pmatrix} [14, 23] & [10, -10] \\ [8, -8] & [26, 11] \end{pmatrix}, \quad (10.27)$$

$$(\text{mid } \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}^c = \frac{2}{37} \begin{pmatrix} [7, 14] \\ [4, 11] \end{pmatrix}. \quad (10.28)$$

Множество АЕ-решений ИСЛАУ, которое соответствует характеристическим матрице (10.27) и правой части (10.28), изображено на правом нижнем чертеже Рис. 10.1 и включает в себя, как легко убедиться из сопоставления с верхним чертежом этого же рисунка, все  $(\begin{smallmatrix} \forall \\ \exists \end{smallmatrix}) (\begin{smallmatrix} \exists \\ \exists \end{smallmatrix})$ -решения исходной интервальной линейной системы (10.25).

Далее,

$$|I \ominus (\text{mid } \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^c| = \frac{1}{37} \begin{pmatrix} 9 & 20 \\ 16 & 15 \end{pmatrix},$$

собственные числа этой матрицы равны  $\frac{1}{37}(12 \pm \sqrt{329})$ , т.е. примерно 0.81455 и  $-0.16590$ , и потому условие (10.4) Теоремы 10.1.3 действительно удовлетворяется. В то же время, для матрицы исходной ИСЛАУ (10.25) это условие не выполнено.

Для удобства читателя переформулируем основные результаты §10.1 в виде, который явно учитывает преобуславливающую матрицу  $\Lambda$ .

**Теорема 10.5.2** Пусть  $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — квадратная точечная матрица. Если точка  $x \in \mathbb{R}^n$  принадлежит множеству решений  $\Xi_{\Lambda\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , то

$$x \in (I \ominus \Lambda \mathbf{A}^c) x + \Lambda \mathbf{b}^c.$$

**Теорема 10.5.3** Пусть для интервальной линейной системы  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  и её множества решений  $\Xi_{\Lambda\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , соответствующего характеристическим матрице  $\mathbf{A}^c$  и правой части  $\mathbf{b}^c$ , существует такая квадратная точечная матрица  $\Lambda$ , что

$$\rho(|I \ominus \Lambda \mathbf{A}^c|) < 1. \quad (10.29)$$

Тогда формальное решение интервальной системы

$$x = (I \ominus \Lambda \mathbf{A}^c) x + \Lambda \mathbf{b}^c \quad (10.30)$$

существует в  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$  и единственно. Если же множество АЕ-решений  $\Xi_{\mathcal{A}\mathcal{B}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  непусто, то формальное решение интервальной системы (10.30) является правильным интервальным вектором, содержащим  $\Xi_{\mathcal{A}\mathcal{B}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ .

**Доказательства** этих утверждений аналогичны доказательствам Теорем 10.1.1–10.1.3, и поэтому мы на них здесь не останавливаемся. ■

На наш взгляд, формальный подход также может получить дальнейшее развитие и расширение сферы своей применимости на основе подходящего выбора преобуславливания. Имеет смысл рассмотреть преобуславливающие матрицы, в некотором смысле промежуточные между «обратной средней» и диагональной. Тогда они не будут сильно искажать множество решений, приводя в то же время матрицу к нужному значению спектрального радиуса.

## 10.6 Внешнее оценивание для нелинейных систем

Развиваемый нами в этой главе формальный подход к внешнему оцениванию множеств решений интервальных систем частично применим не только к линейным, но и к нелинейным системам уравнений. В этом параграфе мы кратко наметим соответствующие результаты, касающиеся допускового, управляемого и объединённого множеств решений, а их дальнейшее развитие и детализация могут стать предметом отдельной большой работы. Как мы видели в Главе 7, задача внешнего оценивания объединённого множества решений для общих нелинейных интервальных систем уравнений является весьма популярной в приложениях, а её решению посвящено немалое количество публикаций. Тщательное сравнение классических подходов к этой задаче — методов Кравчика, Хансена-Сенгупты и т. п. — с нашим формальным подходом останется пока за рамками исследования.

Предположим, что в интервальной системе количество уравнений совпадает с количеством неизвестных, и мы можем эквивалентным образом привести эту систему к рекуррентной форме

$$x = G(\mathbf{a}, x) + \mathbf{b}, \quad (4.20)$$

в которой вектор переменной выделен в одной из частей «в чистом виде». Подобное приведение, как правило, не является непреодолимо сложным. Если исходная интервальная система уравнений представлена в виде

$$F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b},$$

то мы можем, например, «перенести» все члены, образующие  $F(\mathbf{a}, x)$ , в одну часть с вектором  $\mathbf{b}$ , затем добавить к обеим частям системы по  $x$  и, возможно, выполнить упрощающие преобразования с выражением  $(x - F(\mathbf{a}, x))$  в соответствии с рекомендациями в конце §1.2а. Другой возможный способ приведения (2) к (4.20) — последовательно выразить все  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , из различных уравнений системы.

Допуская некоторую вольность, мы будем обозначать в этом параграфе

$$\Xi_{tol}(G, \mathbf{a}, \mathbf{b}) := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \mathbf{a} \in \mathbf{a})(\exists \mathbf{b} \in \mathbf{b})(x = G(\mathbf{a}, x) + \mathbf{b}) \} \quad (10.31)$$

и называть это множество *допусковым множеством решений* интервальной системы уравнений (4.20). При выполнении вышеупомянутых условий эквивалентности преобразований из §1.2а это множество совпадает с допусковым множеством решений интервальной системы (2), а потому далее мы можем рассматривать задачу внешнего оценивания уже для (10.31).

В качестве примера рассмотрим интервальную систему уравнений

$$\begin{cases} [1.5, 2.5]x_1 + [2.5, 3.5]x_2 + \frac{[0.8, 1.4]}{1+x_1^2} = [5, 15], \\ [0.9, 1.1]x_1 - [1.8, 2.2]x_2 + [1.6, 2] \cos x_2 = [8, 20]. \end{cases} \quad (10.32)$$

В силу результатов §1.2а она эквивалентна системе

$$\begin{cases} 2x_1 + [-0.5, 0.5]x_1 + [2.5, 3.5]x_2 + \frac{[0.8, 1.4]}{1+x_1^2} = [5, 15], \\ [0.9, 1.1]x_1 - 2x_2 + [-0.2, 0.2]x_2 + [1.6, 2] \cos x_2 = [8, 20], \end{cases}$$

которая, в свою очередь, после перенесения членов может быть переписана как

$$\begin{cases} 2x_1 = [-0.5, 0.5]x_1 - [2.5, 3.5]x_2 - \frac{[0.8, 1.4]}{1+x_1^2} + [5, 15], \\ 2x_2 = [0.9, 1.1]x_1 + [-0.2, 0.2]x_2 + [1.6, 2] \cos x_2 - [8, 20]. \end{cases}$$

Наконец, приходим к

$$\begin{cases} x_1 = [-0.25, 0.25]x_1 - [1.25, 1.75]x_2 - \frac{[0.4, 0.7]}{1+x_1^2} + [2.5, 7.5], \\ x_2 = [0.45, 0.55]x_1 + [-0.1, 0.1]x_2 + [0.8, 1] \cos x_2 - [4, 10]. \end{cases}$$

Возможен также другой способ равносильного приведения интервальной системы уравнений (10.32) к желаемой рекуррентной форме. От (10.32) мы переходим к

$$\begin{cases} [1.5, 2.5]x_1 + 3x_2 + [-0.5, 0.5]x_2 + \frac{[0.8, 1.4]}{1+x_1^2} = [5, 15], \\ x_1 + [-0.1, 0.1]x_1 - [1.8, 2.2]x_2 + [1.6, 2] \cos x_2 = [8, 20]. \end{cases}$$

Выражая  $x_1$  из второго уравнения и  $x_2$  из первого уравнения и меняя получающиеся уравнения местами, будем иметь

$$\begin{cases} x_1 = [-0.1, 0.1]x_1 + [1.8, 2.2]x_2 - [1.6, 2] \cos x_2 + [8, 20], \\ x_2 = [-\frac{5}{6}, -\frac{1}{2}]x_1 + [-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}]x_2 - [\frac{8}{30}, \frac{14}{3}] \frac{1}{1+x_1^2} + [\frac{5}{3}, 5] \end{cases}$$

В дальнейшем принципиален также тот факт, что для  $G(a, x)$  существует естественное интервальное расширение по аргументам  $a$  и  $x$ , т. е. аналитическое выражение для  $G(a, x)$  есть конечная комбинация символов переменных  $x_i$ , параметров  $a_j$ , четырёх арифметических операций и, возможно, ещё элементарных функций типа  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\exp$ ,  $\log$ , возведения в целую степень, взятия корня и т. п.

**Теорема 10.6.1** Пусть в интервальной системе уравнений

$$x = G(\mathbf{a}, x) + \mathbf{b}$$

каждый из параметров  $a_1, a_2, \dots, a_l$ , имеющих интервальную неопределённость, входит не более одного раза в первой степени в каждое из компонентных выражений  $G_1, G_2, \dots, G_n$  отображения  $G$ . Если для некоторого интервального вектора  $\mathbf{a} \in \mathbb{IR}^l$  допустовое множество решений  $\Xi_{tol}(G, \mathbf{a}, \mathbf{b})$  этой системы непусто, и, кроме того, для естественного интервального расширения  $G(\mathbf{a}, \mathbf{x})$  выражения  $G(a, x)$  отображение  $G: \mathbb{KR}^n \rightarrow \mathbb{KR}^n$ , действующее по правилу

$$\mathbf{x} \mapsto G(\text{dual } \mathbf{a}, \mathbf{x}),$$

есть  $P$ -сжатие пространства  $\mathbb{KR}^n$ , то интервальная система уравнений

$$x = G(\text{dual } \mathbf{a}, \mathbf{x}) + \mathbf{b} \quad (10.33)$$

имеет единственное правильное формальное решение  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{IR}^n$ , которое является внешней интервальной оценкой допустового множества решений  $\Xi_{tol}(G, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ , т. е.  $\mathbf{x}^* \supseteq \Xi_{tol}(G, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ .

**Доказательство.** Прежде всего покажем, что для интервальной системы уравнений

$$x = G(\mathbf{a}, x) + \mathbf{b} \quad (4.20)$$

принадлежность точки  $x$  допустовому множеству решений  $\Xi_{tol}(G, \mathbf{a}, \mathbf{b})$  влечёт справедливость следующей системы неравенств

$$\begin{cases} x_i \geq \max_{a \in \mathbf{a}} G_i(a, x) + \underline{b}_i, \\ x_i \leq \min_{a \in \mathbf{a}} G_i(a, x) + \bar{b}_i, \\ i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (10.34)$$

Как и при доказательстве Теоремы 5.1.2, мы обоснуем (10.34) путём эквивалент-

ных преобразований с выделяющим предикатом множества решений. Имеем

$$\begin{aligned}
 \Xi_{tol}(G, \mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall a \in \mathbf{a})(\exists b \in \mathbf{b})(x = G(a, x) + b) \} \\
 &= \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall a \in \mathbf{a})(\exists b \in \mathbf{b}) \\
 &\quad (x_1 = G_1(a, x) + b_1 \ \& \\
 &\quad \dots \ \& \\
 &\quad x_n = G_n(a, x) + b_n) \} \\
 &= \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall a \in \mathbf{a}) \\
 &\quad ( (\exists b_1 \in \mathbf{b}_1)(x_1 = G_1(a, x) + b_1) \ \& \\
 &\quad \dots \ \& \\
 &\quad (\exists b_n \in \mathbf{b}_n)(x_n = G_n(a, x) + b_n) ) \},
 \end{aligned}$$

где последнее равенство действительно является равенством потому, что для каждого  $i$  в выражение  $(G_i(a, x) + b_i)$  входит лишь одна из  $b_i$ , и эти вхождения в разных выражениях  $(G_i(a, x) + b_i)$  не пересекаются друг с другом. Известно, что тогда мы имеем право «проносить» кванторы существования « $\exists$ » к отдельным членам конъюнкций [3].

Воспользовавшись эквивалентностями (5.2)–(5.3), мы можем продолжить наши выкладки с выделяющим предикатом следующим образом

$$\begin{aligned}
 \Xi_{tol}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall a \in \mathbf{a}) \\
 &\quad \left( (x_1 \geq G_1(a, x) + \underline{b}_1) \ \& \right. \\
 &\quad \left. (x_1 \leq G_1(a, x) + \overline{b}_1) \ \& \right. \\
 &\quad \dots \ \& \\
 &\quad \left. (x_n \geq G_n(a, x) + \underline{b}_n) \ \& \right. \\
 &\quad \left. (x_n \leq G_n(a, x) + \overline{b}_n) \right) \} \\
 &= \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall a \in \mathbf{a})(x_1 \geq G_1(a, x) + \underline{b}_1) \ \& \\
 &\quad (\forall a \in \mathbf{a})(x_1 \leq G_1(a, x) + \overline{b}_1) \ \& \\
 &\quad \dots \ \& \\
 &\quad (\forall a \in \mathbf{a})(x_n \geq G_n(a, x) + \underline{b}_n) \ \& \\
 &\quad (\forall a \in \mathbf{a})(x_n \leq G_n(a, x) + \overline{b}_n) \} \\
 &= \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (x_1 \geq \max_{a \in \mathbf{a}} G_1(a, x) + \underline{b}_1) \ \& \\
 &\quad (x_1 \leq \min_{a \in \mathbf{a}} G_1(a, x) + \overline{b}_1) \ \& \\
 &\quad \dots \ \& \\
 &\quad (x_n \geq \max_{a \in \mathbf{a}} G_n(a, x) + \underline{b}_n) \ \& \\
 &\quad (x_n \leq \min_{a \in \mathbf{a}} G_n(a, x) + \overline{b}_n) \},
 \end{aligned}$$



что совпадает с системой неравенств (5.1).

Если каждый из параметров  $a_1, a_2, \dots, a_l$ , имеющих интервальную неопределённость, входит не более одного раза в первой степени в каждое из компонентных выражений  $G_1, G_2, \dots, G_n$ , то для всех  $i = 1, 2, \dots, n$

$$\max_{a \in \mathbf{a}} G_i(a, x) \quad \text{и} \quad \min_{a \in \mathbf{a}} G_i(a, x)$$

совпадают с

$$\overline{G_i(\mathbf{a}, x)} \quad \text{и} \quad \underline{G_i(\mathbf{a}, x)}$$

— верхними и нижними концами естественных интервальных расширений  $G_i(\mathbf{a}, x)$ . В свою очередь, основываясь на свойствах арифметики Каухера, мы можем представить эти значения в виде

$$\underline{G_i(\text{dual } \mathbf{a}, x)} \quad \text{и} \quad \overline{G_i(\text{dual } \mathbf{a}, x)}.$$

Таким образом, если точка  $\tilde{x}$  лежит в допусковом множестве решений  $\Xi_{tol}(G, \mathbf{a}, \mathbf{b})$  интервальной системы уравнений

$$x = G(\mathbf{a}, x) + \mathbf{b} \tag{4.20}$$

и выполнены условия доказываемой теоремы, касающиеся вхождения в (4.20) параметров с интервальной неопределённостью, то, в силу (10.34) справедливо включение

$$\tilde{x} \in G(\text{dual } \mathbf{a}, \tilde{x}) + \mathbf{b}.$$

Запустим в  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$  итерационный процесс по формулам

$$\mathbf{x}^{(0)} \leftarrow \tilde{x}, \tag{10.35}$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} \leftarrow G(\text{dual } \mathbf{a}, \mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{b}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{10.36}$$

Нетрудно показать по индукции, что все порождаемые этим процессом векторы содержат точку  $\tilde{x}$ . Действительно, для  $\mathbf{x}^{(0)}$  это верно по построению, и если  $\tilde{x} \in \mathbf{x}^{(k)}$  для некоторого номера  $k$ , то из-за монотонности арифметических операций в  $\mathbb{K}\mathbb{R}$  по включению

$$\tilde{x} \in G(\text{dual } \mathbf{a}, \tilde{x}) + \mathbf{b} \subseteq G(\text{dual } \mathbf{a}, \mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{b} = \mathbf{x}^{(k+1)}.$$

Следовательно,  $\tilde{x}$  на самом деле принадлежит всем  $\mathbf{x}^{(k)}$ , которые поэтому должны быть правильными интервальными векторами, невзирая на возможное наличие в выражении  $G(\text{dual } \mathbf{a}, x)$  неправильных интервалов.

Наконец, теорема Шрёдера о неподвижной точке (теорема 2.4.2) приводит нас к выводу о том, что при наложенных на  $G(\text{dual } \mathbf{a}, x)$  условиях последовательность  $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$  сходится к некоторому пределу  $\mathbf{x}^*$  — единственному формальному решению системы уравнений (10.33). При этом принадлежность  $\tilde{x} \in \mathbf{x}^{(k)}$  влечёт

$$\tilde{x} \in \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^*.$$

Поскольку наше рассуждение справедливо для любой точки  $\tilde{x}$  из множества решений  $\Xi_{tol}(G, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ , то действительно  $\Xi_{tol}(G, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \subseteq \mathbf{x}^*$ . ■

Совершенно сходным образом для управляемого множества решений

$$\Xi_{ctl}(G, \mathbf{a}, \mathbf{b}) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall b \in \mathbf{b})(\exists a \in \mathbf{a})(x = G(a, x) + b)\},$$

интервальной системы (4.20) обосновывается

**Теорема 10.6.2** Пусть управляемое множество решений  $\Xi_{ctl}(G, \mathbf{a}, \mathbf{b})$  интервальной системы уравнений (4.20) непусто, и, кроме того, для естественного интервального расширения  $G(\mathbf{a}, \mathbf{x})$  выражения  $G(a, x)$  отображение  $G : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$ , действующее по правилу

$$\mathbf{x} \mapsto G(\mathbf{a}, \mathbf{x}),$$

есть  $P$ -сжатие пространства  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ . Тогда система уравнений

$$x = G(\mathbf{a}, x) + \text{dual } \mathbf{b}$$

имеет единственное правильное формальное решение  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{H}\mathbb{R}^n$ , которое является внешней интервальной оценкой управляемого множества решений  $\Xi_{ctl}(G, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ , т. е.  $\mathbf{x}^* \supseteq \Xi_{ctl}(G, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ .

Отметим, что для объединённого множества решений результат, аналогичный Теоремам 10.6.1 и 10.6.2, — это давно известная Теорема 7.4.3 (хотя изначально она формулировалась для классической интервальной арифметики в совершенно других терминах и без использования понятия формального решения).

Как добиться того, чтобы фигурирующие в Теоремах 10.6.1–10.6.2 интервальные отображения

$$\mathbf{x} \mapsto G(\text{dual } \mathbf{a}, \mathbf{x}) \quad \text{и} \quad \mathbf{x} \mapsto G(\mathbf{a}, \mathbf{x})$$

являлись бы сжатиями пространства  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ . Иногда здесь помогает применение процедуры, аналогичной преобуславливанию интервальных линейных систем из §10.5 — линейное комбинирование уравнений исходной системы (2) с некоторыми специально подобранными коэффициентами.

Пусть исходная система

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f_1(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l, x_1, \dots, x_n) & = & \mathbf{b}_1, \\ f_2(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l, x_1, \dots, x_n) & = & \mathbf{b}_2, \\ & \vdots & \vdots \\ f_m(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l, x_1, \dots, x_n) & = & \mathbf{b}_m, \end{array} \right. \quad (1)$$

преобразуется таким образом, что новое  $i$ -ое,  $i = 1, 2, \dots, n$ , уравнение

$$\tilde{f}_i(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l, x_1, \dots, x_n) = \mathbf{b}_i$$

есть линейная комбинация 1-го, 2-го,  $\dots$ ,  $n$ -го уравнений системы (1) с коэффициентами  $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \dots, \lambda_{in}$  соответственно, полученное в соответствии с правилами из

§1.2а. Если матрица  $A = (\lambda_{ij})$ , составленная из коэффициентов  $\lambda_{ij}$ , является неособенной, то получающаяся новая система уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{f}_1(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l, x_1, \dots, x_n) = \tilde{b}_1, \\ \tilde{f}_2(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l, x_1, \dots, x_n) = \tilde{b}_2, \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \vdots \\ \tilde{f}_m(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l, x_1, \dots, x_n) = \tilde{b}_m, \end{array} \right.$$

эквивалентна исходной, но путём подходящего выбора матрицы коэффициентов  $A$  иногда можно действительно сделать сжатиями отображения  $G$  из Теорем 10.6.1–10.6.2. Аналогично линейному случаю, подробно изученному в §10.5, мы также будем называть это преобразование исходной интервальной системы уравнений *предоуславливанием* с матрицей  $A$ .

Если интервальная матрица наклонов  $P$  отображения  $F$  является сильно неособенной интервальной матрицей, то, домножая (2), например, на обратную к средней  $(\text{mid } P)^{-1}$ , можно надеяться, что после приведения к виду (4.20) мы действительно получим сжимающее отображение  $G$ .

В качестве примера вновь рассмотрим интервальную систему уравнений (10.32).

## 10.7 Оптимальное оценивание множеств АЕ-решений

Как мы установили в Теореме 5.2.5, для интервальных линейных систем вида  $Ax = b$  пересечение множеств АЕ-решений  $\Xi_{A\beta}(A, b)$  с каждым из ортантов  $\mathcal{O}$  пространства  $\mathbb{R}^n$  является выпуклым полиэдральным множеством (возможно, пустым). Таким образом, вычисление величин

$$\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{A\beta}(A, b) \cap \mathcal{O}\}, \quad \nu = 1, 2, \dots, n, \quad (10.37)$$

— это задача линейного программирования, которая может быть эффективно решена каким-либо из известных методов, например, хорошо разработанным симплекс-методом или современными методами внутренних точек. Далее нужно перебрать все ортанты и среди полученных величин (10.37) выбрать наименьшую. В общем случае этот подход непрактичен из-за катастрофического роста вычислительной сложности, но при небольших размерностях систем и для некоторых специальных типов ИСЛАУ (например, когда  $a_i \text{ рогі}$  известно в каких ортантах расположено множество решений) его вполне можно применять для практического решения «внешней» задачи (5.24). Для частного случая объединённого множества решений ИСЛАУ методы подобного типа рассматривались, в частности, в [8, 15].

Мы выпишем, аналогично тому, как это сделано в работах [8, 15], каноническую форму задачи линейного программирования, которую необходимо решать для каждого из ортантов  $\mathbb{R}^n$ . Воспользуемся характеристикой Рона (Теорема 5.2.4), дающей описание точек множеств АЕ-решений через неравенства с модулями: принадлежность  $x \in \Xi_{A\beta}(A, b)$  равносильна неравенству

$$\left| (\text{mid } A) \cdot x - \text{mid } b \right| \leq (\text{rad } A^\exists - \text{rad } A^\forall) \cdot |x| + (\text{rad } b^\exists - \text{rad } b^\forall),$$

или

$$\begin{cases} \text{mid } \mathbf{A} \cdot x - \text{mid } \mathbf{b} \leq (\text{rad } \mathbf{A}^{\exists} - \text{rad } \mathbf{A}^{\forall}) \cdot |x| + (\text{rad } \mathbf{b}^{\exists} - \text{rad } \mathbf{b}^{\forall}), \\ -\text{mid } \mathbf{A} \cdot x + \text{mid } \mathbf{b} \leq (\text{rad } \mathbf{A}^{\exists} - \text{rad } \mathbf{A}^{\forall}) \cdot |x| + (\text{rad } \mathbf{b}^{\exists} - \text{rad } \mathbf{b}^{\forall}), \end{cases}$$

что эквивалентно системе

$$\begin{cases} \text{mid } \mathbf{A} \cdot \text{diag}\{\text{sgn } x_1, \dots, \text{sgn } x_n\} \cdot |x| - (\text{rad } \mathbf{A}^{\exists} - \text{rad } \mathbf{A}^{\forall}) \cdot |x| \\ \leq \text{mid } \mathbf{b} + (\text{rad } \mathbf{b}^{\exists} - \text{rad } \mathbf{b}^{\forall}), \\ -\text{mid } \mathbf{A} \cdot \text{diag}\{\text{sgn } x_1, \dots, \text{sgn } x_n\} \cdot |x| - (\text{rad } \mathbf{A}^{\exists} - \text{rad } \mathbf{A}^{\forall}) \cdot |x| \\ \leq -\text{mid } \mathbf{b} + (\text{rad } \mathbf{b}^{\exists} - \text{rad } \mathbf{b}^{\forall}). \end{cases}$$

Правые части полученных неравенств можно упростить и далее, вспомнив определение характеристического вектора  $\mathbf{b}^c$ :

$$\text{mid } \mathbf{b} + (\text{rad } \mathbf{b}^{\exists} - \text{rad } \mathbf{b}^{\forall}) = \overline{\mathbf{b}^c},$$

$$-\text{mid } \mathbf{b} + (\text{rad } \mathbf{b}^{\exists} - \text{rad } \mathbf{b}^{\forall}) = \overline{(-\mathbf{b}^c)}.$$

Пусть  $y$  есть вектор абсолютных значений компонент  $x$ , т.е.  $y_i = |x_i|$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , и

$$S = \text{diag}\{s_1, s_2, \dots, s_n\}, \quad s_i = \text{sgn } x_i = \pm 1,$$

— диагональная матрица, образованная знаками компонент внутренних точек рассматриваемого ортанта  $\mathcal{O}$ , т.е.  $x = Sy$  для  $x \in \mathcal{O}$ . При этом условие

$$x \in \Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \mathcal{O}$$

выполнено тогда и только тогда, когда существует  $y \in \mathbb{R}^n$ , удовлетворяющий неравенствам

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \text{mid } \mathbf{A} \cdot S - (\text{rad } \mathbf{A}^{\exists} - \text{rad } \mathbf{A}^{\forall}) \\ -\text{mid } \mathbf{A} \cdot S - (\text{rad } \mathbf{A}^{\exists} - \text{rad } \mathbf{A}^{\forall}) \end{pmatrix} y \leq \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{b}^c} \\ \overline{(-\mathbf{b}^c)} \end{pmatrix}, \\ y \geq 0. \end{cases} \quad (10.38)$$

Следовательно, значение  $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \mathcal{O}\}$  является решением задачи линейного программирования с ограничениями (9.3) и минимизируемым функционалом

$$c^\top y, \quad c^\top = (0, \dots, 0, s_\nu, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n. \quad (10.39)$$

Каждый ортант пространства  $\mathbb{R}^n$  однозначно задаётся последовательностью знаков компонент своих внутренних точек. Нам будет удобно занумеровать все ортанты  $\mathbb{R}^n$  целыми числами от 0 до  $2^n - 1$ , сопоставив каждому из них  $n$ -значное

Таблица 10.2. Пассивный переборный алгоритм оптимального решения внешней задачи для ИСЛАУ

<p>Вход</p> <p>Интервальная линейная система <math>\mathbf{Ax} = \mathbf{b}</math>.          Натуральный индекс <math>\nu \in \{1, 2, \dots, n\}</math>.</p>
<p>Выход</p> <p>Оптимальная оценка <math>y</math> снизу по <math>\nu</math>-ой координате для множества решений <math>\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})</math>.</p>
<p>Алгоритм</p> <p><math>y \leftarrow +\infty</math> ;          DO FOR <math>i = 0</math> TO <math>2^n - 1</math>              решить задачу линейного              программирования (10.38)–(10.39),              вычисляя <math>z \leftarrow \min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\mathcal{A}\beta} \cap \mathcal{O}_i\}</math> ;              IF (<math>y &gt; z</math>) <math>y \leftarrow z</math>          END DO</p>

двоичное число, которое получается из набора знаков компонент заменой минуса нулем, а плюса единицей. Итак, искомая оптимальная (точная) оценка значения  $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$  может быть найдена с помощью алгоритма, псевдокод которого приведён в Табл. 10.2.

Как и при оценивании объединённого множества решений, трудоёмкость этого алгоритма может быть существенно уменьшена, если известен априорный брус, содержащий множество решений. Этот брус можно найти каким-либо из быстрых алгоритмов, описанных в Главе 7, и трудозатраты на его вычисление, как правило, с лихвой окупаются уменьшением количества органограмм, которые нужно будет просматривать при реализации перебора в алгоритме Табл. 10.2 [6].

## Комментарий к Главе 10

В работе А. Гольдштейна [10] для построения исчерпывающих внутренних и внешних приближений множеств АЕ-решений нелинейных систем уравнений развивается

метод ветвлений-и-отсечений (см. §8.6), использующий для оценивания по подобластям обобщённый интервальный метод Гаусса-Зейделя из §10.3. Фактически, при этом получается аналог метода Хансена-Сенгупты из §8.4, но в применении к множествам АЕ-решений интервальных систем уравнений.

Альтернативным методом решения задач распознавания и оценивания множеств АЕ-решений (и даже более общих множеств кванторных решений) для интервальных систем ограничений является метод элиминации кванторов на основе цилиндрической декомпозиции (см. [12, 16]). Это теоретико-логический метод, который практически пригоден для небольших полиномиальных систем ограничений и реализован, в частности, в виде свободного пакета RSolver [17]. А. Гольдштейн в [10] сравнивает предлагаемый им метод с пакетом RSolver и делает вывод о большей эффективности своего интервального метода.

## Литература к Главе 10

- [1] АЛЕФЕЛЬД Г., ХЕРЦБЕРГЕР Ю. *Введение в интервальные вычисления*. – Москва: Мир, 1987.
- [2] ГОЛУБ ДЖ., ван ЛОАН Ч. *Матричные вычисления*. – Москва: Мир, 1998.
- [3] КЛИНИ С.К. *Математическая логика*. – Москва: Мир, 1973.
- [4] УИЛКИНСОН ДЖ.Х. *Алгебраическая проблема собственных значений*. – Москва: Наука, 1970.
- [5] ХОРН Р., ДЖОНСОН Ч. *Матричный анализ*. – Москва: Мир, 1989.
- [6] ШАРЫЙ С.П., ДЖАНЫБЕКОВ Б.С. Модификация подхода Оеттли для оптимального оценивания множеств АЕ-решений интервальных линейных систем // *Вычислительные Технологии*. – 2005. – Т. 10, №3. – С. 117–126.
- [7] CAPRANI O., MADSEN K. Iterative methods for interval inclusion of fixed points // *BIT*. – 1978. – Vol. 18. – P. 42–51.
- [8] COPE J., RUST B. Bounds on solutions of linear systems with inaccurate data // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1979. – Vol. 16, No. 6. – P. 950–963.
- [9] GAY D.M. Solving interval linear equations // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1982. – Vol. 19, No. 4. – P. 8510–870.
- [10] GOLDSZTEJN A. A branch and prune algorithm for the approximation of non-linear AE-solution sets // *SAC 2006: Proceedings of the 21st Annual ACM Symposium on Applied Computing, April 23–27, 2006, Dijon, France*. – ACM, 2006. – P. 1650–1654.
- [11] JERRELL M.E. Applications of interval computations to regional economic input-output models // *Applications of Interval Computations* / Kearfott R.B. and Kreinovich V., eds. – Dordrecht: Kluwer, 1996. – P. 133–143.
- [12] JIRSTRAND M. Nonlinear control system design by quantifier elimination // *Journal of Symbolic Computation*. – 1997. – Vol. 24, No. 2. – P. 137–152.
- [13] KEARFOTT R.B. *Rigorous global search: continuous problems*. – Dordrecht: Kluwer, 1996.
- [14] LAKEYEV A.V. Computational complexity of estimation of generalized solution sets for interval linear systems // *Вычислительные Технологии*. – 2003. – Т. 8, №1. – С. 12–23.
- [15] OETTLI W. On the solution set of a linear system with inaccurate coefficients // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1965. – Vol. 2, No. 1. – P. 115–118.

- [16] RATSCHAN S. Approximate quantified constraint solving by cylindrical box decomposition // *Reliable Computing*. – 2002. – Vol. 8, Issue 1. – P. 21–42.
- [17] RATSCHAN S. RSolver — a program for solving quantified inequality constraints. URL: <http://rsolver.sourceforge.net>
- [18] SAINZ M.Á., GARDEÑES E., JORBA L. Interval estimation of solution sets to real-valued systems of linear or non-linear equations // *Reliable Computing*. – 2002. – Vol. 8, No. 4. – P. 283–305.
- [19] SHARY S.P. Outer estimation of generalized solution sets to interval linear systems // *Developments in Reliable Computing* / Csendes T., ed. – Dordrecht: Kluwer, 1999. – P. 323–335.
- [20] SHARY S.P. Interval Gauss-Seidel method for generalized solution sets to interval linear systems // *Reliable Computing*. – 2001. – Vol. 7, No. 2. – P. 141–155.
- [21] SHARY S.P. A new technique in systems analysis under interval uncertainty and ambiguity // *Reliable Computing*. – 2002. – Vol. 8, No. 5. – P. 321–418.

## Глава 11

# Внутреннее оценивание множеств решений

Предмет этой главы книги — задачи внутреннего оценивания множеств решений интервальных систем уравнений. Несмотря на большой устойчивый спрос на решение подобных задач со стороны практики, имеется весьма небольшое количество работ по этой теме.

Ниже мы представляем три подхода к внутреннему оцениванию множеств решений, ориентированные на различные классы задач. Во-первых, это весьма общий *формальный подход*, аналогичный развивавшемуся нами в Главах 7 и 10 для внешнего оценивания множеств решений, во-вторых — методика, основанная на тонких геометрических свойствах множеств решений интервальных линейных систем уравнений с неотрицательными матрицами, и, в-третьих, так называемый «центровой подход». При этом два первых подхода для интервальных линейных систем дают *максимальные по включению* внутренние интервальные оценки множеств решений. Изложению собственно математических результатов предшествует пример практического возникновения задачи внутреннего оценивания множеств решений.

### 11.1 Практический пример

В качестве примера практического возникновения задачи внутреннего оценивания множества решений интервальной системы уравнений, рассмотрим так называемую задачу идентификации в условиях интервальной неопределённости.

Пусть имеется статический (не зависящий от времени) объект, входы и выходы которого описываются конечномерными векторами  $(a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$  и  $(b^{(1)}, b^{(2)}, \dots, b^{(r)}) \in \mathbb{R}^r$  соответственно (см. Рис. 11.1). Предположим также для простоты, что зависимость «вход-выход» является линейной, т. е.

$$b^{(l)} = \sum_{k=1}^n x_{lk} a^{(k)}, \quad l = 1, 2, \dots, r,$$

с некоторыми постоянными вещественными коэффициентами  $x_{lk}$ . При функционировании объекта (или его экспериментальном исследовании) мы можем измерять





Рис. 11.1. Структурная схема объекта идентификации.

входные воздействия на него и соответствующие выходные отклики, и одна из практически наиболее важных задач, возникающих в подобных ситуациях, — это *задача идентификации*: требуется найти (или как-то оценить) значения  $x_{lk}$ , т.е. «идентифицировать» параметры объекта. Иными словами, на основе результатов измерений (наблюдений) мы должны сформировать математическую модель объекта, например, с целью предсказания его будущего поведения.

Каждое наблюдение (измерение) входов и выходов объекта порождает соотношение, которое связывает искомые  $x_{lk}$  и имеет своими числовыми параметрами, в частности, результаты измерений входа и выхода. Фактически, в результате каждого наблюдения мы получаем в своё распоряжение некоторое уравнение относительно этих  $x_{lk}$ . Наконец, если серия наблюдений входа-выхода объекта является «достаточно представительной», то можно попытаться решить получающуюся систему уравнений относительно неизвестных  $x_{lk}$  и найти их значения.

Рассмотрим далее модель объекта, в которой на  $x_{lk}$  не накладывается никаких дополнительных ограничений, в частности, их можно считать никак не связанными друг с другом (независимыми). Тем самым появляется возможность с каждым выходом объекта работать индивидуально, вне зависимости от других выходов, порознь решая задачу идентификации для каждого отдельно взятого  $l = 1, 2, \dots, r$ . Можно при этом даже ограничиться идентификацией объекта с входом  $(a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$  и единственным одномерным выходом  $b \in \mathbb{R}^1$ , такого, что отношение вход-выход для него описывается простейшей линейной формой

$$b = a^{(1)}x_1 + a^{(2)}x_2 + \dots + a^{(n)}x_n, \tag{11.1}$$

в которой искомым параметрам  $x_k$  достаточно иметь только один индекс.

Для удобства выкладок условимся впредь обозначать результат  $i$ -го измерения входов такого объекта через  $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ , а выхода — через  $b_i$ . Тогда решение задачи идентификации сводится к нахождению решения  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  (обычного, либо в каком-то обобщённом смысле) для системы линейных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \ddots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{array} \right.$$

где  $m$  — общее количество измерений (наблюдений).

Вышеизложенное является кратким наброском техники идентификации в полностью детерминистском случае, когда мы располагаем точными значениями  $a_{ij}$  и  $b_i$ . Обратимся теперь к более сложной практической ситуации, когда входы и/или выходы объекта не являются точно известными и нам доступны лишь их интервальные оценки, т. е. всё, что мы знаем теперь об идентифицируемом объекте — это принадлежности  $a_{ij}$  и  $b_i$  некоторым интервалам:

$$a_{ij} \in \mathbf{a}_{ij} = [\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}] \quad \text{и} \quad b_i \in \mathbf{b}_i = [\underline{b}_i, \bar{b}_i]. \quad (11.2)$$

Подобная неопределённость может быть следствием не только неизбежных погрешностей измерений, но вытекать из принципиальных трудностей в (более или менее) точном определении значений некоторых величин. Таковы, к примеру, особенности идентификации параметров быстропротекающих химических реакций взрывного типа. Аналогична ситуация во многих экономических моделях, где для определения ряда параметров не существует универсальной однозначной методики, как это, к примеру, имеет место для коэффициентов прямых производственных затрат в модели Леонтьева (5.8). В этих новых условиях мы естественно приходим к необходимости рассматривать задачу идентификации при интервальных данных (11.2).

Как следует понимать решение подобной интервальной идентификационной задачи? Очевидно, что единого универсального ответа на этот вопрос не существует, но общая естественная идея — это «согласованность» (совместность), в том или ином смысле, решения идентификационной задачи с экспериментальной информацией. Ниже мы будем придерживаться следующего широко принятого определения: станем говорить, что набор параметров  $x_1, x_2, \dots, x_n$  объекта, описываемого (11.1), *совместен* с интервальными экспериментальными данными  $(\mathbf{a}_{i1}, \mathbf{a}_{i2}, \dots, \mathbf{a}_{in})$  и  $\mathbf{b}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , если для каждого  $i$  (т. е. для каждого наблюдения) в пределах измеренных интервалов существуют точечные представители  $a_{i1} \in \mathbf{a}_{i1}, a_{i2} \in \mathbf{a}_{i2}, \dots, a_{in} \in \mathbf{a}_{in}$  и  $b_i \in \mathbf{b}_i$ , такие, что выполнено отношение

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i. \quad (11.3)$$

Если  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$  — интервальная  $m \times n$ -матрица, составленная из  $m$  результатов измерений входов,  $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m)^\top$  — интервальный вектор  $m$  измерений выходов, то семейство всех векторов параметров, согласующихся с интервально заданными экспериментальными данными, может быть описано в виде

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists \mathbf{A} \in \mathbf{A})(\exists \mathbf{b} \in \mathbf{b})(\mathbf{A}x = \mathbf{b})\},$$

т. е. как множество решений всевозможных точечных систем  $Ax = b$  с  $A \in \mathbf{A}$  и  $b \in \mathbf{b}$ . Специалистами по теории идентификации это множество часто называется *информационным множеством*, (*апостериорным*) *множеством возможных значений параметров* [9], *множеством допустимых значений параметров* и т. п. Но для нас наиболее существенно то, что это множество является не чем иным, как определённым в Главах 4–5 объединённым множеством решений  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  интервальной линейной системы уравнений  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ .

Как мы знаем из Главы 5, это множество решений может быть представлено как объединение не более чем  $2^m$  полиэдров, и длина его полного прямого описания, при

котором мы скрупулёзно выписываем в каждом ортанте все уравнения ограничивающих  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  гиперплоскостей, может расти экспоненциально с размерностью интервальной системы  $n$ . По этой причине разумно ограничиться нахождением его оценок, в том или ином смысле, т. е. заменить задачу точного описания  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  на задачу его приближённого описания в соответствии со смыслом решаемой практической постановки.

В зависимости от стоящей перед нами задачи возможны и различные способы оценивания множеств решений. К примеру, если в рассмотренной выше задаче идентификации линейного статического объекта в условиях интервальной неопределённости мы собираемся использовать результаты для выбора параметров объекта на стадии его проектирования, то естественно оценивать  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  изнутри, с помощью подмножеств. Тогда мы наверняка не захватим «лишние» векторы параметров, не имеющие отношения к идентифицируемому объекту. С другой стороны, если планируется использовать результаты идентификации для гарантированной оценки по полученной модели наибольших возможных отклонений выходов в процессе функционирования объекта, то множество решений  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  следует оценивать «извне», с помощью объемлющих множеств, которые содержат все векторы результатов идентификации. Подробное обсуждение этих вопросов заинтересованный читатель может найти, в частности, в [4, 9].

Решению задач внешнего оценивания множеств решений посвящены Главы 7, 10 и 9 книги, а в этой главе мы будем рассматривать задачу внутреннего (посредством подмножеств) оценивания множеств решений ИСЛАУ, причем в качестве оценивающих подмножеств возьмем интервальные векторы, т. е. брусы в  $\mathbb{R}^n$  с гранями, параллельными координатным осям:

*Для интервальной системы уравнений  
найти интервальный брус, включённый  
в её множество решений.*

Интервальное представление ответа — внутренней оценки — является, как правило, весьма удобным для «лиц, принимающих решения» (конструктора, оператора технологического процесса и т. п.). Ясно, что внутренняя интервальная оценка неединственна, и на практике наибольшую ценность имеют *максимальные по включению* (неулучшаемые) внутренние оценки.

## 11.2 Формальный подход для интервальных линейных систем

Обратимся к интервальным линейным системам уравнений вида

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b} \tag{11.4}$$

с интервальной матрицей  $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{m \times n}$  и вектором правой части  $\mathbf{b} \in \mathbb{IR}^m$ , и рассмотрим её объединённое множество решений

$$\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(Ax = b)\}.$$

В силу характеристики Бекка (Предложение 7.1.1, стр. 359) имеем

$$x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \iff 0 \in \mathbf{A}x - \mathbf{b}.$$

Ясно, что принадлежность справа можно переписать эквивалентным образом как включение  $0 \subseteq \mathbf{b} - \mathbf{A}x$ . Преобразуем его в полной арифметике Каухера  $\mathbb{KR}$  (см. Главу 1, §1.7).

Добавим к обеим частям включения по выражению  $\text{opp}(-\mathbf{A}x)$ , которое алгебраически противоположно члену  $(-\mathbf{A}x)$ . В правой части включения этот член исчезнет, а в левой появится «с противоположным знаком», и мы получим

$$\text{opp}(-\mathbf{A}x) \subseteq \mathbf{b}.$$

Но композиция операций  $\text{opp}$  и умножения на  $(-1)$  есть не что иное, как просто дуализация  $\text{dual}$ . Следовательно, преобразуемое соотношение получает вид

$$\text{dual}(\mathbf{A}x) \subseteq \mathbf{b}.$$

Далее,  $\text{dual}(\mathbf{A}x) = (\text{dual } \mathbf{A})x$ , так как вектор  $x$  — точечный. Поэтому

$$x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \iff (\text{dual } \mathbf{A})x \subseteq \mathbf{b}. \quad (11.5)$$

Мы нашли элегантную характеристику в арифметике Каухера для точек из объединённого множества решений интервальной линейной системы. Теперь нетрудно доказать следующий важный и красивый результат

**Теорема 11.2.1** *Если правильный интервальный вектор  $\mathbf{x}^*$  является формальным решением системы уравнений*

$$(\text{dual } \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (11.6)$$

*то  $\mathbf{x}^* \subseteq \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , т. е. интервальный вектор  $\mathbf{x}^*$  является внутренней интервальной оценкой объединённого множества решений  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  интервальной линейной системы уравнений  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ .*

**Доказательство.** Возьмём точку  $x$  из формального решения  $\mathbf{x}^*$  интервального уравнения (11.6), так что  $x \in \mathbf{x}^*$ . Это можно сделать в силу правильности интервального вектора  $\mathbf{x}^*$ . Тогда монотонность интервальных арифметических операций в  $\mathbb{KR}$  влечёт

$$(\text{dual } \mathbf{A})x \subseteq (\text{dual } \mathbf{A})\mathbf{x}^* = \mathbf{b},$$

так как  $\mathbf{x}^*$  — формальное решение для (11.6). На основании (11.5) можем теперь заключить, что  $x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ .

Так как проведённое рассуждение справедливо для любой точки  $x \in \mathbf{x}^*$ , то в целом справедливо  $\mathbf{x}^* \subseteq \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ . ■

Формулировка Теоремы 11.2.1 и её доказательство вместе с подготовительными выкладками приведены здесь по причине их красоты и большого методического значения. Фактически, они демонстрируют мощь и полезность полной интервальной арифметики Каухера. Но доказанная теорема является лишь частным случаем следующего общего результата о внутреннем оценивании множеств АЕ-решений для интервальных систем линейных алгебраических уравнений:

**Теорема 11.2.2** Пусть  $A^c$  и  $b^c$  — характеристические матрица и правая часть ИСЛАУ  $Ax = b$ , соответствующие множеству АЕ-решений  $\Xi_{A\beta}(A, b)$ . Если правильный интервальный вектор  $x^*$  является формальным решением уравнения

$$A^c x = b^c, \quad (11.7)$$

то  $x^* \subseteq \Xi_{A\beta}(A, b)$ , т. е. интервальный вектор  $x^*$  — внутренняя оценка множества решений  $\Xi_{A\beta}(A, b)$ .

Как и ранее, мы называем интервальные системы уравнений (11.6) и (11.7) в  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$  уравнениями в дуализациях, соответствующими рассматриваемому множеству АЕ-решений интервальной линейной системы  $Ax = b$ .

**Доказательство.** Предположим, что  $x^*$  — правильное формальное решение системы (11.7) и  $x \in x^*$ . Тогда в силу монотонности интервальных арифметических операций по включению

$$A^c x \subseteq A^c x^* = b^c,$$

т. е.  $x \in \Xi_{A\beta}(A, b)$  в силу Теоремы 5.2.2. Так как наше рассуждение справедливо для любого  $x$  из  $x^*$ , то  $x^* \subseteq \Xi_{A\beta}(A, b)$ . ■

Перечислим отдельно наиболее важные частные случаи доказанного общего результата, отличные от Теоремы 11.2.1:

- Если правильный интервальный вектор  $x^*$  есть формальное решение уравнения

$$Ax = b,$$

то  $x^* \subseteq \Xi_{tol}(A, b)$ , т. е.  $x^*$  — внутренняя интервальная оценка допускового множества решений системы уравнений  $Ax = b$  (или, другими словами, решение задачи о допусках для системы  $Ax = b$ ).

- Если правильный интервальный вектор  $x^*$  есть формальное решение уравнения

$$(\text{dual } A)x = \text{dual } b,$$

то  $x^* \subseteq \Xi_{ctl}(A, b)$ , т. е.  $x^*$  — внутренняя интервальная оценка управляемого множества решений для системы уравнений  $Ax = b$ .

К примеру, правильный интервальный вектор  $([-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}], [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}])^T$  является, как нетрудно убедиться непосредственной проверкой, формальным решением системы (5.12). Рис. 5.1 показывает, что он служит хорошей внутренней интервальной оценкой допускового множества решений  $\Xi_{tol}$  этой системы. С другой стороны, если формальное решение уравнения в дуализациях (11.7) не существует, или существует, но не все его компоненты правильные, то это не обязательно свидетельствует о том, что соответствующее множество решений пусто и задача внутреннего оценивания (5.23) несовместна.

Отметим, что А.В. Лакеевым для интервальных систем линейных уравнений была доказана NP-трудность задачи нахождения формального решения в полной арифметике Каухера [22, 23]. Тем не менее, несмотря на этот неблагоприятный факт,

для интервальных линейных систем с «не очень широкими» интервалами имеется ряд эффективных численных методов, быстро вычисляющих формальное решение — *субдифференциальный метод Ньютона* (превращающийся для некоторых случаев в квазидифференциальный метод Ньютона) и различные модификации одношаговых стационарных итерационных методов (см. Главу 12). В целом можно считать, что для интервальных линейных систем вида

$$Cx = d$$

проблема нахождения формального решения интервальных уравнений решается более или менее успешно.

### 11.3 Формальный подход в общем случае

Обратимся теперь к задачам внутреннего оценивания объединённого, допустимого и управляемого множеств решений интервальных систем общих нелинейных уравнений вида

$$F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}. \quad (11.8)$$

Далее, как и в §10.6, принципиален тот факт, что для  $F(\mathbf{a}, x)$  существует естественное интервальное расширение, т. е.

- 1) аналитическое выражение для  $F(\mathbf{a}, x)$  есть конечная комбинация символов переменных  $x_i$ , параметров  $a_j$ , четырёх арифметических операций и, возможно, ещё элементарных функций;
- 2) для рассматриваемых интервалов значений параметров определены все интервальные арифметические операции, интервальные расширения функций и т. п.

Основой предлагаемого нами формального подхода к решению задачи внутреннего оценивания (4.21) являются следующие результаты:

**Теорема 11.3.1** Пусть отображение  $F : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $F(\mathbf{a}, x) = (F_1(\mathbf{a}, x), F_2(\mathbf{a}, x), \dots, F_m(\mathbf{a}, x))^\top$ , таково, что каждый из параметров  $a_1, a_2, \dots, a_l$  входит не более одного раза в первой степени в единственное из компонентных выражений  $F_1, F_2, \dots, F_m$ .

Если правильный интервальный вектор  $\mathbf{x}^*$  является формальным решением уравнения

$$F(\text{dual } \mathbf{a}, \mathbf{x}) = \mathbf{b}, \quad (11.9)$$

то  $\mathbf{x}^* \subseteq \Xi_{\text{uni}}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ , т. е.  $\mathbf{x}^*$  есть внутренняя интервальная оценка объединённого множества решений системы  $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$ .

Если правильный интервальный вектор  $\mathbf{x}^*$  является формальным решением уравнения

$$F(\text{dual } \mathbf{a}, \mathbf{x}) = \text{dual } \mathbf{b}, \quad (11.10)$$

то  $\mathbf{x}^* \subseteq \Xi_{\text{ctl}}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ , т. е.  $\mathbf{x}^*$  есть внутренняя интервальная оценка управляемого множества решений системы  $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$ .

**Доказательство.** Первая часть условий на вхождение в отображение  $F$  интервальных параметров (из которых все имеют E-неопределённость) в точности совпадает с теми, что требуются Теоремой 5.1.2 о характеристизации множеств АЕ-решений для интервальных нелинейных систем уравнений (стр. 253). Следовательно, в условиях доказываемой теоремы точка  $x$  принадлежит объединённому множеству решений  $\Xi_{uni}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$  тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \max_{a \in \mathbf{a}} F_i(a, x) \geq \underline{\mathbf{b}}_i, \\ \min_{a \in \mathbf{a}} F_i(a, x) \leq \overline{\mathbf{b}}_i, \\ i = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

Далее, если каждый из параметров  $a_1, a_2, \dots, a_l$ , имеющих интервальную неопределённость, входит не более одного раза в первой степени в компонентные выражения  $F_1, F_2, \dots, F_m$ , то для всех  $i = 1, 2, \dots, m$

$$\max_{a \in \mathbf{a}} F_i(a, x) \quad \text{и} \quad \min_{a \in \mathbf{a}} F_i(a, x)$$

совпадают с

$$\overline{F_i(\mathbf{a}, x)} \quad \text{и} \quad \underline{F_i(\mathbf{a}, x)}$$

— верхними и нижними концами естественных интервальных расширений  $F_i(\mathbf{a}, x)$ . В свою очередь, в силу свойств арифметики Каухера эти значения равны

$$\underline{F_i(\text{dual } \mathbf{a}, x)} \quad \text{и} \quad \overline{F_i(\text{dual } \mathbf{a}, x)}.$$

Итак, если выполнены условия доказываемой теоремы, касающиеся вхождений в  $F$  параметров с интервальной неопределённостью, то точка  $x$  принадлежит объединённому множеству решений  $\Xi_{uni}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$  интервальной системы уравнений (11.8) тогда и только тогда, когда справедлива система неравенств

$$\begin{cases} \underline{F_i(\text{dual } \mathbf{a}, x)} \geq \underline{\mathbf{b}}_i, \\ \overline{F_i(\text{dual } \mathbf{a}, x)} \leq \overline{\mathbf{b}}_i, \\ i = 1, 2, \dots, n, \end{cases}$$

равносильная включению

$$F(\text{dual } \mathbf{a}, x) \subseteq \mathbf{b}.$$

Теперь уже нетрудно завершить доказательство Теоремы. Пусть правильный интервальный вектор  $\mathbf{x}^*$  является решением уравнения в дуализациях (11.9) и  $x \in \mathbf{x}^*$ . Принимая во внимание свойство монотонности по включению интервальных арифметических операций в  $\mathbb{KR}$ , имеем

$$F(\text{dual } \mathbf{a}, x) \subseteq F(\text{dual } \mathbf{a}, \mathbf{x}^*) = \mathbf{b}.$$

Таким образом,  $x \in \Xi_{uni}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ , а поскольку это верно для любого  $x \in \mathbf{x}^*$ , то в целом  $\mathbf{x}^* \subseteq \Xi_{uni}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ , что и требовалось. ■

**Теорема 11.3.2** Если правильный интервальный вектор  $\mathbf{x}^*$  является формальным решением системы уравнений

$$F(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = \mathbf{b}, \quad (11.11)$$

то  $\mathbf{x}^* \subseteq \Xi_{tol}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ , т. е.  $\mathbf{x}^*$  — внутренняя интервальная оценка допускового множества решений интервальной системы  $F(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = \mathbf{b}$  (иными словами, брус  $\mathbf{x}^*$  есть решение соответствующей интервальной задачи о допусках).

**Доказательство** этого утверждения можно провести совершенно аналогично доказательству Теоремы 11.3.1, но мы последуем другим путём, более поучительным в идейном отношении.

Отметим, прежде всего, следующую полезную характеристику допускового множества решений для интервальных систем уравнений:

$$\begin{aligned} \Xi_{tol}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall a \in \mathbf{a})(\exists b \in \mathbf{b})(F(a, x) = b)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall a \in \mathbf{a})(F(a, x) \in \mathbf{b})\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \{F(a, x) \mid a \in \mathbf{a}\} \subseteq \mathbf{b}\}. \end{aligned}$$

Эта характеристика более удобна, чем результат Теоремы 5.1.2.

Далее, если  $\mathbf{x}^*$  — правильное формальное решение системы уравнений (11.11) и  $x \in \mathbf{x}^*$ , то для каждой компоненты  $F_i(a, x)$  отображения  $F$  в силу монотонности интервальных арифметических операций мы имеем

$$\{F_i(a, x) \mid a \in \mathbf{a}\} \subseteq F_i(\mathbf{a}, x) \subseteq F(\mathbf{a}, \mathbf{x}^*) = \mathbf{b}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Таким образом, в целом

$$\begin{aligned} \{F(a, x) \mid a \in \mathbf{a}\} &= \left\{ \left( \begin{array}{c} F_1(a, x) \\ \vdots \\ F_m(a, x) \end{array} \right) \mid a \in \mathbf{a} \right\} \\ &\subseteq \left( \begin{array}{c} \{F_1(a, x) \mid a \in \mathbf{a}\} \\ \vdots \\ \{F_m(a, x) \mid a \in \mathbf{a}\} \end{array} \right) \subseteq \left( \begin{array}{c} F_1(\mathbf{a}, \mathbf{x}^*) \\ \vdots \\ F_m(\mathbf{a}, \mathbf{x}^*) \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m \end{array} \right) = \mathbf{b}, \end{aligned}$$

и потому  $\{F(a, x) \mid a \in \mathbf{a}\} \subseteq \mathbf{b}$ . Поскольку эта принадлежность верна для любого  $x \in \mathbf{x}^*$ , то  $\mathbf{x}^* \subseteq \Xi_{tol}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ , что и требовалось. ■

**Определение 11.3.1** Для интервальной системы  $F(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = \mathbf{b}$  мы будем называть системы уравнений (11.9)–(11.11) уравнениями в дуализациях, соответствующими её объединённому, управляемому и допусковому множеству решений.

В качестве простого иллюстративного примера рассмотрим интервальное уравнение от двух неизвестных

$$[1, 2]x_1^2 + x_2^2 = [4, 10]. \quad (11.12)$$



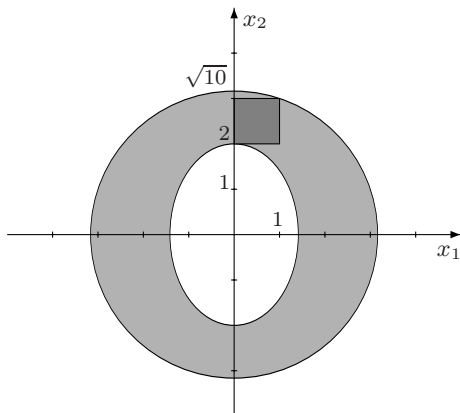


Рис. 11.2. Внутреннее оценивание объединённого множества решений интервального уравнения (11.12).

Его объединённым множеством решений является, как нетрудно проверить, круг радиуса  $\sqrt{10}$  с центром в начале координат и высеченным из него эллипсом (множество решений выделено на Рис. 11.2 светло-серой заливкой). Интервалы  $x_1 = [0, 1]$  и  $x_2 = [2, 3]$  дают формальное решение (одно из многих возможных) для уравнения в дуализациях

$$[2, 1] x_1^2 + x_2^2 = [4, 10]. \quad (11.13)$$

Из Рис. 11.2 видно, что соответствующий интервальный вектор  $([0, 1], [2, 3])^T$  — квадрат, выделенный тёмной заливкой — действительно является внутренней оценкой объединённого множества решений, даже максимальной по включению.

Формальное решение уравнения в дуализациях (11.13) на самом деле неединственно, так как уравнение, фактически, недоопределено. Читатель может самостоятельно найти правильные формальные решения для этого уравнения и убедиться, что все они являются внутренними оценками объединённого множества решений уравнения (11.12).

Итак, предложенный выше «формальный подход» позволяет свести задачу внутреннего интервального оценивания множеств кванторных решений к задаче решения *одной* формально интервальной, а фактически неинтервальной системы уравнений — уравнения в дуализациях, — то есть к традиционной задаче численного анализа. Естественно было бы желать, чтобы эта редукция могла быть осуществлена для возможно более широкого класса функций  $F$ , а не только для тех, которые имеют простые вхождения управляемых переменных и очерчены в Теореме 11.3.1. Расширение класса отображений  $F$ , для которых основные задачи (4.21) и (4.22) могут быть решены формальным подходом либо его модификациями, а также распространение формального подхода на более общие множества решений являются интересными открытыми задачами.

Практичность и эффективность формального подхода решающим образом зависят от эффективности алгоритмов для решения уравнений в дуализациях (11.9)–(11.11). Для этой цели мы в большинстве случаев едва ли сможем воспользоваться какими-либо методами исключения, символьными преобразованиями и т. п. спосо-

бами. Препятствием являются недостаточные алгебраические свойства  $\mathbb{KR}$ . И хотя они значительно лучше, чем у классической интервальной арифметики, отсутствие полноценной дистрибутивности в  $\mathbb{KR}$  делает невозможной даже такую простейшую операцию, как например, приведение подобных членов. По этой причине все алгоритмы, реализующие формальный подход к оцениванию множеств решений интервальных уравнений, являются (по крайней мере, на данный момент) существенно *численными*.

Для общих нелинейных систем конструирование численных методов для решения уравнения в дуализациях — также большая открытая проблема. При развитии тех или иных подходов к ней главную роль должны, по-видимому, играть конкретные потребности практики, хотя и в общем случае ситуация здесь отнюдь не безнадежная. Несмотря на то, что мы оказываемся лишенными таких эффективных в линейном случае инструментов, как субдифференциальный метод Ньютона и его обобщения (см. Главу 12), всегда имеется возможность попытаться использовать универсальную схему стационарных итерационных процессов и её многочисленные модификации. Именно, пусть исходное уравнение в дуализациях (11.9)–(11.11) может быть эквивалентно преобразовано к рекуррентному виду, в котором переменная выделена в одной из частей «в чистом виде», т. е.

$$\mathbf{x} = T(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x}), \quad (11.14)$$

где  $T : \mathbb{KR}^n \rightarrow \mathbb{KR}^n$  является оператором сжатия. Тогда для любого начального приближения  $\mathbf{x}^{(0)}$  последовательность итераций

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = T(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x}^{(k)})$$

сходится к требуемому формальному решению для (11.14), а также для (11.9)–(11.11) (см. например, [7, 8, 10]).

Другая привлекательная возможность решения уравнений в дуализациях состоит в том, чтобы прибегнуть к помощи какой-либо из программных систем для численного решения нелинейных уравнений, основанных на технике «распространения ограничений» («constraint propagation»), интенсивно развивающейся в последние годы.

## 11.4 Максимальность внутренних оценок

Рассмотрим вопрос о качестве интервального решения задачи внутреннего оценивания (4.21), или, иначе, вопрос о размерах интервальной оценки множеств решений  $\mathcal{E}_{\mathcal{A}\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ . Замечательное свойство формального подхода в применении к интервальным линейным системам состоит в том, что он практически всегда даёт внутреннюю интервальную оценку множества решений, которая максимальна по включению. Для объединённого множества решений ИСЛАУ с неособенными матрицами этот факт впервые был обнаружен Л.В. Куприяновой [21]. Впоследствии автор нашел другую формулировку этого результата и доказал максимальность внутренних оценок, получаемых с помощью формального подхода для допускового и управляемого множеств решений [32]. Следующее более общее утверждение было получено в работе [33]:

**Теорема 11.4.1** Если правильный интервальный вектор есть максимальное по включению формальное решение уравнения в дуализациях (11.7), то он также является максимальным по включению интервальным вектором содержащимся во множестве  $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , т. е. предоставляет максимальное решение задачи внутреннего оценивания (5.23).

В частности, если правильное формальное решение уравнения в дуализациях единственно (см. §12.4), то оно является максимальным по включению решением задачи (5.23).

**Доказательство.** Ниже нам потребуется следующее вспомогательное представление: если  $\mathbf{v}$  — это правильный интервальный  $n$ -вектор и  $\mathbf{C} = (\mathbf{c}_{ij})$  — (произвольная) интервальная  $m \times n$ -матрица, то

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{v} = \bigvee_{v \in \mathbf{v}} \mathbf{C} \cdot v. \quad (11.15)$$

Действительно, если  $\mathbf{C} \cdot \mathbf{v} = ((\mathbf{C} \cdot \mathbf{v})_1, (\mathbf{C} \cdot \mathbf{v})_2, \dots, (\mathbf{C} \cdot \mathbf{v})_m)^\top$ , то, используя (1.68) и дистрибутивность (1.79) сложения относительно операции « $\bigvee$ », мы получим

$$\begin{aligned} (\mathbf{C} \cdot \mathbf{v})_i &= \sum_{j=1}^n \mathbf{c}_{ij} v_j = \sum_{j=1}^n \bigvee_{v_j \in v_j} \mathbf{c}_{ij} v_j \\ &= \bigvee_{v_1 \in v_1} \bigvee_{v_2 \in v_2} \cdots \bigvee_{v_n \in v_n} \sum_{j=1}^n \mathbf{c}_{ij} v_j \\ &= \bigvee_{v \in \mathbf{v}} \sum_{j=1}^n \mathbf{c}_{ij} v_j = \bigvee_{v \in \mathbf{v}} (\mathbf{C} \cdot v)_i. \end{aligned}$$

Обратимся теперь собственно к доказательству теоремы, которое поведём *от противного*. Обозначая правильное формальное решение уравнения (11.7) через  $\mathbf{x}^*$ , предположим, что в противоречие с формулировкой теоремы найдётся такой правильный интервальный вектор  $\mathbf{y}$ , что

$$\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \supseteq \mathbf{y} \supset \mathbf{x}^*.$$

Отсюда, используя монотонность интервальных арифметических операций в  $\mathbb{K}\mathbb{R}$  по включению, нетрудно получить

$$\mathbf{A}^c \cdot \mathbf{y} \supset \mathbf{A}^c \cdot \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^c,$$

причём точное равенство на месте включения здесь невозможно в силу предположенной максимальнойности  $\mathbf{x}^*$ . Далее, представление (11.15) влечёт

$$\bigvee_{y \in \mathbf{y}} \mathbf{A}^c \cdot y \supset \mathbf{b}^c, \quad (11.16)$$

и мы можем заключить, что

$$\mathbf{A}^c \cdot \tilde{\mathbf{y}} \not\subseteq \mathbf{b}^c \quad (11.17)$$

для некоторого (по крайней мере, одного)  $\tilde{y} \in \mathbf{y}$ . В противном случае, если бы для всех  $y \in \mathbf{y}$  имело место  $\mathbf{A}^c \cdot y \subseteq \mathbf{b}^c$ , то было бы справедливое включение, обратное к (11.16). Но тогда в силу Теоремы 5.2.2 отношение (11.17) эквивалентно  $\tilde{y} \notin \Xi_{\mathbf{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ . Следовательно,  $\mathbf{y} \not\subseteq \Xi_{\mathbf{A}\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , что противоречит нашему допущению. ■

Исчерпывающее исследование условий, при которых формальный подход даёт максимальные внутренние интервальные оценки множеств решений ИСЛАУ, было проведено в работах И.А. Шарой [11, 27]. Полученное в них необходимое и достаточное условие максимальной внутренней интервальной оценки для произвольных множеств АЕ-решений формулируется следующим образом:

**Теорема 11.4.2** (теорема И.А. Шарой) *Внутренняя интервальная оценка  $\mathbf{x}^*$  множества АЕ-решений  $\Xi(\mathbf{A}^c, \mathbf{b}^c)$  интервальной линейной системы (11.4), полученная как правильное решение уравнения в дуализациях (11.7), максимальна по включению тогда и только тогда, когда для каждого номера  $k = 1, 2, \dots, n$  столбцов характеристической матрицы  $\mathbf{A}^c = (\mathbf{a}_{ij}^c)$  выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

- (i)  $\exists l \quad 0 \notin \text{pro } \mathbf{a}_{lk}^c$ ;
- (ii)  $\mathbf{0} \not\subseteq \mathbf{x}_k^*$ ,  $\exists l \quad \mathbf{0} \subset \mathbf{a}_{lk}^c$ ,  $\exists r \quad \mathbf{a}_{rk}^c \subset \mathbf{0}$ ;
- (iii)  $\mathbf{0} = \mathbf{x}_k^*$ ,  $\exists l \quad \mathbf{0} \subset \mathbf{a}_{lk}^c$ ;
- (iv)  $\mathbf{0} \subset \mathbf{x}_k^*$ ,  $\exists l \quad (\mathbf{0} \subset \mathbf{a}_{lk}^c, \chi(\mathbf{a}_{lk}^c) \geq \chi(\mathbf{x}_k^*))$ .

Доказательство этой теоремы основано на использовании свойства так называемой строгой монотонности по включению для умножения на правильный интервал в арифметике Каухера, и подробности можно увидеть в [11, 27]. Практичным следствием критерия максимальной внутренней интервальной оценки является

**Теорема 11.4.3** *Если в интервальной линейной системе уравнений  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  матрица  $\mathbf{A}$  в каждом столбце имеет по крайней мере один элемент, не содержащий нуля, то всякое правильное формальное решение уравнения в дуализациях для этой системы является максимальной по включению внутренней оценкой соответствующего множества АЕ-решений.*

*Если  $\mathbf{A}^\exists = \mathbf{A}$ , то приведенное условие на матрицу является также необходимым для того, чтобы правильное формальное решение уравнения в дуализациях давало максимальную внутреннюю интервальную оценку.*

В качестве примера рассмотрим интервальные линейные системы

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 1] \\ [-1, 2] & [4, 2] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [-2, 2] \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 1] \\ [2, -1] & [4, 2] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [-2, 2] \end{pmatrix},$$

имеющие одно и то же формальное решение — интервальный вектор  $(0, [-1, 1])^\top$ . В соответствии с Теоремой 11.4.2 он является максимальной по включению внутренней

оценкой для множества  $(\forall\exists)(\exists)$ -решений и для множества  $(\forall\forall)(\exists)$ -решений модельной системы (5.12). То, что это действительно так, можно убедиться из Рис. 5.2. Заметим, что «сплюснутость» полученной оценки по первой координате может оказаться весьма нежелательной на практике. Для остальных множеств АЕ-решений, изображённых на Рис. 5.1 и 5.2, внутренние оценки, вычисляемые как формальные решения уравнений в дуализациях, являются телесными интервалами, не вырожденными ни по какой из компонент. Например, для интервальных линейных систем

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [1, -2] \\ [-1, 2] & [4, 2] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [-2, 2] \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [1, -2] \\ [2, -1] & [2, 4] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [-2, 2] \end{pmatrix}$$

получаемая с помощью формального подхода внутренняя интервальная оценка для множества  $(\forall\exists)(\exists)$ -решений и для множества  $(\forall\forall)(\exists)$ -решений — это брус

$$\begin{pmatrix} [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \end{pmatrix}.$$

Он действительно покрывает значительные части соответствующих множеств.

В связи со сказанным возникает следующий практический вопрос: каким образом можно влиять на размеры бруса внутренней оценки и/или его расположение внутри оцениваемого множества решений? Решению этой проблемы посвящён следующий параграф книги.

## 11.5 Коррекция внутренних оценок

Наиболее серьёзным недостатком формального подхода в применении к задачам внутреннего оценивания множеств решений является то, что он не позволяет провести их исчерпывающее исследование. Если решение уравнения в дуализациях существует и является правильным, то задача разрешима и мы получаем требуемый ответ. Напротив, если уравнение в дуализациях не имеет решений, или решения есть, но они не являются правильными, мы ничего не можем заключить о пустоте или непустоте множества решений  $\Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ . Например, уравнения

$$[-1, 1] \mathbf{x} = [1, 2] \tag{11.18}$$

и

$$[-1, 1] \mathbf{x} = [-1, 2]$$

вообще не имеют формальных решений. Это следует из того, что в их левых частях для любого интервала  $\mathbf{x}$  произведение  $[-1, 1] \mathbf{x}$  всегда является уравновешенным интервалом, равным  $[-|\mathbf{x}|, |\mathbf{x}|]$  при правильном  $\mathbf{x}$  и  $[-\langle \text{рго } \mathbf{x} \rangle, \langle \text{рго } \mathbf{x} \rangle]$  при неправильном  $\mathbf{x}$ , тогда как правая часть обоих уравнений неуравновешена. Но у первого

из рассматриваемых интервальных уравнений допустовое множество решений пусто, а у второго не пусто:  $\Xi_{tol} = [-1, 1]$ .

Нередко пользователя также могут не удовлетворить получаемые с помощью формального подхода расположение или размеры интервального решения рассматриваемой задачи внутреннего оценивания. Эффективным инструментом коррекции подобных ситуаций может служить следующая

**Теорема 11.5.1** (о «сжатии и раздутии» интервальных параметров)

Пусть брус  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  является решением задачи (4.21) внутреннего оценивания множества решений интервальной системы уравнений  $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$  с распределением неопределённостей, задаваемым дизъюнктивными разложениями  $\mathbf{a} = \mathbf{a}^\forall + \mathbf{a}^\exists$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{b}^\forall + \mathbf{b}^\exists$ , т. е.  $\mathbf{x} \subseteq \Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ . Если интервальные векторы  $\tilde{\mathbf{a}}$  и  $\tilde{\mathbf{b}}$  и их дизъюнктивные разложения

$$\tilde{\mathbf{a}} = \tilde{\mathbf{a}}^\forall + \tilde{\mathbf{a}}^\exists \quad \text{и} \quad \tilde{\mathbf{b}} = \tilde{\mathbf{b}}^\forall + \tilde{\mathbf{b}}^\exists$$

таковы, что

$$\tilde{\mathbf{a}}^\forall \subseteq \mathbf{a}^\forall, \quad \tilde{\mathbf{a}}^\exists \supseteq \mathbf{a}^\exists, \quad (11.19)$$

$$\tilde{\mathbf{b}}^\forall \subseteq \mathbf{b}^\forall, \quad \tilde{\mathbf{b}}^\exists \supseteq \mathbf{b}^\exists, \quad (11.20)$$

то брус  $\mathbf{x}$  также является решением задачи внутреннего оценивания множества решений интервальной системы уравнений  $F(\tilde{\mathbf{a}}, x) = \tilde{\mathbf{b}}$  с тем же распределением неопределённостей, т. е.  $\mathbf{x} \subseteq \Xi_{\alpha\beta}(F, \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}})$ .

**Доказательство.** Если предикат

$$(\forall \hat{\mathbf{a}} \in \mathbf{a}^\forall)(\forall \hat{\mathbf{b}} \in \mathbf{b}^\forall)(\exists \check{\mathbf{a}} \in \mathbf{a}^\exists)(\exists \check{\mathbf{b}} \in \mathbf{b}^\exists)(F(\hat{\mathbf{a}} + \check{\mathbf{a}}, x) = \hat{\mathbf{b}} + \check{\mathbf{b}})$$

справедлив для некоторого вектора  $x \in \mathbb{R}^n$ , то предикат

$$(\forall \hat{\mathbf{a}} \in \tilde{\mathbf{a}}^\forall)(\forall \hat{\mathbf{b}} \in \tilde{\mathbf{b}}^\forall)(\exists \check{\mathbf{a}} \in \tilde{\mathbf{a}}^\exists)(\exists \check{\mathbf{b}} \in \tilde{\mathbf{b}}^\exists)(F(\hat{\mathbf{a}} + \check{\mathbf{a}}, x) = \hat{\mathbf{b}} + \check{\mathbf{b}})$$

тем более справедлив для такого  $x$  при допущениях (11.19)–(11.20). Следовательно,

$$\begin{aligned} \Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \\ &= \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{\mathbf{a}} \in \mathbf{a}^\forall)(\forall \hat{\mathbf{b}} \in \mathbf{b}^\forall)(\exists \check{\mathbf{a}} \in \mathbf{a}^\exists)(\exists \check{\mathbf{b}} \in \mathbf{b}^\exists)(F(\hat{\mathbf{a}} + \check{\mathbf{a}}, x) = \hat{\mathbf{b}} + \check{\mathbf{b}}) \} \\ &\quad \cap \\ &= \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{\mathbf{a}} \in \tilde{\mathbf{a}}^\forall)(\forall \hat{\mathbf{b}} \in \tilde{\mathbf{b}}^\forall)(\exists \check{\mathbf{a}} \in \tilde{\mathbf{a}}^\exists)(\exists \check{\mathbf{b}} \in \tilde{\mathbf{b}}^\exists)(F(\hat{\mathbf{a}} + \check{\mathbf{a}}, x) = \hat{\mathbf{b}} + \check{\mathbf{b}}) \} \\ &= \Xi_{\alpha\beta}(F, \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}}), \end{aligned}$$

и поэтому  $\mathbf{x} \subseteq \Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$  влечёт  $\mathbf{x} \subseteq \Xi_{\alpha\beta}(F, \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}})$ . ■

Обратимся к рассмотренному выше примеру интервального уравнения (11.18) и его допускового множества решений. Если сжать правую часть в (11.18) до  $[-1, 1]$ , то для получившегося уравнения

$$[-1, 1]x = [-1, 1]$$

уравнение в дуализациях (совпадающее с ним же) становится разрешимым и его формальное решение  $[-1, 1]$  в точности равно допусковому множеству решений исходного уравнения (11.18).

Дадим теперь переформулировку основного результата этого параграфа в применении к интервальным линейным системам вида (11.4).

**Теорема 11.5.2** (о «сжатии и раздутии» интервальных параметров в ИСЛАУ)  
*Если брус  $x$  является внутренней оценкой множества  $AE$ -решений  $\Xi(A^c, b^c)$  интервальной линейной системы, соответствующим характеристическим матрице  $A^c$  и вектору  $b^c$ , то  $x$  также является внутренней интервальной оценкой множества  $AE$ -решений  $\Xi(\tilde{A}^c, \tilde{b}^c)$  интервальной линейной системы, соответствующим характеристическим матрице  $\tilde{A}^c$  и вектору  $\tilde{b}^c$ , таким что*

$$\tilde{A}^c \subseteq A^c \quad \text{и} \quad b^c \subseteq \tilde{b}^c.$$

**Доказательство.** Для любого  $x \in \mathbb{R}^n$  принадлежность  $x \in \Xi(A^c, b^c)$  равносильна включению

$$A^c \cdot x \subseteq b^c$$

в полной интервальной арифметике. Пользуясь далее условиями теоремы и свойством монотонности по включению, получим

$$\tilde{A}^c \cdot x \subseteq A^c \cdot x \subseteq b^c \subseteq \tilde{b}^c,$$

т. е.

$$\tilde{A}^c \cdot x \subseteq \tilde{b}^c,$$

что означает принадлежность точки  $x$  также и множеству решений  $\Xi(A^c, b^c)$ . Следовательно  $\Xi(A^c, b^c) \subseteq \Xi(\tilde{A}^c, \tilde{b}^c)$ , откуда и следует доказываемое утверждение. ■

Отметим, что Теорема 11.5.2 носит более глубокий характер, чем предшествующая общая Теорема 11.5.1, поскольку включения характеристической матрицы и характеристической правой части могут рассматриваться в  $\mathbb{K}\mathbb{R}$ , а не только в классической интервальной арифметике. Это допускает возможность смены типа неопределённости в интервальных параметрах системы уравнений, чего в рамках Теоремы 11.5.1 сделать невозможно.

Несмотря на кажущуюся очевидность Теорем 11.5.1–11.5.2, их следствия являются чрезвычайно важными для вычислительной практики. Именно, если пользователь не удовлетворен результатами «лобового» применения формального подхода к задаче внутреннего оценивания множества решений, то ему имеет смысл попробовать решить тем же методом ту же задачу для вспомогательной интервальной системы, у которой параметры, соответствующие  $E$ -неопределённости, «сжаты», а параметры,

соответствующие А-неопределённости, «раздуты». Применение формального подхода к такой модифицированной интервальной системе очень часто позволяет получать интервальные решения, которые действительно лучше по форме и/или расположению, более телесные, в частности. Иногда с помощью этой несложной методики можно находить внутренние оценки множеств решений даже для тех случаев, когда уравнение в дуализациях, выписанное по исходной системе уравнений, не имеет правильных решений.

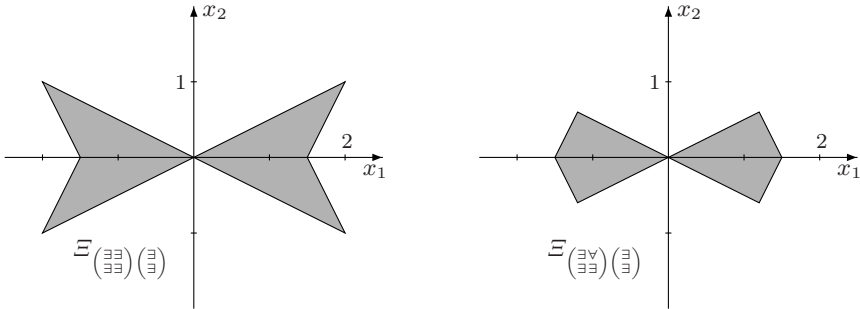


Рис. 11.3. «Почти несвязные» множества решений интервальной линейной системы (11.21).

Рассмотрим конкретные примеры. Для интервальной линейной системы

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [-1, 1] \\ [-1, 1] & [2, 4] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-3, 3] \\ 0 \end{pmatrix} \tag{11.21}$$

объединённое множество решений и множество  $\begin{pmatrix} \exists \exists \\ \exists \exists \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exists \\ \exists \end{pmatrix}$ -решений имеют «бабочкообразные» конфигурации, изображённые на Рис. 11.3. Если для их внутреннего оценивания напрямую воспользоваться формальным подходом, то для обоих множеств мы получим оценки

$$\begin{pmatrix} [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}] \\ 0 \end{pmatrix},$$

сплюсненные по второй координате. Заменяем в векторе правой части первую компоненту на интервал  $[1, 3]$  и вновь применим для внутреннего оценивания множества решений получившейся ИСЛАУ формальный подход. Теперь решением соответствующих уравнений в дуализациях будут интервальные векторы

$$\begin{pmatrix} [\frac{1}{4}, \frac{3}{2}] \\ [-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}] \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} [\frac{2}{7}, \frac{10}{7}] \\ [-\frac{1}{7}, \frac{1}{7}] \end{pmatrix},$$

покрывающие более значительные части множеств решений, что может оказаться более предпочтительным для заказчика.

Ещё пример. Предположим, что для интервальной линейной системы

$$\begin{pmatrix} [2, 3] & 1 \\ 1 & [2, 3] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-5, 5] \\ 0 \end{pmatrix} \tag{11.22}$$



ищется внутренняя интервальная оценка объединённого множества решений, которое изображено на Рис. 11.4. Прямое применение Теоремы 11.2.2 и вычисление формального решения уравнения в дуализациях для (11.22) приводит к интервальному вектору  $([-3, 3], [1, -1])^T$ , который имеет неправильную вторую компоненту и, следовательно, не может быть проинтерпретирован как внутренняя интервальная оценка. Но ведь ясно, что объединённое множество решений рассматриваемой системы непусто и даже внутренность его тоже непуста!

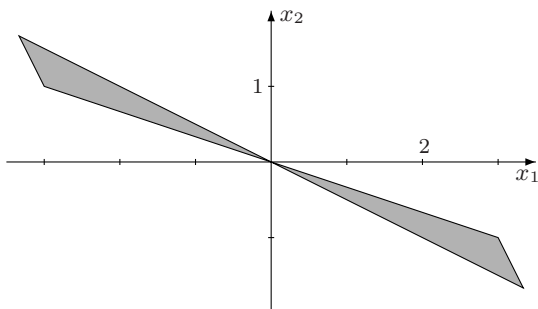


Рис. 11.4. «Почти несвязное» объединённое множество решений интервальной линейной системы (11.22).

Причина неудачи формального подхода заключается в специфическом строении множеств решений системы (11.22). Как мы видели в Главе 5, в общем случае множества АЕ-решений могут быть весьма сложно устроенными невыпуклыми и даже несвязными компактами. Для системы (11.22) множества решений оказываются «почти несвязными»: они состоят из нескольких компонент, которые касаются друг друга в единственной точке — начале координат. В подобных ситуациях не следует ожидать получения решения одним «кавалерийским наскоком», так как внутренняя оценка множества решений таких систем в принципе не может быть адекватно представлена единственным интервалом, покрывающим все разрозненные и слабо связанные части множества решений (принадлежащие разным ортантам пространства  $\mathbb{R}^n$ ). Формальный подход «пытается» найти один интервальный вектор, который бы принадлежал всем этим слабо связанным или несвязанным областям и, конечно, терпит неудачу.

Как можно преодолеть это затруднение? Естественный выход состоит в том, чтобы искать решение задачи внутреннего оценивания не как единственный брус, а в виде объединения нескольких, возможно непересекающихся, интервалов, покрывающих множество решений с желаемой степенью полноты. Точное их число может зависеть от конкретной системы, её размерности и желаний заказчика.

Главными причинами, вызывающими плохую — несвязную и почти несвязную — конфигурацию множества решений и, как следствие, плохие результаты лобового применения формального подхода, являются

- 1) наличие в интервальном векторе правых частей одновременно как нулевых компонент, так и компонент, содержащих ноль в своей внутренности;
- 2) нулевые и нульсодержащие интервалы в матрице ИСЛАУ.

Таким образом, правильная тактика решения задачи внутреннего оценивания множеств решений интервальных линейных систем уравнений должна включать

- порождение согласно теореме «о сжатии и раздутии коэффициентов» вспомогательных систем, у которых в правой части не присутствуют одновременно нулевые и нульсодержащие компоненты;
- отдельное решение для каждой из полученных вспомогательных ИСЛАУ задачи внутреннего оценивания множеств решений.

Полный ответ задачи внутреннего оценивания получается далее путём объединения этих отдельных ответов для подзадач, порождённых на первом этапе.

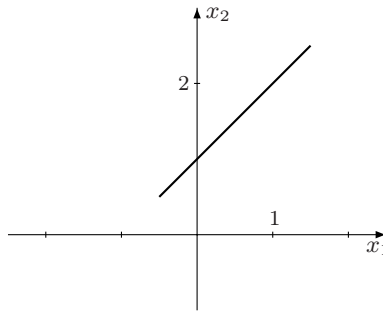


Рис. 11.5. Нетелесное объединённое множество решений интервальной линейной системы (11.24).

Например, для системы (11.22) заменим характеристический вектор правой части на  $([5, 4], 0)^\top$ , такой что  $([5, 4], 0)^\top \subseteq ([-5, 5], 0)^\top$ , оставляя характеристическую матрицу ИСЛАУ неизменной. Находя формальное решение уравнения в дуализациях

$$\begin{pmatrix} [3, 2] & 1 \\ 1 & [3, 2] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [5, 4] \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (11.23)$$

мы получим в качестве искомой внутренней оценки объединённого множества решений для (11.22) телесный интервальный вектор

$$\begin{pmatrix} [2, 2.4] \\ [-1, -0.8] \end{pmatrix}.$$

Заметим, что для получения такой хорошей оценки нам пришлось сменить во вспомогательной ИСЛАУ (11.23) тип неопределённости второй компоненты правой части: он стал другим, отличным от того, что присутствовал в исходной ИСЛАУ.

Конечно, возможны ситуации, когда внутренность множества решений пуста, и оно в принципе не может иметь «хорошей» внутренней оценки. Рассмотрим, например, интервальную линейную систему

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0, 4] \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (11.24)$$

Её объединённое множество решений — отрезок прямой, изображённый на Рис. 11.5, для которого телесной внутренней оценки не существует в принципе. Мы должны уметь различать такие ситуации на практике.

## 11.6 Интервальные линейные системы с неотрицательными матрицами

Если матрица интервальной системы линейных алгебраических уравнений является неотрицательной, то её множества решений обладают тонким геометрическим свойством, которое можно охарактеризовать как *монотонность конфигурации*. Основываясь на нём, мы развиваем ещё одну методику внутреннего интервального оценивания множеств решений интервальных линейных систем с неотрицательными матрицами, которая часто может оказаться разумной альтернативой формальному подходу. При этом не требуется, чтобы количество уравнений в системе совпадало с количеством неизвестных переменных.

Ниже для простоты рассматривается оценивание лишь объединённого множества решений, хотя все результаты этого параграфа после небольшой коррекции могут быть перенесены на любые множества АЕ-решений интервальных систем линейных уравнений [35]. Кроме неотрицательности мы не накладываем никаких ограничений (квадратность, неособенность и т. п.) на интервальную матрицу системы, но при этом постановка задачи должна быть скорректирована на случай неограниченного множества решений. В этой ситуации мы, как и в §9.4, будем искать внутреннюю оценку для пересечения множества решений с некоторым заранее заданным интервальным брусом  $U = (U_1, U_2, \dots, U_n)^T \in \mathbb{IR}^n$ , т. е. решать не (5.23), а задачу

Для интервальной линейной системы уравнений  $Ax = b$  найти внутреннюю интервальную оценку пересечения множества решений  $\Xi_{uni}(A, b)$  с некоторым брусом  $U$ .

(11.25)

### 11.6а Теоретическая основа

Зафиксируем натуральный индекс  $\nu \in \{1, 2, \dots, n\}$  и, аналогично тому, как это было сделано в §9.4, рассмотрим в пространстве  $\mathbb{R}^n$  прямую линию  $l$  с параметрическим уравнением

$$\begin{cases} x_1 = r_1, \\ \vdots \\ x_{\nu-1} = r_{\nu-1}, \\ x_\nu = t, \\ x_{\nu+1} = r_{\nu+1}, \\ \vdots \\ x_n = r_n, \end{cases} \quad (11.26)$$

где  $r_1, \dots, r_{\nu-1}, r_{\nu+1}, \dots, r_n$  — вещественные константы, а  $t$  — параметр, пробегающий вещественную ось  $\mathbb{R}$ . Эта прямая, которую мы будем называть «пробной», параллельна  $\nu$ -ой координатной оси и полностью задаётся указанием  $(n-1)$ -мерного вещественного вектора  $r = (r_1, \dots, r_{\nu-1}, r_{\nu+1}, \dots, r_n)^\top$ . Для явного указания параметров этой прямой мы, как и ранее, используем обозначение  $l(r)$ .

Пусть также

$$\underline{\Omega}_\nu(r) = \min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni} \cap l(r)\},$$

$$\overline{\Omega}_\nu(r) = \max\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni} \cap l(r)\}$$

— соответственно наименьшее и наибольшее значения  $\nu$ -ой координаты точек из пересечения  $l(r)$  с множеством решений интервальной линейной системы (11.4) (в случае  $\Xi_{uni} \cap l(r) = \emptyset$  мы полагаем  $\underline{\Omega}_\nu(r) = +\infty$  и  $\overline{\Omega}_\nu(r) = -\infty$ ). Наша ближайшая цель — вывод явных выражений для этих функций  $\underline{\Omega}_\nu(r)$  и  $\overline{\Omega}_\nu(r)$ , которые в определённом смысле «отслеживают» конфигурацию границы множества решений.

«Подставим» параметрическое уравнение пробной прямой (11.26) в интервальную систему уравнений (11.4) —

$$Ax = b,$$

которая превратится при этом в «распавшуюся» систему  $m$  одномерных линейных уравнений с интервальными коэффициентами и одной неизвестной переменной  $t$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_{1\nu}t + \sum_{j=1, j \neq \nu}^n \mathbf{a}_{1j}r_j = \mathbf{b}_1, \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ \mathbf{a}_{m\nu}t + \sum_{j=1, j \neq \nu}^n \mathbf{a}_{mj}r_j = \mathbf{b}_m. \end{array} \right. \quad (11.27)$$

Содержательный смысл этой процедуры состоит в следующем. При подстановке параметрического уравнения (11.26) в точечную систему  $Ax = b$  мы получаем некоторую систему из  $m$  одномерных уравнений, которая совпадает по структуре с (11.27), но имеет вещественные коэффициенты. Далее варьируем элементы  $a_{ij}$  матрицы и элементы  $b_i$  вектора правой части в пределах заданных для них границ  $\mathbf{a}_{ij}$  и  $\mathbf{b}_i$  соответственно. Ясно, что множество всех полученных таким образом точечных систем уравнений как раз таки образует (11.27).

Множество решений  $i$ -го уравнения этой системы может быть вычислено по правилам интервальной арифметики как

$$\left( \mathbf{b}_i - \sum_{j=1, j \neq \nu}^n \mathbf{a}_{ij}r_j \right) / \mathbf{a}_{i\nu} \quad (11.28)$$

с единственной оговоркой, что в качестве «/» может потребоваться операция деления в расширенной интервальной арифметике Кэхэна (§1.11а), разрешающей нульсодержащие делители. Напомним, что помимо обычных интервалов из  $\mathbb{IR}$  элементами

интервальной арифметики Кэхэна являются множества вида  $]-\infty, p] \cup [q, +\infty[$ ,  $p \leq q$ , и  $]-\infty, p]$ ,  $[q, +\infty[$ . Результаты сложения, вычитания, умножения и деления  $\mathbf{a}/\mathbf{b}$  при  $0 \notin \mathbf{b}$  в классической интервальной арифметике и арифметике Кэхэна полностью совпадают. Но в арифметике Кэхэна дополнительно определено деление обычных интервалов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a}/\mathbf{b}$ ,  $c \in \mathbf{b}$ .

Каждое из одномерных уравнений, образующих систему (11.27), мы можем решить отдельно от других, а затем пересечь все получившиеся при этом множества решений (11.28) друг с другом (а также с  $\mathbf{U}_\nu$ , если решаем постановку задачи (11.25)). В пределах всех интервалов, входящих в систему (11.27), соответствующие коэффициенты изменяются независимо друг от друга, как и в исходной ИСЛАУ, так что замкнутое множество  $\mathcal{S}$ , полученное в результате описанного выше раздельного решения уравнений и пересечения их одномерных множеств решений, является в точности множеством значений  $\nu$ -ой координаты точек из  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap l(r)$ . Оно может оказаться пустым, если система (11.27) несовместна, но в любом случае

$$\underline{\Omega}_\nu(r) = \min \mathcal{S} \quad \text{и} \quad \overline{\Omega}_\nu(r) = \max \mathcal{S}.$$

Если интервалы  $\mathbf{a}_{i\nu}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , не содержат нуля в своей внутренности, то все множества (11.28) — *связные* интервалы вида  $[p, q]$  или  $]-\infty, p]$  или  $[q, +\infty[$  или же вся вещественная ось  $\mathbb{R}$ . Это следует из формул для арифметических операций в классической интервальной арифметике и формул (1.101) для деления в расширенной интервальной арифметике Кэхэна. Сказанное, в частности, верно при сделанных нами предположениях о неотрицательности матрицы интервальной линейной системы, когда все интервалы  $\mathbf{a}_{i\nu}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , также неотрицательны.

Далее, пересечение получающихся интервалов-результатов тривиально организуется по формуле

$$\mathbf{x} \cap \mathbf{y} = [\max\{\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}\}, \min\{\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}\}].$$

Таким образом, в точках эффективной области определения функции  $\underline{\Omega}_\nu(r)$  (т. е. когда пересечение множеств (11.28) непусто) мы имеем

$$\underline{\Omega}_\nu(r) = \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \left( \mathbf{b}_i - \sum_{j=1, j \neq \nu}^n \mathbf{a}_{ij} r_j \right) / \mathbf{a}_{i\nu} \right\}, \quad (11.29)$$

если множество решений ограничено, и

$$\underline{\Omega}_\nu(r) = \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \left( \mathbf{b}_i - \sum_{j=1, j \neq \nu}^n \mathbf{a}_{ij} r_j \right) / \mathbf{a}_{i\nu} \right\}, \underline{\mathbf{U}}_\nu \right\}, \quad (11.30)$$

если множество решений неограниченно (тогда подчёркивание означает взятие инфимума, а не нижнего конца интервала).

Аналогично, в точках эффективной области определения функции  $\overline{\Omega}_\nu(r)$  имеет место

$$\overline{\Omega}_\nu(r) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \left( \mathbf{b}_i - \sum_{j=1, j \neq \nu}^n \mathbf{a}_{ij} r_j \right) / \mathbf{a}_{i\nu} \right\}, \quad (11.31)$$

если множество решений ограничено, и

$$\bar{\Omega}_\nu(r) = \min \left\{ \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \overline{\left( \mathbf{b}_i - \sum_{j=1, j \neq \nu}^n \mathbf{a}_{ij} r_j \right) / \mathbf{a}_{i\nu}} \right\}, \bar{\mathbf{U}}_\nu \right\}, \quad (11.32)$$

если множество решений неограниченно (тогда надчёркивание означает взятие супремума).

**Предложение 11.6.1** *Если в интервальной линейной системе  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  матрица  $\mathbf{A}$  неотрицательна, то все функции  $\underline{\Omega}_\nu(r)$  и  $\bar{\Omega}_\nu(r)$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, n$ , являются монотонно невозрастающими по каждой переменной на эффективных областях своего определения.*

**Доказательство** основывается на следующем простом факте: как нижняя, так и верхняя огибающие (т. е. поточечные минимум и максимум) любого семейства монотонно невозрастающих функций также являются невозрастающими функциями.

Заметим, что если  $\mathbf{a}_{ij} \geq 0$  и  $\mathbf{a}_{i\nu} \geq 0$ , то для всех  $i, j$  и  $\nu$  выражения

$$\frac{(\text{конец интервала } \mathbf{b}_i) - \sum_{j=1, j \neq \nu}^n (\text{конец интервала } \mathbf{a}_{ij}) r_j}{\text{конец интервала } \mathbf{a}_{i\nu}} \quad (11.33)$$

являются монотонно невозрастающими по любому из аргументов  $r_j$ ,  $j = 1, \dots, \nu - 1, \nu + 1, \dots, n$  (при условии, что остальные аргументы фиксированы). Интервальные арифметические операции в  $\mathbb{IR}$  определяются, как известно, таким образом, что концы результирующих интервалов являются либо минимумами, либо максимумами результатов соответствующих операций между концами интервалов-операндов. Отсюда следует, что для любого  $i = 1, 2, \dots, m$  функции

$$\underline{\omega}_{i\nu}(r) = \frac{\left( \mathbf{b}_i - \sum_{j=1, j \neq \nu}^n \mathbf{a}_{ij} r_j \right)}{\mathbf{a}_{i\nu}}$$

— это нижние огибающие для (11.33), а функции

$$\bar{\omega}_{i\nu}(r) = \frac{\left( \mathbf{b}_i - \sum_{j=1, j \neq \nu}^n \mathbf{a}_{ij} r_j \right)}{\mathbf{a}_{i\nu}}$$

— это верхние огибающие для (11.33). При этом все они также невозрастающие по  $r_k$ . Такими же невозрастающими являются функции  $\underline{\Omega}_\nu(r)$ , которые в силу (11.29)–(11.30) суть верхние огибающие всех  $\underline{\omega}_{i\nu}(r)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  (и, возможно, константы  $\underline{\mathbf{U}}_\nu$ ), а также функции  $\bar{\Omega}_\nu(r)$ , которые в силу (11.31)–(11.32) суть нижние огибающие для всех  $\underline{\omega}_{i\nu}(r)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  (и, возможно, константы  $\bar{\mathbf{U}}_\nu$ ). ■

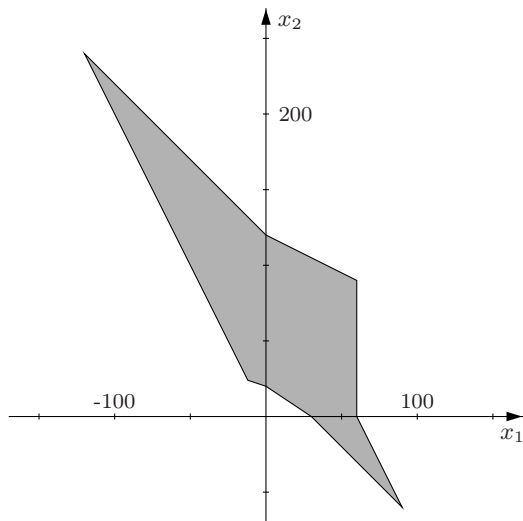


Рис. 11.6. Множество решений системы Хансена.

Например, для интервальной линейной системы Хансена [20]

$$\begin{pmatrix} [2, 3] & [0, 1] \\ [1, 2] & [2, 3] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [0, 120] \\ [60, 240] \end{pmatrix}, \quad (11.34)$$

объединённое множество решений, изображённое на Рис. 11.6, в целом не является выпуклым, но имеет веретенообразную «монотонную» конфигурацию. В то же время, в силу Предложения 11.6.1 форма множества решений, подобная той, что представлена на Рис. 5.1, 5.2, 9.1 и 9.4, с выпирающими в разных направлениях «шипами», невозможна для множеств решений двумерных интервальных линейных систем с неотрицательными матрицами.

Ещё более наглядной иллюстрацией Предложения 11.6.1 является интервальная линейная система Ноймайера

$$\begin{pmatrix} 3.5 & [0, 2] & [0, 2] \\ [0, 2] & 3.5 & [0, 2] \\ [0, 2] & [0, 2] & 3.5 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 1] \\ [-1, 1] \end{pmatrix}, \quad (11.35)$$

объединённое множество решений которой изображено на Рис. 5.3 в Главе 5. Внимательный наблюдатель может заметить, что, несмотря на кажущуюся беспорядочность и неструктурированность конфигурации этого множества ограничивающие его поверхности всё равно монотонны! Рассмотренные примеры иллюстрируют также ещё одну особенность функций  $\underline{\Omega}_\nu(r)$  и  $\overline{\Omega}_\nu(r)$  — их возможную разрывность, которая возникает из-за того, что концами интервальных элементов матрицы ИСЛАУ являются нули.

**Теорема 11.6.1** Если в интервальной линейной системе уравнений  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  матрица  $\mathbf{A}$  неотрицательна, то для любых двух точек  $y, z \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , таких что  $y \leq z$ , интервальный вектор  $[y, z]$  также является подмножеством множества решений  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ .

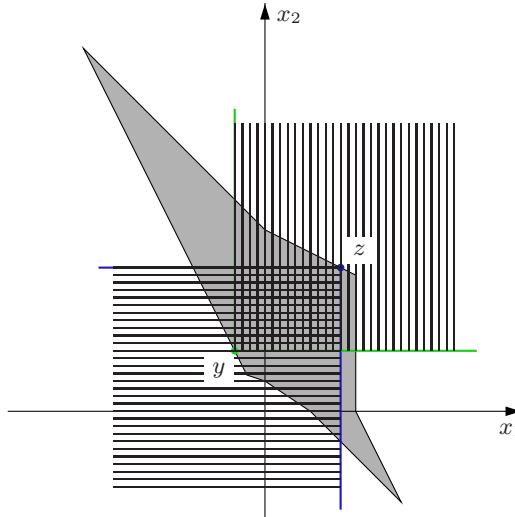


Рис. 11.7. Иллюстрация Теоремы 11.6.1.

**Доказательство.** Из самого определения функций  $\underline{\Omega}_\nu(r)$  и  $\overline{\Omega}_\nu(r)$  следует, что для любого  $r \in \mathbb{R}^{n-1}$  и любого индекса  $\nu \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\underline{\Omega}_\nu(r) \leq \{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap l(r)\} \leq \overline{\Omega}_\nu(r),$$

причём оба неравенства точны. Но при сделанном нами допущении о неотрицательности матрицы  $\mathbf{A}$  справедливо даже большее:

$$\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap l(r)\} = [\underline{\Omega}_\nu(r), \overline{\Omega}_\nu(r)],$$

поскольку множество  $\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap l(r)\}$  связно. Следовательно, для любого фиксированного  $\nu = 1, 2, \dots, n$  множество решений  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  является в точности пересечением надграфика функции  $\underline{\Omega}_\nu(r)$  и подграфика функции  $\overline{\Omega}_\nu(r)$ . Утверждение доказываемой теоремы вытекает поэтому из того, что функции  $\underline{\Omega}_\nu(r)$  и  $\overline{\Omega}_\nu(r)$  являются монотонно невозрастающими. ■

Таким образом, структура множества решений ИСЛАУ с неотрицательными матрицами является весьма специальной, и для их внутреннего оценивания могут быть построены весьма эффективные алгоритмы, имеющие даже полиномиальную сложность в случае, когда уже известна какая-то точка из  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$ .



### 11.66 Алгоритм внутреннего оценивания

Псевдокод алгоритма внутреннего интервального оценивания объединённого множества решений ИСЛАУ с неотрицательными матрицами приведён в Табл. 11.1. Дадим необходимые пояснения к нему.

Таблица 11.1. Алгоритм NonNeg для внутреннего интервального оценивания множеств решений ИСЛАУ с неотрицательными матрицами

<p>Вход</p> <p>Интервальная линейная система <math>\mathbf{A}x = \mathbf{b}</math> с неотрицательной матрицей <math>\mathbf{A}</math>. Точка <math>\tilde{x}</math> из оцениваемого множества решений <math>\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})</math>. Вещественные параметры <math>\lambda, \mu \in ]0, 1[</math>.</p>
<p>Выход</p> <p>Нижняя <math>y</math> и верхняя <math>z</math> границы интервального вектора <math>[y, z]</math> внутренней оценки множества решений <math>\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})</math>.</p>
<p>Алгоритм</p> <p><math>y \leftarrow \tilde{x}; \quad z \leftarrow \tilde{x};</math>          DO FOR <math>k = 1</math> TO <math>n</math>              <math>\mathbf{Y} \leftarrow ] -\infty, +\infty[; \quad \mathbf{Z} \leftarrow ] -\infty, +\infty[;</math>              DO FOR <math>i = 1</math> TO <math>n</math>                  <math>\mathbf{Y} \leftarrow \mathbf{Y} \cap \left( \left( \mathbf{b}_i - \sum_{j=1, j \neq k}^n \mathbf{a}_{ij} y_j \right) / \mathbf{a}_{ik} \right);</math>                  <math>\mathbf{Z} \leftarrow \mathbf{Z} \cap \left( \left( \mathbf{b}_i - \sum_{j=1, j \neq k}^n \mathbf{a}_{ij} z_j \right) / \mathbf{a}_{ik} \right);</math>              END DO              IF ( <math>k &lt; n</math> ) THEN                  <math>y_k \leftarrow \lambda \mathbf{Y} + (1 - \lambda) \tilde{x}_k; \quad z_k \leftarrow (1 - \mu) \tilde{x}_k + \mu \overline{\mathbf{Z}};</math>              ELSE                  <math>y_k \leftarrow \mathbf{Y}; \quad z_k \leftarrow \overline{\mathbf{Z}};</math>              END IF          END DO</p>

Алгоритм осуществляет построение нижней  $y$  и верхней  $z$  границ интервального

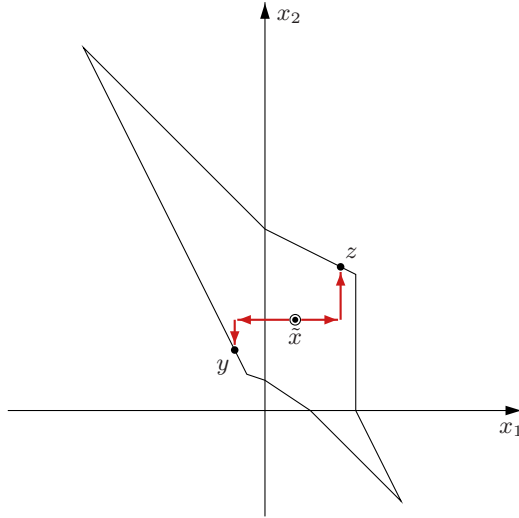


Рис. 11.8. Как работает алгоритм NonNeg.

вектора  $[y, z]$  внутренней оценки для  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , отправляясь от некоторой начальной точки  $\tilde{x}$  из множества решений. Первоначально присваиваем

$$y \leftarrow \tilde{x}, \quad z \leftarrow \tilde{x},$$

а далее  $i$ -ый,  $i = 1, 2, \dots, n$ , шаг алгоритма «раздвигает» точки  $y$  и  $z$  по  $i$ -ой координате (см. Рис. 11.8), так что в результате  $n$ -го шага получается, вообще говоря, строгое покомпонентное неравенство  $y < z$ .

С помощью вспомогательных безразмерных вещественных параметров  $\lambda$  и  $\mu$  пользователь имеет возможность изменять форму интервальной оценки  $[y, z]$  и её расположение внутри множества решений. Эти параметры регулируют то, насколько на  $i$ -ом шаге алгоритма  $y_i$  и  $z_i$ , соответственно, будут отличаться от  $\tilde{x}_i$ . Значения  $\lambda = 1$  или  $\mu = 1$  задают максимально возможные в пределах множества решений  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  отклонения  $y_i$  от  $\tilde{x}_i$  в сторону уменьшения и  $z_i$  от  $\tilde{x}_i$  в сторону увеличения соответственно, а нулевые  $\lambda$  или  $\mu$  соответствовали бы  $z_i = y_i = \tilde{x}_i$ . Конкретная величина сдвига  $y_i$  и  $z_i$  относительно  $\tilde{x}_i$  определяется из информации о пересечении с множеством решений ИСЛАУ прямых, параллельных  $i$ -ой координатной оси и проходящих через насчитанные к текущему шагу точки  $y$  и  $z$ . Методика вычисления таких пересечений подробно изложена нами в §11.6а.

Отдельного пояснения требует факт различного подхода к обработке  $i$ -ой,  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ , и последней, т.е.  $n$ -ой, компонент векторов  $y$  и  $z$ . Для получения максимального по включению внутреннего бруса имеет смысл взять точки  $y$  и  $z$  на границе множества решений, а потому по  $n$ -ой координате эти точки раздвигаются максимально далеко друг от друга, на противоположные границы  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , так что параметры  $\lambda$  и  $\mu$  уже никак не влияют на выполнение этого завершающего шага алгоритма.

Для получения «телесной» формы бруса внутренней оценки множества решений наш вычислительный опыт рекомендует выбирать «средние» между 0 и 1 значения для  $\lambda$  и  $\mu$ , скажем, в районе 0.3–0.7. Слишком близкие к 0 или к 1 значения  $\lambda$  и  $\mu$  могут привести к «сплющиванию» оценивающего бруса по некоторым координатам. Впрочем, нередко построение удовлетворяющей пользователю оценки может быть осуществлено лишь в результате многократного выбора  $\tilde{x}$  и варьирования  $\lambda$  и  $\mu$ .

Приведённая в Табл. 11.1 версия алгоритма рассчитана на интервальные линейные системы с неотрицательными квадратными неособенными матрицами, т. е. на случай ограниченных множеств решений. Для ИСЛАУ с неотрицательными прямоугольными  $m \times n$ -матрицами внутренний цикл «DO FOR» следует выполнять до  $m$ . Если же предполагается неограниченность множества решений, и мы решаем задачу (11.25), то в начале внешнего цикла «DO FOR» по  $k$  нужно инициализировать интервалы  $\mathbf{Y}$  и  $\mathbf{Z}$  не всей числовой осью, а  $U_k$ , т. е.  $k$ -ой компонентой ограничивающего интервала, данного нам из самой постановки (11.25).

Отметим, что трудоёмкость выполнения алгоритма NonNeg при известной начальной точке  $\tilde{x}$  составляет всего  $O(mn^2)$  арифметических и логических операций, что по порядку величины превзойти, по-видимому, уже невозможно: матрица интервальной системы (11.4) задаётся  $mn$  элементами, да ещё  $n$  параметров требует для своего описания искомым брус внутренней оценки множества решений.

## 11.6в Выбор начальной точки

Для получения телесной внутренней оценки множества решений желательно, чтобы начальная точка  $\tilde{x}$  алгоритма NonNeg лежала во внутренности  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ . В этом параграфе мы обсудим, как проверять, действительно ли  $\tilde{x} \in \text{int } \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , а в некоторых случаях корректировать положение  $\tilde{x}$ .

В самой общей ситуации корректировка точки из множества решений ИСЛАУ представляет собой непростую задачу, так как NP-трудной задачей является распознавание самих этих множеств решений (см. §4.4). В качестве начального приближения для точки  $\tilde{x}$  из  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  можно взять, например, решение какой-нибудь точечной системы уравнений с коэффициентами из  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{b}$ , скажем, «средней» системы

$$(\text{mid } \mathbf{A})x = \text{mid } \mathbf{b}, \quad (11.36)$$

матрица и правая часть которой образованы серединами  $\text{mid } a_{ij}$  и  $\text{mid } b_i$  интервальных элементов  $a_{ij}$  и  $b_i$  соответственно. Если этот выбор по тем или иным причинам неудовлетворителен, можно воспользоваться техникой, основанной на максимизации распознающего функционала множества решений, представленной в §5.5 нашей книги.

Пусть  $\mathbf{A}$  — интервальная  $m \times n$ -матрица,  $\mathbf{b}$  — интервальный  $m$ -вектор, определяющие рассматриваемую ИСЛАУ. Тогда выражением

$$\text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } b_i - \left\langle \text{mid } b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right\rangle \right\}$$

задается функционал  $\text{Uni} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , такой что принадлежность точки  $x$  множеству решений интервальной линейной системы  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  равносильна неотрицательности в

$x$  функционала  $\text{Uni}$ :

$$x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \iff \text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0.$$

Таким образом, множество решений соответствующей ИСЛАУ есть лебегово множество  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0\}$  функционала  $\text{Uni}$ . Функционал  $\text{Uni}$  является вогнутым в каждом ортанте пространства  $\mathbb{R}^n$ , а если в интервальной матрице  $\mathbf{A}$  некоторые столбцы целиком точечные, то  $\text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$  вогнут и на объединениях нескольких ортантов. Кроме того, функционал  $\text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$  достигает конечного максимума на всём пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Если  $x$  — точка топологической внутренности  $\text{int } \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  множества решений ИСЛАУ, то  $\text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) > 0$ . При некоторых дополнительных ограничениях на  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{b}$  верно и обратное: из принадлежности  $x \in \text{int } \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  следует  $\text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) > 0$ .

Как следствие этих результатов, мы естественно приходим к следующему практическому рецепту коррекции начальной точки  $\tilde{x}$  для алгоритма **NonNeg**. Если по каким-либо причинам  $\tilde{x}$  не удовлетворяет нас (например, не находится во внутренности множества решений, о чем может свидетельствовать значение  $\text{Uni}(\tilde{x}) \leq 0$ ), то, пользуясь градиентным подъемом, пытаемся достичь лучшего значения распознающего функционала  $\text{Uni}$ . В случае, когда полученное новое значение функционала строго больше нуля, мы можем быть уверенными, что оказались во внутренности множества решений.

## 11.6г Численные примеры

**Пример 11.6.1** Для интервальной линейной системы Хансена

$$\begin{pmatrix} [2, 3] & [0, 1] \\ [1, 2] & [2, 3] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [0, 120] \\ [60, 240] \end{pmatrix},$$

применение алгоритма **NonNeg** с параметрами  $\lambda = \mu = 1$  и начальной точкой, являющейся решением «средней системы» (11.36), приводит к ответу

$$\begin{pmatrix} [-25.909, 60] \\ [51.818, 90] \end{pmatrix},$$

а с параметрами  $\lambda = \mu = 0.7$  получается внутренняя оценка

$$\begin{pmatrix} [-13.022, 47.114] \\ [26.045, 96.443] \end{pmatrix}.$$

Обе полученные оценки — максимальные по включению. ■

**Пример 11.6.2** В качестве второго примера рассмотрим интервальную линейную

систему Ноймайера

$$\begin{pmatrix} \theta & [0, 2] & \cdots & [0, 2] \\ [0, 2] & \theta & \cdots & [0, 2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0, 2] & [0, 2] & \cdots & \theta \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 1] \\ \vdots \\ [-1, 1] \end{pmatrix},$$

которая уже встречалась нам в Главах 5 и 10. Матрица этой системы неотрицательна и потому интервальные линейные системы с ней могут служить тестовыми для развитой нами в этом параграфе методики.

При размерности 3 и значении диагонального параметра  $\theta = 3.5$  объединённое множество решений этой интервальной системы имеет вид, изображённый на Рис. 5.3. Взяв в качестве начальной точки  $\tilde{x}$  решение «средней системы» — начало координат, — после применения алгоритма внутреннего оценивания NonNeg с параметрами  $\lambda = \mu = 1$  получим результат

$$\begin{pmatrix} [-0.285714, 0.285714] \\ [-0.285714, 0.285714] \\ [-0.285714, 0.285714] \end{pmatrix},$$

совпадающий с оценкой, получаемой с помощью формального подхода. Мы, таким образом, практически точно оценили изнутри ту часть объединённого множества решений, которая прилегает к началу координат («кубик» на Рис. 5.3). Аналогично предыдущему примеру, столь хорошие результаты оценивания при граничных значениях параметров  $\lambda$  и  $\mu$  имеют причиной специальную конфигурацию множества решений. Именно, так как в матрице ИСЛАУ «много» элементов имеют нулевые концы, то некоторые из граней множества решений оказываются параллельными координатным плоскостям. ■

Наши выводы подтверждает

**Пример 11.6.3** Рассмотрим интервальную линейную систему

$$\begin{pmatrix} 3.5 & [1, 2] & [1, 2] \\ [1, 2] & 3.5 & [1, 2] \\ [1, 2] & [1, 2] & 3.5 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 1] \\ [-1, 1] \end{pmatrix},$$

которая отличается от системы Ноймайера тем, что вместо нулей левыми концами внедиагональных элементов матрицы взяты единицы. Для неё внутреннее оценивание объединённого множества решений алгоритмом NonNeg с нулевой начальной точкой  $\tilde{x}$  и параметрами  $\lambda = \mu = 1$  приводит к «сплюсненному» интервальному ответу

$$\begin{pmatrix} [-0.285714, 0.285714] \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что в этом случае правильнее взять параметры  $\lambda$  и  $\mu$  внутри отрезка  $(0, 1]$ . Например, мы получаем телесную внутреннюю оценку

$$\begin{pmatrix} [-0.2, 0.2] \\ [-0.16, 0.16] \\ [-0.14, 0.14] \end{pmatrix}$$

при использовании алгоритма NonNeg с  $\lambda = \mu = 0.7$ . ■

## 11.7 «Центровой» подход к внутреннему оцениванию

Выше в этой главе мы рассмотрели два подхода к решению задачи внутреннего оценивания множеств решений интервальных линейных систем уравнений, среди которых для квадратных систем своей вычислительной эффективностью и общностью выделяется формальный (алгебраический) подход. Тем не менее, его возможностей хватает не всегда, и для произвольных интервальных линейных систем с прямоугольной неквадратной матрицей внутреннее оценивание множеств решений по-прежнему представляет собой важную и актуальную задачу. Основываясь на геометрически наглядных соображениях, мы предлагаем ниже простой и весьма общий способ построения бруса, вписанного в объединённое множество решений ИСЛАУ, вокруг а priori известной точки-центра из этого множества (см. Рис. 11.9). Показано, что рассматриваемая задача сводится к нахождению максимума некоторой специальной квазивогнутой функции, приближённое значение которого может быть получено весьма элементарными средствами.

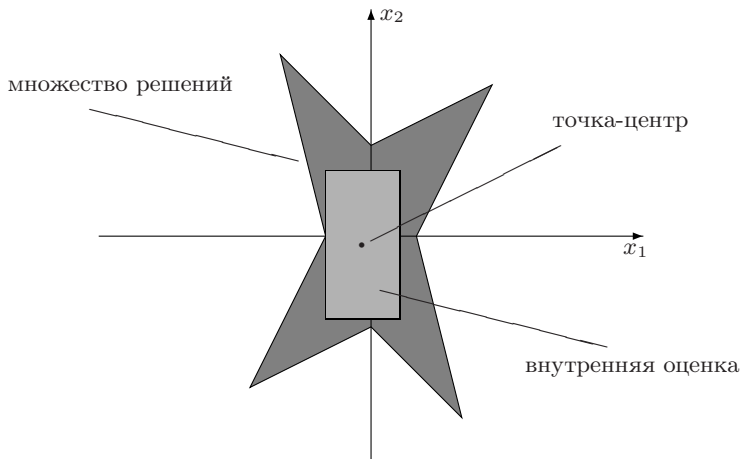


Рис. 11.9. Внутреннее оценивание множества решений с помощью «центрового подхода».

Если найдена какая-нибудь точка из множества решений, то далее мы можем использовать её как «центр», вокруг которого будет построено интервальное решение задачи (4.21) (см. Рис. 11.9). Это основная идея развиваемого нами подхода,

который, таким образом, может быть назван «центровым», совершенно аналогично подходу, применённому в Главе 6 для внутреннего оценивания допускового множества решений ИСЛАУ. Итак,

- ▶ сначала ищем некоторую точку  $y \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ,
- ▶ затем используем известные координаты  $y$  для вычисления размера бруса внутренней оценки, который имеет центр в этой точке  $y$ .

Формула для размеров интервального решения задачи (4.21) будет выведена нами ниже (см. §11.7б), и основную роль в ней играет взятие максимума рационального выражения с модулями по некоторому бруску, так что при известной точке  $t \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  решение задачи о внутреннем оценивании множества решений сводится, по существу, к оптимизации на бруске. Мы подробно рассмотрим его в §11.7в.

При этом у интервальной матрицы  $\mathbf{A}$  не предполагается никаких свойств неособенности, полноранговости и т. п., так что множество решений  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  может быть и неограниченным. Единственное необременительное требование на  $\mathbf{A}$  состоит в том, что она не должна иметь целиком нулевых строк.

Наконец, мы не рассматриваем вопроса об оптимизации (наилучшем выборе) центра интервального решения, так как он отчасти выходит за рамки нашего исследования и, с другой стороны, тесно связан с конкретными потребностями пользователей, решающих те или иные практические задачи.

### 11.7а Уточнение постановки задачи

В приложениях постановка задачи внутреннего оценивания (4.21) часто содержит дополнительную информацию о желаемой форме бруса  $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_n)^\top$ , который должен содержаться во множестве решений  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ . Именно, будем предполагать, что ширины компонент  $\mathbf{U}$  пропорциональны соответствующим компонентам некоторого вещественного положительного вектора

$$w = (w_1, w_2, \dots, w_n), \quad w_k > 0.$$

Иными словами, в постановке (4.21) дополнительно вводятся весовые коэффициенты  $w_k$  для ширин (или радиусов) компонент бруса внутренней оценки  $\mathbf{U}$ , такие что

$$\text{wid } \mathbf{U}_k / \text{wid } \mathbf{U}_l = w_k / w_l, \quad k, l = 1, 2, \dots, n.$$

Оказывается, что решение такой задачи посредством масштабирования неособенной диагональной матрицей  $\text{diag}\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  с элементами  $w_1, w_2, \dots, w_n$  по главной диагонали может быть сведено к простейшему случаю, когда  $w = (1, 1, \dots, 1)$  и брус  $\mathbf{U}$  превращается в кубик, который мы должны вписывать во множество решений некоторой модифицированной интервальной системы уравнений. Более точно, справедливо

**Предложение 11.7.1** Пусть

$$W := \text{diag}\{w_1, w_2, \dots, w_n\} \quad \text{и} \quad \tilde{\mathbf{A}} := \mathbf{A}W.$$

Интервальный вектор  $\tilde{U}$  с одинаковыми ширинами компонент, т. е. такой что

$$\text{wid } \tilde{U}_k = \text{wid } \tilde{U}_l, \quad k, l = 1, 2, \dots, n,$$

является решением задачи внутреннего оценивания (4.21) для модифицированной интервальной системы  $\tilde{A}x = \mathbf{b}$  тогда и только тогда, когда интервальный вектор  $U = W\tilde{U}$  с желаемым отношением ширин компонент есть решение задачи внутреннего оценивания (4.21) для исходной системы  $Ax = \mathbf{b}$ .

**Доказательство.** Воспользуемся характеристикой Бекка множества решений интервальной линейной системы (Предложение 7.1.1, стр. 359) в отношении точки  $x \in \mathbb{R}^n$ :

$$x \in \Xi_{uni}(A, \mathbf{b}) \iff Ax \cap \mathbf{b} \neq \emptyset. \quad (11.37)$$

В частности, для модифицированной системы уравнений

$$\tilde{x} \in \Xi_{uni}(\tilde{A}, \mathbf{b}) \iff \tilde{A}\tilde{x} \cap \mathbf{b} \neq \emptyset. \quad (11.38)$$

Умножение на матрицу  $W$  задаёт взаимно однозначное соответствие между точками  $x$  из бруса  $U$  и точками  $\tilde{x}$  из бруса  $\tilde{U}$  по правилу

$$x \rightleftharpoons \tilde{x} = Wx.$$

Далее, для каждой пары взаимно соответствующих друг другу  $x$  и  $\tilde{x}$  справедливо

$$Ax = AWW^{-1}x = \tilde{A}\tilde{x},$$

так что в правых частях эквивалентностей (11.37) и (11.38) принадлежности выполняются или не выполняются одновременно. Кроме того, для любых  $k, l = 1, 2, \dots, n$  в самом деле

$$\text{wid } U_k / \text{wid } U_l = w_k / w_l,$$

как и требовалось. ■

Итак, всюду ниже мы вправе считать, что в задаче (4.21) внутреннего оценивания множества решений ИСЛАУ требуется отыскание интервального вектора  $U$  с компонентами равной ширины, такого что  $U \subseteq \Xi_{uni}(A, \mathbf{b})$ .

### 11.76 Формула для размеров внутренней оценки

**Теорема 11.7.1** Пусть точка  $y \in \mathbb{R}^n$  принадлежит множеству решений интервальной линейной  $m \times n$ -системы  $Ax = \mathbf{b}$ , т. е.  $y \in \Xi_{uni}(A, \mathbf{b})$ , и пусть

$$\varrho := \min_{1 \leq i \leq m} \max_{A \in \mathbf{A}} \left\{ \frac{\text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \right|}{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|} \right\}. \quad (11.39)$$

Тогда  $\varrho \geq 0$  и интервальный вектор  $U = (y + \varrho \mathbf{e})$ ,  $\mathbf{e} = ([-1, 1], \dots, [-1, 1])^\top$ , с центром в  $y$  целиком лежит во множестве решений  $\Xi_{uni}(A, \mathbf{b})$ .



Формулировка теоремы не накладывает никаких условий на матрицу  $\mathbf{A}$ , но необходимо сделать замечание о практическом применении этого результата. Если в интервальной матрице  $\mathbf{A}$  какие-то строки целиком состоят из интервалов, содержащих нули, то знаменатель выражения внутри фигурных скобок (11.39) может обращаться в нуль. Так как знаменатель всегда неотрицателен, то значение всей дроби естественно полагать равным  $-\infty$  или  $+\infty$  в зависимости от того, отрицателен или неотрицателен в этой точке числитель. Вычисление  $\max_{A \in \mathbf{A}}$  по рассматриваемой строке матрицы  $\mathbf{A}$  на этом, фактически, завершается, так как любое из бесконечных значений влечёт совершенно определённые выводы в отношении всего внешнего  $\min_{1 \leq i \leq m}$ .

В самом деле, если  $\max_{A \in \mathbf{A}}$  по данной строке равен  $+\infty$ , то его можно вообще не принимать во внимание при дальнейшем вычислении внешнего  $\min$  по  $i$ . Если же  $\max_{A \in \mathbf{A}}$  по данной строке равен  $-\infty$ , то и общий минимум по  $i$  становится равным  $-\infty$ , так что значением выражения (11.39) является  $-\infty$ . Этот случай соответствует отрицательному числителю в (11.39), т. е. выполнению неравенства  $\text{rad } \mathbf{b}_i < |\text{mid } \mathbf{b}_i|$  для рассматриваемой строки. Тогда  $\mathbf{b}_i \not\equiv 0$ , соответствующее уравнение системы несовместно, а множество решений пусто. Вписать в него внутреннюю оценку нельзя, что и показывает в этом случае значение выражения (11.39).

**Доказательство.** Так как

$$\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \geq 0$$

для любых точечных матриц  $A = (a_{ij}) \in \mathbf{A}$ , то неотрицательность  $\varrho$  в (11.39) равносильна неотрицательности выражения

$$\min_{1 \leq i \leq m} \max_{A \in \mathbf{A}} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \right| \right\}, \quad (11.40)$$

которое по Теореме 5.5.1 определяет значение распознающего функционала  $\text{Uni}$  в точке  $y$ . Таким образом, (11.40), а вместе с ним и (11.39), действительно неотрицательны при  $y \in \Xi_{\text{uni}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ .

Приступая к обоснованию второго утверждения теоремы, предположим сначала, что в рассматриваемой нами задаче матрица  $\mathbf{A}$  имеет нулевую ширину, т. е. является просто вещественной,  $\mathbf{A} = A = (a_{ij})$ . Обозначая

$$\varrho_A = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \right|}{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|} \right\}, \quad (11.41)$$

представим каждый  $x \in U$  в виде  $x = y + z$ , где  $\max_{1 \leq i \leq n} |z_i| \leq \varrho_A$ .

Поскольку

$$|y_i| \leq \varrho_A \leq \frac{\text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \right|}{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|},$$

то для каждого  $i = 1, 2, \dots, m$  выполняется цепочка неравенств

$$\begin{aligned} |(Ay)_i| &= \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}y_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |y_j| \leq \varrho_A \cdot \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \\ &\leq \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}y_j \right| \\ &= \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - (Ay)_i \right|. \end{aligned}$$

Так как  $Ay = Ax - Ay$ , то мы получаем

$$(Ay)_i - \text{rad } \mathbf{b}_i + \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - (Ay)_i \right| \leq (Ax)_i \leq (Ay)_i + \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - (Ay)_i \right|$$

или, что равносильно,

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{b}}_i - (\text{mid } \mathbf{b}_i - (Ay)_i) + \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - (Ay)_i \right| \\ \leq (Ax)_i \leq \\ \bar{\mathbf{b}}_i - (\text{mid } \mathbf{b}_i - (Ay)_i) - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - (Ay)_i \right|. \end{aligned} \quad (11.42)$$

Принимая во внимание тот факт, что

$$-s + |s| \geq 0 \quad \text{и} \quad -s - |s| \leq 0$$

для любого вещественного  $s$ , неравенство (11.42) влечёт для всех  $i = 1, 2, \dots, m$

$$\underline{\mathbf{b}}_i \leq (Ax)_i \leq \bar{\mathbf{b}}_i,$$

т. е.  $Ax \in \mathbf{b}$ . Это и означает принадлежность точки  $x$  множеству решений интервальной линейной системы  $Ax = \mathbf{b}$ . Формула (11.39) обоснована тем самым для систем вида (11.4), у которых интервальность присутствует только в правой части.

Предположим теперь, что в исследуемой ИСЛАУ матрица  $\mathbf{A}$  является существенно интервальной матрицей, имеющей ненулевую ширину, множество решений  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  непусто и  $y \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ . Рассмотрим совокупность всевозможных систем  $Ax = \mathbf{b}$  с точечными матрицами  $A \in \mathbf{A}$  и внутренними оценками  $\mathbf{U}_A$  их множеств решений  $\Xi_{uni}(A, \mathbf{b})$ . Так как

$$\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \bigcup_{A \in \mathbf{A}} \Xi_{uni}(A, \mathbf{b}),$$

то объединение любой совокупности внутренних оценок множеств  $\Xi_{uni}(A, \mathbf{b})$  с  $A \in \mathbf{A}$ , является множеством, содержащимся в  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , т. е. тоже внутренней оценкой для  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ .

Пусть  $\mathbf{U}_A$  — это кубики, имеющие фиксированный центр  $y$ . Ясно, что такие внутренние оценки могут существовать не для всех множеств решений  $\Xi_{uni}(A, \mathbf{b})$  с  $A \in \mathbf{A}$ : для этого требуется, чтобы выполнялась принадлежность  $y \in \Xi_{uni}(A, \mathbf{b})$ . Но объединение кубиков внутренних оценок  $\mathbf{U}_A \subseteq \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , которые всё-таки существуют для

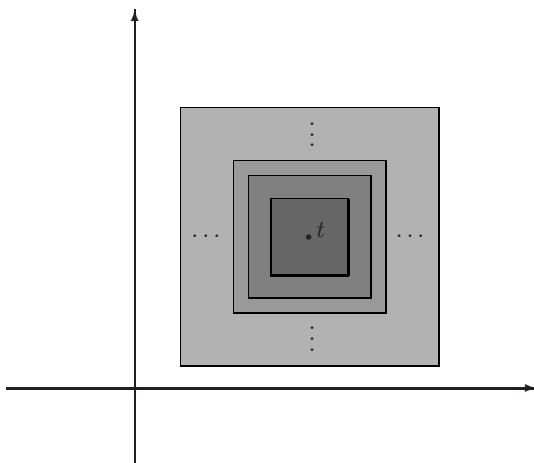


Рис. 11.10. Объединение кубиков с общим центром.

данного фиксированного центра  $y$ , находится особенно просто: это тоже кубик с тем же центром  $y$ , размер которого есть максимум размеров объединяемых кубиков (см. Рис. 11.10). В частности, если размеры кубиков определяются формулой (11.41), то брус

$$U = y + \varrho e,$$

также целиком лежит во множестве решений  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  при

$$\varrho = \max_{A \in \mathbf{A}} \varrho_A = \max_{A \in \mathbf{A}} \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \right|}{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|} \right\}. \quad (11.43)$$

В этом выражении мы имеем право брать максимум относительно  $A$  по всей интервальной матрице  $\mathbf{A}$  потому, что  $\varrho_A < 0$  при  $y \notin \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , и эти отрицательные значения  $\varrho_A$  никак не влияют на величину неотрицательного максимума (11.43).

Наконец, мы можем переставить в (11.43) операции взятия минимума и максимума, так как для разных индексов  $i$  максимумы от выражений в фигурных скобках берутся по непересекающимся множествам аргументов, именно, по различным строкам матрицы  $\mathbf{A}$ . Окончательно

$$\varrho = \min_{1 \leq i \leq m} \max_{A \in \mathbf{A}} \left\{ \frac{\text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \right|}{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|} \right\},$$

что и завершает доказательство теоремы. ■

Выражение под знаками экстремумов в (11.39) выглядит очень внушительно, но оно несёт ясный содержательный смысл, о котором стоит упомянуть. Именно, вектор  $|\text{mid } \mathbf{b} - Ay|$  — это абсолютные величины отклонений произведения  $Ay$  от середины вектора правой части интервальной системы. Знаки разности между

радиусами правой части и этими отклонениями, даваемые компонентами вектора  $(\text{rad } \mathbf{b} - |\text{mid } \mathbf{b} - Ay|)$ , указывают на принадлежность вектору  $\mathbf{b}$  образа  $Ay$  точки  $y$  под действием линейного преобразования  $A$ . Напомним, что всё это уже встречалось нам в §5.5 при выводе распознающего функционала  $\text{Uni}$ . Но, будучи отнесёнными к сумме модулей элементов каждой строки матрицы  $A$ , компоненты вектора  $(\text{rad } \mathbf{b} - |\text{mid } \mathbf{b} - Ay|)$  характеризуют уже нечто новое — степень чувствительности значений распознающего функционала к вариациям своего первого аргумента. Более точно, минимум этих отношений по  $i$  даёт величину «грубости к возмущениям», показывающую насколько можно сдвинуть точку  $y$  равномерно по всем координатам, чтобы она ещё оставалась во множестве решений интервальной системы  $Ax = \mathbf{b}$ .

Нельзя не отметить красивую двойственность результата Теоремы 11.7.1 с формулой, выведенной в §6.7 для размеров внутренней оценки допускового множества решений интервальной линейной системы: если  $y \in \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , то

$$r = \min_{1 \leq i \leq m} \min_{A \in \mathbf{A}} \left\{ \frac{\text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \right|}{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|} \right\} \geq 0 \quad (6.39)$$

и интервальный вектор  $(y + re)$ ,  $e = ([-1, 1], \dots, [-1, 1])^\top$ , содержится в допусковом множестве решений  $\Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ . Как видим, смена логического квантора при матрице в определении множества решений приводит к смене смысла внутреннего экстремума — вместо максимума по  $A \in \mathbf{A}$  возникает минимум.

В выражении (11.39) взятие минимума по  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  не представляет трудностей, так что при отыскании  $\varrho$  основную сложность представляет вычисление для каждого  $i$  внутренних максимумов

$$\max_{(a_{i1}, \dots, a_{in}) \in (\mathbf{a}_{i1}, \dots, \mathbf{a}_{in})} \left\{ \frac{\text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \right|}{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|} \right\}$$

или же их оценивание снизу.

Для удобства дальнейших рассуждений обозначим брус  $(\mathbf{a}_{i1}, \mathbf{a}_{i2}, \dots, \mathbf{a}_{in})$  через  $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n) = \mathbf{X}$  вне зависимости от индекса  $i$ . Целевую функцию, определённую на этом  $n$ -мерном бруске и принимающую значения на вещественной оси, которая задаётся выражением внутри фигурных скобок в (11.39) (и (6.39)), будем обозначать следующим образом:

$$\Phi(x) = \frac{R - \left| M - \sum_{j=1}^n x_j y_j \right|}{\sum_{j=1}^n |x_j|}, \quad (11.44)$$

где  $R = \text{rad } \mathbf{b}_i$ ,  $M = \text{mid } \mathbf{b}_i$  — вещественные константы. Таким образом, построение внутренней интервальной оценки объединённого множества решений ИСЛАУ вокруг

известной точки-центра сводится к решению оптимизационной задачи

$$\text{Найти } \max_{x \in \mathbf{X}} \Phi(x) \text{ или оценку для этого максимума снизу.} \quad (11.45)$$

### 11.7в Вычисление размеров внутренней оценки

Ясно, что в (11.45) оценкой искомого  $\max_{x \in \mathbf{X}} \Phi(x)$  снизу может служить значение целевой функции  $\Phi(x)$  в любой точке бруса  $\mathbf{X}$ . Поэтому в случае, когда мы не хотим ввязываться в трудоёмкие вычисления, простейшим способом решения задачи (11.45) является взятие максимального из значений целевой функции в нескольких выделенных точках области определения  $\mathbf{X}$ .

Обозначим, аналогично §6.7,

$$\Psi(x) := R - \left| M - \sum_{j=1}^n x_j y_j \right|, \quad \Theta(x) := \sum_{j=1}^n |x_j|,$$

так что

$$\Phi(x) = \frac{\Psi(x)}{\Theta(x)}.$$

$\Psi(x)$  и  $\Theta(x)$  представляют собой довольно простые выражения, имеющие лишь по одному вхождению каждой переменной  $x_j$ , а потому их экстремумы на  $\mathbf{X}$  могут быть несложно вычислены — как левый или правый концы естественных интервальных расширений  $\Psi(\mathbf{X})$  и  $\Theta(\mathbf{X})$  соответствующих выражений. В частности,

$$\max_{x \in \mathbf{X}} \Psi(x) = \overline{\Psi(\mathbf{X})} = \overline{\left( R - \left\langle M - \sum_{j=1}^n \mathbf{X}_j y_j \right\rangle \right)}$$

и

$$\min_{x \in \mathbf{X}} \Theta(x) = \underline{\Theta(\mathbf{X})} = \sum_{j=1}^n \langle \mathbf{X}_j \rangle.$$

Далее, помимо самих значений этих экстремумов мы можем найти и значения аргументов, их доставляющие, отследив какие из концов интервалов  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$  в результате операций над ними — сложения, вычитания, умножения, взятия модуля и мигнитуды — дают концы естественных интервальных расширений  $G(\mathbf{X})$  и  $H(\mathbf{X})$ . В итоге оценка решения задачи (11.45) может быть взята, к примеру, как максимум значений целевой функции  $\Phi(x)$

в центре бруса  $\mathbf{X}$ ,

в точке минимума знаменателя дроби  $\Theta(x)$ ,

в точке максимума числителя дроби  $\Psi(x)$ .

Обратимся теперь к более развитым методам решения оптимизационной задачи (11.45). Напомним

**Определение 11.7.1** [1] Пусть  $D$  — выпуклое множество в пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Функция  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  называется квазивогнутой, если для любых  $x, y \in D$  и  $0 \leq \lambda \leq 1$  имеет место

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{f(x), f(y)\}.$$

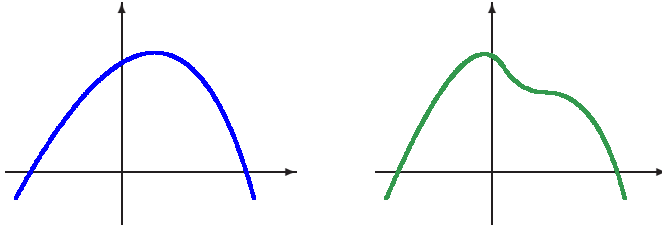


Рис. 11.11. Графики вогнутой и квазивогнутой функций.

Известно [1], что функция  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  квазивогнута тогда и только тогда, когда для любого  $\alpha \in \mathbb{R}$  её лебеговы множества

$$\{x \in D \mid f(x) \geq \alpha\}$$

являются выпуклыми (см. Рис. 11.11). Квазивогнутые функции, в частности, не могут иметь несколько отличающихся по величине локальных максимумов, и, найдя один локальный максимум такой функции, мы можем быть уверенными в его глобальности.

**Теорема 11.7.2** Пусть брус  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  не содержит начала координат. Множество  $X$  всех точек из  $X$ , на которых функция  $\Phi(x)$ , определяемая посредством (11.44), принимает неотрицательные значения, является выпуклым и  $\Phi(x)$  квазивогнута на  $X$ .

**Доказательство.** Для заданного фиксированного уровня  $\alpha \geq 0$  обозначим через

$$S_\alpha = \{x \in X \subset \mathbb{R}^n \mid \Phi(x) \geq \alpha\}$$

лебегово множество исследуемой функции  $\Phi(x)$ . В частности,  $S_0 = X$ .

Если  $S_\alpha$  пусто, то рассуждать не о чём. Если же  $S_\alpha \neq \emptyset$ , то пусть точки  $x', x''$  (не обязательно различные) принадлежат множеству  $S_\alpha$ , так что  $\Phi(x') \geq \alpha$ ,  $\Phi(x'') \geq \alpha$ . При этом

$$R - \left| M - \sum_{j=1}^n x'_j y_j \right| \geq \alpha \sum_{j=1}^n |x_j|,$$

$$R - \left| M - \sum_{j=1}^n x''_j y_j \right| \geq \alpha \sum_{j=1}^n |y_j|.$$

Взяв какое-нибудь значение  $\lambda \in [0, 1]$  и сложив выписанные неравенства с неотрицательными весами  $\lambda$  и  $(1 - \lambda)$ , получим неравенство-следствие того же смысла:

$$R - \lambda \left| M - \sum_{j=1}^n x'_j y_j \right| - (1 - \lambda) \left| M - \sum_{j=1}^n x''_j y_j \right| \geq \alpha \left( \lambda \sum_{j=1}^n |x'_j| + (1 - \lambda) \sum_{j=1}^n |x''_j| \right). \quad (11.46)$$

Далее, применяя неравенство треугольника для абсолютного значения, мы можем заменить левую часть неравенства (11.46) на бóльшую величину

$$R - \left| \lambda \left( M - \sum_{j=1}^n x'_j y_j \right) + (1 - \lambda) \left( M - \sum_{j=1}^n x''_j y_j \right) \right|,$$

а правую часть (11.46) можем заменить, в силу  $\alpha \geq 0$ , на меньшую величину

$$\alpha \left( \sum_{j=1}^n |\lambda x'_j + (1 - \lambda) x''_j| \right).$$

Окончательно имеем

$$R - \left| M - \sum_{j=1}^n (\lambda x'_j + (1 - \lambda) x''_j) y_j \right| \geq \alpha \left( \sum_{j=1}^n |\lambda x'_j + (1 - \lambda) x''_j| \right),$$

что равносильно

$$\Phi(\lambda x' + (1 - \lambda)x'') \geq \alpha.$$

Следовательно, точка  $\lambda x' + (1 - \lambda)x''$  также лежит во множестве  $S_\alpha$ , т. е. оно выпукло. Это и завершает доказательство теоремы. ■

Отметим, что условие неотрицательности значений  $\Phi(x)$  не является столь уж обременительным для применения доказанного результата, так как отрицательность  $\Phi(x)$  при всех  $x \in X$  возможна лишь в том малоинтересном для нас случае, когда точка-центр  $y$  не лежит во множестве решений. Это следует из того, что отрицательность  $\Phi(x)$  равносильна отрицательности числителя дроби (11.44) и, значит, «распознающего» функционала  $U_1$  в точке  $y$  (см. §5.5). При этом следует озаботиться лучшим выбором центра  $y$ .

Присутствие в выражении (11.44) модулей делает целевую функцию  $\Phi(x)$  негладкой, но она непрерывна и почти всюду дифференцируема на всей своей области определения. Таким образом, основываясь на квазивогнутости  $\Phi(x)$ , можно использовать для уточнения решения задачи (11.45) какие-нибудь градиентные методы условной оптимизации. К примеру, применим простейший метод проекции градиента

$$x^{(k+1)} \leftarrow x^{(k)} + \gamma^{(k)} \text{Pr}_X(\nabla\Phi(x^{(k)})), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (11.47)$$

где посредством  $\text{Pr}_{\mathbf{X}}$  обозначена проекция на брус  $\mathbf{X}$  и подходящим образом выбирается величина шага  $\gamma^{(k)} \in \mathbb{R}$  (см. [1] и другие книги по нелинейной оптимизации). Метод проекции градиента особенно удобен в нашей ситуации из-за линейного характера ограничений допустимой области, т. е. бруса  $\mathbf{X}$ . При этом компоненты градиента  $\nabla\Phi(x)$  целевой функции из (11.45) имеют, как нетрудно проверить (см. выкладки в конце §6.9), следующий вид

$$(\nabla\Phi(x))_i = \frac{y_i \cdot \text{sgn}\left(M - \sum_{j=1}^n x_j y_j\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n |x_j|\right) - \left(R - \left|M - \sum_{j=1}^n x_j y_j\right|\right) \cdot \text{sgn } x_i}{\left(\sum_{j=1}^n |x_j|\right)^2},$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Естественно, что в качестве начального приближения  $x^{(0)}$  для процесса (11.47) следует взять такое значение аргумента, на котором целевая функция неотрицательна. Как его найти?

Как следует из результатов §5.5, принадлежность точки  $y$  объединённому множеству решений  $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  эквивалентна

$$\text{Uni}(y, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left\langle \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} y_j \right\rangle \right\} \geq 0,$$

что, в свою очередь, равносильно справедливости такого же неравенства для отдельной рассматриваемой нами  $i$ -ой строки матрицы  $\mathbf{A}$ :

$$R - \left\langle M - \sum_{j=1}^n \mathbf{X}_j y_j \right\rangle \geq 0, \tag{11.48}$$

$R = \text{rad } \mathbf{b}_i$ ,  $M = \text{mid } \mathbf{b}_i$ . Поэтому для нахождения точки неотрицательности целевой функции  $\Phi$  нам нужно, подобно тому как это было рекомендовано в начале параграфа, отследить, на каких именно концах интервалов  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$  достигается значение выражения в левой части (11.48). Найденные числа как-раз таки и образуют искомый вектор начального приближения  $x^{(0)}$  для градиентного подъёма (11.47).

## Комментарий к Главе 11

Внутреннему оцениванию множеств решений интервальных уравнений и систем уравнений посвящено сравнительно небольшое количество работ. Помимо статей автора ему посвящены исследования Х. Бекка [19], А. Ноймайера [24], А.Ф. Бочкова и Т.В. Евтушенко [2].



**К §11.1.** Описанный в этом параграфе способ идентификации параметров системы по интервальным данным неявно основан на идее так называемого слабого согласования параметров и данных. Существует также сильное согласование параметров и данных, которое приводит к более практичным методам идентификации и часто более предпочтительно из-за свойств получаемых оценок (см. [17, 37]). Сильное согласование требует распознавания и оценивания допускового множества решений для интервальных систем уравнений, и соответствующие методы изложены в Главе 6.

**К §11.2.** Элегантный и практичный результат о возможности внутреннего оценивания объединённого множества решений ИСЛАУ с помощью формальных решений системы (11.6) был одновременно и независимо получен автором книги и Л.В. Куприяновой в 1993 году и впервые доложен на международной конференции INTERVAL'94 (г. Санкт-Петербург, 7–10 марта 1994 года). Простой вывод этого результата, предшествующий формулировке Теоремы 11.2.1, был найден автором позднее, во второй половине 90-х.

На возможность внутреннего оценивания допускового множества решений ИСЛАУ с помощью её формального решения (следствие к Теореме 11.2.2), по-видимому, впервые указывал В.С. Зюзин в работе [6] (которая была направлена в печать ещё в 1985-м году). Но сделано это было очень кратко (одним предложением) и в косвенной форме.

Обобщение формального подхода на внутреннее оценивание произвольных множеств АЕ-решений интервальных линейных систем было выполнено С.П. Шарым в работах [13, 30, 33].

**К §11.3.** Для нахождения формальных решений интервальных нелинейных систем уравнений можно порекомендовать решатели на основе техники распространения ограничений, например, [18].

Модельная система уравнений (11.21) была предложена А. Ноймайером в [24, 25].

**К §11.6.** Свойство «монотонности конфигурации» множеств решений ИСЛАУ с неотрицательными матрицами впервые было отмечено автором в [28].

Интервальная линейная система (11.34) предложена Э. Хансеном в [20] и вскоре стала популярным иллюстративным примером.

**К §11.7.** Результаты этого раздела впервые были представлены в [15] и затем в модифицированном виде в [36].

## Литература к Главе 11

- [1] БАЗАРА М., ШЕТТИ К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. – Москва: Мир, 1982.
- [2] Бочков А.Ф., Евтушенко Т.В. Один подход к выбору стационарных режимов технологических процессов в условиях неопределенности. – Москва, 1988. – 17 с. – Депонировано в ВИНТИ, №2891-В88.

- [3] Бочков А.Ф., Милевский М.В. Оценивание параметров модели для объектов с интервальной неопределенностью в выходных параметрах. – Москва, 1988. – 23 с. – Депонировано в ВИНТИ, №926-В88.
- [4] Вощинин А.П., Сотиров Г.Р. *Оптимизация в условиях неопределённости*. – Москва - София: Издательство МЭИ – Техника, 1989.
- [5] Добронев Б.С., Шайдуров В.В. *Двусторонние численные методы*. – Новосибирск: Наука, 1990.
- [6] Зюзин В.С. Об одном способе отыскания двусторонних интервальных приближений решения системы линейных интервальных уравнений // *Дифференциальные уравнения и теория функций*. – Саратов: Изд-во Саратовского университета, 1987. – С. 28–32.
- [7] Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ*. – Москва: Наука, 1984.
- [8] Коллатц Л. *Функциональный анализ и вычислительная математика*. – Москва: Мир, 1969.
- [9] Куржанский А. Б. Задача идентификации – теория гарантированных оценок // *Автоматика и Телемеханика*. – 1991. – №4. – С. 3–26.
- [10] Ортега Дж., Рейнболдт В. *Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными*. – Москва: Мир, 1975.
- [11] Шарая И.А. О максимальной внутренней оценке множеств решений интервальных линейных систем // *Вычислительные Технологии*. – 1998. – Т. 3, №2. – С. 55–66.
- [12] Шарый С.П. О характеристике объединенного множества решений интервальной линейной алгебраической системы. – Красноярск, 1990. – 20 с. – Депонировано в ВИНТИ, №726-В91.
- [13] Шарый С.П. Линейные статические системы с интервальной неопределённостью: эффективные алгоритмы для решения задач управления и стабилизации // *Вычислительные Технологии / Сборник научных трудов ИВТ СО РАН*. – Новосибирск, 1995. – Т. 4, №13. – С. 64–80.
- [14] Шарый С.П. Численное нахождение алгебраического решения интервальных линейных систем // *Дискретная математика*. – Красноярск: КГТУ, 1996. – С. 129–145.
- [15] Шарый С.П. Ещё раз о внутреннем оценивании множеств решений интервальных линейных систем // *Вычислительные Технологии*. – 2003. – Том 8, спец. выпуск. – С. 146–160.
- [16] Шарый С.П. Внутреннее оценивание множеств решений неотрицательных интервальных линейных систем // *Сибирский журнал вычислительной математики*. – 2006. – Т. 9, №2. – С. 189–206.
- [17] Шарый С.П. Сильная согласованность в задаче восстановления зависимостей при интервальной неопределённости данных // *Вычислительные Технологии*. – 2017. – Т. 22, №2. – С. 150–172.
- [18] VAVICHEV A.B., KADYROVA O.B., KASHEVAROVA T.P., LESHCHENKO A.S., SEMENOV A.L. UniCalc, a novel approach to solving systems of algebraic equations // *Interval Computations*. – 1993. – No. 2. – P. 29–47.
- [19] ВЕБЕК Н. Über die Struktur und Abschätzungen der Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen mit Intervalkoeffizienten // *Computing*. – 1972. – Vol. 10. – P. 231–244.
- [20] HANSEN E.R. On linear algebraic equations with interval coefficients // *Topics in Interval Analysis / Hansen E., ed.* – Oxford: Clarendon Press, 1969. – P. 35–46.

- [21] KUPRIYANOVA L. Inner estimation of the united solution set of interval linear algebraic system // *Reliable Computing*. – 1995. – Vol. 1, No. 1. – P. 15–31.
- [22] LAKEYEV A.V. Linear algebraic equations in Kaucher arithmetic // *International Journal of Reliable Computing. Supplement. Extended Abstracts of APIC'95, International Workshop on Applications of Interval Computations*. – El Paso, Texas, 1995. – P. 130–133.
- [23] LAKEYEV A.V. On the computational complexity of the solution of linear systems with moduli // *Reliable Computing*. – 1996. – Vol. 2, No. 2. – P. 125–131.
- [24] NEUMAIER A. Tolerance analysis with interval arithmetic // *Freiburger Intervall-Berichte*. – 1986. – No. 86/9. – S. 5–19.
- [25] NEUMAIER A. *Interval methods for systems of equations*. – Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [26] SAINZ M.Á., GARDEÑES E., JORBA L. Interval estimation of solution sets to real-valued systems of linear or non-linear equations // *Reliable Computing*. – 2002. – Vol. 8, No. 4. – P. 283–305.
- [27] SHARAYA I.A. On maximal inner estimation of the solution sets of linear systems with interval parameters // *Reliable Computing*. – 2001. – Vol. 7, No. 5. – P. 409–424.
- [28] SHARY S.P. Solving interval linear systems with nonnegative matrices // *Scientific Computations and Mathematical Modelling: Proceedings of the International Conference MMSC-93 / Markov S.M., ed.* – Sofia: DATECS Publishing, 1993. – P. 179–182.
- [29] SHARY S.P. Solving the tolerance problem for interval linear systems // *Interval Computations*. – 1994. – No. 2. – P. 6–26.
- [30] SHARY S.P. Linear static systems under interval uncertainty: Algorithms to solve control and stabilization problems // *International Journal of Reliable Computing. Supplement. Extended Abstracts of APIC'95, International Workshop on Applications of Interval Computations*. – El Paso, Texas, 1995. – P. 181–184.
- [31] SHARY S.P. Solving the linear interval tolerance problem // *Mathematics and Computers in Simulation*. – 1995. – Vol. 39. – P. 53–85.
- [32] SHARY S.P. Algebraic approach to the interval linear static identification, tolerance and control problems, or One more application of Kaucher arithmetic // *Reliable Computing*. – 1996. – Vol. 2, No. 1. – P. 3–33.
- [33] SHARY S.P. Algebraic solutions to interval linear equations and their applications // *Numerical Methods and Error Bounds / Alefeld G. and Herzberger J., eds.* – Berlin: Akademie Verlag, 1996. – P. 224–233.
- [34] SHARY S.P. A new technique in systems analysis under interval uncertainty and ambiguity // *Reliable Computing*. – 2002. – Vol. 8, No. 5. – P. 321–418.
- [35] SHARY S.P. On nonnegative interval linear systems and their solution // *Reliable Computing*. – 2011. – Vol. 15, No. 4. – P. 358–369.
- [36] SHARY S.P. A new method for inner estimation of solution sets to interval linear systems // *Modeling, Design, and Simulation of Systems with Uncertainties. Mathematical Engineering, Vol. 3 / A. Rauh and E. Auer, eds.* – Berlin-Heidelberg: Springer, 2011. – P. 21–42.
- [37] SHARY S.P. Weak and strong compatibility in data fitting problems under interval uncertainty // *Advances in Data Science and Adaptive Analysis*. – 2020. – Vol. 12, No. 1, 2050002.

## Глава 12

# Численное нахождение формальных решений

Эта глава посвящена нахождению формальных решений интервальных систем уравнений. Рассматриваются, главным образом, интервальные линейные системы, но некоторые из развиваемых методы применимы также к нелинейным системам.

Напомним, что нахождение формальных решений необходимо в задачах внутреннего и внешнего оценивания различных множеств решений интервальных систем уравнений (см. Главы 7, 10 и 11), а также во многих других вопросах интервального анализа. Помимо собственно численных методов в этой главе рассматриваются условия существования и единственности формальных решений, различные свойства операторов в интервальных пространствах и т. п. Одним из главных результатов этой части книги является *субдифференциальный метод Ньютона*, позволяющий эффективно находить формальные решения широких классов интервальных линейных систем уравнений.

### 12.1 Простые частные случаи

В этом параграфе мы рассмотрим нахождение формальных решений, во-первых, для простейших интервальных уравнений с одним неизвестным и, во-вторых, для треугольных интервальных линейных систем. Результаты двух этих простых частных случаев будут использоваться далее при построении более сложных вычислительных процедур.

Рассмотрим интервальное уравнение

$$c x = d, \tag{12.1}$$

в котором  $c, d \in \mathbb{KR}$ ,  $x$  — неизвестная интервальная переменная. Если  $0 \notin \text{pro } c$ , то его формальное решение в полной интервальной арифметике  $\mathbb{KR}$  всегда существует и однозначно определяется как  $d \oslash c$ . Если  $0 \in \text{pro } c$ , эта формула не работает, но формальные решения уравнения (12.1) всё же могут существовать. Из второй и четвёртой строк таблицы Кэли для умножения в полной интервальной арифме-

тике (Табл. 1.2, стр. 55) можно видеть, что необходимым условием существования решения в этом случае является принадлежность  $0 \in \text{pro } \mathbf{d}$ .

Если  $\mathbf{d} = 0$ , то формальным решением (12.1) при  $0 \in \mathbf{c}$  является любой содержащийся в нуле интервал, а при  $\mathbf{c} \subseteq [0, 0]$  — любой правильный нульсодержащий интервал. Единственности формального решения в этих случаях нет.

Тем не менее, при  $0 \in \text{pro } \mathbf{c}$  условие  $0 \in \text{pro } \mathbf{d}$  не является достаточным для существования формальных решений у (12.1). Так, например, интервальное уравнение  $[-1, 1]x = [-1, 2]$  не имеет формальных решений.

Интервальную систему линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{d} \quad (12.2)$$

с  $\mathbf{C} \in \mathbb{KR}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{d} \in \mathbb{KR}^n$ , мы называем *треугольной*, если матрица  $\mathbf{C} = (c_{ij})$  имеет треугольный вид, т. е. если  $c_{ij} = 0$  при  $i > j$  (верхняя треугольная матрица) либо при  $i < j$  (нижняя треугольная матрица). Формальные решения подобных систем уравнений легко могут быть найдены с помощью *прямой подстановки* или *обратной подстановки* (см. [25]).

Предположим для определённости, что матрица  $\mathbf{C}$  в системе (12.2) — верхняя треугольная. Формальное решение может быть найдено с помощью процедуры, аналогичной той, что выполняется как «обратный ход» в известном методе Гаусса. Именно, если  $0 \notin \text{pro } c_{ii}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , то алгоритм обратной подстановки имеет вид

```
DO FOR  $i = n$  TO 1 STEP (-1)

$$\mathbf{x}_i \leftarrow \left( \mathbf{d}_i \ominus \sum_{k>i} c_{ik}\mathbf{x}_k \right) \oslash c_{ii} .$$

END DO
```

(12.3)

Он совершенно аналогичен алгоритму обратной подстановки (7.3) из интервального метода Гаусса для ИСЛАУ, только операции вычитания и деления взяты в нём другими.

Если  $0 \in \text{pro } c_{ii}$  для некоторых  $i$ , то выписанный выше алгоритм не может быть выполнен из-за несуществования обратных  $\text{inv } c_{ii}$  и, как следствие, невозможности выполнить алгебраическое деление « $\oslash$ ». Это ещё не означает неразрешимости всей системы, так как соответствующее уравнение

$$c_{ii}x_i = \mathbf{d}_i \ominus \sum_{k>i} c_{ik}\mathbf{x}_k$$

может всё-таки иметь формальное решение относительно  $x_i$ . Необходимым условием этого, как мы видели в начале параграфа, является включение

$$0 \in \text{pro} \left( \mathbf{d}_i \ominus \sum_{k>i} c_{ik}\mathbf{x}_k \right),$$

т. е. присутствие нуля в правильной проекции правой части, хотя при этом однозначной разрешимости может не быть. Далее мы будем стремиться избегать подобных ситуаций.

## 12.2 Погружение в линейное пространство

### 12.2а Мотивации погружения

Возвратимся к формальному подходу для решения задач внешнего и внутреннего оценивания множеств решений ИСЛАУ. Задача внешнего интервального оценивания (5.24) была сведена нами к нахождению формальных решений интервальных уравнений вида

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{d},$$

а задача внутреннего интервального оценивания (5.23) свелась к нахождению формальных решений интервальных уравнений вида

$$\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{d}.$$

Их интервальная матрица  $\mathbf{C}$  и интервальный вектор  $\mathbf{d}$  образованы из элементов полной интервальной арифметики Каухера  $\mathbb{KR}$ . В этой арифметике выписанные уравнения равносильны уравнениям

$$\mathbf{C}\mathbf{x} \ominus \mathbf{x} + \mathbf{d} = 0 \tag{12.4}$$

и

$$\mathbf{C}\mathbf{x} \ominus \mathbf{d} = 0 \tag{12.5}$$

соответственно. Аналогичным образом задачи внешнего и внутреннего оценивания множеств решений общих нелинейных интервальных систем также сводятся к вычислению формальных решений некоторых специальных интервальных уравнений вида (10.33) и (11.9)–(11.11) (см., например, [32]).

Как уже отмечалось, задачи нахождения формальных решений интервальных уравнений — это, по существу, традиционные математические задачи решения некоторых уравнений, и решению подобных задач посвящена бóльшая часть классического численного анализа. Но особенность нашей ситуации состоит в том, что основное множество  $\mathbb{KR}^n$ , на котором рассматриваются решаемые уравнения, совсем не является линейным пространством: отсутствие дистрибутивности в интервальной арифметике ведёт к нарушению той аксиомы линейного пространства, которая требует выполнения тождества

$$(\mu + \nu)\mathbf{x} = \mu\mathbf{x} + \nu\mathbf{x}$$

для всех  $\mathbf{x} \in \mathbb{KR}^n$  и любых скаляров  $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ . Таким образом, большинство из существующих подходов к исследованию операторных уравнений и к вычислению их решений не применимы напрямую к нашей задаче.

Более того, оставаясь в интервальном пространстве  $\mathbb{KR}^n$ , мы не сможем выполнить теоретический анализ ситуации и понять некоторые явления. Например, точечная матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{12.6}$$

— неособенная (невырожденная) в смысле классической линейной алгебры, но умножение на эту матрицу в  $\mathbb{K}\mathbb{R}^2$  может занулить даже ненулевой вектор:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [1, -1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В чём причина? Едва ли возможно обнаружить её изнутри интервального пространства, которое является существенно нелинейным. И так, имеется настоятельная потребность перенести наши рассуждения в некоторое *линейное пространство*, которое мы обозначим для общности через  $U$ . Предполагаем также, что на  $U$  задана некоторая топология, согласованная с линейной структурой.

С абстрактной математической точки зрения мы имеем два различных пространства, — интервальное пространство  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$  и линейное пространство  $U$ , — на которых заданы существенно разные алгебраические структуры; каким образом возможно перейти из первого во второе? Мы собираемся сделать это способом, родственным обычной замене переменных, который определяется в следующем пункте и будет называться в зависимости от своих свойств *вложением* или *погружением*.

## 12.26 Определения и основные свойства

Переход из интервального пространства  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$  в линейное пространство  $U$  означает, что мы задаём некоторое отображение

$$\iota : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow U.$$

Оно должно быть *биективным* (биекцией), т. е. взаимно однозначным отображением  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$  на всё  $U$ , чтобы корректно восстанавливать интервальный прообраз по его образу в  $U$  и наоборот. Будем называть такие отображения *вложениями*  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$  в  $U$ .

**Пример 12.2.1** Отображение  $\mathbb{K}\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , при котором мы сопоставляем интервалу  $\mathbf{a}$  пару чисел  $(\underline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{a}})^\top$ , составленную из нижнего и верхнего концов этого интервала, является, очевидно, вложением согласно нашей терминологии.

Аналогично, вложением является отображение, при котором интервалу  $\mathbf{a}$  сопоставляется пара  $(\underline{\mathbf{a}} + 5, \overline{\mathbf{a}} + 5)^\top$ .

Отображения, задаваемые как

$$\iota(\mathbf{a}) = (\underline{\mathbf{a}}, (\overline{\mathbf{a}})^3)^\top \quad \text{или} \quad \iota(\mathbf{a}) = (\arctan \underline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{a}})^\top$$

также являются вложениями  $\mathbb{K}\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , поскольку оба взаимно-однозначны.

Интуитивно понятно, что два последние вложения обладают некоторой «неестественностью», фактически, нелинейностью, которая может осложнить работу с ними. Недостаток второго вложения — странный сдвиг нуля, при котором нулевому интервалу соответствует пара чисел  $(5, 5)$ , а нулевой паре  $(0, 0)$  — интервал  $[-5, -5]$ . Первое вложение является наилучшим, так как бережно сохраняет и переводит друг в друга существующие на  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$  и  $U$  структуры. Ниже мы обсудим, как формально можно учесть это требование к вложению. ■

Всякая биекция  $\iota : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow U$  порождает также биекцию из множества всех отображений  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$  в себя на множество всех отображений  $U$  в себя. Более точно, каждому  $\varphi : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$  сопоставляется единственное отображение

$$\iota \circ \varphi \circ \iota^{-1} : U \rightarrow U, \quad (12.7)$$

где « $\circ$ » обозначает композицию отображений.

**Определение 12.2.1** Для интервального отображения  $\varphi$  и некоторого фиксированного вложения  $\iota : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow U$  мы будем называть отображение линейного пространства  $U$  в себя, задаваемое посредством (12.7), индуцированным отображением для  $\varphi$  (или, развёрнуто,  $\iota$ -индуцированным).

Наглядно ситуация представляется коммутативной диаграммой на Рис. 12.1.

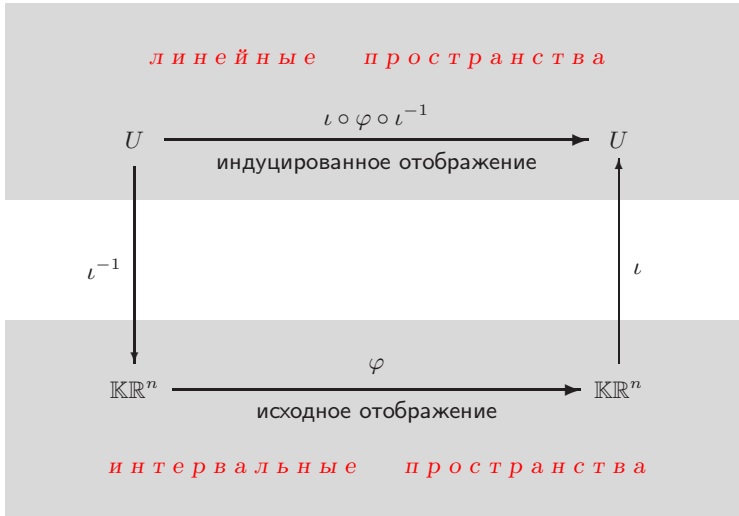


Рис. 12.1. Как вложение  $\iota$  порождает индуцированное отображение.

Свойства отображений  $\varphi$  и  $(\iota \circ \varphi \circ \iota^{-1})$  оказываются тесно связанными, так что вместо исследования  $\varphi$  в интервальном пространстве  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$  можно исследовать индуцированное им отображение  $(\iota \circ \varphi \circ \iota^{-1})$  в линейном пространстве. Более того, мы можем заменить задачу решения уравнения в  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$  на задачу решения уравнения в линейном пространстве  $U$ , придя к ситуации, более привычной для современного численного анализа.

**Определение 12.2.2** Пусть в интервальном пространстве  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$  задано уравнение

$$\varphi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}), \quad (12.8)$$

где  $\varphi, \psi : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$  — некоторые отображения, а также фиксировано вложение  $\iota : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow U$ . Будем называть индуцированным уравнением для (12.8) такое



уравнение

$$\Phi(y) = \Psi(y)$$

в линейном пространстве  $U$ , что  $\Phi$  и  $\Psi$  являются индуцированными отображениями для  $\varphi$  и  $\psi$  соответственно, т. е.  $\Phi = \iota \circ \varphi \circ \iota^{-1}$  и  $\Psi = \iota \circ \psi \circ \iota^{-1}$ .

Таким образом, исходное интервальное уравнение

$$\varphi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) \quad (12.9)$$

имеет формальное решение  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n$  тогда и только тогда, когда индуцированное уравнение

$$\Phi(y) = \Psi(y)$$

имеет решение  $y^* \in U$ . При этом искомое формальное интервальное решение  $\mathbf{x}^*$  для (12.9) однозначно восстанавливается по  $y^*$  из соотношения

$$\mathbf{x}^* = \iota^{-1}(y^*).$$

В интересующей нас конкретной ситуации с уравнениями (12.4) и (12.5) мы можем заменить исходную задачу — нахождение решений уравнений

$$f(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{и} \quad g(\mathbf{x}) = 0,$$

таких что

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{C}\mathbf{x} \ominus \mathbf{x} + \mathbf{d} \quad \text{и} \quad g(\mathbf{x}) = \mathbf{C}\mathbf{x} \ominus \mathbf{d}$$

— на задачу решения уравнений

$$\mathcal{F}(y) = \iota(0) \quad \text{и} \quad \mathcal{G}(y) = \iota(0)$$

в линейном пространстве  $U$  с индуцированными отображениями

$$\mathcal{F} = \iota \circ f \circ \iota^{-1} : U \rightarrow U \quad \text{и} \quad \mathcal{G} = \iota \circ g \circ \iota^{-1} : U \rightarrow U,$$

определяемыми как

$$\mathcal{F}(y) = \iota(\mathbf{C}\iota^{-1}(y) \ominus \iota^{-1}(y) + \mathbf{d}) \quad \text{и} \quad \mathcal{G}(y) = \iota(\mathbf{C}\iota^{-1}(y) \ominus \mathbf{d})$$

соответственно.

Более общее соображение. Поскольку  $\iota$  и  $\iota^{-1}$  — биекции, то обратимость любого отображения  $\varphi$  на интервальном пространстве равносильна обратимости  $\iota$ -индуцированного отображения  $\Phi := \iota \circ \varphi \circ \iota^{-1}$ , действующего на линейном пространстве  $U$ . При этом

$$\varphi^{-1} = \iota^{-1} \circ \Phi^{-1} \circ \iota. \quad (12.10)$$

Основной вопрос, касающийся построения вложения интервального пространства в линейное пространство, заключается в выборе разумного компромисса между простотой этого отображения и удобной формой индуцированных отображений (12.7). Среди всех биективных вложений  $\iota : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow U$  мы выделим специальные вложения, которые

- 1) сохраняют аддитивную алгебраическую структуру  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ , т.е. такие, что  $\iota(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \iota(\mathbf{u}) + \iota(\mathbf{v})$  для любых  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n$ ,
- 2) сохраняют топологическую структуру  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ , т.е. такие, что само отображение  $\iota : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow U$  и его обратное  $\iota^{-1} : U \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$  являются непрерывными.

Вложения  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow U$ , удовлетворяющие двум выписанным условиям, мы будем называть *погружениями* интервального пространства  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$  в линейное пространство  $U$ . Таким образом, формально мы принимаем следующее

**Определение 12.2.3** [33]. Пусть  $U$  — линейное пространство. Биективное отображение  $\iota : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow U$  будем называть погружением  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$  в  $U$ , если оно удовлетворяет следующим свойствам:

- (1)  $\iota$  есть изоморфизм аддитивных групп  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$  и  $U$ ,
- (2)  $\iota$  есть гомеоморфизм топологических пространств  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$  и  $U$ .

Например, если интервалу  $\mathbf{v} \in \mathbb{K}\mathbb{R}$  сопоставить пару чисел  $(\underline{\mathbf{v}}, \overline{\mathbf{v}}) \in \mathbb{R}^2$ , т.е. его концы, «забыв» об их интервальном смысле, то задаваемое таким образом отображение  $\mathbb{K}\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  является погружением. Приведённый пример в некотором смысле типичен, так как, привлекая соображения размерности, нетрудно показать, что Определением 12.2.3 линейное пространство  $U$  задаётся однозначно:  $U$  должно быть евклидовым пространством  $\mathbb{R}^{2n}$ . Этот факт хорошо согласуется с аналитической интуицией, и мы не приводим здесь его строгого обоснования, чтобы не перегружать и без того разросшийся текст книги. Цель настоящего подготовительного параграфа — исследование простейших свойств погружений, которые понадобятся нам в дальнейшем при изучении индуцированных уравнений.

Обозначим через  $0_{\mathbb{K}\mathbb{R}^n}$  и  $0_{\mathbb{R}^{2n}}$  нулевые векторы в пространствах  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$  и  $\mathbb{R}^{2n}$  соответственно. Из Определения 12.2.3 немедленно следует, что для любого погружения  $\iota : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  мы имеем

$$\begin{aligned} \iota(0_{\mathbb{K}\mathbb{R}^n}) &= 0_{\mathbb{R}^{2n}}, \\ \iota(\text{орр } \mathbf{x}) &= -\iota(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (12.11)$$

тогда как

$$\iota(\mathbf{x}) \neq 0 \text{ в } \mathbb{R}^{2n} \iff \mathbf{x} \neq 0 \text{ в } \mathbb{K}\mathbb{R}^n.$$

Кроме того, обратное погружению отображение  $\iota^{-1} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$  также удовлетворяет условиям, аналогичным (1)–(2) из Определения 12.2.3, и

$$\begin{aligned} \iota^{-1}(0_{\mathbb{R}^{2n}}) &= 0_{\mathbb{K}\mathbb{R}^n}, \\ \iota^{-1}(-x) &= \text{орр } \iota^{-1}(x), \quad x \in \mathbb{R}^{2n}. \end{aligned} \quad (12.12)$$

**Предложение 12.2.1** Погружение является положительно-однородным отображением, т.е.

$$\iota(\lambda \mathbf{x}) = \lambda \iota(\mathbf{x}) \quad \text{для всех } \mathbf{x} \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n \text{ и } \lambda \geq 0.$$

Отображение  $\mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$ , обратное к погружению, также положительно одно-одно.

**Доказательство** является стандартным. Пусть  $\mathbf{x} \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n$ . Если  $\lambda = k$  — натуральное число, то

$$\iota(k\mathbf{x}) = \iota(\underbrace{\mathbf{x} + \mathbf{x} + \cdots + \mathbf{x}}_k) = k\iota(\mathbf{x}).$$

Если  $\lambda = 1/l$  для некоторого натурального  $l$ , то из

$$l\iota(\lambda\mathbf{x}) = \underbrace{\iota(\lambda\mathbf{x}) + \iota(\lambda\mathbf{x}) + \cdots + \iota(\lambda\mathbf{x})}_l = \iota(l\lambda\mathbf{x}) = \iota(\mathbf{x})$$

следует

$$\iota(\lambda\mathbf{x}) = l^{-1}\iota(\mathbf{x}) = \lambda\iota(\mathbf{x}).$$

Если  $\lambda = k/l$  для натуральных  $k$  и  $l$ , то, пользуясь уже рассмотренными случаями, получим

$$\iota(\lambda\mathbf{x}) = \iota\left(\frac{k}{l}\mathbf{x}\right) = k\iota\left(\frac{1}{l}\mathbf{x}\right) = \frac{k}{l}\iota(\mathbf{x}) = \lambda\iota(\mathbf{x}).$$

Следовательно, равенство  $\iota(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\iota(\mathbf{x})$  верно для всех неотрицательных рациональных  $\lambda$ . Распространение его на все неотрицательные вещественные числа можно осуществить путём предельного перехода, используя непрерывность  $\iota$ .

Доказательство для отображения, обратного к погружению, выполняется аналогичным образом. ■

**Предложение 12.2.2** Если  $\iota : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  — погружение, а  $T$  — неособенное линейное преобразование пространства  $\mathbb{R}^{2n}$ , то  $(T \circ \iota)$  также является погружением. Обратно, любое другое погружение  $\varkappa : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  может быть представлено в виде  $(T \circ \iota)$  для некоторого неособенного линейного преобразования  $T : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ .

**Доказательство.** Первая часть Предложения обосновывается тривиально.

Чтобы доказать вторую часть, рассмотрим отображение  $(\varkappa \circ \iota^{-1})$ . Будучи композицией двух изоморфизмов, оно является автоморфизмом аддитивной группы линейного пространства  $\mathbb{R}^{2n}$ , а в силу Предложения 12.2.1 это отображение ещё и положительно однородно. Кроме того, при любом  $x \in \mathbb{R}^{2n}$

$$(\varkappa \circ \iota^{-1})(x - x) = 0_{\mathbb{R}^{2n}} = (\varkappa \circ \iota^{-1})(x) + (\varkappa \circ \iota^{-1})(-x)$$

влечёт

$$(\varkappa \circ \iota^{-1})(-x) = -(\varkappa \circ \iota^{-1})(x),$$

откуда следует однородность  $(\varkappa \circ \iota^{-1})$  относительно умножения на отрицательные числа.

Таким образом, в целом отображение  $\varkappa \circ \iota^{-1}$  оказывается неособенным линейным преобразованием пространства  $\mathbb{R}^{2n}$ . Мы можем поэтому взять  $T = \varkappa \circ \iota^{-1}$ . ■

## 12.2в Стандартное погружение

Из Предложения 12.2.2 следует, что любые два погружения  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}^{2n}$ , удовлетворяющие Определению 12.2.3, одинаковы с точностью до неособенного линейного преобразования  $\mathbb{R}^{2n}$ . В действительности, выбор удобного погружения оказывается ещё более стеснённым, так как в интервальном анализе помимо алгебраических свойств, учитываемых Определением 12.2.3, важнейшую роль играет структура частичного порядка по включению. Она также должна «хорошо» переноситься погружением из  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}^{2n}$ .

Всякое погружение  $\iota : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  естественно порождает на линейном пространстве  $\mathbb{R}^{2n}$  некоторый частичный порядок « $\sqsubseteq$ » — образ порядка по включению « $\subseteq$ » на  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$  при погружении  $\iota$ , а именно,

$$\begin{aligned} x \sqsubseteq y, \text{ т. е. } \langle x \text{ не превосходит } y \rangle \text{ в } \mathbb{R}^{2n} \\ \Updownarrow \\ \iota^{-1}(x) \subseteq \iota^{-1}(y) \text{ в } \mathbb{K}\mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (12.13)$$

**Определение 12.2.4** Частичный порядок « $\sqsubseteq$ » на  $\mathbb{R}^{2n}$ , определяемый посредством (12.13), мы назовём индуцированным частичным порядком.

Для любых  $x, y, u, v \in \mathbb{R}^{2n}$ , очевидно, имеет место

$$\begin{aligned} x \sqsubseteq y, \alpha \geq 0 &\Rightarrow \alpha x \sqsubseteq \alpha y, \\ x \sqsubseteq y, u \sqsubseteq v &\Rightarrow x + u \sqsubseteq y + v, \end{aligned}$$

и в таких случаях говорят, что частичный порядок « $\sqsubseteq$ » согласован с линейной структурой на  $\mathbb{R}^{2n}$  [1, 10]. Как следствие, этот частичный порядок эквивалентным образом может быть задан путём указания так называемого конуса положительных элементов, т. е. множества  $K_{\sqsubseteq} = \{x \in \mathbb{R}^{2n} \mid 0 \sqsubseteq x\}$  [1, 13, 15].

Напомним, что конусом в линейном топологическом пространстве называется замкнутое выпуклое положительно инвариантное множество, не содержащее никакого одномерного подпространства. Как известно, в частично упорядоченном линейном пространстве, где порядок согласован с линейной структурой, множество положительных элементов является конусом. И наоборот, задание конуса  $K_{\sqsubseteq}$  однозначно определяет частичное упорядочение пространства, при котором

$$x \sqsubseteq y \iff y - x \in K_{\sqsubseteq}.$$

Ясно, что конкретные формулы, определяющие индуцированный порядок « $\sqsubseteq$ », зависят от вида погружения  $\iota$ . Но на евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^{2n}$  простейшим и наиболее удобным является задание порядка покомпонентным образом, когда

$$x \leq y \iff x_i \leq y_i, \quad i = 1, 2, \dots, 2n. \quad (12.14)$$

Соответственно, конусом положительных элементов при таком упорядочении  $\mathbb{R}^{2n}$  является множество

$$K_{\leq} = \{x \in \mathbb{R}^{2n} \mid x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 2n\}$$

— положительный ортант пространства  $\mathbb{R}^{2n}$ . Естественно поэтому потребовать от погружения, чтобы индуцированный им порядок (12.13) совпадал с этим простейшим покомпонентным порядком (12.14), т. е. чтобы

$$x \sqsubseteq y \iff x \leq y \text{ в покомпонентном смысле.} \quad (12.15)$$

Для какого погружения  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  это возможно?

Нетрудно понять, что требуемым погружением является так называемое *стандартное погружение*, впервые введённое в работе [33]:

**Определение 12.2.5** Погружение  $\text{sti} : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ , которое действует по правилу

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) \mapsto (-\underline{\mathbf{x}}_1, -\underline{\mathbf{x}}_2, \dots, -\underline{\mathbf{x}}_n, \overline{\mathbf{x}}_1, \overline{\mathbf{x}}_2, \dots, \overline{\mathbf{x}}_n), \quad (12.16)$$

т. е. такое, при котором взятые с противоположным знаком левые концы интервалов  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  становятся первой, второй, ...,  $n$ -ой компонентами точечного  $2n$ -вектора, а правые концы интервалов  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  становятся  $(n+1)$ -ой, ...,  $2n$ -ой компонентами точечного  $2n$ -вектора соответственно, будем называть стандартным погружением интервального пространства  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}^{2n}$ .

**Следствие.** Из определения (12.13) индуцированного порядка на  $\mathbb{R}^{2n}$  и требования (12.15) к стандартному погружению  $\text{sti}$  легко вывести, что

$$\text{sti} \left( \bigvee_{\vartheta \in \Theta} \mathbf{x}_\vartheta \right) = \text{sti} \left( \sup_{\vartheta \in \Theta} \subseteq \mathbf{x}_\vartheta \right) = \sup_{\vartheta \in \Theta} \leq \text{sti}(\mathbf{x}_\vartheta) \quad (12.17)$$

для любого ограниченного семейства интервальных векторов  $\{\mathbf{x}_\vartheta \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n \mid \vartheta \in \Theta\}$ , где  $\Theta$  — некоторое индексное множество. Таким образом, стандартное погружение переводит супремумы по включению на интервальном пространстве  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$  в супремумы относительно покомпонентного порядка на  $\mathbb{R}^{2n}$ . Аналогичное утверждение справедливо и для инфимумов.

Итак, факт совпадения индуцированного частичного порядка на линейном пространстве  $\mathbb{R}^{2n}$  с обычным покомпонентным упорядочением и, как следствие, упрощение выкладок и рассуждений являются главным оправданием выбранного нами вида (12.16) для погружения, названного стандартным. Более того, вышеизложенное достаточно веско свидетельствует в пользу того, чтобы далее в теоретической части нашей работы рассматривать лишь стандартное погружение вида (12.16), хотя иногда практически полезными могут оказаться и другие погружения. Например, при компьютерной реализации описываемых в этой книге алгоритмов автор нередко использовал простейшее погружение

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) \mapsto (\underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \dots, \underline{\mathbf{x}}_n, \overline{\mathbf{x}}_1, \overline{\mathbf{x}}_2, \dots, \overline{\mathbf{x}}_n)$$

которое более удобно при практическом программировании и т. п.

Полезно дать методологический комментарий по поводу содержания этого и предшествующих пунктов. Приём отождествления концов интервала или интервального вектора с компонентами точечного вектора в евклидовом пространстве удвоенной

размерности нередко применялся исследователями. Но мы выделили процедуру этого отождествления в отдельное понятие — погружение  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  — и предприняли его тщательное исследование. С какой целью? Нельзя ли было обойтись без «лишних абстракций»?

Помимо того, что явное и осознанное оперирование с любым объектом всегда более предпочтительно, чем неявное, «по умолчанию», имеются, по крайней мере, ещё две причины того, чтобы рассматривать погружение в качестве самостоятельного понятия:

- 1) отображение  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  не может быть определено раз и навсегда единственным образом, который был бы наиболее удобен (естественен и т. п.) для всех возможных практических ситуаций;
- 2) мы можем получить ощутимую выгоду от этой неединственности, т. е. наиболее полно использовать особенности того или иного погружения в каждом конкретном случае.

Как легко видеть, оба этих довода действительно применимы в рассматриваемых обстоятельствах.

## 12.2г Знаково-блочная матрица

**Теорема 12.2.1** Пусть  $\iota : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  — погружение и  $\phi : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$  — оператор умножения на точечную квадратную матрицу в пространстве  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ , т. е.

$$\phi(\mathbf{x}) = Q\mathbf{x}$$

для некоторой  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Q = (q_{ij})$ . Тогда индуцированное отображение  $(\iota \circ \phi \circ \iota^{-1})$  является линейным преобразованием пространства  $\mathbb{R}^{2n}$ .

Для стандартного погружения  $\text{sti}$  матрица этого индуцированного линейного преобразования  $(\text{sti} \circ \phi \circ \text{sti}^{-1})$  является блочной  $2n \times 2n$ -матрицей вида

$$\left( \begin{array}{c|c} Q^+ & Q^- \\ \hline Q^- & Q^+ \end{array} \right), \quad (12.18)$$

где  $n \times n$ -подматрицы  $Q^+ = (q_{ij}^+)$  и  $Q^- = (q_{ij}^-)$  — это положительная и отрицательная части  $Q$ , т. е. матрицы образованные положительными и отрицательными частями элементов  $Q$  соответственно, где  $q_{ij}^+ = \max\{q_{ij}, 0\}$  и  $q_{ij}^- = \max\{-q_{ij}, 0\}$ .

**Доказательство.** Для того, чтобы обосновать первое утверждение Теоремы, нам нужно установить аддитивность и однородность отображения

$$\iota \circ \phi \circ \iota^{-1} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}.$$

Аддитивность  $\phi$  немедленно вытекает из соотношения дистрибутивности

$$q \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = q \cdot \mathbf{x} + q \cdot \mathbf{y},$$

справедливого при точечных  $q$  для любых интервалов  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{KR}$ . Погружение  $\iota$  и обратное к нему отображение  $\iota^{-1}$  также аддитивны. Следовательно, индуцированное отображение  $\iota \circ \phi \circ \iota^{-1}$  аддитивно как композиция аддитивных.

Далее, оператор  $\phi$  умножения на матрицу однороден, а погружение  $\iota$  и обратное к нему отображение  $\iota^{-1}$  положительно однородны в силу Предложения 12.2.1. Поэтому композиция  $\iota \circ \phi \circ \iota^{-1}$  по меньшей мере положительно однородна. Кроме того, для любого  $x \in \mathbb{R}^{2n}$  справедливо

$$\begin{aligned} (\iota \circ \phi \circ \iota^{-1})(-x) &= (\iota \circ \phi)(\text{opp } \iota^{-1}(x)) && \text{в силу (12.12)} \\ &= \iota(\text{opp } (\phi \circ \iota^{-1})(x)) && \text{в соответствии} \\ & && \text{с определениями} \\ & && \text{(1.65) и (1.63)} \\ &= -(\iota \circ \phi \circ \iota^{-1})(x) && \text{в силу (12.11),} \end{aligned}$$

что доказывает однородность индуцированного отображения  $\iota \circ \phi \circ \iota^{-1}$  относительно умножения на любые скаляры.

Второе утверждение Теоремы — это следствие определения стандартного погружения (12.16) и правила (1.65) умножения числа на интервал:

$$q \cdot \mathbf{x} = \begin{cases} [q \underline{\mathbf{x}}, q \overline{\mathbf{x}}], & \text{если } q \geq 0, \\ [q \overline{\mathbf{x}}, q \underline{\mathbf{x}}], & \text{если } q \leq 0. \end{cases}$$

Удобно придать ему следующую равносильную форму

$$\begin{cases} \frac{q \cdot \mathbf{x}}{q \cdot \mathbf{x}} = q^+ \underline{\mathbf{x}} - q^- \overline{\mathbf{x}}, \\ \frac{q \cdot \mathbf{x}}{q \cdot \mathbf{x}} = -q^- \underline{\mathbf{x}} + q^+ \overline{\mathbf{x}}, \end{cases}$$

которая в матрично-векторном виде выглядит так:

$$\begin{pmatrix} -q \cdot \mathbf{x} \\ \overline{q \cdot \mathbf{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^+ & q^- \\ q^- & q^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\underline{\mathbf{x}} \\ \overline{\mathbf{x}} \end{pmatrix}.$$

Отсюда хорошо видно, что матрица (12.18) получается из выписанной  $2 \times 2$ -матрицы с помощью распространения по строкам и столбцам. ■

Блочная  $2n \times 2n$ -матрица из Теоремы 12.2.1 настолько важна в развиваемой нами теории, что мы введём для неё своё название и специальное обозначение.

**Определение 12.2.6** Для точечной  $n \times n$ -матрицы  $Q$  будем называть точечную  $2n \times 2n$ -матрицу  $Q^\sim$ , задаваемую как

$$Q^\sim := \left( \begin{array}{c|c} Q^+ & Q^- \\ \hline Q^- & Q^+ \end{array} \right), \quad (12.18)$$

знаково-блочной матрицей для  $Q$ .

Важная особенность знаково-блочной матрицы  $Q^\sim \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  состоит в том, что она всегда *неотрицательна*: такая матрица должна соответствовать « $\leq$ »-изотонному оператору на  $\mathbb{R}^{2n}$ , индуцированному изотонным по включению умножением на  $Q$  в интервальном пространстве  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ .

**Следствие** из Теоремы 12.2.1. Привлекая определение индуцированного отображения нетрудно заключить, что для любой точечной  $n \times n$ -матрицы  $Q$  и любого  $x \in \mathbb{R}^{2n}$  справедливо

$$\text{sti}(Q \cdot \text{sti}^{-1}(x)) = Q^\sim x. \quad (12.19)$$

Аналогично, для любой точечной  $n \times n$ -матрицы  $Q$  и любого интервального вектора  $\mathbf{x} \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n$  имеет место

$$Q\mathbf{x} = \text{sti}^{-1}(Q^\sim \cdot \text{sti}(\mathbf{x})) \quad (12.20)$$

(наглядно соотношения (12.19) и (12.20) иллюстрируются коммутативной диаграммой, изображённой на Рис. 12.1, стр. 599).

## 12.2д Абсолютно регулярные матрицы

**Теорема 12.2.2** Для точечной  $n \times n$ -матрицы  $Q$  следующие условия равносильны:

- (а)  $Q\mathbf{x} = 0$  в интервальном пространстве  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$  тогда и только тогда, когда  $\mathbf{x} = 0$ ;
- (б) знаково-блочная матрица  $Q^\sim \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  для  $Q$  является неособенной;
- (в) неособенными являются как сама матрица  $Q$ , так и её модуль  $|Q|$  (т. е. матрица, образованная модулями элементов  $Q$ ).

**Доказательство.** Равносильность (а)  $\Leftrightarrow$  (б) является следствием представления (12.20).

Для доказательства равносильности условий (б) и (в) выполним со знаково-блочной матрицей  $Q^\sim$  следующие преобразования. К её  $(n+1)$ -ой строке прибавим первую строку, к  $(n+2)$ -ой — вторую и т. д. до  $2n$ -ой строки включительно, к которой мы прибавляем  $n$ -ую строку матрицы  $Q^\sim$ . Поскольку

$$q^+ + q^- = |q|$$

для любого вещественного числа  $q$ , то в результате проделанных преобразований мы получим  $2n \times 2n$ -матрицу

$$\begin{pmatrix} Q^+ & Q^- \\ |Q| & |Q| \end{pmatrix}. \quad (12.21)$$

Далее, вычтем из первого столбца получившейся матрицы (12.21) её  $(n+1)$ -ый столбец, из второго —  $(n+2)$ -ой и т. д. до  $n$ -го включительно, из которого вычтем последний  $2n$ -ый столбец. Поскольку

$$q^+ - q^- = q$$



для любого вещественного числа  $q$ , то мы получим блочно-треугольную  $2n \times 2n$ -матрицу

$$\begin{pmatrix} Q & Q^{-} \\ 0 & |Q| \end{pmatrix}. \quad (12.22)$$

Как известно из линейной алгебры, проделанные нами преобразования (линейное комбинирование строк и столбцов) не изменяют свойство матрицы быть особенной или неособенной (см., например, [18]). Следовательно, матрица (12.22) особенна или неособенна одновременно со знаково-блочной матрицей  $Q^{-}$ . Но в силу специального вида матрицы (12.22) её определитель равен произведению определителей матриц  $Q$  и  $|Q|$ . Таким образом, знаково-блочная матрица  $Q^{-}$  для матрицы  $Q$  неособенна действительно тогда и только тогда, когда неособенны обе матрицы  $Q$  и  $|Q|$ . ■

Мы уже отмечали, что неособенность (невырожденность) точечной матрицы  $Q$  в смысле классической линейной алгебры не обязательно влечёт то, что соответствующий оператор умножения на  $Q$  в  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$  обратим. Но теперь феномен матрицы (12.6) и ей подобных получает полное объяснение: хотя сами такие матрицы могут быть и неособенными, но умножение на них после погружения в линейное пространство соответствует умножению на их знаково-блочные матрицы, которые уже особенны. Например, для матрицы (12.6) знаково-блочной матрицей является

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (12.23)$$

и её определитель нулевой!

Результат Теоремы 12.2.2 позволяет сформулировать следующее

**Определение 12.2.7** *Точечная  $n \times n$ -матрица  $Q$ , удовлетворяющая какому-нибудь (а значит и любому) из равносильных условий (а)–(в) Теоремы 12.2.2, называется абсолютно регулярной (абсолютно неособенной).*

К примеру, единичная матрица — абсолютно регулярная, тогда как матрица (12.6) неособенна (регулярна) в обычном смысле, но не является абсолютно регулярной. Очевидно также, что если матрица особенна в обычном смысле, то она тем более не является абсолютно регулярной. Все неотрицательные неособенные матрицы также являются абсолютно регулярными. Практически удобный критерий для проверки абсолютной регулярности матрицы даёт условие (в) из Теоремы 12.2.2. Например, вместо вычисления определителя знаково-блочной матрицы (12.23) для матрицы (12.6) можно было бы просто заметить особенность матрицы модулей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Следствие** из Теорем 12.2.1 и 12.2.2. Оператор  $\phi : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$ , задаваемый умножением на квадратную точечную матрицу в  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ , т. е. такой что

$$\phi(\mathbf{x}) = Q\mathbf{x} \quad \text{для некоторой } Q \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

обратим тогда и только тогда, когда матрица  $Q$  является абсолютно регулярной. При этом обратный оператор  $\phi^{-1} : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$  действует, согласно (12.10), следующим образом

$$\phi^{-1}(\mathbf{x}) = \text{sti}^{-1}((Q^\sim)^{-1} \cdot \text{sti}(\mathbf{x})). \quad (12.24)$$

Несмотря на существование явной формулы (12.24), оператор, который обратен оператору умножения на точечную  $n \times n$ -матрицу  $Q$  в  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ , в общем случае не может быть выражен через умножение на какую-нибудь матрицу в  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$  (в частности, на матрицу  $Q^{-1}$ ). Это следует, к примеру, из того, что матрица  $(Q^\sim)^{-1}$  не обязана быть неотрицательной, и тогда обратный оператор не является монотонным по включению в  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ . Но умножение на точечную матрицу в  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$  *всегда* монотонно по включению.

Хотя сформулированное выше Следствие звучит довольно абстрактно, оно имеет совершенно практические применения. С помощью формулы (12.24) можно легко находить формальные решения для интервальных систем линейных уравнений вида

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (12.25)$$

у которых квадратная матрица  $A$  — точечная и абсолютно регулярная, а вся интервальность сосредоточена в правой части.

**Пример 12.2.2** Рассмотрим интервальную линейную систему

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0, 10] \\ [10, 20] \end{pmatrix}. \quad (12.26)$$

Прежде всего, заметим, что матрица системы — не интервальная (точечная) и абсолютно регулярная, так как и она сама, и матрица из модулей её элементов неособенны:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{и} \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Но тогда оператор умножения на эту матрицу обратим в интервальном пространстве  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ , и его обратный определяется формулой (12.24). Чтобы применить её к нахождению формального решения для (12.26), во-первых, сконструируем для  $A$  знаково-блочную матрицу

$$A^\sim = \begin{pmatrix} A^+ & A^- \\ A^- & A^+ \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right).$$

Во-вторых, вычислим обратную матрицу к  $A^\sim$  и умножим её на результат стандартного погружения вектора правой части (12.26), т. е. на  $(0, -10, 10, 20)^\top$ :

$$(A^\sim)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{cc|cc} 0.8 & 0.4 & -1.2 & 0.6 \\ 0.9 & -0.2 & 0.6 & -0.3 \\ \hline -1.2 & 0.6 & -0.8 & 0.4 \\ 0.6 & -0.3 & 0.9 & -0.2 \end{array} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Последнюю операцию можно организовать как решение  $4 \times 4$ -системы линейных алгебраических уравнений с матрицей  $A^\sim$  и правой частью  $(0, -10, 10, 20)^\top$ . В целом, согласно (12.24), формальное решение для системы уравнений (12.26) получается равным

$$\text{sti}^{-1} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [4, -6] \\ [-2, 8] \end{pmatrix}. \quad (12.27)$$

Непосредственной подстановкой легко убедиться, что интервальный вектор (12.27) в самом деле является искомым формальным решением для (12.26). ■

С. Марков предложил в работе [28] другой способ вычисления формальных решений интервальных линейных систем уравнений, матрица которых является точечной. По существу, он равносильен нашей теории, но не задействует абстрактных и общих понятий, будучи простым и технологичным приёмом. Часто этот приём может оказаться весьма полезным.

Если  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{KR}^n$  — формальное решение интервальной системы уравнений (12.25), то, беря середину и радиус от обеих частей равенства

$$A\mathbf{x}^* = \mathbf{b},$$

получим

$$A \cdot \text{mid } \mathbf{x}^* = \text{mid } \mathbf{b}, \quad (12.28)$$

$$|A| \cdot \text{rad } \mathbf{x}^* = \text{rad } \mathbf{b}. \quad (12.29)$$

Как следствие, отыскание формального решения сводится к вычислению решений двух обычных систем линейных алгебраических уравнений с матрицами  $A$  и  $|A|$ , из которых мы найдём середину формального решения  $\mathbf{x}^*$  и его радиус. Ясно, что достаточным условием существования этих решений является неособенность обеих матриц  $A$  и  $|A|$ . Если необходимо, чтобы системы уравнений (12.28) и (12.29) для середины и радиуса формального решения были разрешимы при любой правой части  $\mathbf{b}$ , то матрица  $A$  должна быть абсолютно регулярной.

### 12.3 Исследование индуцированных уравнений

В результате погружения исследование интервальных отображений  $\mathbb{KR}^n \rightarrow \mathbb{KR}^n$  сведено нами к исследованию отображений  $\mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  на привычном евклидовом пространстве, а нахождение формальных решений интервальных уравнений заменено на решение индуцированных уравнений в  $\mathbb{R}^{2n}$ . Учитывая особую роль стандартного погружения  $\text{sti} : \mathbb{KR}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ , мы всюду ниже под индуцированными отображениями и уравнениями будем иметь в виду именно  $\text{sti}$ -индуцированные отображения и уравнения на  $\mathbb{R}^{2n}$ . Следовательно, вместо задачи вычисления формальных решений

интервальных уравнений (12.4)–(12.5), т. е.

$$\mathbf{C}\mathbf{x} \ominus \mathbf{x} + \mathbf{d} = 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{C}\mathbf{x} \ominus \mathbf{d} = 0, \quad (12.30)$$

мы будем заниматься решением индуцированных уравнений в  $\mathbb{R}^{2n}$ :

уравнения

$$\mathcal{F}(y) = 0, \quad (12.31)$$

такого что

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(y) &= \text{sti}(\mathbf{C} \text{sti}^{-1}(y) \ominus \text{sti}^{-1}(y) + \mathbf{d}) \\ &= \text{sti}(\mathbf{C} \text{sti}^{-1}(y)) - y + \text{sti}(\mathbf{d}), \end{aligned} \quad (12.32)$$

и уравнения

$$\mathcal{G}(y) = 0, \quad (12.33)$$

такого что

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(y) &= \text{sti}(\mathbf{C} \text{sti}^{-1}(y) \ominus \mathbf{d}) \\ &= \text{sti}(\mathbf{C} \text{sti}^{-1}(y)) - \text{sti}(\mathbf{d}). \end{aligned} \quad (12.34)$$

Отметим, что для уравнения (12.31)–(12.32), возникающего при внешнем оценивании множеств решений ИСЛАУ, нахождение решений имеет содержательный смысл лишь в условиях Теоремы 7.4.3 и Теорем 10.1.2–10.1.3, которые уже обеспечивают существование и единственность формальных решений исходного уравнения (7.29), равносильного (12.31). По этой причине мы далее не будем отдельно исследовать эти вопросы для индуцированного уравнения (12.31)–(12.32). Что же касается уравнения (12.33)–(12.34), возникающего при внутреннем оценивании множеств решений ИСЛАУ, то формальный подход не накладывает никаких ограничений на  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{d}$ , а потому исследование существования и единственности решений для этих уравнений действительно необходимо. Соответствующие результаты нетривиальны, и мы ещё обсудим их ниже.

**Предложение 12.3.1** *Индукцированные отображения  $\mathcal{F} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  и  $\mathcal{G} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ , определённые посредством (12.32) и (12.34), непрерывны.*

**Доказательство.** Отображения  $f : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$  и  $g : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$ , действующие как

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{C}\mathbf{x} \ominus \mathbf{x} + \mathbf{d} \quad \text{и} \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{C}\mathbf{x} \ominus \mathbf{d},$$

непрерывны в силу непрерывности интервальных арифметических операций в  $\mathbb{K}\mathbb{R}$ . Погружение  $\text{sti}$ , как и обратное ему отображение  $\text{sti}^{-1}$ , также непрерывны. Следовательно, непрерывны и их композиции  $\mathcal{F} = \text{sti} \circ f \circ \text{sti}^{-1}$  и  $\mathcal{G} = \text{sti} \circ g \circ \text{sti}^{-1}$ . ■

Напомним

**Определение 12.3.1** [12] Пусть на множестве  $U$  задано частичное упорядочение « $\preceq$ ». Отображение  $T : U \rightarrow U$  называется изотонным относительно порядка « $\preceq$ », если

$$T(u) \preceq T(v)$$

для любых  $u, v \in U$ , таких что  $u \preceq v$ . Отображение  $T$  называется антитонным, если

$$T(u) \succ T(v)$$

для любых  $u, v \in U$ , таких что  $u \preceq v$ . Отображение  $T$  называется положительным, если  $u \succ 0$  влечёт  $T(u) \succ 0$ .

Изотонность, как известно, равносильна положительности для линейных отображений на линейных частично упорядоченных пространствах, таких, что их упорядочение согласовано с линейной структурой.

**Предложение 12.3.2** Индуцированное отображение  $\mathcal{G} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ , определённое в (12.34), является изотонным относительно покомпонентного порядка « $\leq$ ».

**Доказательство.** Пусть  $u, v \in \mathbb{R}^{2n}$ ,  $u \leq v$ . Тогда  $\text{sti}^{-1}(u) \subseteq \text{sti}^{-1}(v)$ , и в силу монотонности (точнее, изотонности) интервальных арифметических операций по включению

$$\mathbf{C} \text{sti}^{-1}(u) \ominus \mathbf{d} \subseteq \mathbf{C} \text{sti}^{-1}(v) \ominus \mathbf{d},$$

т. е.

$$\mathcal{G}(u) = \text{sti}(\mathbf{C} \text{sti}^{-1}(u) \ominus \mathbf{d}) \leq \text{sti}(\mathbf{C} \text{sti}^{-1}(v) \ominus \mathbf{d}) = \mathcal{G}(v),$$

что и требовалось. ■

Для отображения  $\mathcal{F} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ , определённого в (12.32), ни изотонность, ни антитонность в общем случае и в условиях Теорем 10.1.2–10.1.3 не выполняются.

Коль скоро отображения  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{G}$  действуют на евклидовом пространстве, мы можем поставить вопрос об их дифференцируемости, гладкости и т. п. К сожалению, глобально, т. е. на всей области определения, мы не можем похвастаться ни одним из этих свойств. Но вместо этого, наложив на матрицу  $\mathbf{C}$  некоторые дополнительные ограничения, мы получим нечто даже более привлекательное — *выпуклость*.

Именно, предположим, что выполнено следующее условие «построчной однородности»:

в каждой строке интервальной матрицы  $\mathbf{C}$   
все элементы являются либо только правильными,  
либо только неправильными интервалами.

(12.35)

Пусть непересекающиеся множества натуральных чисел

$$\mathcal{J}' = \{i'_1, i'_2, \dots, i'_\gamma\} \quad \text{и} \quad \mathcal{J}'' = \{i''_1, i''_2, \dots, i''_\delta\},$$

такие, что  $J' \cap J'' = \emptyset$  и  $J' \cup J'' = \{1, 2, \dots, n\}$ , представляют номера строк матрицы  $C = (c_{ij})$  с правильными и неправильными интервалами соответственно, т. е.

$$c_{ij} \text{ является } \begin{cases} \text{правильным,} & \text{если } i \in J' \\ \text{неправильным,} & \text{если } i \in J''. \end{cases}$$

Зададим на  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$  частичный порядок « $\in$ » и на  $\mathbb{R}^{2n}$  частичный порядок « $\ll$ » следующим образом:

$$\mathbf{u} \in \mathbf{v} \quad \text{в } \mathbb{K}\mathbb{R}^n \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{u}_i \subseteq \mathbf{v}_i, & \text{если } i \in J', \\ \mathbf{u}_i \supseteq \mathbf{v}_i, & \text{если } i \in J'', \end{cases} \quad (12.36)$$

$$\mathbf{u} \ll \mathbf{v} \quad \text{в } \mathbb{R}^{2n} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} u_i \leq v_i, & \text{если } i \in \{i'_1, \dots, i'_\gamma, i'_1 + n, \dots, i'_\gamma + n\}, \\ u_i \geq v_i, & \text{если } i \in \{i''_1, \dots, i''_\delta, i''_1 + n, \dots, i''_\delta + n\}. \end{cases} \quad (12.37)$$

Нетрудно понять, что

$$\mathbf{u} \in \mathbf{v} \quad \text{в } \mathbb{K}\mathbb{R}^n \quad \Longleftrightarrow \quad \text{sti}(\mathbf{u}) \ll \text{sti}(\mathbf{v}) \quad \text{в } \mathbb{R}^{2n}.$$

Частичные порядки « $\in$ » и « $\ll$ » — это упорядочения пространств  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$  и  $\mathbb{R}^{2n}$ , в некотором смысле «согласованные» с матрицей  $C$ , со структурой её правильных и неправильных строк.

Далее нам понадобится также конус положительных элементов в  $\mathbb{R}^{2n}$  относительно порядка « $\ll$ »:

$$K_{\ll} = \{y \in \mathbb{R}^{2n} \mid (y_i \geq 0, i \in J') \& (y_i \leq 0, i \in J'')\}. \quad (12.38)$$

Оказывается, что следствием свойств суб- и супердистрибутивности (1.73)–(1.74) в арифметике Каухера, является тот факт, что исследуемые отображения  $\mathcal{F}(x)$  и  $\mathcal{G}(x)$ , задаваемые посредством (12.32) и (12.34) — выпуклые относительно « $\ll$ ». Соответственно, тогда в любой точке  $x \in \mathbb{R}^{2n}$  будут существовать непустые субдифференциалы  $\partial_{\ll} \mathcal{F}(x)$  и  $\partial_{\ll} \mathcal{G}(x)$ , легко вычисляемые, поскольку  $\mathcal{F}(x)$  и  $\mathcal{G}(x)$  являются полиэдральными (кусочно-аффинными) отображениями. Наконец, знание субдифференциалов позволит нам построить для вычисления формальных решений *субдифференциальный метод Ньютона*.

Такова вкратце наша программа действий. Перейдем теперь к детальному построению намеченного.

### 12.3а Порядковая выпуклость и субдифференцируемость

Из классического анализа хорошо известно понятие выпуклой функции и его многочисленные плодотворные применения. В прошлом столетии исследование выпуклых функций и их приложений оформилось в отдельную математическую дисциплину — выпуклый анализ. Напомним обобщение понятия выпуклой функции на многомерный случай.

**Определение 12.3.2** [1, 19, 20, 22] Пусть евклидово пространство  $\mathbb{R}^q$  упорядочено частичным порядком « $\preceq$ ». отображение  $F : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  называется порядково выпуклым относительно « $\preceq$ », если

$$F(\lambda u + (1 - \lambda)v) \preceq \lambda F(u) + (1 - \lambda)F(v)$$

для любых  $u, v \in \mathbb{R}^p$  и  $\lambda \in [0, 1]$ .

**Предложение 12.3.3** Если интервальная матрица  $C$  удовлетворяет условию построчной однородности (12.35), то индуцированные отображения  $\mathcal{F}(y)$  и  $\mathcal{G}(y)$ , определённые в (12.32)–(12.34), являются порядково выпуклыми относительно покомпонентного порядка « $\ll$ » на  $\mathbb{R}^{2n}$ , определяемого посредством (12.37).

**Доказательство.** Для любых  $\lambda \in (0, 1)$  и  $u, v \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n$ , принимая во внимание субдистрибутивность (1.73) и супердистрибутивность (1.74), мы имеем

$$(C(\lambda u + (1 - \lambda)v))_i \subseteq \lambda(Cu)_i + (1 - \lambda)(Cv)_i \quad \text{для } i \in \mathcal{J}',$$

$$(C(\lambda u + (1 - \lambda)v))_i \supseteq \lambda(Cu)_i + (1 - \lambda)(Cv)_i \quad \text{для } i \in \mathcal{J}'' ,$$

так что в целом

$$C(\lambda u + (1 - \lambda)v) \in \lambda Cu + (1 - \lambda)Cv.$$

Следовательно, в  $\mathbb{R}^{2n}$

$$\text{sti}(C(\lambda u + (1 - \lambda)v)) \ll \lambda \text{sti}(Cu) + (1 - \lambda) \text{sti}(Cv). \quad (12.39)$$

Пусть  $u, v \in \mathbb{R}^{2n}$ . Если обозначить  $u = \text{sti}^{-1}(u)$ ,  $v = \text{sti}^{-1}(v)$ , то справедлива следующая цепочка преобразований

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}(\lambda u + (1 - \lambda)v) \\ &= \text{sti}(C \text{sti}^{-1}(\lambda u + (1 - \lambda)v)) - (\lambda u + (1 - \lambda)v) + \text{sti}(\mathbf{d}) \\ &= \text{sti}(C(\lambda u + (1 - \lambda)v)) - (\lambda u + (1 - \lambda)v) + \text{sti}(\mathbf{d}) \\ &\ll \lambda \text{sti}(Cu) + (1 - \lambda) \text{sti}(Cv) - (\lambda u + (1 - \lambda)v) + \text{sti}(\mathbf{d}) \\ & \quad \text{в силу (12.39)} \\ &= \lambda \mathcal{F}(u) + (1 - \lambda) \mathcal{F}(v), \end{aligned}$$

которая и доказывает Предложение для  $\mathcal{F}$ . Для отображения  $\mathcal{G}$  доказательство проводится аналогично. ■

Выпуклые функции и отображения, будучи одними из ближайших «родственников» линейным и аффинным отображениям, обладают, как известно, многими замечательными свойствами. Некоторыми из этих свойств мы и собираемся воспользоваться.

Далее для нас особенно важной будет так называемая *субдифференцируемость* — обобщение понятия дифференцируемости на случай выпуклых функций, которые могут не иметь обычных производных.

**Определение 12.3.3** [1, 19, 21, 22] Пусть  $\mathbb{R}^q$  — частично упорядоченное линейное пространство с порядком « $\preceq$ » и отображение  $F : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  порядково выпукло относительно « $\preceq$ ». Субдифференциалом отображения  $F$  в точке  $x \in \mathbb{R}^p$  называется множество, обозначаемое  $\partial_{\preceq} F(x)$ , которое образовано всеми такими линейными операторами  $D : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ , что

$$D(v) \preceq F(x+v) - F(x) \quad (12.40)$$

для любого  $v \in \mathbb{R}^p$ .

**Определение 12.3.4** [1, 19, 21, 22] Элементы множества  $\partial_{\preceq} F(x)$  — линейные операторы, удовлетворяющие неравенству (12.40) — называются субградиентами отображения  $F$  в точке  $x$ .

Если субдифференциал  $\partial_{\preceq} F(x)$  непуст, то про отображение  $F$  говорят, что оно субдифференцируемо в точке  $x$ . В случае, когда порядок « $\preceq$ » на  $\mathbb{R}^p$  фиксирован или нам ясно, о каком именно порядке идёт речь, субдифференциал обозначают просто  $\partial F(x)$ . Понятия субдифференциала и субградиента иллюстрируются на Рис. 12.2, где субдифференциал изображён затенённой областью между двумя скрещивающимися односторонними касательными к графику функции.

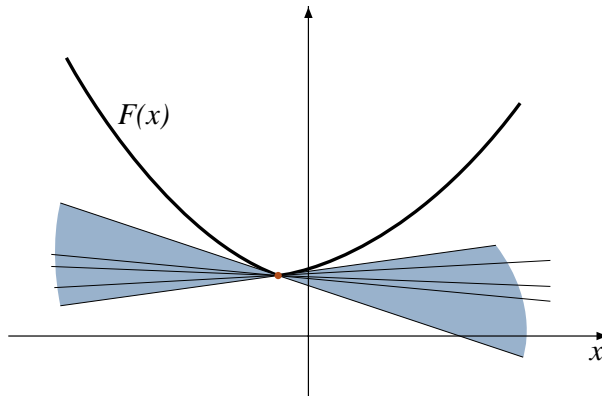


Рис. 12.2. Субградиенты и субдифференциал выпуклой функции.

Как известно, в общем случае понятие субдифференциала может быть определено и для отображений со значениями в общих линейных упорядоченных пространствах. Но проверка существования субдифференциала и его вычисление представляют собой при этом весьма непростые задачи [1]. По счастью, в интересующей нас конечномерной ситуации всё существенно упрощается. Конечномерный выпуклый анализ и тесно связанное с ним субдифференциальное исчисление функций в конечномерных пространствах являются красивыми, развитыми и практически важными математическими дисциплинами, результатами которых мы будем существенно пользоваться в наших исследованиях. Здесь имеет смысл дать краткую сводку необходимых нам сведений.

**Определение 12.3.5** [19, 21, 22]. Односторонней производной функции  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  в точке  $x$  по направлению  $y \in \mathbb{R}^p$  (или, коротко, производной по направлению)



называется предел

$$\frac{\partial f(x)}{\partial y} := \lim_{\alpha \searrow 0} \frac{f(x + \alpha y) - f(x)}{\alpha},$$

в случае, если он существует.

**Определение 12.3.6** [19, 21, 22]. Опорной функцией выпуклого множества  $W \subseteq \mathbb{R}^p$  называется функция  $\delta_W : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  такая, что

$$\delta_W(x) := \sup\{x^\top w \mid w \in W\}.$$

**Теорема 12.3.1** [19, 21, 22]. Если выпуклая функция  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна в некоторой точке  $x$ , то субдифференциал  $\partial f(x)$  — непустое ограниченное выпуклое множество, причём производная по направлению  $\frac{\partial f(x)}{\partial y}$  как функция направления  $y$  является опорной функцией для  $\partial f(x)$ .

В рассматриваемой нами ситуации выпуклость исследуемых отображений  $\mathcal{F} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  и  $\mathcal{G} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  относительно порядка « $\ll$ » равносильна тому, что их координатные компоненты — функционалы  $\mathcal{F}_i : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  и  $\mathcal{G}_i : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ , — выпуклы для  $i \in \mathcal{J}'$  и вогнуты для  $i \in \mathcal{J}''$  в обычном смысле. Вдобавок, все  $\mathcal{F}_i(x)$  и  $\mathcal{G}_i(x)$  непрерывны, и значит субдифференцируемы всюду на  $\mathbb{R}^{2n}$  в силу классического результата Теоремы 12.3.1.

Субдифференциалы  $\partial \mathcal{F}_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2n$ , можно мыслить, например, как множества  $2n$ -векторов  $d_{(i)}$ , таких что для любых  $v \in \mathbb{R}^{2n}$

$$\mathcal{F}_i(x + v) - \mathcal{F}_i(x) \geq d_{(i)}^\top v \quad \text{при } i \in \mathcal{J}',$$

$$\mathcal{F}_i(x + v) - \mathcal{F}_i(x) \leq d_{(i)}^\top v \quad \text{при } i \in \mathcal{J}''.$$

Если же сконструировать из этих векторов  $d_{(i)}$ , как из строк,  $2n \times 2n$ -матрицу

$$D := (d_{(1)}, d_{(2)}, \dots, d_{(2n)})^\top,$$

то, каков бы ни был  $v \in \mathbb{R}^{2n}$ , удовлетворяется неравенство

$$\mathcal{F}(x + v) - \mathcal{F}(x) \gg Dv,$$

и потому линейный оператор на  $\mathbb{R}^{2n}$ , задаваемый матрицей  $D$ , является субградиентом  $\mathcal{F}$  в  $x$ . Соответственно, субдифференциал  $\partial_{\ll} \mathcal{F}(x)$  непуст. Поскольку наши рассуждения дословно переносятся на отображение  $\mathcal{G}$  и никак не зависят от точки  $x$ , мы обосновали

**Предложение 12.3.4** Для индуцированных отображений  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{G}$ , задаваемых посредством (12.32)–(12.34) (и которые порядково выпуклы в силу Предложения 12.3.3) субдифференциалы  $\partial_{\ll} \mathcal{F}(y)$  и  $\partial_{\ll} \mathcal{G}(y)$  являются непустыми в любой точке  $y \in \mathbb{R}^{2n}$ , т. е. отображения  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{G}$  всюду субдифференцируемы.

Ниже мы для краткости часто будем обозначать эти субдифференциалы просто  $\partial \mathcal{F}(y)$  и  $\partial \mathcal{G}(y)$ .

Если  $\mathcal{F}$  дифференцируема в точке  $x$ , то субдифференциал  $\partial\mathcal{F}(y)$  состоит из единственного элемента, именно, из матрицы Якоби

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\mathcal{F}_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial\mathcal{F}_1(x)}{\partial x_{2n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\mathcal{F}_{2n}(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial\mathcal{F}_{2n}(x)}{\partial x_{2n}} \end{pmatrix}.$$

Аналогичный факт верен и в отношении  $\mathcal{G}$ . Но, как мы уже отмечали, отображения  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{G}$  не являются всюду дифференцируемыми. Чтобы указать явный вид субдифференциалов  $\partial\mathcal{F}(x)$  и  $\partial\mathcal{G}(x)$  в общем случае, и вывести для них некоторые оценки, существенно используемые в дальнейшем, нам необходимо знать больше о самих исследуемых отображениях  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{G}$ .

### 12.3б Полиэдральность

**Определение 12.3.7** [19, 21, 22]. *Надграфиком функции  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  называется множество  $\text{epi } f$  в  $\mathbb{R}^{p+1}$ , определяемое как*

$$\text{epi } f := \{ (x, t) \in \mathbb{R}^{p+1} \mid x \in \mathbb{R}^p, t \in \mathbb{R}, f(x) \leq t \}.$$

*Подграфиком функции  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  называется множество  $\text{hyp } f$  в  $\mathbb{R}^{p+1}$ , определяемое как*

$$\text{hyp } f := \{ (x, t) \in \mathbb{R}^{p+1} \mid x \in \mathbb{R}^p, t \in \mathbb{R}, f(x) \geq t \}.$$

**Определение 12.3.8** [22]. *Выпуклая функция  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ , надграфик которой является полиэдральным множеством в  $\mathbb{R}^{p+1}$ , называется полиэдральной выпуклой функцией. Вогнутая функция  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ , подграфик которой является полиэдральным множеством в  $\mathbb{R}^{p+1}$ , называется полиэдральной вогнутой функцией.*

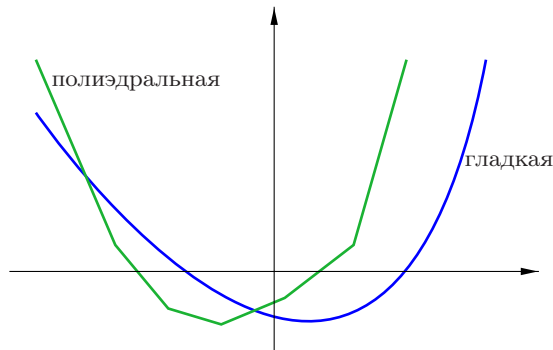


Рис. 12.3. График полиэдральной выпуклой функции в сравнении с графиком гладкой выпуклой функции: у полиэдральной функции он «склеен» из кусков гиперплоскостей.

Полиэдральные функции — это простейшие среди выпуклых функций. По существу, полиэдральные функции можно характеризовать как почти всюду *локально аффинные* выпуклые функции, поскольку их графики составлены из кусков гиперплоскостей (см. Рис 12.3).

**Определение 12.3.9** Для интервальной матрицы  $C \in \mathbb{KR}^{m \times n}$  расширенной матрицей вершин назовём множество  $\text{Vert } C$  всех точечных  $m \times n$ -матриц, определяемое как

$$(\text{Vert } C)_{ij} := \begin{cases} \{\underline{c}_{ij}, \bar{c}_{ij}\}, & \text{если } 0 \notin c_{ij}, \\ \{\underline{c}_{ij}, 0, \bar{c}_{ij}\}, & \text{если } 0 \in c_{ij}. \end{cases}$$

**Предложение 12.3.5** При выполнении условия построчной однородности (12.35) на матрицу  $C$  координатные компоненты  $\mathcal{F}_i(x)$  и  $\mathcal{G}_i(y)$  отображений  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{G}$ , определённых формулами (12.32)–(12.34), являются выпуклыми полиэдральными функциями для  $i \in \mathcal{I}'$  и вогнутыми полиэдральными функциями для  $i \in \mathcal{I}''$ . Более точно, справедливы представления

$$\mathcal{F}(x) = \max_{C \in \text{Vert } C} \ll C x - x + \text{sti}(\mathbf{d}), \quad (12.41)$$

$$\mathcal{G}(x) = \max_{C \in \text{Vert } C} \ll C x - \text{sti}(\mathbf{d}), \quad (12.42)$$

**Доказательство.** Прежде всего следует отметить, что для любой интервальной  $n \times n$ -матрицы  $C$ , удовлетворяющей условию построчной однородности (12.35) и произвольного интервального вектора  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  имеет место

$$C\mathbf{v} = \sup_{C \in C} C\mathbf{v}. \quad (12.43)$$

Действительно, согласно представлению (1.68) для правильных интервалов  $c_{ij}$  можно написать

$$c_{ij}\mathbf{v}_j = \bigvee_{c_{ij} \in c_{ij}} c_{ij}\mathbf{v}_j,$$

а для неправильных  $c_{ij}$

$$c_{ij}\mathbf{v}_j = \bigwedge_{c_{ij} \in c_{ij}} c_{ij}\mathbf{v}_j.$$

Используя свойства (1.78) и (1.79) дистрибутивности операций « $\wedge$ » и « $\vee$ » относительно сложения, мы получим для  $i \in \mathcal{I}'$

$$\begin{aligned} (C\mathbf{v})_i &= \sum_{j=1}^n c_{ij}\mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^n \bigvee_{c_{ij} \in c_{ij}} c_{ij}\mathbf{v}_j \\ &= \bigvee_{c_{i1} \in c_{i1}} \bigvee_{c_{i2} \in c_{i2}} \cdots \bigvee_{c_{in} \in c_{in}} \sum_{j=1}^n c_{ij}\mathbf{v}_j \\ &= \bigvee_{C \in C} \sum_{j=1}^n c_{ij}\mathbf{v}_j = \bigvee_{C \in C} (C\mathbf{v})_i, \end{aligned}$$

и для  $i \in J''$

$$\begin{aligned} (Cv)_i &= \sum_{j=1}^n c_{ij} v_j = \sum_{j=1}^n \bigwedge_{c_{ij} \in c_{ij}} c_{ij} v_j \\ &= \bigwedge_{c_{i1} \in c_{i1}} \bigwedge_{c_{i2} \in c_{i2}} \cdots \bigwedge_{c_{in} \in c_{in}} \sum_{j=1}^n c_{ij} v_j \\ &= \bigwedge_{C \in \mathcal{C}} \sum_{j=1}^n c_{ij} v_j = \bigwedge_{C \in \mathcal{C}} (Cv)_i, \end{aligned}$$

что и доказывает равенство (12.43).

Далее, если  $x \in \mathbb{R}^{2n}$ , то, принимая во внимание соотношения (12.17) и (12.19), можем заключить

$$\begin{aligned} \text{sti}(C\text{sti}^{-1}(x)) &= \text{sti} \left( \sup_{C \in \mathcal{C}} C\text{sti}^{-1}(x) \right) \\ &= \sup_{C \in \mathcal{C}} \ll \text{sti}(C\text{sti}^{-1}(x)) \\ &= \sup_{C \in \mathcal{C}} \ll Cx. \end{aligned}$$

В целом для отображения  $\mathcal{F}$ , определённого посредством (12.32), справедливо следующее представление:

$$\mathcal{F}(x) = \sup_{C \in \mathcal{C}} \ll Cx - x + \text{sti}(\mathbf{d}). \quad (12.44)$$

В частности,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_i(x) &= \left( \sup_{C \in \mathcal{C}} \ll Cx \right)_i - x_i + (\text{sti}(\mathbf{d}))_i \\ &= \begin{cases} \sup_{C \in \mathcal{C}} (Cx)_i - x_i + (\text{sti}(\mathbf{d}))_i, & \text{если } i \in J', \\ \inf_{C \in \mathcal{C}} (Cx)_i - x_i + (\text{sti}(\mathbf{d}))_i, & \text{если } i \in J''. \end{cases} \end{aligned} \quad (12.45)$$

Тот факт, что в представлениях (12.44) и (12.45) матрица  $C$  — это неотрицательная матрица специального блочного вида (12.18), имеет важное следствие. Именно, при фиксированном  $x$  значения

$$\sup_{C \in \mathcal{C}} (Cx)_i \quad \text{и} \quad \inf_{C \in \mathcal{C}} (Cx)_i$$

могут достигаться только в *концах* интервальных элементов  $c_{ij}$ , т.е. при  $c_{ij} = \underline{c}_{ij}$  или  $c_{ij} = \bar{c}_{ij}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , или же дополнительно ещё в *нулях*, т.е. при  $c_{ij} = 0$ , если соответствующий элемент  $c_{ij} \ni 0$  таков, что  $\text{pro } c_{ij} \ni 0$ . В любом случае мы можем эквивалентным образом заменить интервал  $c_{ij}$  на конечное число точек (две

или три), по которым только и надлежит брать супремумы и инфимумы в (12.45). Поэтому вместо (12.44) и (12.45) мы можем выписать более точные представления

$$\mathcal{F}(x) = \max_{C \in \text{Vert } \mathcal{C}} \ll C x - x + \text{sti}(\mathbf{d}), \quad (12.41)$$

и

$$\mathcal{F}_i(x) = \begin{cases} \max_{C \in \text{Vert } \mathcal{C}} (C x)_i - x_i + (\text{sti}(\mathbf{d}))_i, & \text{если } i \in \mathcal{J}', \\ \min_{C \in \text{Vert } \mathcal{C}} (C x)_i - x_i + (\text{sti}(\mathbf{d}))_i, & \text{если } i \in \mathcal{J}'', \end{cases} \quad (12.46)$$

где  $\text{Vert } \mathcal{C}$  — это расширенная матрица вершин для  $\mathcal{C}$ . Поскольку  $\text{Vert } \mathcal{C}$  конечно, то из (12.46) следует, что каждая  $\mathcal{F}_i(x)$  есть максимум или минимум, в зависимости от принадлежности  $i \in \mathcal{J}'$  или  $i \in \mathcal{J}''$ , по конечному числу линейных форм. Это и доказывает предложение для отображения  $\mathcal{F}$ .

Для  $\mathcal{G}$  все рассуждения проводятся аналогично и приводят к следующим представлениям:

$$\mathcal{G}(x) = \max_{C \in \text{Vert } \mathcal{C}} \ll C x - \text{sti}(\mathbf{d}), \quad (12.42)$$

и

$$\mathcal{G}_i(x) = \begin{cases} \max_{C \in \text{Vert } \mathcal{C}} (C x)_i - (\text{sti}(\mathbf{d}))_i, & \text{если } i \in \mathcal{J}', \\ \min_{C \in \text{Vert } \mathcal{C}} (C x)_i - (\text{sti}(\mathbf{d}))_i, & \text{если } i \in \mathcal{J}'', \end{cases} \quad (12.47)$$

Итак, каждое из отображений  $\mathcal{G}_i$  также является либо максимумом либо минимумом конечного количества линейных форм. ■

### 12.3в Оценки субдифференциалов

Наша ближайшая цель — получить оценки субдифференциалов исследуемых отображений  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{G}$ , которые будут играть важную роль в доказательстве сходимости субдифференциального метода Ньютона в §12.5. Но предварительно нам необходимо ввести

**Определение 12.3.10** Положительной частью  $\mathbf{x}^+$  и отрицательной частью  $\mathbf{x}^-$  правильного интервала  $\mathbf{x}$  назовём следующие интервалы

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^+ &:= \{x^+ \mid x \in \mathbf{x}\} = \{\max\{x, 0\} \mid x \in \mathbf{x}\}, \\ \mathbf{x}^- &:= \{x^- \mid x \in \mathbf{x}\} = \{\max\{-x, 0\} \mid x \in \mathbf{x}\}. \end{aligned}$$

Например,

$$\begin{aligned} [-1, 2]^+ &= [0, 2], & [-1, 2]^- &= [0, 1], \\ [1, 2]^+ &= [1, 2], & [1, 2]^- &= [0, 0]. \end{aligned}$$

Можно рассматривать операции взятия положительной и отрицательной частей интервала как интервальные расширения функций  $(\cdot)^+$  и  $(\cdot)^-$ , введённых в Определении 1.7.3. Как обычно, к правильным интервальным векторам и матрицам эти операции будут применяться покомпонентным образом.

**Предложение 12.3.6** Для субдифференциала  $\partial\mathcal{F}(x)$  отображения  $\mathcal{F}$ , определённого формулой (12.32), справедлива оценка

$$\partial\mathcal{F}(x) \subseteq \begin{pmatrix} (\text{pro } \mathbf{C})^+ & (\text{pro } \mathbf{C})^- \\ (\text{pro } \mathbf{C})^- & (\text{pro } \mathbf{C})^+ \end{pmatrix} - I. \quad (12.48)$$

Аналогично, для субдифференциала  $\partial\mathcal{G}(x)$  отображения  $\mathcal{G}$ , определённого формулой (12.34), справедлива оценка

$$\partial\mathcal{G}(x) \subseteq \begin{pmatrix} (\text{pro } \mathbf{C})^+ & (\text{pro } \mathbf{C})^- \\ (\text{pro } \mathbf{C})^- & (\text{pro } \mathbf{C})^+ \end{pmatrix}. \quad (12.49)$$

**Доказательство** мы проведём, как и ранее, только для  $\mathcal{F}$ , так как для отображения  $\mathcal{G}$  оно отличается малосущественными техническими деталями.

Покажем сначала, что субдифференциал  $\partial\mathcal{F}(x)$  имеет внешнюю интервальную оценку в виде правильной  $2n \times 2n$ -матрицы, составленной из интервалов односторонних частных производных  $\mathcal{F}$ . Более точно,

$$\partial\mathcal{F}(x) \subseteq \begin{pmatrix} \left[ \frac{\partial\mathcal{F}_1(x)}{\partial x_1^-}, \frac{\partial\mathcal{F}_1(x)}{\partial x_1^+} \right] & \cdots & \left[ \frac{\partial\mathcal{F}_1(x)}{\partial x_{2n}^-}, \frac{\partial\mathcal{F}_1(x)}{\partial x_{2n}^+} \right] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left[ \frac{\partial\mathcal{F}_{2n}(x)}{\partial x_1^-}, \frac{\partial\mathcal{F}_{2n}(x)}{\partial x_1^+} \right] & \cdots & \left[ \frac{\partial\mathcal{F}_{2n}(x)}{\partial x_{2n}^-}, \frac{\partial\mathcal{F}_{2n}(x)}{\partial x_{2n}^+} \right] \end{pmatrix}, \quad (12.50)$$

где

$$\frac{\partial\mathcal{F}_i(x)}{\partial x_j^-} := \lim_{\alpha \searrow 0} \frac{\mathcal{F}_i(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j - \alpha, x_{j+1}, \dots, x_{2n}) - \mathcal{F}_i(x_1, \dots, x_{2n})}{\alpha}$$

и

$$\frac{\partial\mathcal{F}_i(x)}{\partial x_j^+} := \lim_{\alpha \searrow 0} \frac{\mathcal{F}_i(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + \alpha, x_{j+1}, \dots, x_{2n}) - \mathcal{F}_i(x_1, \dots, x_{2n})}{\alpha},$$

— односторонние частные производные компонент  $\mathcal{F}_i$  в точке  $x$  слева и справа по  $j$ -ому координатному направлению.

Поскольку покомпонентный порядок « $\ll$ » на  $\mathbb{R}^{2n}$  является прямым произведением порядков « $\leq$ » и « $\geq$ » на вещественных осях  $\mathbb{R}$ , то порядковый « $\ll$ »-субдифференциал  $\partial\mathcal{F}(x)$  является прямым произведением субдифференциалов  $\partial\mathcal{F}_i(x)$  отдельных компонент  $\mathcal{F}_i : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ , для каждой из которых мы можем воспользоваться Теоремой 12.3.1. Из этого классического результата и из определения опорной функции следует неравенство

$$\frac{\partial\mathcal{F}_i(x)}{\partial y} \geq \{ y^\top d \mid d \in \partial\mathcal{F}_i(x) \}. \quad (12.51)$$

Далее, последовательно полагая  $y$  равным векторам, имеющим  $j$ -ой компонентой  $-1$  или  $1$ ,  $j = 1, 2, \dots, 2n$ , а остальными — нули, получим из (12.51) включение

$$\partial\mathcal{F}_i(x) \subseteq \left( \left[ \frac{\partial\mathcal{F}_i(x)}{\partial x_1^-}, \frac{\partial\mathcal{F}_i(x)}{\partial x_1^+} \right], \dots, \left[ \frac{\partial\mathcal{F}_i(x)}{\partial x_{2n}^-}, \frac{\partial\mathcal{F}_i(x)}{\partial x_{2n}^+} \right] \right),$$

равносильное (12.50).

Теперь можно перейти собственно к выводу оценки (12.48). Для удобства условимся писать « $\pm$ » вместо каждого отдельного из знаков «+» и «-». В силу представления (12.46)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}_i(x)}{\partial x_j^\pm} &= \frac{\partial}{\partial x_j^\pm} \left( \max_{C \in \text{Vert } \mathcal{C}} (C^\sim x)_i - x_i + (\text{sti } (\mathbf{d}))_i \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j^\pm} \left( \max_{C \in \text{Vert } \mathcal{C}} (C^\sim x)_i \right) - \delta_{ij} \quad \text{для } i \in \mathcal{J}', \end{aligned} \quad (12.52)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}_i(x)}{\partial x_j^\pm} &= \frac{\partial}{\partial x_j^\pm} \left( \min_{C \in \text{Vert } \mathcal{C}} (C^\sim x)_i - x_i + (\text{sti } (\mathbf{d}))_i \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j^\pm} \left( \min_{C \in \text{Vert } \mathcal{C}} (C^\sim x)_i \right) - \delta_{ij} \quad \text{для } i \in \mathcal{J}'', \end{aligned} \quad (12.53)$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Воспользовавшись правилом дифференцирования функции экстремума (см., например, [5], §III.2), можем заключить, что для  $i \in \mathcal{J}'$

$$\frac{\partial}{\partial x_j^\pm} \left( \max_{C \in \text{Vert } \mathcal{C}} (C^\sim x)_i \right) = \begin{pmatrix} ij\text{-й элемент матрицы } C^\sim, \\ \text{на которой достигается} \\ \text{рассматриваемый } \max (C^\sim x)_i \end{pmatrix}, \quad (12.54)$$

и, совершенно аналогично, для  $i \in \mathcal{J}''$

$$\frac{\partial}{\partial x_j^\pm} \left( \min_{C \in \text{Vert } \mathcal{C}} (C^\sim x)_i \right) = \begin{pmatrix} ij\text{-й элемент матрицы } C^\sim, \\ \text{на которой достигается} \\ \text{рассматриваемый } \min (C^\sim x)_i \end{pmatrix}. \quad (12.55)$$

В целом, объединяя (12.18) и (12.52)–(12.55), мы придём к следующему общему виду матрицы производных по направлению:

$$\left( \frac{\partial \mathcal{F}_i(x)}{\partial x_j^\pm} \right)_{i,j=1}^{2n} = \begin{pmatrix} (C')^+ & (C')^- \\ (C'')^- & (C'')^+ \end{pmatrix} - I,$$

где  $C', C'' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $C', C'' \in \text{Vert } \mathcal{C}$ . Следовательно, с учётом включения (12.50), действительно получим доказываемую оценку (12.48). ■

## 12.4 Существование формальных решений

**Теорема 12.4.1** (теорема В.С. Зюзина) *Пусть в интервальной линейной системе уравнений*

$$Cx = d$$

с  $C \in \mathbb{K}\mathbb{R}^{n \times n}$  и  $d \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n$  правильная проекция матрицы  $C = (c_{ij})$  имеет диагональное преобладание. Тогда формальное решение системы существует и единственно.

**Доказательство.** Введём следующие обозначения:

$D = \text{diag} \{ c_{11}, c_{22}, \dots, c_{nn} \}$  — диагональная матрица, образованная диагональными элементами из  $C$ ,

$E$  — матрица, полученная из матрицы  $C$  обнулением её диагональных элементов.

Таким образом,  $C = D + E$ , а формальные решения исходной системы уравнений совпадают с формальными решениями системы

$$Dx + Ex = d,$$

так как матрицы  $D$  и  $E$  имеют специальный «взаимнодополнительный» вид. В свою очередь, выписанная система равносильна

$$Dx = d \ominus Ex.$$

Взяв далее какой-нибудь вектор  $x^{(0)}$ , можем организовать итерационный процесс

$$x^{(k+1)} \leftarrow (\text{inv } D)(d \ominus Ex^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $\text{inv } D := \text{diag} \{ \text{inv } c_{11}, \text{inv } c_{22}, \dots, \text{inv } c_{nn} \}$  — алгебраически обратная для матрицы  $D$ . По теореме Шрёдера о неподвижной точке (Теорема 2.4.2, стр. 112) итерации будут сходиться к единственной неподвижной точке отображения

$$x \mapsto (\text{inv } D)(d \ominus Ex)$$

в силу диагонального преобладания в  $C$ .

В самом деле,

$$\begin{aligned} \text{Dist} \left( (\text{inv } D)(d \ominus Ex), (\text{inv } D)(d \ominus Ey) \right) &\leq |\text{inv } D| \cdot \text{Dist} (d \ominus Ex, d \ominus Ey) \\ &= |\text{inv } D| \cdot \text{Dist} (Ex, Ey) \leq |\text{inv } D| |E| \cdot \text{Dist} (x, y). \end{aligned}$$

Из-за диагонального преобладания в матрице  $C$  точечная матрица  $|\text{inv } D| |E|$  имеет  $\infty$ -норму меньше единицы. Следовательно, её спектральный радиус тоже меньше единицы, и мы находимся в условиях теоремы Шрёдера о неподвижной точке. ■

Теорема В.С. Зюзина носит конструктивный характер и может служить основой стационарных итерационных процессов, вычисляющих формальное решение интервальных линейных систем. Эти процессы были впервые рассмотрены в [8, 9, 38] и, как видно из формулировки и доказательства теоремы В.С. Зюзина, они фактически являются аналогами классического итерационного метода Якоби для систем линейных уравнений.

Основной результат этого параграфа — локальная теорема существования формальных решений для интервальных линейных систем уравнений.



**Теорема 12.4.2** Если интервальная матрица  $C \in \mathbb{K}\mathbb{R}^{n \times n}$  достаточно узка (т. е., если  $\|\text{grad } C\|$  достаточно мала) и её правильная проекция  $\text{pro } C$  содержит абсолютно регулярные точечные матрицы, то для любой правой части  $d \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n$  интервальная система уравнений

$$Cx = d$$

имеет формальное решение в арифметике Каухера.

**Доказательство** мы проведём топологическими методами (см., например, [14, 20]), на основе теории вращения векторного поля (или равносильной ей теории степени отображения).

Пусть  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — непрерывное положительно однородное отображение. Справедливо следующее общее рассуждение. Предположим, что нуль — единственная особая точка векторного поля  $\Phi x$ . Она поэтому изолирована и определён индекс нуля поля  $\Phi x$  — величина  $\text{ind}(0, \Phi)$ , являющаяся вращением векторного поля  $\Phi x$  на сфере  $S_R$  достаточно малого радиуса  $R$  с центром в начале координат (в данном случае в силу положительной однородности поля величину  $R$  можно выбирать произвольной). Пусть также  $\text{ind}(0, \Phi) \neq 0$ .

Если  $h \in \mathbb{R}^n$  — какой-то вектор, то возьмём, например,

$$R > \frac{\|h\|}{\inf_{\|x\|=1} \Phi x}$$

Тогда при  $\|x\| = R$  справедливо

$$\|\Phi x - (\Phi x - h)\| < \|\Phi x\|,$$

что в силу теоремы Пуанкаре-Боля [14, 20] означает гомотопность векторных полей  $(\Phi x)$  и  $(\Phi x - h)$  на  $S_R$ . Следовательно, на  $S_R$  вращения полей  $(\Phi x)$  и  $(\Phi x - h)$  совпадают, а поскольку  $\text{ind}(0, \Phi) \neq 0$ , то в шаре  $\|x\| \leq R$  должна находиться особая точка поля  $\Phi x - h$  ([14], стр. 20, Теорема 4.2), т. е. решение уравнения  $\Phi x = h$ .

Всё вышеизложенное в полной мере применимо к векторному полю

$$\text{sti}(C \text{ sti}^{-1}(x)) \tag{12.56}$$

в  $\mathbb{R}^{2n}$ , и потому для завершения доказательства нам достаточно установить, что в условиях теоремы индекс нуля векторного поля (12.56) не равен нулю.

На единичной сфере  $S_1$  с центром в начале координат строгое неравенство

$$\|\text{sti}(C \text{ sti}^{-1}(x)) - (\text{mid } C) \tilde{x}\| < \|(\text{mid } C) \tilde{x}\| \tag{12.57}$$

справедливо для абсолютно регулярных матриц  $C = C$  нулевой ширины: левая часть неравенства при этом обращается в тождественный нуль, а правая оценивается снизу как

$$\inf_{\|x\|=1} \|C \tilde{x}\| > 0.$$

Но строгое неравенство (12.57) останется верным при достаточно малых возмущениях его частей, когда  $C$  есть «достаточно узкая» интервальная матрица. Тогда,

опять-таки в силу теоремы Пуанкаре-Боля, условие (12.57) означает гомотопность векторного поля (12.56) и поля  $(\text{mid } C) \sim x$  на сфере  $S_1$ . Поэтому индекс нуля поля (12.56) совпадает с индексом нуля поля  $(\text{mid } C) \sim x$ , т. е. равен знаку определителя  $\det(\text{mid } C) \sim \neq 0$ . ■

Обратимся теперь к вопросу о единственности формальных решений интервальных систем уравнений (12.5). Он полностью решается теорией §12.2 в случае, если матрица системы точечная. Именно, интервальная система уравнений

$$Cx = d$$

с абсолютно регулярной матрицей  $C$  имеет единственное формальное решение для любой правой части  $d \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n$  (Следствие из Теорем 12.2.1 и 12.2.2). Что касается интервальных систем уравнений (12.5) с существенно интервальными матрицами  $C$ , то для них единственность формальных решений является в настоящее время сравнительно малоисследованной. Помимо теоремы В.С. Зюзина этому вопросу посвящены работа А.В. Лакеева [17] и ряд результатов, изложенных в последнем параграфе этой главы.

**Теорема 12.4.3** Пусть интервальная матрица  $C \in \mathbb{K}\mathbb{R}^{n \times n}$  такова, что в каждой её строке все элементы являются либо только правильными, либо только неправильными интервалами (т. е. выполнено условие (12.35) и, кроме того, неособенной оказывается интервальная  $2n \times 2n$ -матрица

$$\begin{pmatrix} (\text{pro } C)^+ & (\text{pro } C)^- \\ (\text{pro } C)^- & (\text{pro } C)^+ \end{pmatrix}. \quad (12.58)$$

Тогда интервальная система линейных алгебраических уравнений

$$Cx = d$$

может иметь не более чем конечное количество несравнимых между собой по включению формальных решений.

**Доказательство.** Перейдём в пространство  $\mathbb{R}^{2n}$  и рассмотрим индуцированное для (12.5) уравнение (12.33)

$$\mathcal{G}(x) = 0.$$

Вспомним, что для  $\mathcal{G}(x)$  верно представление (12.42)

$$\mathcal{G}(x) = \max_{C \in \text{Vert } C} \ll C \sim x - \text{sti}(d).$$

Его содержательный смысл заключается в том, что в условиях (12.35) отображение  $\mathcal{G} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  является кусочно-аффинным — склеенным из конечного числа кусков аффинных отображений, каждое из которых неособенно, если имеет место неособенность матрицы (12.58). Ясно, что на каждом из неособенных аффинных кусков может находиться не более одного решения индуцированного уравнения (12.33), а потому общее количество решений этого уравнения во всём  $\mathbb{R}^{2n}$  также должно быть

конечным. То же самое верно и для формальных решений исходной интервальной линейной системы (12.5).

Далее, предположим, что из этих формальных решений какие-либо два —  $\mathbf{x}'$  и  $\mathbf{x}''$  — сравнимы друг с другом относительно порядка по включению: пусть, скажем,  $\mathbf{x}' \subseteq \mathbf{x}''$  и  $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}''$ . Тогда для любого интервального вектора  $\mathbf{u}$ , такого что  $\mathbf{x}' \subseteq \mathbf{u} \subseteq \mathbf{x}''$ , в силу монотонности интервальных арифметических операций в  $\mathbb{K}\mathbb{R}$  по включению имеет место

$$0 = \mathbf{C}\mathbf{x}' \ominus \mathbf{d} \subseteq \mathbf{C}\mathbf{u} \ominus \mathbf{d} \subseteq \mathbf{C}\mathbf{x}'' \ominus \mathbf{d} = 0,$$

т. е.  $\mathbf{u}$  также является формальным решением для (12.5). Мы приходим, таким образом, к выводу о существовании бесконечного множества формальных решений системы уравнений (12.5), что противоречит полученному ранее результату. Итак, различные формальные решения  $\mathbf{x}'$  и  $\mathbf{x}''$  должны быть несравнимы между собой. ■

В отсутствие единственности формальные решения системы

$$\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{d}$$

могут образовывать целые порядковые отрезки. При этом с практической точки зрения наибольший интерес представляют, видимо, максимальные и минимальные по включению формальные решения, причём таких несравнимых между собой экстремальных решений может быть несколько. К примеру, если  $\mathbf{C} = [-1, 1]$ ,  $\mathbf{d} = [-1, 1]$ , то каждый интервал вида  $[\epsilon, 1]$  и  $[-1, \epsilon]$ ,  $-1 \leq \epsilon \leq 1$ , является формальным решением соответствующего уравнения. Среди них имеется одно максимальное по включению формальное решение  $[-1, 1]$ , а также два несравнимых между собой минимальных по включению решений  $-1$  и  $1$ .

Рассмотрим также интересный пример интервальной линейной системы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [2, -2] \\ [2, -2] \end{pmatrix},$$

иллюстрирующий теорию §§12.2–12.3. Здесь формальные решения образуют целое параметрическое семейство

$$\begin{pmatrix} [1+t, -1-t] \\ [1-t, -1+t] \end{pmatrix},$$

где  $t \in \mathbb{R}$  — произвольный параметр. Все эти формальные решения несравнимы друг с другом и каждое из них является одновременно как максимальным, так и минимальным по включению.

Если множество формальных решений для системы (12.5) ограничено, то всякое её формальное решение содержится в некотором максимальном по включению формальном решении и, в свою очередь, содержит некоторое минимальное по включению формальное решение для (12.5).

Действительно, если формальное решение  $\mathbf{x}'$  не содержится ни в каком более широком решении, то оно само максимально. В противном случае возьмём максимум

$$\bigvee \{ \mathbf{y} \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n \mid \mathbf{C}\mathbf{y} = \mathbf{d}, \mathbf{y} \supset \mathbf{x}' \}$$

всех формальных решений, содержащих  $x'$ . Из непрерывности интервальных арифметических операций и операции « $\vee$ » в  $\mathbb{K}\mathbb{R}$  можно заключить, что полученный таким образом интервальный вектор является формальным решением. Второе утверждение доказывается аналогично, взятием противоположного порядка.

## 12.5 Субдифференциальный метод Ньютона

### 12.5а Алгоритм

В качестве эффективного инструмента для решения индуцированных уравнений (12.31)–(12.32) и (12.33)–(12.34) в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^{2n}$  мы предлагаем *субдифференциальный метод Ньютона*, который является дальнейшим развитием известных результатов о монотонно сходящихся методах ньютоновского типа в упорядоченных линейных пространствах. Ниже в Табл. 12.1 представлены две разновидности этого метода, предназначенные для нахождения решений индуцированных уравнений (12.31) и (12.33) соответственно.

Фигурирующая в описаниях алгоритмов константа  $\tau$  — это релаксационный параметр, с помощью которого в методах ньютоновского типа удаётся расширить область сходимости. Наш вычислительный опыт с субдифференциальным методом Ньютона тоже свидетельствует о полезности выбора  $\tau < 1$  в некоторых ситуациях (см. §12.6). С другой стороны, мы вводим этот параметр также как потенциальный путь для модификации методов (например, можно попытаться рассмотреть нестационарный метод, в котором  $\tau$  меняется от шага к шагу и т. п.).

На практике мы рекомендуем сначала брать  $\tau$  равным единице. Тогда при сходимости субдифференциальный метод Ньютона даёт *точное* решение уравнений (12.31)–(12.32) и (12.33)–(12.34) за небольшое конечное число итераций (которое, как правило, не превосходит размерности  $n$  интервальной системы). Такая исключительно быстрая сходимость субдифференциального метода Ньютона при  $\tau = 1$  объясняется полиэдральностью функций, фигурирующих в решаемых уравнениях. Если же метод не сходится к решению, то нужно попробовать уменьшить значение  $\tau$ .

Другое достоинство предлагаемых методов — отсутствие проблем с выбором начального приближения. В целом, субдифференциальный метод Ньютона имеет большее практическое значение, и помимо своего основного назначения он может рассматриваться также как вспомогательный алгоритм, отдельное звено в составе более сложных численных процессов.

С 90-х годов XX века автором свободно распространяется программа `subdiff`, реализующая субдифференциальный метод Ньютона в версии `SubDiff1` для различных систем программирования. Её можно загрузить с веб-сайта «Интервальный анализ и его приложения» — <http://www.nsc.ru/interval> (раздел «Программное обеспечение»). На сегодняшний день `subdiff` — это наиболее эффективная программа для отыскания формальных решений интервальных линейных систем уравнений в арифметике Каухера.

Таблица 12.1.

Алгоритм **SubDiff1** — субдифференциальный метод Ньютона для решения уравнения (12.31)–(12.32)

Выбираем некоторое начальное приближение  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^{2n}$ .

Если  $(k-1)$ -е приближение  $x^{(k-1)} \in \mathbb{R}^{2n}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , уже найдено, то вычисляем какой-нибудь субградиент  $D^{(k-1)}$  отображения  $\mathcal{F}$  в точке  $x^{(k-1)}$  и полагаем

$$x^{(k)} \leftarrow x^{(k-1)} - \tau (D^{(k-1)})^{-1} \mathcal{F}(x^{(k-1)}),$$

где  $\tau \in ]0, 1]$  — некоторая константа.

Алгоритм **SubDiff2** — субдифференциальный метод Ньютона для решения уравнения (12.33)–(12.34)

Выбираем некоторое начальное приближение  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^{2n}$ .

Если  $(k-1)$ -е приближение  $x^{(k-1)} \in \mathbb{R}^{2n}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , уже найдено, то вычисляем какой-нибудь субградиент  $D^{(k-1)}$  отображения  $\mathcal{G}$  в точке  $x^{(k-1)}$  и полагаем

$$x^{(k)} \leftarrow x^{(k-1)} - \tau (D^{(k-1)})^{-1} \mathcal{G}(x^{(k-1)}),$$

где  $\tau \in ]0, 1]$  — некоторая константа.

## 12.56 Доказательство сходимости

Полное и всеобъемлющее исследование субдифференциального метода Ньютона выходит за рамки настоящей работы, и ниже мы дадим, основываясь на стандартной технике (см., например, [20]), доказательство локальных теорем сходимости. Их утверждения сводятся к следующему:

**Теорема 12.5.1** Пусть интервальная матрица  $C \in \mathbb{KR}^{n \times n}$  удовлетворяет усло-

вию построчной однородности (12.35), и интервальная  $2n \times 2n$ -матрица

$$\begin{pmatrix} (\text{pro } C)^+ & (\text{pro } C)^- \\ (\text{pro } C)^- & (\text{pro } C)^+ \end{pmatrix} - I$$

является неособенной. Если при этом  $C$  достаточно узка, то алгоритм `SubDiff1` со значением релаксационного параметра  $\tau = 1$  сходится за конечное число итераций к  $\text{sti}(\mathbf{x}^*)$ , где  $\mathbf{x}^*$  — формальное решение интервальной системы  $C\mathbf{x} \ominus \mathbf{x} + \mathbf{d} = 0$ .

**Теорема 12.5.2** Пусть интервальная  $n \times n$ -матрица  $C$  удовлетворяет условию построчной однородности (12.35), и интервальная  $2n \times 2n$ -матрица

$$\begin{pmatrix} (\text{pro } C)^+ & (\text{pro } C)^- \\ (\text{pro } C)^- & (\text{pro } C)^+ \end{pmatrix}$$

является неособенной. Если при этом  $C$  достаточно узка, то алгоритм `SubDiff2` со значением релаксационного параметра  $\tau = 1$  сходится за конечное число итераций к  $\text{sti}(\mathbf{x}^*)$ , где  $\mathbf{x}^*$  — формальное решение интервальной системы  $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ .

Мы дадим развёрнутое доказательство лишь для Теоремы 12.5.1, так как для Теоремы 12.5.2 оно совершенно аналогично по идее и отличается лишь малосущественными деталями.

**Доказательство.** Уточним, что имеется в виду под «достаточной узостью» интервальной матрицы  $A$ . Это условие будет означать, что

замыкание выпуклой оболочки множества

$$\bigcup \left\{ S^{-1}K_{\ll} \mid S \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, S \in \begin{pmatrix} (\text{pro } C)^+ & (\text{pro } C)^- \\ (\text{pro } C)^- & (\text{pro } C)^+ \end{pmatrix} - I \right\}, \quad (12.59)$$

где  $(S^{-1}K_{\ll})$  обозначает прообраз конуса положительных элементов (12.38) при линейном преобразовании  $S$ , само является некоторым конусом в пространстве  $\mathbb{R}^{2n}$ .

Это осмысленное условие. Если матрица  $C$  имеет нулевую ширину, т.е.  $C = C$ , то множество  $(C)^{-1}K_{\ll}$ , как прообраз конуса при неособенном линейном преобразовании, является конусом. Если же точечные неособенные  $2n \times 2n$ -матрицы  $S', S''$  «достаточно близки» друг к другу, то близки также и конусы  $(S')^{-1}K_{\ll}$  и  $(S'')^{-1}K_{\ll}$ , и их выпуклая оболочка всё ещё является конусом. Следовательно, условие (12.59) в некотором смысле действительно отражает «узость» интервальной матрицы  $C$ .

Итак, пусть множество (12.59) — конус, который мы будем обозначать  $K_{\triangleleft}$ , ассоциируя его с некоторым частичным порядком « $\triangleleft$ » на  $\mathbb{R}^{2n}$ . Именно, станем считать, что

$$x \triangleleft y \iff y - x \in K_{\triangleleft}. \quad (12.60)$$

Основная идея нашего доказательства — продемонстрировать то, что последовательность приближений, порождённая алгоритмом `SubDiff1` является монотонно невозрастающей и ограниченной снизу относительно этого специальным образом сконструированного порядка « $\triangleleft$ ».

Начнём с того, что из неравенства (12.40), определяющего субдифференциал, вытекает

$$\mathcal{F}(x^{(k)}) \gg \mathcal{F}(x^{(k-1)}) + D^{(k-1)}(x^{(k)} - x^{(k-1)})$$

для  $D^{(k-1)} \in \partial\mathcal{F}(x^{(k-1)})$  и всех  $k = 1, 2, \dots$ . Но, по построению алгоритма `SubDiff1` с релаксационным параметром  $\tau = 1$ ,

$$D^{(k-1)}(x^{(k)} - x^{(k-1)}) = -\mathcal{F}(x^{(k-1)}). \quad (12.61)$$

Следовательно,

$$\mathcal{F}(x^{(k)}) \gg 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (12.62)$$

— все порождаемые алгоритмом последовательные приближения таковы, что значения отображения  $\mathcal{F}$  на них неотрицательны относительно порядка « $\ll$ ».

Какие следствия имеет этот факт? Привлекая представление (12.41) из доказательства Предложения 12.3.5, мы можем заключить из (12.62), что

$$\max_{C \in \text{Vert } \mathcal{C}} C \sim x^{(k)} - x^{(k)} + \text{sti}(\mathbf{d}) \gg 0,$$

или

$$\max_{C \in \text{Vert } \mathcal{C}} C \sim x^{(k)} - x^{(k)} + \text{sti}(\mathbf{d}) \in K_{\ll}.$$

В частности, для некоторой матрицы

$$S^{(k)} \in \left( \begin{array}{cc} (\text{pro } \mathcal{C})^+ & (\text{pro } \mathcal{C})^- \\ (\text{pro } \mathcal{C})^- & (\text{pro } \mathcal{C})^+ \end{array} \right) - I,$$

на которой достигается  $(\max_{\ll} C \sim x^{(k)} - x^{(k)})$ , имеет место

$$S^{(k)} x^{(k)} + \text{sti}(\mathbf{d}) \in K_{\ll}.$$

Так как эта матрица  $S^{(k)}$  по условию теоремы неособенна, то

$$x^{(k)} + (S^{(k)})^{-1} \text{sti}(\mathbf{d}) \in (S^{(k)})^{-1} K_{\leq} \subseteq K_{\triangleleft},$$

а это включение в силу (12.60) означает, что

$$-(S^{(k)})^{-1} \text{sti}(\mathbf{d}) \triangleleft x^{(k)}.$$

Если же мы положим вектор  $\xi \in \mathbb{R}^{2n}$  равным величине

$$\inf_{\triangleleft} \left\{ -S^{-1} \text{sti}(\mathbf{d}) \mid S \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, S \in \left( \begin{array}{cc} (\text{pro } \mathcal{C})^+ & (\text{pro } \mathcal{C})^- \\ (\text{pro } \mathcal{C})^- & (\text{pro } \mathcal{C})^+ \end{array} \right) - I \right\},$$

то тогда  $\xi \triangleleft x^{(k)}$  для всех  $k = 1, 2, \dots$ , т. е. последовательность  $\{x^{(k)}\}$  оказывается в самом деле ограниченной снизу относительно частичного порядка « $\triangleleft$ ».

Другой важный момент доказательства: последовательность  $\{x^{(k)}\}$ , порождённая рассматриваемым алгоритмом, является монотонно невозрастающей относительно « $\triangleleft$ », т. е.

$$x^{(k)} \triangleleft x^{(k-1)} \quad (12.63)$$

для всех  $k = 1, 2, \dots$

Действительно, комбинируя (12.61) и (12.62), нетрудно получить

$$D^{(k-1)} \left( x^{(k)} - x^{(k-1)} \right) \ll 0.$$

Из Предложения 12.3.6 следует, что для всех  $D^{(k-1)}$  имеют место включения

$$D^{(k-1)} \in \left( \begin{array}{cc} (\text{pro } C)^+ & (\text{pro } C)^- \\ (\text{pro } C)^- & (\text{pro } C)^+ \end{array} \right) - I.$$

Отсюда, с учётом (12.59), следует (12.63).

Мы доказали, таким образом, что

$$\xi \sqsubseteq x^{(k)} \sqsubseteq x^{(k-1)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (12.64)$$

В общем случае связь между порядком и топологией в частично упорядоченном линейном топологическом пространстве может быть весьма сложной, но, к счастью, в конечномерном пространстве ситуация решительно упрощается: любая последовательность, монотонная и ограниченная относительно частичного порядка, согласованного с линейной структурой пространства, всегда имеет (топологический) предел.<sup>1</sup> Следовательно, из (12.64) мы можем заключить о существовании некоторого предела  $x^*$  последовательности  $\{x^{(k)}\}$ , порождаемой алгоритмом SubDiff1. Значение этого предела является решением уравнения в рекуррентной форме

$$x^* = x^* - (D^*)^{-1}(\mathcal{F}(x^*)),$$

где матрица  $D^* \in \partial\mathcal{F}(x^*)$  неособенна в силу (12.48) и условий доказываемой Теоремы. Итак,  $\mathcal{F}(x^*) = 0$ .

Тот факт, что в случае своей сходимости при  $\tau = 1$  субдифференциальный метод Ньютона выдаёт точное решение за конечное число шагов, следует из представления (12.41), т. е. из полиэдральности отображения  $\mathcal{F}$ : как только текущее  $(k-1)$ -е приближение алгоритма оказывается с точным решением  $x^*$  на одном аффинном куске графика  $\mathcal{F}$ , следующее  $k$ -е приближение обязано быть равным  $x^*$  по самому построению метода и в силу выбора релаксационного параметра. ■

Важнейший частный случай применения алгоритмов SubDiff1 и SubDiff2 — нахождение формальных решений систем (12.4) и (12.5) с правильными интервальными матрицами  $C$ . При этом на  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$  частичный порядок « $\subseteq$ » переходит в обычный порядок по включению « $\subseteq$ », на  $\mathbb{R}^{2n}$  частичный порядок « $\ll$ » совпадает с покомпонентным упорядочением « $\leq$ », и эти упрощения позволяют более детально исследовать поведение рассматриваемых алгоритмов. В частности, для правильной матрицы  $C$  сходимость методов SubDiff1 и SubDiff2 с некоторым специальным начальным приближением может быть обоснована и при  $0 < \tau < 1$ .

Именно, в случае, когда все элементы  $C$  правильны, начальные приближения для SubDiff1 и SubDiff2 имеет смысл полагать равными решениям некоторых специальных систем уравнений:

<sup>1</sup>Это факт часто формулируют в следующем эквивалентном виде: в конечномерном пространстве всякий конус является *правильным* [13, 15].



- в качестве начального вектора  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^{2n}$  алгоритма **SubDiff1** возьмём решение «средней»  $2n \times 2n$ -системы линейных уравнений

$$(I - (\text{mid } C)^\sim) x = \text{sti}(\mathbf{d}),$$

- в качестве начального вектора  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^{2n}$  алгоритма **SubDiff2** возьмём решение «средней»  $2n \times 2n$ -системы линейных уравнений

$$(\text{mid } C)^\sim x = \text{sti}(\mathbf{d}).$$

Тогда, например, в алгоритме **SubDiff1** специальный выбор начального приближения  $x^{(0)}$  влечёт следующую цепочку соотношений

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x^{(0)}) &= \text{sti}(C \text{ sti}^{-1}(x^{(0)})) - x^{(0)} + \text{sti}(\mathbf{d}) \\ &\geq \text{sti}((\text{mid } C) \text{ sti}^{-1}(x^{(0)})) - x^{(0)} + \text{sti}(\mathbf{d}) && \text{из монотонности} \\ & && \text{по включению} \\ &= (\text{mid } C)^\sim x^{(0)} - x^{(0)} + \text{sti}(\mathbf{d}) && \text{в силу свойства (12.19)} \\ &= ((\text{mid } C)^\sim - I) x^{(0)} + \text{sti}(\mathbf{d}) = 0. \end{aligned}$$

Поэтому  $\mathcal{F}(x^{(0)}) \geq 0$ , и далее неравенство

$$\mathcal{F}(x^{(k)}) \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (12.62)$$

легко обосновывается по индукции. Завершение доказательства сходимости алгоритма **SubDiff1** дословно повторяет те рассуждения, которые приведены выше для случая  $\tau = 1$  с единственной разницей, что при значениях  $\tau < 1$  сходимость эта уже не является конечной. Ясно также, что всё сказанное верно и для алгоритма **SubDiff2**.

Заметим также, что никто не препятствует нам брать специальное начальное приближение в виде решения «средней системы» для алгоритмов **SubDiff1** и **SubDiff2** даже при  $\tau = 1$ . Это уменьшает на единицу количество итераций, необходимых для сходимости к решению, хотя и не снижает общего объёма вычислительной работы.

Длительный опыт работы с алгоритмами **SubDiff1** и **SubDiff2** показывает, что они уверенно находят решения систем уравнений (12.31)–(12.32) и (12.33)–(12.34) даже тогда, когда в интервальной матрице  $C$  правильные и неправильные элементы произвольно перемешаны, и условие (12.35) не выполняется. То есть, **SubDiff1** и **SubDiff2** пригодны для отыскания формальных решений интервальных линейных систем самого общего вида (хотя при этом алгоритмы нельзя уже называть «субдифференциальными»).

Возможное объяснение этого феномена заключается в том, что индуцированные отображения  $\mathcal{F} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  и  $\mathcal{G} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ , определённые посредством (12.32) и (12.34), не являются столь уж сильно невыпуклыми, как это можно было бы ожидать при нарушении условия построчной однородности (12.35). Глобально они, конечно

же, невыпуклы. Но вот локально, на области, содержащей «путь» итераций алгоритма от начального приближения к решению, отображения  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{G}$  могут оказаться выпуклыми, и этого будет вполне достаточно для хорошей сходимости субдифференциального метода Ньютона! Вспомним области дистрибутивности, введённые Гарденьесом и Трепато: внутри каждой из таких областей желанная выпуклость действительно имеет место.

Замечательные качества субдифференциальных ньютоновских методов в применении к интервальным линейным системам получили определённый резонанс среди исследователей, и вслед за автором их сходимость для ИСЛАУ частного вида в работе [30] показал А. Ноймайер, который использовал в доказательствах классическую технику матричных преобразований.

## 12.5в Вычисление субдифференциала

В этом пункте мы опишем методику вычисления субдифференциалов  $\partial\mathcal{F}(x)$  и  $\partial\mathcal{G}(x)$ , необходимую при практической реализации субдифференциальных методов Ньютона `SubDiff1` и `SubDiff2`.

Субдифференциал  $\partial\mathcal{F}(x)$ , вообще говоря, не совпадает с интервальной матрицей из правой части оценки (12.50), образованной интервалами односторонних частных производных, и то же самое верно в отношении  $\partial\mathcal{G}(x)$ . Для некоторых интервальных матриц  $\mathbf{C}$  равенство на месте включения (12.50) может не выполняться даже на множестве аргументов  $x$  ненулевой меры. Тем не менее, мы можем выписать явный вид субдифференциалов  $\partial\mathcal{F}(x)$  и  $\partial\mathcal{G}(x)$  в самом общем случае.

Вспомним определение стандартного погружения `sti` интервального пространства  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$  в линейное пространство  $\mathbb{R}^{2n}$ : для интервального вектора  $\mathbf{x} \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} (\text{sti}(\mathbf{x}))_i &= -\underline{x}_i, & \text{если } i \in \{1, 2, \dots, n\}, \\ (\text{sti}(\mathbf{x}))_i &= \bar{x}_i, & \text{если } i \in \{n+1, \dots, 2n\}. \end{aligned}$$

Обозначая через  $e_i$  вектор, имеющий  $i$ -ой компонентой 1, а остальные нули, и привлекая известный результат о субдифференциале суммы [19, 21, 22], найдём

$$\begin{aligned} \partial\mathcal{F}_i(x) &= \partial \left( (\text{sti}(\mathbf{C} \text{sti}^{-1}(x)))_i - x_i + (\text{sti}(\mathbf{d}))_i \right) \\ &= \partial \left( -\sum_{j=1}^n \underline{c}_{ij}[-x_j, x_{j+n}] - x_i + (\text{sti}(\mathbf{d}))_i \right) \\ &= -\partial \sum_{j=1}^n \underline{c}_{ij}[-x_j, x_{j+n}] - e_i \\ &= -\sum_{j=1}^n \partial \left( \underline{c}_{ij}[-x_j, x_{j+n}] \right) - e_i \end{aligned} \tag{12.65}$$

для  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , и

$$\begin{aligned}
 \partial \mathcal{F}_i(x) &= \partial \left( (\text{sti}(\mathbf{C} \text{ sti}^{-1}(x)))_i - x_i + (\text{sti}(\mathbf{d}))_i \right) \\
 &= \partial \left( \sum_{j=1}^n \overline{\mathbf{c}_{ij}[-x_j, x_{j+n}]} - x_i + (\text{sti}(\mathbf{d}))_i \right) \\
 &= \partial \sum_{j=1}^n \overline{\mathbf{c}_{ij}[-x_j, x_{j+n}]} - e_i \\
 &= \sum_{j=1}^n \partial \left( \overline{\mathbf{c}_{ij}[-x_j, x_{j+n}]} \right) - e_i
 \end{aligned} \tag{12.66}$$

для  $i \in \{n+1, \dots, 2n\}$ . Таким образом, вычисление субдифференциала  $\partial \mathcal{F}_i(x)$  сводится к вычислению субдифференциалов простейших отображений  $\mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  следующих двух видов

$$(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) \mapsto \underline{\mathbf{c}_{ij} \cdot [-x_j, x_{j+n}]}, \tag{12.67}$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) \mapsto \overline{\mathbf{c}_{ij} \cdot [-x_j, x_{j+n}]}, \tag{12.68}$$

где  $\mathbf{c}_{ij} \in \mathbb{KR}$ . Ниже, чтобы не загромождать изложение, имеет смысл не выписывать «немые» компоненты аргумента  $x$ , никак не влияющие на значения этих отображений, так что вместо (12.67)–(12.68) мы будем рассматривать

$$(x_j, x_{i+n}) \mapsto \underline{\mathbf{c}_{ij} \cdot [-x_j, x_{j+n}]},$$

$$(x_j, x_{j+n}) \mapsto \overline{\mathbf{c}_{ij} \cdot [-x_j, x_{j+n}]},$$

где  $\mathbf{c}_{ij}$  — некоторые интервалы из  $\mathbb{KR}$ .

Воспользовавшись формулами Лакеева (1.70) и тем фактом, что  $(-x)^- = x^+$  и  $(-x)^+ = x^-$ , получим

$$\begin{aligned}
 \partial \left( \underline{\mathbf{c}_{ij}[-x_j, x_{j+n}]} \right) &= \\
 &= \underline{\mathbf{c}_{ij}^+} \partial(x_j^-) + \overline{\mathbf{c}_{ij}^-} \partial(x_{j+n}^-) - \partial(\max\{\overline{\mathbf{c}_{ij}^+} x_j^+, \underline{\mathbf{c}_{ij}^-} x_{j+n}^+\}),
 \end{aligned} \tag{12.69}$$

$$\begin{aligned}
 \partial \left( \overline{\mathbf{c}_{ij}[-x_j, x_{j+n}]} \right) &= \\
 &= \partial(\max\{\overline{\mathbf{c}_{ij}^+} x_{j+n}^+, \underline{\mathbf{c}_{ij}^-} x_j^+\}) - \underline{\mathbf{c}_{ij}^+} \partial(x_{j+n}^-) - \overline{\mathbf{c}_{ij}^-} \partial(x_j^-).
 \end{aligned} \tag{12.70}$$

Известно, что субдифференциал функции максимума в некоторой точке есть замыкание выпуклой оболочки объединения субдифференциалов тех функций, на которых рассматриваемый максимум достигается в данной точке (см., например,

[19, 21, 22]. Привлекая дополнительно определения положительной и отрицательной частей числа, легко можем вывести, что

$$\partial(x_j^+) = \begin{cases} (0, 0), & \text{если } x_j < 0, \\ ([0, 1], 0), & \text{если } x_j = 0, \\ (1, 0), & \text{если } x_j > 0, \end{cases} \quad (12.71)$$

$$\partial(x_j^-) = \begin{cases} (-1, 0), & \text{если } x_j < 0, \\ ([-1, 0], 0), & \text{если } x_j = 0, \\ (0, 0), & \text{если } x_j > 0, \end{cases} \quad (12.72)$$

и

$$\partial(x_{j+n}^+) = \begin{cases} (0, 0), & \text{если } x_{j+n} < 0, \\ (0, [0, 1]), & \text{если } x_{j+n} = 0, \\ (0, 1), & \text{если } x_{j+n} > 0, \end{cases} \quad (12.73)$$

$$\partial(x_{j+n}^-) = \begin{cases} (0, -1), & \text{если } x_{j+n} < 0, \\ (0, [-1, 0]), & \text{если } x_{j+n} = 0, \\ (0, 0), & \text{если } x_{j+n} > 0. \end{cases} \quad (12.74)$$

В силу сказанного вычисление первых двух слагаемых в выражении (12.69) и последних двух слагаемых в (12.70) не представляет трудностей.

Далее, вычисление оставшихся членов сумм (12.69) и (12.70) требует предварительного нахождения и сравнения значений  $\overline{c}_{ij}^+ x_j^+$  и  $\underline{c}_{ij}^- x_{j+n}^+$ ,  $\overline{c}_{ij}^+ x_{j+n}^+$  и  $\underline{c}_{ij}^- x_j^+$  соответственно. Но величины  $\underline{c}_{ij}^-$ ,  $\overline{c}_{ij}^+$ ,  $x_j^+$ ,  $x_{j+n}^+$  все неотрицательны, и потому, например, из неравенства  $\overline{c}_{ij}^+ x_j^+ > \underline{c}_{ij}^- x_{j+n}^+$  следует  $x_j^+ > 0$ , так что  $\partial(x_j^+) = (1, 0)$ . Аналогично,

$$\overline{c}_{ij}^+ x_j^+ < \underline{c}_{ij}^- x_{j+n}^+ \Rightarrow \partial(x_{j+n}^+) = (0, 1),$$

$$\overline{c}_{ij}^+ x_{j+n}^+ > \underline{c}_{ij}^- x_j^+ \Rightarrow \partial(x_{j+n}^+) = (0, 1),$$

$$\overline{c}_{ij}^+ x_{j+n}^+ < \underline{c}_{ij}^- x_j^+ \Rightarrow \partial(x_j^+) = (1, 0).$$

С учётом выписанных равенств мы можем заключить

$$\partial(\max\{\overline{c}_{ij}^+ x_j^+, \underline{c}_{ij}^- x_{j+n}^+\})$$

$$= \begin{cases} (\overline{c}_{ij}^+, 0), & \text{если } \overline{c}_{ij}^+ x_j^+ > \underline{c}_{ij}^- x_{j+n}^+, \\ \text{выпуклая оболочка} \\ \overline{c}_{ij}^+ \partial(x_j^+) \text{ и } \underline{c}_{ij}^- \partial(x_{j+n}^+), & \text{если } \overline{c}_{ij}^+ x_j^+ = \underline{c}_{ij}^- x_{j+n}^+, \\ (0, \underline{c}_{ij}^-), & \text{если } \overline{c}_{ij}^+ x_j^+ < \underline{c}_{ij}^- x_{j+n}^+, \end{cases} \quad (12.75)$$

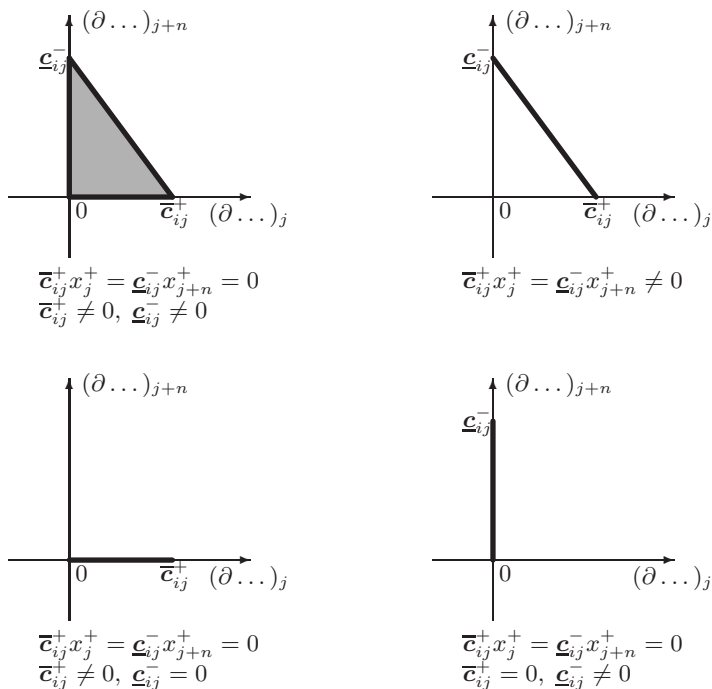


Рис. 12.4. Различные конфигурации субдифференциала  $\partial(\max\{\bar{c}_{ij}^+x_j^+, \underline{c}_{ij}^-x_{j+n}^+\})$  в точках, где  $\bar{c}_{ij}^+x_j^+ = \underline{c}_{ij}^-x_{j+n}^+$ .

и

$$\partial(\max\{\bar{c}_{ij}^+x_{j+n}^+, \underline{c}_{ij}^-x_j^+\})$$

$$= \begin{cases} (0, \bar{c}_{ij}^+), & \text{если } \bar{c}_{ij}^+x_{j+n}^+ > \underline{c}_{ij}^-x_j^+, \\ \text{выпуклая оболочка} \\ \bar{c}_{ij}^+\partial(x_{j+n}^+) \text{ и } \underline{c}_{ij}^-\partial(x_j^+) & \text{, если } \bar{c}_{ij}^+x_{j+n}^+ = \underline{c}_{ij}^-x_j^+, \\ (\underline{c}_{ij}^-, 0), & \text{если } \bar{c}_{ij}^+x_{j+n}^+ < \underline{c}_{ij}^-x_j^+. \end{cases} \quad (12.76)$$

Остаётся лишь уточнить вид искомого субдифференциала (12.75) и (12.76) в точках, где достигаются равенства  $\bar{c}_{ij}^+x_j^+ = \underline{c}_{ij}^-x_{j+n}^+$  и  $\bar{c}_{ij}^+x_{j+n}^+ = \underline{c}_{ij}^-x_j^+$ . Разбор всех возможных ситуаций является при этом несложным, хотя и довольно хлопотным делом. Например, на Рис. 12.4 изображены различные конфигурации субдифференциала  $\partial(\max\{\bar{c}_{ij}^+x_j^+, \underline{c}_{ij}^-x_{j+n}^+\})$ . Похоже выглядит и  $\partial(\max\{\bar{c}_{ij}^+x_{j+n}^+, \underline{c}_{ij}^-x_j^+\})$ .

В действительности, нам нужно весьма немного: вычислительная схема субдифференциального метода Ньютона требует нахождения какого-нибудь одного (безразлично, какого именно) субградиента отображения  $\mathcal{F}(x)$ , а для этого нам достаточно

предъявить по единственному субградиенту для функций

$$\max\{\bar{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_j^+, \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_{j+n}^+\} \quad \text{и} \quad \max\{\bar{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_{j+n}^+, \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_j^+\}.$$

Соответственно, нам нужна только какая-нибудь одна точка из выпуклой оболочки  $\bar{\mathbf{c}}_{ij}^+ \partial(x_j^+)$  и  $\underline{\mathbf{c}}_{ij}^- \partial(x_{j+n}^+)$  при  $\bar{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_j^+ = \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_{j+n}^+$ , и какая-нибудь одна точка из выпуклой оболочки  $\bar{\mathbf{c}}_{ij}^+ \partial(x_{j+n}^+)$  и  $\underline{\mathbf{c}}_{ij}^- \partial(x_j^+)$  при  $\bar{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_{j+n}^+ = \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_j^+$ . Нетрудно понять, что в первом случае такой точкой может служить, например,

$$\left( \frac{1}{2} \bar{\mathbf{c}}_{ij}^+, \frac{1}{2} \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- \right)$$

(см. Рис. 12.4), а во втором —

$$\left( \frac{1}{2} \underline{\mathbf{c}}_{ij}^-, \frac{1}{2} \bar{\mathbf{c}}_{ij}^+ \right).$$

В целом имеем

$$\partial(\max\{\bar{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_j^+, \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_{j+n}^+\}) \ni \begin{cases} (\bar{\mathbf{c}}_{ij}^+, 0), & \text{если } \bar{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_j^+ > \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_{j+n}^+, \\ (\frac{1}{2} \bar{\mathbf{c}}_{ij}^+, \frac{1}{2} \underline{\mathbf{c}}_{ij}^-), & \text{если } \bar{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_j^+ = \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_{j+n}^+, \\ (0, \underline{\mathbf{c}}_{ij}^-), & \text{если } \bar{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_j^+ < \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_{j+n}^+, \end{cases} \quad (12.77)$$

$$\partial(\max\{\bar{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_{j+n}^+, \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_j^+\}) \ni \begin{cases} (0, \bar{\mathbf{c}}_{ij}^+), & \text{если } \bar{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_{j+n}^+ > \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_j^+, \\ (\frac{1}{2} \underline{\mathbf{c}}_{ij}^-, \frac{1}{2} \bar{\mathbf{c}}_{ij}^+), & \text{если } \bar{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_{j+n}^+ = \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_j^+, \\ (\underline{\mathbf{c}}_{ij}^-, 0), & \text{если } \bar{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_{j+n}^+ < \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_j^+. \end{cases} \quad (12.78)$$

На практике вычисление искомого субградиента для  $\mathcal{F}(x)$  можно выполнить одновременно с вычислением значений этого отображения, опираясь на формулы (12.65)–(12.74), (12.77) и (12.78).

## 12.6 Численные примеры

В этом параграфе мы приводим результаты численных экспериментов с субдифференциальным методом Ньютона SubDiff2.

**Пример 12.6.1** Для интервальной линейной системы (5.12)

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 1] \\ [-1, 2] & [2, 4] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [-2, 2] \end{pmatrix}$$

При значении  $\tau = 1$  алгоритм SubDiff2 находит всего за 2 итерации точное формальное решение — правильный интервальный вектор

$$\begin{pmatrix} [-0.333 \dots, 0.333 \dots] \\ [-0.333 \dots, 0.333 \dots] \end{pmatrix},$$

который, как можно видеть из Рис. 5.1 (стр. 262), является максимальной по включению внутренней оценкой допускового множества решений системы (5.12).

Для интервальной линейной системы (5.12) с дуализованной матрицей

$$\begin{pmatrix} [4, 2] & [1, -2] \\ [2, -1] & [4, 2] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [-2, 2] \end{pmatrix}$$

алгоритм SubDiff2 сходится к точному формальному решению

$$\begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 1] \end{pmatrix}$$

при  $\tau = 1$  также за 2 итерации. Интересно также отметить, что за эти же 2 итерации алгоритм SubDiff2 надёжно находит формальные решения и для любых других ИСЛАУ, получающихся из системы (5.12) дуализацией некоторых элементов матрицы или вектора правой части, т. е. при любых распределениях правильных и неправильных элементов в ИСЛАУ. ■

**Пример 12.6.2** В нём алгоритм SubDiff2 расходится.

Для интервальной линейной системы

$$\begin{pmatrix} [3, 4] & [5, 6] \\ [-1, 1] & [-3, 1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-3, 4] \\ [-1, 2] \end{pmatrix}$$

алгоритм SubDiff2 с  $\tau = 1$  порождает осциллирующую (начиная со второго шага) последовательность, которая попеременно принимает значения

$$\begin{pmatrix} [-0.3333 \dots, 1.0] \\ [-0.3333 \dots, 0.0] \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} [0.0, 0.5] \\ [-0.5, 0.3333 \dots] \end{pmatrix}$$

в зависимости от чётности-нечётности номера шага. Она, очевидно, не имеет никакого предела. Уменьшение релаксационного параметра  $\tau$  также не приводит к сходимости алгоритма.

Возможно, что причиной этого является отсутствие у системы формального решения. Отметим, что матрица ИСЛАУ в последней строке содержит нулевую точечную строку и потому в целом является особенной. ■

**Пример 12.6.3** Для интервальной линейной  $7 \times 7$ -системы

$$\begin{pmatrix} [4, 6] & [-9, 0] & [0, 12] & [2, 3] & [5, 9] & [-23, -9] & [15, 23] \\ [0, 1] & [6, 10] & [-1, 1] & [-1, 3] & [-5, 1] & [1, 15] & [-3, -1] \\ [0, 3] & [-20, -9] & [12, 77] & [-6, 30] & [0, 3] & [-18, 1] & [0, 1] \\ [-4, 1] & [-1, 1] & [-3, 1] & [3, 5] & [5, 9] & [1, 2] & [1, 4] \\ [0, 3] & [0, 6] & [0, 20] & [-1, 5] & [8, 14] & [-6, 1] & [10, 17] \\ [-7, -2] & [1, 2] & [7, 14] & [-3, 1] & [0, 2] & [3, 5] & [-2, 1] \\ [-1, 5] & [-3, 2] & [0, 8] & [1, 11] & [-5, 10] & [2, 7] & [6, 82] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-10, 95] \\ [35, 14] \\ [-6, 2] \\ [30, 7] \\ [4, 95] \\ [-6, 46] \\ [-2, 65] \end{pmatrix}$$

из работы [33] алгоритм SubDiff2 успешно вычисляет формальное решение

$$\begin{pmatrix} [-1.22474317578, 0.50542987670] \\ [18.26444337096, -9.51750410300] \\ [-0.02818650587, 1.16075521933] \\ [16.40769576636, -14.45553419850] \\ [-1.34356527337, 3.98821848038] \\ [-3.52893852104, 4.54345836822] \\ [5.43086236811, -0.67400838683] \end{pmatrix}$$

за 9 итераций при значении релаксационного параметра  $\tau = 1$ .

Но при сужении (7,7)-элемента матрицы ИСЛАУ сходимость субдифференциального метода Ньютона для  $\tau = 1$  пропадает, начиная с  $\mathbf{a}_{77} = [8, 82]$ , и восстанавливается лишь при  $\mathbf{a}_{77} = [12.8, 82]$ . С другой стороны, уменьшив релаксационный параметр до  $\tau = 0.8$ , мы добьёмся сходимости алгоритма SubDiff2 к формальному решению во всём диапазоне «неблагоприятных» значений элемента  $\mathbf{a}_{77}$ , хотя она и не будет в этом случае конечной. ■

Дальнейшие численные примеры можно найти в последнем параграфе этой главы.

## 12.7 Стационарные одношаговые итерационные методы

Цель этого раздела — развитие стационарных одношаговых итерационных методов для нахождения формальных решений интервальных линейных систем вида

$$Cx = d. \quad (12.5)$$

Они успешно решаются с помощью субдифференциального метода Ньютона, но развитие традиционных стационарных итераций для нахождения формальных решений также имеет некоторый смысл.

Мы можем рассматривать систему (12.5) как «полигон» для отработки подходов к решению более общих систем уравнений, например, вида

$$Cx = d(x),$$

где  $\mathbf{d} : \mathbb{KR}^n \rightarrow \mathbb{KR}^n$  — какое-то ограниченное отображение, т. е. такое, что  $\|\mathbf{d}(\mathbf{x})\| \leq \text{const}$ . В стационарных итерационных методах для нахождения формальных решений ИСЛАУ легче контролировать гарантированный внешний или внутренний способ оценивания различных множеств решений ИСЛАУ. Стационарные итерационные методы, основанные на теоремах о сжимающих отображениях, помимо вычисления решения обеспечивают ещё и доказательство его единственности, чего не даёт субдифференциальный метод Ньютона. Наконец, несмотря на очень хорошее поведение субдифференциального метода Ньютона на практике, его теоретическое обоснование для самого общего случая пока не выполнено.

Ниже будет полезно следующее терминологическое



**Определение 12.7.1** Интервальную матрицу  $\mathbf{C} \in \mathbb{K}\mathbb{R}^{n \times n}$  будем называть неособенной (регулярной, невырожденной), если неособенными являются все точечные матрицы из её правильной проекции  $\text{pro } \mathbf{C}$ .

### 12.7а Диагональное расщепление матрицы системы

Как находить формальные решения ИСЛАУ вида (12.5) с матрицами, имеющими произвольное распределение правильных и неправильных элементов? В общем случае для этой цели применима, например, универсальная схема метода простой итерации со всеми её многочисленными модификациями — Якоби, Гаусса-Зейделя и т. п. (см., к примеру, [20]), хотя получаемая в подобных алгоритмах сходимость является качественно более медленной, чем в субдифференциальном (квазидифференциальном) методе Ньютона. При реализации подобных стационарных методов нередко можно итерировать непосредственно в интервальном пространстве  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ , даже не погружая его в линейное пространство.

В соответствии с общей схемой одношаговых стационарных итерационных методов исходное уравнение (12.5) предварительно должно быть приведено к рекуррентному виду

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}(\mathbf{x}) \quad (12.79)$$

с некоторым оператором  $\mathbf{T} : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$ , а затем, после выбора начального приближения  $\mathbf{x}^{(0)}$ , запускается итерирование

$$\mathbf{x}^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{T}(\mathbf{x}^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (12.80)$$

При выполнении ряда специальных условий на оператор перехода  $\mathbf{T}$  (когда он является сжатием и т. п.) и на начальное приближение  $\mathbf{x}^{(0)}$  последовательность  $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$  сходится к неподвижной точке оператора  $\mathbf{T}$ , т. е. к искомому решению уравнения (12.5). Но, в отличие от традиционного точечного случая, приведение ИСЛАУ (12.5) к виду (12.79) из-за недостаточных алгебраических свойств интервальных арифметик является не вполне тривиальной задачей. Проблема состоит в том, что по меньшей мере два члена с переменной  $\mathbf{x}$  в формуле (12.79), которая эквивалентна  $\mathbf{x} \ominus \mathbf{T}(\mathbf{x}) = 0$ , должны в итоге свернуться в выражение  $\mathbf{C}\mathbf{x} \ominus \mathbf{d}$ , содержащее лишь одно вхождение переменной  $\mathbf{x}$ . Это требует специальных приёмов, так как из-за отсутствия дистрибутивности в интервальных арифметиках у нас нет полноценной возможности приводить подобные члены в преобразованиях интервальных буквенных выражений.

Один из простейших способов приведения интервальной линейной системы уравнений  $\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{d}$  к рекуррентному виду состоит в следующем. Перепишем её в развёрнутом виде, т. е. как

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} x_j = d_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Предполагая, что в матрице  $\mathbf{C} = (c_{ij})$  диагональные элементы  $c_{ii}$  обратимы, т. е. что  $0 \notin \text{pro } c_{ii}$ , выразим неизвестную переменную  $x_i$  из  $i$ -го уравнения системы:

$$x_i = \left( d_i \ominus \sum_{j \neq i} c_{ij} x_j \right) \oslash c_{ii}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Если взять

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = (\mathbf{T}_1(\mathbf{x}), \mathbf{T}_2(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{T}_n(\mathbf{x}))^\top,$$

где

$$\mathbf{T}_i(\mathbf{x}) = \left( \mathbf{d}_i \ominus \sum_{j \neq i} \mathbf{c}_{ij} \mathbf{x}_j \right) \oslash \mathbf{c}_{ii}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

то получим искомую рекуррентную форму интервальной системы линейных алгебраических уравнений. Псевдокод соответствующего итерационного процесса представлен в Табл. 12.2, где вспомогательная переменная  $k$  — это счётчик числа итераций. Мы будем называть его итерационным методом, основанным на *диагональном расщеплении* матрицы системы.

Таблица 12.2. Итерационный метод вычисления формального решения ИСЛАУ, основанный на диагональном расщеплении матрицы системы

```

k ← 0;
выбираем начальное приближение  $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n$ ;
DO WHILE ( метод не сошёлся )
  DO FOR i = 1 TO n
    
$$\mathbf{x}_i^{(k+1)} \leftarrow \left( \mathbf{d}_i \ominus \sum_{j \neq i} \mathbf{c}_{ij} \mathbf{x}_j^{(k)} \right) \oslash \mathbf{c}_{ii}$$

  END DO
  k ← k + 1;
END DO

```

Каковы условия сходимости метода, задаваемого Табл. 12.2? Достаточные условия сходимости даются, например, теоремой В.С. Зюзина (теорема 12.4.1, с. 622).

## 12.76 Треугольное расщепление матрицы системы

Рассмотрим дальнейшее развитие идеи предыдущего раздела. Для приведения интервальной линейной системы уравнений  $\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{d}$  к рекуррентному виду воспользуемся *треугольным расщеплением* интервальной матрицы  $\mathbf{C}$ , т. е. её представлением в виде

$$\mathbf{C} = \mathbf{G} + \mathbf{H},$$

где  $\mathbf{G} = (\mathbf{g}_{ij})$  — нижняя треугольная матрица и  $\mathbf{H} = (\mathbf{h}_{ij})$  — строго верхняя треугольная матрица, составленные из элементов  $\mathbf{c}_{ij}$  исходной матрицы системы:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{ij} &= \mathbf{c}_{ij} \quad \text{при } i \geq j, & \mathbf{g}_{ij} &= 0 \quad \text{при } i < j, \\ \mathbf{h}_{ij} &= 0 \quad \text{при } i \geq j, & \mathbf{h}_{ij} &= \mathbf{c}_{ij} \quad \text{при } i < j. \end{aligned}$$

Тогда справедливо тождество

$$Cx = Gx + Hx \quad \text{для любого } x \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n,$$

которое достигается за счёт того, что в матрицах  $G$  и  $H$  ненулевые элементы взаимно дополнительные (также говорят, что  $G$  и  $H$  образуют *дизъюнктное разложение* для  $C$ ).

Как следствие, от интервальной линейной системы уравнений

$$Cx = d, \tag{12.5}$$

мы можем перейти к эквивалентной системе

$$Gx + Hx = d,$$

или

$$Gx = d \ominus Hx.$$

Напомним, что мы умеем обращать оператор умножения на треугольные интервальные матрицы с обратимой диагональю, см. §12.1. Если обозначить этот обратный оператор условно через  $G^{-1}$ , то получим

$$x = G^{-1}(d \ominus Hx),$$

что совпадает с желаемой рекуррентной формой (12.79). Соответственно, итерационный процесс для вычисления формального решения можно организовать по формуле

$$x^{(k+1)} \leftarrow G^{-1}(d \ominus Hx^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Таблица 12.3. Алгоритм TrnSplit для нахождения формальных решений ИСЛАУ, основанный на треугольном расщеплении матрицы системы

```

k ← 0;
выбираем начальное приближение x(0);
DO WHILE ( метод не сошёлся )
  DO FOR i = 1 TO n
    xi(k+1) ← ( di ⊖ ∑j=1i-1 cijxj(k+1) ⊖ ∑j=i+1n cijxj(k) ) ⊙ cii
  END DO
  k ← k + 1;
END DO

```

Псевдокод построенного выше итерационного процесса с треугольным расщеплением матрицы  $C$ , который мы называем аббревиатурой **TrnSplit**, имеет в  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$  вид, представленный в Табл. 12.3. Как и ранее, переменная  $k$  — счётчик числа итераций.

Для обычных точечных систем линейных уравнений стационарный одношаговый метод, основанный на выделении в матрице системы треугольного слагаемого, называется, как известно, методом Гаусса-Зейделя. Поэтому логично было бы назвать алгоритм **TrnSplit** «интервальным методом Гаусса-Зейделя». Но это название уже закрепилось за другим итерационным процессом (см. §7.3), что и объясняет нашу терминологию.

Исследование сходимости алгоритма **TrnSplit** было осуществлено А.Ю. Карлюк под руководством автора книги в работе [11], и её основным итогом является следующий результат:

**Теорема 12.7.1** Пусть для интервальной матрицы  $C$  системы уравнений (12.5) точечные квадратные  $n \times n$ -матрицы  $D$ ,  $L$ ,  $R$  определяются формулами

$$\begin{aligned} D &= \text{diag} \{ |\text{inv } c_{11}|, |\text{inv } c_{22}|, \dots, |\text{inv } c_{nn}| \}, \\ L &= (l_{ij}), \quad \text{где } l_{ij} = \begin{cases} |c_{ij}|, & \text{если } i > j, \\ 0, & \text{если } i \leq j, \end{cases} \\ R &= (r_{ij}), \quad \text{где } r_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \geq j, \\ |c_{ij}|, & \text{если } i < j. \end{cases} \end{aligned}$$

Если матрица

$$Q := \sum_{j=0}^{n-1} (DL)^j DR = (I - DL)^{-1} DR$$

такова, что  $\rho(Q) < 1$ , то итерационный процесс **TrnSplit** сходится к единственному формальному решению  $\mathbf{x}^*$  системы (12.5) из любого начального приближения  $\mathbf{x}^{(0)}$ . При этом справедлива оценка

$$\text{Dist}(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^{(k)}) \leq \left( (I - Q)^{-1} - \sum_{j=0}^{k-1} Q^j \right) \cdot \text{Dist}(\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}).$$

Для того, чтобы имело место  $\rho(Q) < 1$ , достаточно, например, выполнения следующего условия на интервальную матрицу  $C$  системы (12.5): рекуррентно вычисляемые числа  $s_1, s_2, \dots, s_n$ , такие что

$$s_i = \frac{1}{\langle \text{pro } c_{ii} \rangle} \left( \sum_{j=1}^{i-1} |c_{ij}| s_j + \sum_{j=i+1}^n |c_{ij}| \right), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (12.81)$$

все строго меньше единицы. В свою очередь, условия (12.81) заведомо выполняются для интервальных матриц со свойством диагонального преобладания, т. е. когда

$$\langle \text{pro } c_{ii} \rangle > \sum_{j \neq i} |c_{ij}| \quad \text{для всех } i = 1, 2, \dots, n.$$

### 12.7в Общий подход: расщепление матрицы системы

Рассмотрим теперь возможные подходы к конструированию итерационных схем для решения уравнения (12.5) с общей точки зрения. В двух предыдущих разделах, фактически, использовалось представление

$$C\mathbf{x} = \mathcal{G}(\mathbf{x}) + \mathcal{H}(\mathbf{x}), \quad (12.82)$$

где

- i) функция  $\mathcal{G} : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$  легко обратима, т. е. для неё может быть несложно построена обратная функция  $\mathcal{G}^{-1} : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$ , такая что  $\mathcal{G}^{-1}(\mathcal{G}(\mathbf{x})) = \mathcal{G}(\mathcal{G}^{-1}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ ;
- ii) функция  $\mathcal{H} : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$  легко вычислима.

**Определение 12.7.2** Пусть  $\psi : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$  — оператор в  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ , задаваемый умножением на интервальную матрицу  $C$ , т. е.  $\psi(\mathbf{x}) = C\mathbf{x}$ . Представление  $\psi$  в виде (12.82), удовлетворяющем для любых  $\mathbf{x} \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n$  выписанным выше условиям i)–ii), будем называть расщеплением оператора  $\psi$  умножения на матрицу, или, коротко, расщеплением матрицы  $C$ .

Если нам известно некоторое расщепление матрицы  $C$  в интервальной линейной системе

$$C\mathbf{x} = \mathbf{d}, \quad (12.5)$$

то мы можем перейти к эквивалентному уравнению

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}) + \mathcal{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{d},$$

или

$$\mathbf{x} = \mathcal{G}^{-1}(\mathbf{d} \ominus \mathcal{H}(\mathbf{x})),$$

что совпадает с желаемой формой (12.79). Соответственно, итерационный процесс для вычисления формального решения можно организовать по формуле

$$\mathbf{x}^{(k+1)} \leftarrow \mathcal{G}^{-1}(\mathbf{d} \ominus \mathcal{H}(\mathbf{x}^{(k)})), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (12.83)$$

Далее мы ограничимся рассмотрением простейшего случая, когда  $\mathcal{G}, \mathcal{H} : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$  либо сами представляют собой умножения на некоторые интервальные матрицы, либо являются близкими по виду отображениями.

Пусть в ИСЛАУ (12.5) интервальная матрица  $C$  неособенна. Тогда существуют по крайней мере две возможности для расщепления (12.82) оператора умножения на  $C$  с легко обратимым отображением  $\mathcal{G}^{-1}(\cdot)$ :

- I)  $\mathcal{G}(\cdot)$  берётся в виде умножения на некоторую точечную абсолютно регулярную матрицу  $G$ , т. е.

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}) = G\mathbf{x}.$$

При этом  $\mathcal{H}(x) = Hx$ ,  $H = C - G$ , а ненулевые элементы  $G$  и  $H$  подбираются имеющими одинаковые знаки (за счёт чего в силу дистрибутивности (1.76) и обеспечивается равенство (12.82) для всех  $x, y \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n$ ).

II)  $\mathcal{G}(\cdot)$  и  $\mathcal{H}(\cdot)$  берутся, соответственно, в виде

$$\mathcal{G}(x) = Gx \quad \text{и} \quad \mathcal{H}(x) = Hx,$$

где  $G$  и  $H$  — верхняя и нижняя треугольные интервальные матрицы,  $C = G + H$ , причём  $G$  имеет обратимые элементы на главной диагонали, а у  $H$  главная диагональ нулевая (возможно, для этого сначала потребуется поменять местами уравнения системы).

Обратное отображение  $\mathcal{G}^{-1}(\cdot)$  при этом таково, что результат  $y$  его действия на элемент  $x \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n$  определяется по формулам обратной подстановки для треугольной системы  $Gy = x$ . Естественно называть такое расщепление оператора умножения на  $C$  *треугольным*.

Заметим, что в обоих рассмотренных случаях обратное отображение  $\mathcal{G}^{-1} : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$ , вообще говоря, не может быть задано умножением на какую-либо интервальную матрицу.

### 12.7г Отщепление точечной матрицы

В этом пункте для первого из рассмотренных в §12.7в случаев расщепления матрицы ИСЛАУ мы выпишем расчётные формулы соответствующего итерационного процесса (12.83) в явном виде. Покажем также, каким образом можно на практике строить расщепление интервальной матрицы.

**Определение 12.7.3** Для  $a \in \mathbb{K}\mathbb{R}$  обозначим

$$[a] := \begin{cases} \max\{\underline{a}, \bar{a}\}, & \text{если } a < 0, \\ 0 & , \text{ если } 0 \in \text{про } a, \\ \min\{\underline{a}, \bar{a}\}, & \text{если } a > 0, \end{cases}$$

— взятие ближайшего к нулю элемента правильной проекции интервала  $x$ .

$[a]$  — это *наименьшая* по абсолютной величине точка из правильной проекции интервала, которая имеет тот же знак, что и сам интервал. Нетрудно понять, что если вещественное число  $a$  лежит между 0 и  $[a]$ , т. е.  $a \in 0 \vee [a]$ , то интервалы  $(a - a)$  и  $[a, a]$  имеют одинаковый знак, а потому образуют требуемое расщепление для оператора умножения на  $a$ . Следовательно, условию I из §12.7в можно удовлетворить, например, если взять

$$G \in 0 \vee [C]. \quad (12.84)$$

Для минимизации абсолютной величины остатка  $H = C - G$  можно положить  $G = [C]$ , т. е. образовать  $G$  поэлементным применением к  $C$  унарной операции  $[\cdot]$ .

Ясно, что при сделанном нами предположении о неособенности  $\mathbf{C}$  матрица  $G$  также получится неособенной. Если  $G$  к тому же абсолютно регулярна, то обратное отображение  $\mathcal{G}^{-1}(\cdot)$  соответствует умножению на матрицу  $(G^\sim)^{-1}$  в  $\mathbb{R}^{2n}$ . В любом случае у нас всегда есть возможность сделать матрицу  $G$  абсолютно регулярной путём небольшого уменьшения абсолютной величины её ненулевых элементов, не нарушающего условия расщепления (12.84).

Полезно выписать формулы соответствующего итерационного процесса в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^{2n}$ . Как конкретизацию для (12.83) мы имеем

$$x^{(k+1)} \leftarrow (G^\sim)^{-1} \text{sti}(\mathbf{d} \ominus \mathbf{H} \text{sti}^{-1}(x^{(k)})). \quad (12.85)$$

где  $\text{sti}$  — стандартное погружение  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}^{2n}$  и

$$G \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{H} = \mathbf{C} - G. \quad (12.86)$$

Итерационный процесс с таким расщеплением работает в целом удовлетворительно, но иногда не столь хорошо, как того хотелось бы. Например, он не приводит к успеху при решении интервальной линейной системы Барта-Нудинга (5.12)

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 1] \\ [-1, 2] & [2, 4] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [-2, 2] \end{pmatrix},$$

а потому имеет смысл рассмотреть и другие рецепты расщепления матрицы ИСЛАУ.

Ещё один способ расщепления интервальной матрицы может быть основан на обобщённом дистрибутивном законе С. Маркова (1.77). Введём

**Определение 12.7.4** Для  $\mathbf{a} \in \mathbb{K}\mathbb{R}$  обозначим

$$[\mathbf{a}] = \begin{cases} \min\{\underline{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}\}, & \text{если } \mathbf{a} \leq 0, \\ 0, & \text{если } 0 \in \text{pro } \mathbf{a}, \\ \max\{\underline{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}\}, & \text{если } \mathbf{a} \geq 0. \end{cases}$$

— взятие наибольшего по модулю элемента из правильной проекции интервала, если он не содержит нуля, и ноль иначе.

Если  $0 \notin \text{pro } \mathbf{a}$ , то  $[\mathbf{a}]$  — это наибольшая по абсолютной величине точка из правильной проекции интервала (в отличие от  $|\mathbf{a}|$ ), которая имеет тот же знак, что и сам интервал. Нетрудно понять, что если вещественное число  $a$  совпадает по знаку с  $[\mathbf{a}]$  и  $|a| > [\mathbf{a}]$ , то интервалы  $(\mathbf{a} - a)$  и  $[a, a]$  имеют разные знаки, а знак их суммы  $(\mathbf{a} - a) + a$  совпадает со знаком  $\mathbf{a}$ . Поэтому для любого  $\mathbf{x} \in \mathbb{K}\mathbb{R}$  в силу (1.77) справедливо

$$((\mathbf{a} - a) + a) \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{a} - a) \cdot \text{dual } \mathbf{x} + a \cdot \mathbf{x}.$$

Следовательно, в общей формуле итерационных процессов (12.83) можно положить

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}) = G\mathbf{x}, \quad G = (g_{ij}) = \lceil C \rceil, \quad (12.87)$$

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1(\mathbf{x}) \\ \mathcal{H}_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \mathcal{H}_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H}_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \mathbf{h}_{ij} \cdot \begin{cases} \mathbf{x}_j, & \text{если } g_{ij} = 0 \\ \text{dual } \mathbf{x}_j, & \text{иначе} \end{cases} \quad (12.88)$$

$$\mathbf{H} = (\mathbf{h}_{ij}) = \lceil C \rceil - G. \quad (12.89)$$

В  $\mathbb{R}^{2n}$  явная формула для итерационного процесса, основанного на таком способе точечного расщепления матрицы ИСЛАУ, имеет вид

$$\mathbf{x}^{(k+1)} \leftarrow (G^\sim)^{-1} \text{sti}(\mathbf{d} \ominus \mathcal{H}(\text{sti}^{-1}(\mathbf{x}^{(k)}))), \quad (12.90)$$

где матрица  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и отображение  $\mathcal{H}(\cdot)$  определены посредством (12.87)–(12.89), а  $\text{sti}$  — стандартное погружение  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}^{2n}$ . Ниже в §12.8 мы приводим результаты численных экспериментов с этим методом, фигурирующим под именем **ARSplit**, от фразы **Absolutely Regular SPLITting**. Они показывают, что новый численный метод работает ощутимо лучше процесса (12.85).

Каковы условия сходимости рассмотренных итерационных процессов? Справедлива

**Теорема 12.7.2** Пусть матрицы  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и  $\mathbf{H} \in \mathbb{K}\mathbb{R}^{n \times n}$  получены в результате расщеплений (12.86) и (12.87)–(12.89) интервальной матрицы  $C$ , а  $V$  — это  $2n \times 2n$ -матрица  $(G^\sim)^{-1}$ . Если спектральный радиус матрицы  $|V| |\mathbf{H}|^\sim$  меньше единицы,

$$\rho(|V| |\mathbf{H}|^\sim) < 1,$$

то формальное решение  $\mathbf{x}^*$  интервальной линейной системы  $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$  существует и единственно. Кроме того, итерационные процессы (12.85) и (12.90) в  $\mathbb{R}^{2n}$  из любого начального приближения сходятся к  $\text{sti}(\mathbf{x}^*)$ , где «sti» — стандартное погружение  $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}^{2n}$ .

**Доказательство** мы проведём сначала для итерационного процесса (12.85).

Введём на  $\mathbb{R}^{2n}$  мультиметрику  $\zeta : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}_+^{2n}$  следующим образом:

$$\zeta(x, y) := \begin{pmatrix} \max\{|x_1 - y_1|, |x_{n+1} - y_{n+1}|\} \\ \vdots \\ \max\{|x_n - y_n|, |x_{2n} - y_{2n}|\} \\ \max\{|x_1 - y_1|, |x_{n+1} - y_{n+1}|\} \\ \vdots \\ \max\{|x_n - y_n|, |x_{2n} - y_{2n}|\} \end{pmatrix}.$$



Вспоминая определение (12.16) стандартного погружения  $\text{sti}$ , мы можем дать и другое определение для мультиметрики  $\zeta$ , именно

$$\zeta(x, y) = \begin{pmatrix} |\text{sti}^{-1}(x) \ominus \text{sti}^{-1}(y)| \\ |\text{sti}^{-1}(x) \ominus \text{sti}^{-1}(y)| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Dist}(\text{sti}^{-1}(x), \text{sti}^{-1}(y)) \\ \text{Dist}(\text{sti}^{-1}(x), \text{sti}^{-1}(y)) \end{pmatrix}.$$

Покажем, что относительно такой мультиметрики оператор перехода  $T$  итерационной схемы (12.85), определяемый как

$$T(x) = V \text{sti}(\mathbf{d} \ominus \mathbf{H} \text{sti}^{-1}(x)),$$

удовлетворяет условиям теоремы Шрёдера о неподвижной точке (Теорема 2.4.2).

Имеем

$$\begin{aligned} |(T(x))_i - (T(y))_i| &= (|T(x) - T(y)|)_i \\ &= \left( |V \text{sti}(\mathbf{d} \ominus \mathbf{H} \text{sti}^{-1}(x)) - V \text{sti}(\mathbf{d} \ominus \mathbf{H} \text{sti}^{-1}(y))| \right)_i \\ &= \left( |V (\text{sti}(\mathbf{d} \ominus \mathbf{H} \text{sti}^{-1}(x)) - \text{sti}(\mathbf{d} \ominus \mathbf{H} \text{sti}^{-1}(y)))| \right)_i \\ &= \left( |V \text{sti}(\mathbf{H} \text{sti}^{-1}(x) \ominus \mathbf{H} \text{sti}^{-1}(y))| \right)_i \\ &\leq \left( |V| \cdot |\text{sti}(\mathbf{H} \text{sti}^{-1}(x) \ominus \mathbf{H} \text{sti}^{-1}(y))| \right)_i \\ &= \left( |V| \cdot \left( \frac{|\mathbf{H} \text{sti}^{-1}(x) \ominus \mathbf{H} \text{sti}^{-1}(y)|}{|\overline{\mathbf{H} \text{sti}^{-1}(x) \ominus \mathbf{H} \text{sti}^{-1}(y)}|} \right) \right)_i \\ &\leq \left( |V| \cdot \left( \begin{array}{c} \max\left\{ \frac{|\mathbf{H} \text{sti}^{-1}(x) \ominus \mathbf{H} \text{sti}^{-1}(y)|}{|\overline{\mathbf{H} \text{sti}^{-1}(x) \ominus \mathbf{H} \text{sti}^{-1}(y)}|} \right\} \\ \max\left\{ \frac{|\mathbf{H} \text{sti}^{-1}(x) \ominus \mathbf{H} \text{sti}^{-1}(y)|}{|\overline{\mathbf{H} \text{sti}^{-1}(x) \ominus \mathbf{H} \text{sti}^{-1}(y)}|} \right\} \end{array} \right) \right)_i \\ &= \left( |V| \cdot \begin{pmatrix} |\text{Dist}(\mathbf{H} \text{sti}^{-1}(x), \mathbf{H} \text{sti}^{-1}(y))| \\ |\text{Dist}(\mathbf{H} \text{sti}^{-1}(x), \mathbf{H} \text{sti}^{-1}(y))| \end{pmatrix} \right)_i \end{aligned}$$

Воспользовавшись неравенством (2.22), можем продолжить выкладки следую-

щим образом:

$$\begin{aligned}
 |(T(x))_i - (T(y))_i| &\leq \left( |V| \cdot \begin{pmatrix} |\mathbf{H}| \cdot \text{Dist}(\text{sti}^{-1}(x), \text{sti}^{-1}(y)) \\ |\mathbf{H}| \cdot \text{Dist}(\text{sti}^{-1}(x), \text{sti}^{-1}(y)) \end{pmatrix} \right)_i \\
 &= \left( |V| \begin{pmatrix} |\mathbf{H}| & 0 \\ 0 & |\mathbf{H}| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Dist}(\text{sti}^{-1}(x), \text{sti}^{-1}(y)) \\ \text{Dist}(\text{sti}^{-1}(x), \text{sti}^{-1}(y)) \end{pmatrix} \right)_i \\
 &= \left( |V| |\mathbf{H}|^{\sim} \begin{pmatrix} \text{Dist}(\text{sti}^{-1}(x), \text{sti}^{-1}(y)) \\ \text{Dist}(\text{sti}^{-1}(x), \text{sti}^{-1}(y)) \end{pmatrix} \right)_i \\
 &= (|V| |\mathbf{H}|^{\sim} \zeta(x, y))_i \\
 &= (i\text{-ая строка матрицы } |V| |\mathbf{H}|^{\sim}) \cdot \zeta(x, y).
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 &\max\{ |(T(x))_i - (T(y))_i|, |(T(x))_{i+n} - (T(y))_{i+n}| \} \\
 &= \max\{ (|V| |\mathbf{H}|^{\sim} \zeta(x, y))_i, (|V| |\mathbf{H}|^{\sim} \zeta(x, y))_{i+n} \} \\
 &= \max \left\{ \begin{pmatrix} i\text{-ая строка} \\ \text{матрицы} \\ |V| |\mathbf{H}|^{\sim} \end{pmatrix} \zeta(x, y), \begin{pmatrix} (i+n)\text{-ая} \\ \text{строка} \\ \text{матрицы} \\ |V| |\mathbf{H}|^{\sim} \end{pmatrix} \zeta(x, y) \right\}.
 \end{aligned}$$

Из формул Фробениуса для обращения блочных матриц (см., например, [6]) следует, что  $2n \times 2n$ -матрица  $V$  является блочной матрицей той же структуры, что и знаково-блочная матрица  $\tilde{G}$ , т. е. разбивается на четыре  $n \times n$ -блока, причём диагональные блоки одинаковы. Поэтому в целом получаем

$$\zeta(T(x), T(y)) \leq |V| |\mathbf{H}|^{\sim} \zeta(x, y),$$

что и требовалось.

Нетрудно видеть, что проведённое доказательство легко адаптируется и для итерационного процесса (12.90), так как  $|\mathcal{H}(\mathbf{x})| = |\mathbf{H}\mathbf{x}|$  для любого  $\mathbf{x} \in \mathbb{K}R^n$ . ■

Предмет основной заботы разработчиков итерационных методов вида (12.80) — как можно сильнее уменьшить спектральный радиус (либо норму) оператора Липшица для оператора перехода  $T$ , чтобы, во-первых, обеспечить сходимость итераций, и, во-вторых, ускорить эту сходимость там, где она уже есть. Как следует из доказательства Теоремы 12.7.2, для схемы (12.85) матрица этого оператора Липшица равна  $|V| |\mathbf{H}|^{\sim}$ . Оптимизация дистрибутивного расщепления матрицы  $C$  на  $G$  и  $H$  является интересной, но непростой задачей, и мы не будем здесь заниматься её решением в самом общем виде. Отметим лишь, что отщепление точечного слагаемого особенно удобно на практике в случаях, когда матрица ИСЛАУ имеет много точечных элементов, а доля существенно интервальных элементов невелика.

## 12.8 Численные примеры

**Пример 12.8.1** Рассмотрим интервальную линейную систему Барта-Нудинга (5.12)

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 1] \\ [-1, 2] & [2, 4] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [-2, 2] \end{pmatrix}.$$

Алгоритм ARSplit за 10 итераций дает 3 верных значащих цифры точного ответа  $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})^\top$ , а за 20 итераций — 6 верных значащих цифр, что по порядку трудозатрат сравнимо с итерационным методом из [8, 9, 38], основанным на отщепления главной диагонали матрицы ИСЛАУ. Такие же показатели достигаются алгоритмом ARSplit и при нахождении формального решения системы (5.12) с дуализованной матрицей (которая возникает, к примеру, при внутреннем оценивании объединённого множества решений для (5.12)). ■

**Пример 12.8.2** Рассмотрим интервальную  $40 \times 40$ -систему линейных алгебраических уравнений с матрицей

$$\begin{pmatrix} [1.8, 2.2] & [-1.1, -0.9] & & & & 0 \\ [-1.1, -0.9] & [1.8, 2.2] & [-1.1, -0.9] & & & \\ & [-1.1, -0.9] & [1.8, 2.2] & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & [1.8, 2.2] & [-1.1, -0.9] \\ 0 & & & & [-1.1, -0.9] & [1.8, 2.2] \end{pmatrix} \quad (12.91)$$

и вектором правой части

$$\begin{pmatrix} [0.9, 1.1] \\ [1.8, 2.2] \\ [2.7, 3.3] \\ \vdots \\ [35.1, 42.9] \\ [36, 44] \end{pmatrix}. \quad (12.92)$$

Матрица (12.91) получена из известной трехдиагональной матрицы, аппроксимирующей на симметричном шаблоне оператор взятия второй производной, путём 10%-го уширения элементов, а правая часть системы получена таким же уширением вектора  $(1, 2, 3, \dots, 39, 40)^\top$ . Как и в случае с субдифференциальным методом Ньютона, ни сама эта система уравнений, ни система, полученная из неё дуализацией матрицы, не представляют серьёзного труда для методов из §12.7. Основанный на точечном расщеплении алгоритм ARSplit уже за 16 итераций находит 12–13 верных значащих цифр для концов компонент формальных решений как исходной интервальной системы, так и системы с дуализованной матрицей. ■

**Пример 12.8.3** Для интервальной линейной  $40 \times 40$ -системы с матрицей Ноймайера-Райхмана (2.38), имеющей диагональный параметр  $t = 40$ , т. е.

$$\begin{pmatrix} 40 & [0, 2] & \cdots & [0, 2] & [0, 2] \\ [0, 2] & 40 & \cdots & [0, 2] & [0, 2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [0, 2] & [0, 2] & \cdots & 40 & [0, 2] \\ [0, 2] & [0, 2] & \cdots & [0, 2] & 40 \end{pmatrix} \quad (12.93)$$

и вектором правой части

$$\begin{pmatrix} [10, 20] \\ [10, 20] \\ \vdots \\ [10, 20] \end{pmatrix} \quad (12.94)$$

алгоритм ARSplit за 40 итераций находит приближение к формальному решению

$$\begin{pmatrix} [0.25, 0.16949152542] \\ [0.25, 0.16949152542] \\ \vdots \\ [0.25, 0.16949152542] \end{pmatrix}$$

с точностью порядка  $10^{-8}$ .

Совершенно то же самое можно наблюдать и при вычислении формального решения ИСЛАУ с дуализованной матрицей (12.93) и правой частью (12.94). Отметим, что в этом примере интервальная матрица ИСЛАУ особенна (см. §2.6, стр. 121), но это не мешает алгоритму ARSplit успешно находить формальное решение. ■

**Пример 12.8.4** Для интервальной линейной  $7 \times 7$ -системы

$$\begin{pmatrix} [4, 6] & [-9, 0] & [0, 12] & [2, 3] & [5, 9] & [-23, -9] & [15, 23] \\ [0, 1] & [6, 10] & [-1, 1] & [-1, 3] & [-5, 1] & [1, 15] & [-3, -1] \\ [0, 3] & [-20, -9] & [12, 77] & [-6, 30] & [0, 3] & [-18, 1] & [0, 1] \\ [-4, 1] & [-1, 1] & [-3, 1] & [3, 5] & [5, 9] & [1, 2] & [1, 4] \\ [0, 3] & [0, 6] & [0, 20] & [-1, 5] & [8, 14] & [-6, 1] & [10, 17] \\ [-7, -2] & [1, 2] & [7, 14] & [-3, 1] & [0, 2] & [3, 5] & [-2, 1] \\ [-1, 5] & [-3, 2] & [0, 8] & [1, 11] & [-5, 10] & [2, 7] & [6, 82] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-10, 95] \\ [35, 14] \\ [-6, 2] \\ [30, 7] \\ [4, 95] \\ [-6, 46] \\ [-2, 65] \end{pmatrix}$$

из работы [33] алгоритм ARSplit расходится, но, как мы уже отмечали в Примере 12.6.3, формальное решение может быть успешно вычислено с помощью субдифференциального метода Ньютона (за 9 итераций при значении релаксационного параметра  $\tau = 1$ ).

При сужении (7,7)-элемента матрицы появляется сходимость алгоритма ARSplit к формальному решению, но она очень медленная. Например, при  $\mathbf{a}_{77} = [8, 82]$  для получения 5 верных значащих цифр алгоритму требуется около сотни итераций. ■

Резюмируя последний пример, можно сказать, что он демонстрирует преимущество субдифференциального метода Ньютона перед стационарными итерационными методами не только по эффективности, но и в том, что касается сферы применимости. Но, как отмечалось ранее, стационарные итерации также имеют смысл во многих задачах.

## Комментарий к Главе 12

**К §12.2д.** Абсолютно регулярные матрицы введены автором в начале 90-х годов прошлого века, и предлагаемый английский вариант этого термина – это «*absolutely regular matrices*» или «*absolutely nonsingular matrices*». В своих ранних работах ([23, 24, 33, 34] и некоторых других) автор называл такие матрицы «вполне неособенными» (*completely regular* или *completely nonsingular*) и « $\iota$ -неособенными» ( *$\iota$ -nonsingular*).

**К §12.3.** Понятия изотонных и антитонных отображений – это обобщения на абстрактный случай хорошо известного понятия монотонно возрастающих и монотонно убывающих функций. Одной из причин выбора новых терминов стало, по-видимому, то обстоятельство, что «монотонными операторами» во второй половине XX века стали называть отображения, задаваемые несколько другими условиями.

**К §12.4.** Результат Теоремы 12.4.1 о существовании и единственности формального решения интервальных линейных систем с матрицами, имеющими диагональное преобладание, впервые был получен В.С. Зюзиным [8, 9, 38] в связи с итерационным методом, рассмотренным нами в §12.7а. Впоследствии этот метод и результат В.С. Зюзина неоднократно переоткрывался в различных формах, например, в работах [16, 27, 32].

**К §12.2в.** При определении конуса в линейном пространстве некоторые авторы (например, [22]) опускают требования выпуклости, замкнутости и т. п. В нашей работе для удобства изложения мы придерживаемся того определения конуса, которое традиционно для школы М.А. Красносельского [13, 15].

Программное обеспечение автора, реализующее описанные в этой главе алгоритмы, находится на сервере Института вычислительных технологий СО РАН по адресу <http://www.nsc.ru/interval/>.

**К §12.7.** Излагаемая в §12.7в конструкция расщепления интервальной матрицы близка к той, что практикуется в вычислительной линейной алгебре для приведения системы уравнений к итерационному рекуррентному виду (см., к примеру, [3, 4, 25]). Но в интервальном случае условия на это расщепление являются существенно более жёсткими в силу бедных алгебраических свойств интервальных арифметик.

Стационарные итерационные методы, основанные на отщеплении абсолютно регулярной точечной компоненты от матрицы ИСЛАУ, впервые рассмотрены в [23].

## Литература к Главе 12

- [1] Акилов Г.П., Кутателадзе С.С. *Упорядоченные векторные пространства*. – Новосибирск: Наука, 1978.
- [2] Алефельд Г., Херцбергер Ю. *Введение в интервальные вычисления*. – Москва: Мир, 1987.
- [3] Голуб Дж., ван Лоун Ч. *Матричные вычисления*. – Москва: Мир, 1999.
- [4] Деммель Дж. *Вычислительная линейная алгебра*. – Москва: Мир, 2001.
- [5] Демьянов В.Ф., Малозёмов В.Н. *Введение в минимакс*. – Москва: Наука, 1972.
- [6] Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц*. – Москва: Наука, 1988.
- [7] Захаров А.В., Шокин Ю.И. Синтез систем управления при интервальной неопределённости параметров их математических моделей // *Доклады АН СССР*. – 1988. – Т. 299, №2. – С. 292–295.
- [8] Зюзин В.С. Об одном способе отыскания двусторонних интервальных приближений решения системы линейных интервальных уравнений // *Дифференциальные уравнения и теория функций*. – Саратов: Изд-во Саратовского университета, 1987. – С. 28–32.
- [9] Зюзин В.С. Итерационный метод решения системы алгебраических сегментных уравнений первого порядка // *Дифференциальные уравнения и теория функций (выпуск 8)*. – Саратов: Изд-во Саратовского университета, 1989. – С. 72–82.
- [10] Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ*. – Москва: Наука, 1984.
- [11] Карлюк А.Ю. Численный метод нахождения алгебраического решения ИСЛАУ, основанный на треугольном расщеплении // *Вычислительные Технологии*. – 1999. – Т. 4, №4. – С. 14–23.
- [12] Коллатц Л. *Функциональный анализ и вычислительная математика*. – Москва: Мир, 1969.
- [13] Красносельский М.А. *Положительные решения операторных уравнений*. – Москва: Физматгиз, 1962.
- [14] Красносельский М.А., Забрейко П.П. *Геометрические методы нелинейного анализа*. – Москва: Наука, 1975.
- [15] Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В. *Позитивные линейные системы*. – Москва: Наука, 1985.
- [16] Куприянова Л.В. Нахождение внутренних оценок множеств решений уравнений с интервальными коэффициентами. Диссертация . . . канд. физ.-мат. наук. – Саратов: Саратовский госуниверситет, 2000.
- [17] Лакеев А.В. Существование и единственность алгебраических решений интервальных линейных систем в полной арифметике Каухера // *Вычислительные Технологии*. – 1999. – Т. 4, №4. – С. 33–44.
- [18] Мальцев А.И. *Основы линейной алгебры*. – Москва: Наука, 1970.
- [19] Обэн Ж.-П. *Нелинейный анализ и его экономические приложения*. – Москва: Мир, 1988.
- [20] Ортега Дж., Рейнболдт В. *Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными*. – Москва: Мир, 1975.
- [21] Пшеничный Б.Н. *Выпуклый анализ и экстремальные задачи*. – Москва: Наука, 1980.

- [22] РОКАФЕЛЛАР Р. *Выпуклый анализ*. – Москва: Мир, 1973.
- [23] ШАРЫЙ С.П. Численное нахождение алгебраического решения интервальных линейных систем // *Дискретная математика*. – Красноярск: КГТУ, 1996. – С. 129–145.
- [24] ШАРЫЙ С.П. Алгебраический подход во «внешней задаче» для интервальных линейных систем // *Фундаментальная и прикладная математика*. – 2002. – Т. 8, №2. – С. 567–610.
- [25] ШАРЫЙ С.П. *Курс вычислительных методов*. – Новосибирск, 2023.
- [26] BARTH W., NUDING E. Optimale Lösung von Intervallgleichungssystemen // *Computing*. – 1974. – Vol. 12. – P. 117–125.
- [27] MARKOV S., ПОРОВА Е., ULLRICH CH. On the solution of linear algebraic equations involving interval coefficients // *Iterative methods in linear algebra II* / Margenov S., Vassilevski P., eds. – 1996. – P. 216–225. – (IMACS Series on computational and Applied Mathematics; vol. 3).
- [28] MARKOV S. An iterative method for algebraic solution to interval equations. *Applied Numerical Mathematics* **30** (1999), Issues 2–3, pp. 225–239.
- [29] NEUMAIER A. *Interval methods for systems of equations*. – Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [30] NEUMAIER A. On Shary’s algebraic approach for linear interval equations // *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. – 2000. – Vol. 21. – P. 1156–1162.
- [31] ПОРОВА Е.Д. Algebraic solutions to a class of interval equations // *Journal of Universal Computer Science*. – 1998. – Vol. 4, No. 1. – P. 48–67.
- [32] SAINZ M.A., GARDEÑES E., JORBA L. Formal solution to systems of interval linear and nonlinear equations // *Reliable Computing*. – 2002. – Vol. 8, No. 3. – P. 189–211.
- [33] SHARY S.P. Algebraic approach to the interval linear static identification, tolerance and control problems, or One more application of Kaucher arithmetic // *Reliable Computing*. – 1996. – Vol. 2, No. 1. – P. 3–33.
- [34] SHARY S.P. Algebraic approach in the “outer problem” for interval linear equations // *Reliable Computing*. – 1997. – Vol. 3, No. 2. – P. 103–135.
- [35] SHARY S.P. A new technique in systems analysis under interval uncertainty and ambiguity // *Reliable Computing*. – 2002. – Vol. 8, No. 5. – P. 321–418.
- [36] SHARY S.P. Numerical computation of formal solutions to interval linear systems of equations. – Новосибирск, 2019. – 36 с. – Депонировано в электронном репозитории [arXiv.org](https://arxiv.org/abs/1903.10272), регистрационный номер arXiv:1903.10272.
- [37] ZEIDLER E. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications. Part I. Fixed-Point Theorems*. – New York: Springer-Verlag, 1986.
- [38] ZYUZIN V.S. An interval arithmetic solution of a system of interval algebraic equations of the first order // *International Symposium on Computer Arithmetic, Scientific Computation and Mathematical Modelling (SCAN-90), Albena, Bulgaria, September 23–28, 1990*. – Sofia: Bulgarian Academy of Sciences, 1990. – P. 160–162.

# Послесловие

Подытоживая содержание книги, попытаемся частично ответить на философские вопросы: зачем вообще нужен интервальный анализ? что нового он привносит в практику математического моделирования? и каковы границы применимости методов интервального анализа?

В значительной мере эти вопросы являются риторическими, так как в предшествующих главах книги мы имели достаточно примеров плодотворного применения интервальных методов к задачам, которые до сих пор никак иначе не решались или решались неудовлетворительно. Наконец, мы могли видеть, что интервальный анализ предоставляет нам новый язык для описания задач с ограниченными неопределённостями в данных, язык удобный и весьма выразительный, который существенно обогащает арсенал методов математического моделирования окружающей нас действительности.

Но вопросы о месте и роли интервального анализа не являются и совсем бессмысленными. Дело в том, что ряд задач, с которыми имеет дело современный интервальный анализ, ставились и решались и раньше, в «доинтервальную» эру. Например, прямым статистическим моделированием неопределённостей в данных задачи, известным также как «метод Монте-Карло» (см., к примеру, [3, 9]). В частности, именно так решались (и по сей день часто решаются) задачи оценивания областей значений функций и разброса решений уравнений с параметрами.

В методах Монте-Карло неопределённости и неоднозначности в исходных данных заменяются некоторыми вероятностными распределениями (в вышеупомянутых задачах, как правило, равномерными), которые далее моделируются на ЭВМ путём статистических испытаний и сопровождаются вычислением значений функции, решением точечных уравнений и пр. По их результатам и строятся искомые оценки разброса значений функции, решений параметрического уравнения и т. п. Что же касается интервальных подходов, то, как мы видели в §4.4 (с. 243), большинство интервальных задач в постановках, требующих оптимальных или гарантированно близких к оптимальным ответов, являются NP-трудными, так что получение для них «качественных» интервальных решений является очень трудоёмким делом. Наша цель — понять, в каких случаях применение интервального анализа в подобных задачах оправдано, а когда оно нецелесообразно и лучше воспользоваться статистическим моделированием.

Традиционным аргументом в пользу интервальных методов является следующий: статистическое моделирование не способно обеспечить «гарантированности» и «доказательности» ответов. Действительно, это отсутствие гарантированности в строго



математическом смысле сразу бросается в глаза при применении методов Монте-Карло. Например, для интервальной линейной  $3 \times 3$ -системы Ноймайера

$$\begin{pmatrix} 3.5 & [0, 2] & [0, 2] \\ [0, 2] & 3.5 & [0, 2] \\ [0, 2] & [0, 2] & 3.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 1] \\ [-1, 1] \end{pmatrix}$$

оптимальной внешней оценкой объединённого множества решений является (см. Главу 9, с. 497) брус

$$\begin{pmatrix} [-1.765, 1.765] \\ [-1.765, 1.765] \\ [-1.765, 1.765] \end{pmatrix} \quad (\text{П.1})$$

(здесь и всюду ниже мы для удобства сохраняем у числовых данных не более четырёх значащих цифр). Но типичный результат метода статистических испытаний за несколько миллионов бросаний имеет вид

$$\begin{pmatrix} [-1.204, 1.241] \\ [-1.349, 1.260] \\ [-1.231, 1.288] \end{pmatrix},$$

т. е. весьма сильно отличается от (П.1) (читатель может самостоятельно повторить этот несложный эксперимент на ЭВМ).

Ситуацию не исправляют принципиально ни более совершенные статистические процедуры, ни учёт специфики задачи. К примеру, при оценивании разброса решений ИСЛАУ случайный выбор можно осуществлять только между концами входных интервалов, так как в силу теоремы Бекка-Никеля экстремальные значения каждой компоненты решения достигаются только в крайних матрице и правой части системы. Тем не менее, для интервальной линейной  $7 \times 7$ -системы с матрицей Ноймайера

$$\begin{pmatrix} 10.5 & [0, 2] & \cdots & [0, 2] \\ [0, 2] & 10.5 & \cdots & [0, 2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0, 2] & [0, 2] & \cdots & 10.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 1] \\ \vdots \\ [-1, 1] \end{pmatrix}$$

в результате 400 миллионов бросаний на множестве концов интервалов матрицы и правой части системы мы получим приблизительно следующие интервалы для разбросов решений

$$\begin{pmatrix} [-0.2478, 0.2507] \\ [-0.2550, 0.2599] \\ [-0.2549, 0.2683] \\ [-0.2416, 0.2684] \\ [-0.2522, 0.2560] \\ [-0.2425, 0.2683] \\ [-0.2440, 0.2418] \end{pmatrix},$$

в то время как оптимальная (точная) внешняя оценка множества решений есть брус  $([-0.2972, 0.2972], \dots, [-0.2972, 0.2972])^\top$ . И с возрастанием размера задачи результаты любого статистического моделирования при фиксированном объёме выборки

всё дальше отклоняются от оптимальной интервальной оценки множеств решений ИСЛАУ.

Но тезис об отсутствии гарантированности и доказательности в результатах статистического моделирования всё-таки верен лишь отчасти, поскольку ответ, вероятность правильности которого превосходит, скажем,  $(1 - 10^{-8})$ , можно считать уже «практически достоверным», как это аргументированно отмечают, к примеру, И.И. Блехман, А.Д. Мышкис и Я.Г. Пановко в книге [1]. Получается, что при достижении этого порога достоверности и методы Монте-Карло способны по-своему «гарантировать» выдаваемые ими результаты.

В пользу статистического моделирования при этом говорит то обстоятельство, что в функциях большого числа переменных, завязанных друг с другом, практически любые «не слишком плохие» вероятностные распределения на областях определения аргументов преобразуются на области значений функции в распределение, плотность вероятности которого пренебрежимо мала в точках, лежащих вблизи границы области значений. Рассмотрим это важное утверждение более внимательно.

Для простых функций и простых вероятностных распределений оно может быть обосновано даже аналитически, и в качестве примера мы рассмотрим сумму

$$\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n, \quad (\text{П.2})$$

в которой  $\xi_i, i = 1, 2, \dots, n$ , — независимые равномерно распределённые на интервале  $[0, 1]$  случайные величины. Ясно, что масштабированием переменных к такому виду можно привести любую линейную форму. Плотность вероятности каждого слагаемого в (П.2) есть поэтому

$$p_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{на интервале } [0, 1], \\ 0 & \text{вне интервала } [0, 1]. \end{cases}$$

Обозначим через  $p_n(x)$  плотность вероятности суммы (П.2). Очевидно, функция  $p_n(x)$  равна нулю вне интервала  $[0, n]$ .

Вспомним теперь (см. [2, 5]), что плотность вероятности  $p_{\xi+\eta}$  суммы  $(\xi + \eta)$  двух независимых случайных величин  $\xi$  и  $\eta$  является свёрткой плотностей вероятности слагаемых —  $p_\xi$  и  $p_\eta$ , — так что

$$p_{\xi+\eta}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x-s)p_\eta(s) ds.$$

Поэтому для функции плотности рассматриваемой суммы (П.2) справедливо следующее рекуррентное соотношение

$$p_{n+1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_1(x-s)p_n(s) ds = \int_{x-1}^x p_n(s) ds, \quad (\text{П.3})$$

$$n = 1, 2, \dots$$

Пользуясь им, нетрудно вычислить точно плотность вероятности суммы равномерно распределённых слагаемых, и соответствующие результаты приведены во многих

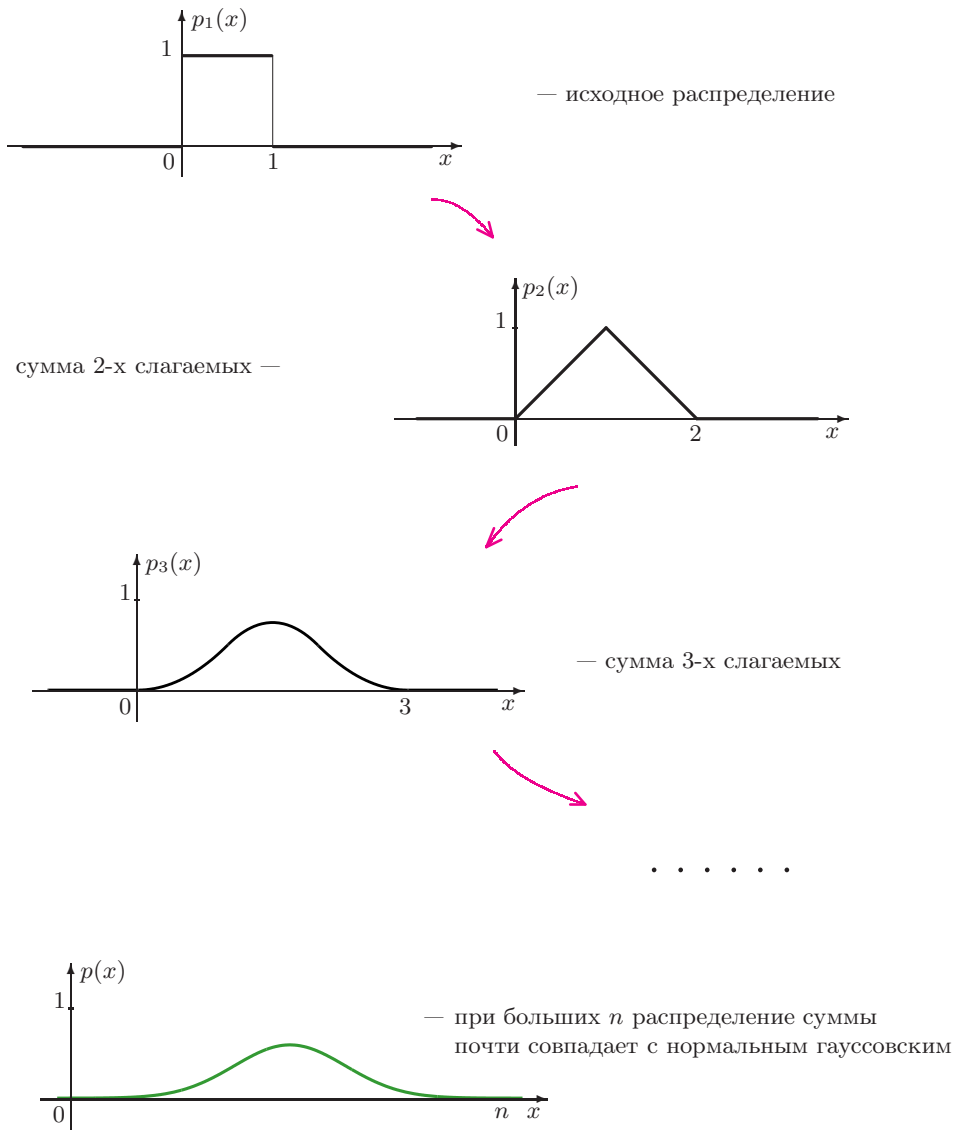


Рис. П.1. Эволюция плотности вероятности на множестве значений суммы нескольких интервалов и итоговое распределение суммы

пособиях по теории вероятностей, например, в книге Г. Крамера [5]. В частности, плотность вероятности суммы двух слагаемых равна

$$p_2(x) = \begin{cases} x, & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ -x + 2, & \text{при } 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

а плотность вероятности суммы трёх равномерно распределённых слагаемых есть

$$p_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ -x^2 + 3x - \frac{3}{2}, & \text{при } 1 \leq x \leq 2, \\ \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{9}{2}, & \text{при } 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Как видим (см. Рис. П.1), при  $n = 2, 3$  плотность вероятности суммы (П.2) оказывается убывающей от центра к границам области значений, причём с ростом количества слагаемых в сумме график её плотности вероятности вблизи границ прижимается к нулю сильнее, чем в центре.

Используя математическую индукцию, можно показать справедливость следующей общей формулы [5]:

$$p_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot (x^{n-1} - C_n^1(x-1)^{n-1} + C_n^2(x-2)^{n-1} - \dots),$$

где  $C_n^k$  — биномиальные коэффициенты (т. е. количества сочетаний из  $n$  по  $k$ ), и при каждом фиксированном значении аргумента  $x$  суммирование в скобках осуществляется только по тем слагаемым, для которых значение  $(x-k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , неотрицательно. Выводить из этой формулы качественные свойства  $p_n(x)$  довольно затруднительно, но с помощью той же математической индукции на основе соотношения (П.3) несложно доказать, что  $p_n(x)$  — унимодальная функция с максимумом в  $n/2$ , симметричная относительно этого значения. Поэтому вблизи границ области значений рассматриваемой суммы (П.2)

$$p_n(x) = \frac{1}{n-1} x^{n-1} \quad \text{при } x \in [0, 1], \quad (\text{П.4})$$

$$p_n(x) = \frac{1}{n-1} (n-x)^{n-1} \quad \text{при } x \in [n-1, n]. \quad (\text{П.5})$$

При дальнейшем возрастании числа слагаемых вероятностное распределение суммы (П.2) согласно центральной предельной теореме теории вероятностей быстро стремится к нормальному гауссовскому распределению с плотностью

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (\text{П.6})$$

где  $m$  — среднее значение (математическое ожидание) и  $\sigma$  — стандартное (среднее квадратичное) отклонение, определяемые из средних  $m_1, m_2, \dots, m_n$  и стандартных отклонений  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  для слагаемых посредством соотношений

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_n, \quad \sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2$$

(см., к примеру, [2, 5] и другие пособия по теории вероятностей). Наша ситуация описывается известным частным случаем центральной предельной теоремы — так называемой теоремой Линдберга-Леви [5]. Она утверждает, что если у одинаково распределённых слагаемых средние и дисперсии конечны, то при достаточно большом количестве слагаемых в сумме её плотность вероятности с хорошей точностью даётся выражением (П.6). В данном случае среднее значение суммы равно  $n/2$ , а стандартное отклонение —  $\sqrt{n/12}$ , коль скоро средние и дисперсии исходных равномерных распределений составляют  $\frac{1}{2}$  и  $\frac{1}{12}$  соответственно. Как видим, плотность вероятности суммы (П.2) в центре, при  $x = n/2$ , примерно равна

$$\sqrt{\frac{6}{\pi n}},$$

и относительная разница этой величины с (П.4)–(П.5) при возрастании  $n$  может сделаться сколь угодно большой.

В вышеописанном иллюстративном примере равномерно распределённые на одном и том же интервале случайные величины были взяты лишь для удобства точного вычисления свёртки (П.3). В действительности, качественный вывод о свойствах распределения суммы «достаточно большого» числа слагаемых остаётся тем же самым для гораздо более общих типов вероятностных распределений на интервалах-слагаемых.

Вспомним, что основным содержанием обширного ряда результатов теории вероятностей, объединяемых под названием «центральной предельной теоремы» является утверждение о том, что нормальность предельного распределения суммы случайных величин является распространённым явлением и сохраняется при весьма необременительных условиях на распределения слагаемых. Помимо использованной нами выше теоремы Линдберга-Леви существует немало других формулировок этого утверждения, например, формулировка Ляпунова [2, 5] и т. д. Но для предельного нормального распределения с плотностью (П.6) при отходе от среднего значения плотность вероятности резко спадает за счёт экспоненциального множителя  $e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}$ .

Аналогична ситуация и для других арифметических операций. В частности, вычитание можно рассматривать как частный случай сложения. Общая теория перемножения случайных величин весьма сложна [4, 13, 14], но качественный вывод о малой вероятности достижения граничных значений может быть обоснован с помощью простых рассуждений. Действительно, умножение случайных величин, сосредоточенных на положительных интервалах можно логарифмированием привести к сложению, и при возрастании числа сомножителей в таком произведении его распределение стремится в пределе к логарифмически-нормальному распределению [5], плотность которого также резко ниспадает к краям. В случае, когда интервал-сомножитель содержит нуль, можно выколоть его вместе с некоторой окрестностью и повторить трюк с логарифмированием произведения, а затем устремить диаметр выколотой окрестности к нулю. Этот предельный переход никак не скажется на качественном соотношении вероятностей попадания в средние точки и к краям интервала-результата.

Рассмотренные примеры позволяют также понять механизм возникновения разницы в плотности вероятности между центром и краями результата арифметиче-

ских операций между интервалами. Образно говоря, средние значения результата оказываются более вероятными потому, что могут быть достигнуты на «большем количестве» комбинаций исходных операндов, чем крайние значения результата. Например, взяв в интервале  $[-1, 1] \cdot [1, 2] = [-2, 2]$  близкую к границе результата точку 1.8, нетрудно сообразить, что она может быть получена как произведение  $x \cdot y$  не из любых значений  $x$  и  $y$ , принадлежащих интервалам-сомножителям  $[-1, 1]$  и  $[1, 2]$ . Именно,  $x \cdot y = 1.8$  лишь при  $x \in [0.9, 1]$  и  $y \in [1.8, 2]$ . Но точка, более близкая к середине интервала результата, скажем, 0.5, является произведением  $x \cdot y$  для  $x \in [0.25, 0.5]$ ,  $y \in [1, 2]$ , и мера множества  $[0.25, 0.5] \times [1, 2]$  оказывается большей меры множества  $[0.9, 1] \times [1.8, 2]$ . Отчасти этот феномен можно усмотреть даже из формул классической интервальной арифметики, согласно которым концы интервала результата достигаются в одном, редко в двух, наборах концов операндов, тогда как любая внутренняя точка результата получается из континуума различных сочетаний аргументов, взятых в интервалах-операндах.

Для сложных (и многомерных) выражений  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и произвольных вероятностных распределений на областях определения  $x_1, x_2, \dots, x_n$  результирующее распределение на множестве значений  $f$  уже невозможно найти или даже качественно исследовать аналитическими средствами. Этому препятствует, в частности, зависимость (связанность) величин, которые получаются результатами промежуточных вычислений в узлах дерева Канторовича при сколько-нибудь сложных выражениях для  $f$ . В подобных ситуациях на помощь может прийти статистическое моделирование на ЭВМ, и оно надёжно подтверждает сформулированный выше качественный вывод о том, что у границ области значений функции плотность вероятности, как правило, на порядки ниже, чем в центральных точках.

В качестве модельного примера рассмотрим результаты вычислительных экспериментов, выполненных по заказу автора В.В. Колдаковым с интервальными системами уравнений.<sup>1</sup> Он предпринял прямое статистическое моделирование разброса решений точечных линейных систем в пределах заданной интервальной линейной системы уравнений, предполагая равномерность распределений параметров на интервалах их изменения. Из интервалов в матрице и правой части случайно выбирались представители, полученная точечная система решалась точечным методом, и в процессе многократного повторения этой процедуры определялись частоты попаданий решений в те или иные участки пространства  $\mathbb{R}^n$ , т. е., фактически, значения эмпирической (выборочной) плотности вероятности решений. Ниже мы приводим результаты этих экспериментов, касающиеся систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

Решения системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

как известно, определяются при  $D := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$  формулами

$$x_1 = (b_1a_{22} - b_2a_{12})/D, \quad x_2 = (b_2a_{11} - b_1a_{21})/D.$$

Поэтому можно сказать, что в двумерном случае В.В. Колдаковым экспериментально

<sup>1</sup>Эти расчёты были выполнены в 2003 году в новосибирской компании «УниПро».

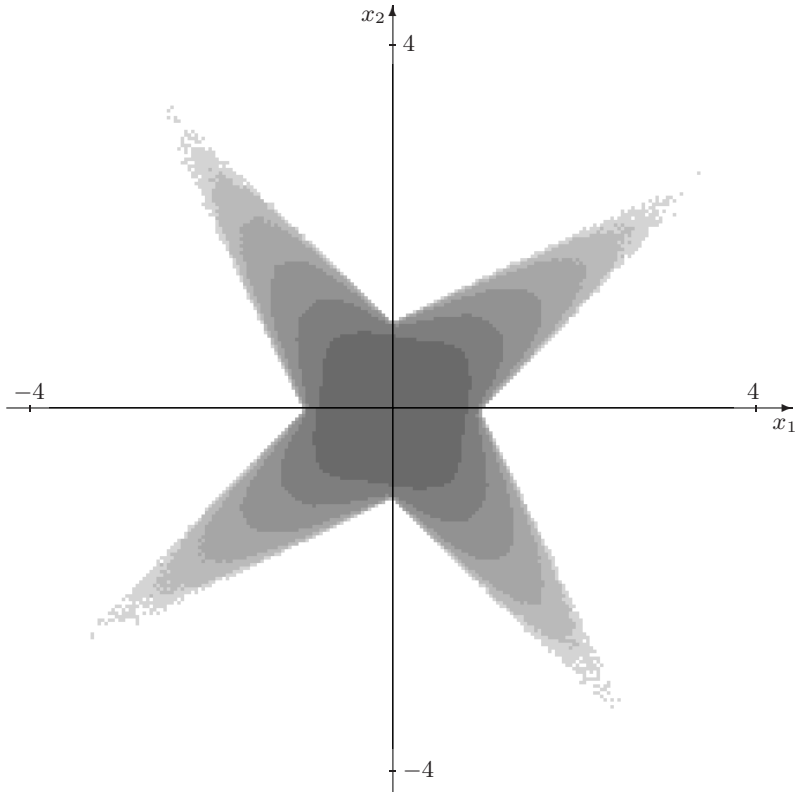


Рис. П.2. Эмпирическая плотность вероятности на множестве решений интервальной линейной системы Барта-Нудинга и оптимальные по координатным оценкам множества решений

исследовалась плотность вероятности на множестве значений отображения

$$f(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2) : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

задаваемого правилом

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \cdot \begin{pmatrix} b_1a_{22} - b_2a_{12} \\ b_2a_{11} - b_1a_{21} \end{pmatrix},$$

при равномерных распределениях на интервалах изменений аргументов  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{22}$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ .

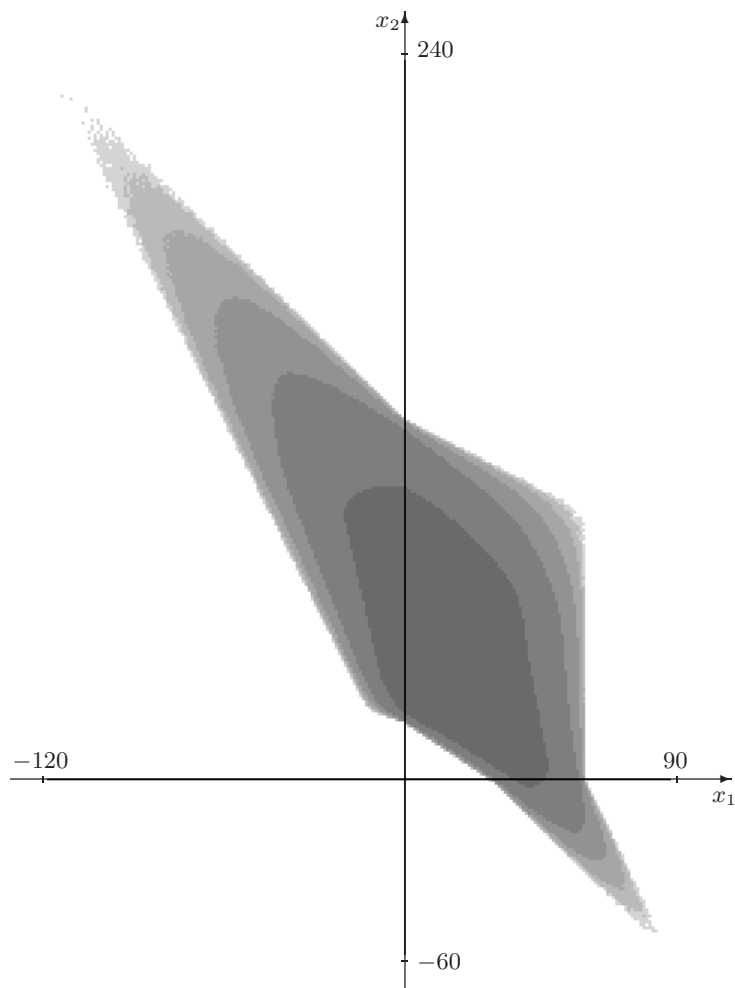


Рис. П.3. Эмпирическая плотность вероятности на множестве решений интервальной линейной системы уравнений Хансена и оптимальные по координатам оценки множества решений

На Рис. П.2 изображены результаты такого статистического моделирования с популярной интервальной линейной системой

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 1] \\ [-1, 2] & [2, 4] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [-2, 2] \end{pmatrix}$$

из работы В. Барга и Е. Нудинга (см. §5.2а, с. 262). На следующем Рис. П.3 представлены результаты статистического моделирования поведения решений для другой



известной интервальной линейной системы

$$\begin{pmatrix} [2, 3] & [0, 1] \\ [1, 2] & [2, 3] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0, 120] \\ [60, 240] \end{pmatrix},$$

предложенной Э. Хансеном (см. §11.6, с. 574). Градации плотности серого цвета на этих рисунках изображают различные плотности вероятности решений, причём самому тёмному тону соответствует максимальная плотность, принимающая значение из сегмента  $[10^{-2}, 10^{-1}[$  для системы Барта-Нудинга и  $[10^{-4}, 10^{-3}[$  для системы Хансена. Каждый переход к более светлому тону соответствует уменьшению сегмента значений плотности вероятности на один порядок, т. е. в 10 раз. Напомним, что оптимальные (точные) внешние оценки множеств решений для этих интервальных систем равны

$$\begin{pmatrix} [-4, 4] \\ [-4, 4] \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} [-120, 90] \\ [-60, 240] \end{pmatrix}.$$

Хорошо видно, что в тех частях множеств решений, которые прилегают к удалённым границам, плотность вероятности на 6-7 порядков меньше той, что зафиксирована в центральных областях. Поэтому вероятность того, что первая компонента точечного решения для системы Барта-Нудинга попадёт, скажем, в интервал  $[3.9, 4]$ , не превосходит  $10^{-9}$ , что уже «практически невозможно» в рамках рассматриваемой теоретико-вероятностной модели. По этой причине брус  $([-3.95, 3.9], [-3.9, 3.92])^T$ , к примеру, будет столь же практически «гарантированной» и «доказательной» внешней оценкой множества решений системы Барта-Нудинга, как и оптимальная интервальная оценка  $([-4, 4], [-4, 4])^T$ .

Исчезающе малая плотность вероятности решений в приграничных точках наводит на серьёзные вопросы. Насколько вообще ценна в этих условиях гарантированность наших ответов? Может быть, иногда можно поступиться «гарантированностью» и «доказательностью» ответов в духе традиционного интервального анализа, если этим достигается более простое или более эффективное решение задачи? Надежду на это дают как теоретические результаты, касающиеся трудоёмкости так называемых вероятностных (стохастических) алгоритмов [11], так и вычислительные эксперименты с рандомизированными интервальными методами оптимизации [6, 7, 10].

Таким образом, при корректном сравнении результатов интервального и статистического подходов следует принимать во внимание, что «гарантированность» интервальных внешних оценок областей значений и множеств решений нередко является избыточной, так как крайние точки области значений, близкие к экстремальным оценкам, несут исчезающе малую плотность вероятности и на практике «почти никогда» не достигаются.

Посмотрим теперь на проблему с точки зрения вычислительной сложности. В экспериментах В.В. Колдакова для получения Рисунков П.2 и П.3 было выполнено по 400 000 000 (т. е.  $4 \cdot 10^8$ ) бросаний, что потребовало около десятка минут работы четырёхпроцессорной ЭВМ Sun Ultra 450.<sup>2</sup> При увеличении размеров задачи мы уже

<sup>2</sup>Эта вычислительная машина корпорации Sun Microsystems (США) имела четыре 64-разрядных процессора UltraSPARC IV с тактовой частотой 450 МГц. Эксперименты В.В. Колдакова проводились на ней в среде Unix-подобной операционной системы Solaris версии 9.

не сможем выполнять столь масштабные эксперименты за практически приемлемое время. Действительно, для  $3 \times 3$ -систем интервальных уравнений выполнение 400 000 000 аналогичных испытаний потребовало около 32 минут работы той же ЭВМ, а для систем размера  $7 \times 7$  — уже почти 9 часов при полной загрузке всех четырёх процессоров. Далее, при возрастании в 100 раз, всего до  $700 \times 700$ , размера системы уравнений, не обладающей специальной разреженностью, трудоёмкость её решения вырастет в  $100^3 = 1\,000\,000$  раз<sup>3</sup>, так что за то же время на той же ЭВМ мы сможем выполнить в подобной задаче лишь около 400 испытаний.

Как следствие, с ростом размера задачи количество испытаний, которое мы способны выполнить на имеющихся вычислительных системах за практически доступное время, должно быть значительно уменьшено, что неизбежно приведёт и к снижению уровня достоверности результатов статистического моделирования. В конце концов по мере увеличения размера задачи этот уровень достоверности неизбежно уменьшится до такого неприемлемо низкого значения, что для достижения гарантированности решений никакой альтернативы методам интервального анализа уже не останется. Строгие количественные оценки достоверности результатов метода Монте-Карло для рассматриваемых нами задач приведены в статье [8].

Конечно, при росте размерности сложность труднорешаемых (NP-трудных) задач быстро обгоняет возможности даже многопроцессорной вычислительной техники, и далеко не всегда интервальные методы способны досчитать «до конца» оптимальные внешние оценки множеств решений интервальных систем уравнений или множеств значений функций. Тем не менее, некоторые (часто весьма качественные) внешние оценки можно вычислить интервальными методами *всегда*. Что же касается статистического моделирования, то за счёт уменьшения объёма выборки при росте размерности задачи погрешность получаемых с его помощью негарантированных оценок множеств решений быстро нарастает, так что в конце концов их достоверность и практичность делаются сомнительными. То есть, для задач достаточно большой размерности, в которых требуются действительно гарантированные оценки решений, применение статистического моделирования может привести к ненадёжным ответам, которые явно ничего не гарантируют.

Итак, перейдём к заключениям.

Свойство «гарантированности» ответов, обеспечиваемое методами интервального анализа при решении задач оценивания областей значений функций, разброса решений систем уравнений и т. п. часто является избыточным с теоретико-вероятностных позиций, а соответствующие интервальные оценки (даже оптимальные) — недостижимыми и излишне «пессимистичными». Важно лишь иметь в виду, что мы совершенно не рассматриваем, насколько адекватной ситуации является при этом сама теоретико-вероятностная модель объекта.

В некоторых интервальных задачах ослабление требований «гарантированности» и «доказательности» решений до условия «приемлемой достоверности» в теоретико-вероятностном смысле может, на наш взгляд, привести к упрощению постановок и/или созданию более эффективных алгоритмов для их решения.

Интервальный анализ явно выигрывает конкуренцию с методами Монте-Карло в тех случаях, когда требуется за практически приемлемое время (т. е. «достаточно

---

<sup>3</sup>Мы принимаем трудоёмкость решения систем линейных уравнений равной  $O(n^3)$  в зависимости от размерности  $n$ . В реальности она оказывается даже несколько большей.

быстро») или в условиях ограниченных ресурсов ЭВМ вычислить действительно гарантированные оценки множеств решений задач, областей значений функций и т. п., невзирая на возможное огрубление ответа в сравнении с идеальным математическим.

## Литература к Послесловию

- [1] БЛЕХМАН И.И., МЫШКИС А.Д., ПАНОВКО Я.Г. *Механика и прикладная математика. Логика и особенности приложений математики.* – Москва: Наука, 1990.
- [2] БОРОВКОВ А.А. *Теория вероятностей.* – Москва: УРСС Эдиториал, 2003.
- [3] ЕРМАКОВ С.М., МИХАЙЛОВ Г.А. *Статистическое моделирование.* – Москва: Наука, 1982.
- [4] ЗОЛОТАРЁВ В.М. Общая теория перемножения независимых случайных величин // *Доклады АН СССР.* – 1962. – Т. 142, №4. – С. 788–791.
- [5] КРАМЕР Г. *Математические методы статистики.* – Москва: Мир, 1975.
- [6] ПАНОВ Н.В. Разработка рандомизированных алгоритмов в интервальной глобальной оптимизации. Диссертация на соискание учёной степени канд. физ.-мат. наук . . . 01.01.07 «вычислительная математика». – Новосибирск, 2012. Электронная версия свободно доступна на <http://www.nsc.ru/interval/Library/InteDiss/PanovDisser.pdf>
- [7] ПАНОВ Н.В., ШАРЫЙ С.П. Стохастические подходы в интервальных методах глобальной оптимизации // *Всероссийское (с международным участием) совещание по интервальному анализу и его приложениям ИНТЕРВАЛ-06, 1–4 июля 2006 г., Петергоф, Россия. Расширенные тезисы докладов.* – СПбГУ: Санкт-Петербург, 2006. – С. 101–105.
- [8] СЕМЁНОВ К.К. Достоверность результатов применения метода Монте-Карло в задачах интервального анализа // *Вычислительные Технологии.* – 2016. – Т. 21, №2. – С. 42–52.
- [9] СОВОЛЬ И.М. *Метод Монте-Карло.* – Москва: Наука, 1978.
- [10] ШАРЫЙ С.П. Рандомизированные алгоритмы в интервальной глобальной оптимизации // *Сибирский Журнал Вычислительной Математики.* – 2008. – Т. 11, №4. – С. 457–474.
- [11] УСПЕНСКИЙ В.А., СЕМЁНОВ А.Л. *Теория алгоритмов: основные открытия и приложения.* – Москва: Наука, 1987.
- [12] DEMPSTER M. Distributions in intervals and linear programming // *Topics in Interval Analysis.* E. Hansen, ed. – Oxford: Clarendon Press, 1969. – P. 107–127.
- [13] GALAMBOS J., SIMONELLI I. *Products of Random Variables: Applications to Problems of Physics and to Arithmetical Functions.* – Boca Raton: CRC Press, 2004.
- [14] SPRINGER M.D. *The Algebra of Random Variables.* – New York: Wiley, 1979.

# Предметный указатель

- H*-матрица, 133  
*H*-матрица интервальная, 133  
*M*-матрица, 128  
*M*-матрица интервальная, 131  
*P*-сжатие, 112  
subdiff, программа, 624  
tolsolvty, программа, 325
- А-неопределённость, 218
- Е-неопределённость, 218
- абсолютная величина, 35  
абсолютная норма, 104  
абсолютно регулярная матрица, 605  
автоматическое дифференцирование, 167  
алгебраическое вычитание, 52  
алгебраическое деление, 55  
алгоритм «имитации отжига», 199  
алгоритм адаптивный, 443  
алгоритм пассивный, 443  
алгоритм полиномиальный, 244  
алгоритм последовательно-  
    гарантирующий, 496  
алгоритм финально-гарантирующий, 496  
алгоритм экспоненциальный, 244  
алгоритмическое дифференцирование,  
    167  
альтернатива Янссона, 271  
арифметика дифференциальная, 167
- бесконечно делимое множество, 79  
бисекция, 434  
бицентрированная форма, 174  
брус, 93
- векторная норма, 103  
взвешенная чебышёвская норма, 105  
вложение, 595  
внешняя оценивающая функция, 146
- вогнутая функция, 317  
выделяющий предикат, 216  
вырожденный интервал, 25  
вычитание внутреннее, 52
- деление внутреннее, 55  
дерево Канторовича, 149  
диагональное преобладание, 113  
диагональное расщепление, 638  
диаграмма зависимости, 30  
диаграмма связанности, 30  
дизъюнктное разложение, 226  
дифференциальная арифметика, 167  
дифференциальная центрированная  
    форма, 159  
дифференцирование автоматическое, 167  
дифференцирование алгоритмическое,  
    167  
дополнение по Шуру, 366  
допусковое множество решений, 261  
допущением о преобладании сложности,  
    495  
дробление, 434  
дуализация, 51
- зависимые интервальные величины, 29  
задача удовлетворения ограничений, 221  
знаково-блочная матрица, 603
- индуцированное отображение, 596  
индуцированное уравнение, 596  
индуцированный порядок, 600  
интервал, 18  
интервал вырожденный, 25  
интервал невырожденный, 25  
интервал неотрицательный, 37  
интервал неположительный, 37  
интервальная арифметика Каухера, 50  
интервальная арифметика Кэхэна, 72

- интервальная арифметика
  - дистрибутивная, 77
- интервальная арифметика классическая, 28
- интервальная арифметика полная, 50
- интервальная величина, 29
- интервальная задача оценивания, 232
- интервальная плоскость, 47
- интервально-аффинный метод Гаусса, 370
- интервальное продолжение, 146
- интервальное расширение, 146
- интервальное расширение естественное, 148
- интервальное расширение оптимальное, 147
- интервальный метод Ньютона, 412, 420
- интервальный наклон, 163
- итерации одношаговые, 391
- итерации стационарные, 391
- квадрант, 116
- квазивогнутая функция, 586
- классическая интервальная арифметика, 28
- код Грея, 339
- компарант интервальной матрицы, 134
- компарант матрицы, 133
- компонента связности, 270
- контрольная матрица, 481
- контрольный вектор, 481
- конус, 600
- конус положительных элементов, 600
- критерий Фань Цзы, 128
- критерий неограниченности допускового множества решений, 312
- критерий неособенности Баумана, 114
- лемма Канторовича, 76
- линейная зависимость, 310
- липшицево по форме выражение, 154
- локальная оценивающая процедура, 399
- локальное оценивание, 234, 399
- магнитуда, 35
- максимин, 206
- максимум-норма, 105
- матрица абсолютно неособенная, 605
- матрица абсолютно регулярная, 605
- матрица вырожденная, 140
- матрица знаково-блочная, 603
- матрица наклонов интервальная, 157
- матрица невырожденная, 140
- матрица неособенная, 112, 140
- матрица неполного ранга, 274
- матрица неразложимая, 107
- матрица особенная, 112, 140
- матрица полного ранга, 274
- матрица положительно обратимая, 127
- матрица разложимая, 107
- матрицы Ноймайера-Райхмана, 121
- матричная норма, 105
- метод Гаусса интервальный, 364
- метод Гаусса-Зейделя интервальный, 370
- метод Кравчика, 392, 423
- метод Ньютона интервальный, 412, 420
- метод Ньютона субдифференциальный, 625
- метод Хансена-Сенгупты, 426
- метод Шайдурова, 336
- метод Шульца, 126
- метод ветвей и границ, 177, 191, 194, 205
- метод ветвлений и отсечений, 437
- метод осевых сечений, 288
- методы дробления графика, 185, 191
- методы дробления параметров, 470
- методы дробления решений, 447
- методы распространения ограничений, 433, 437
- метрика, 67
- мигнитуда, 36
- минимакс, 206
- множества АЕ-решений, 225
- множества кванторных решений, 217, 222
- множество бесконечно делимое, 79
- модуль интервала, 35
- монотонная матрица, 127
- монотонная норма, 104
- монотонность по включению, 28, 56, 100
- мультиинтервальная арифметика, 73
- мультиметодный алгоритм, 398
- надграфик, 614
- наклон функции, 161
- наклон функции интервальный, 163
- наклонная форма, 161
- невырожденный интервал, 25
- независимые интервальные величины, 29
- неопределённость А-типа, 218
- неопределённость Е-типа, 218
- неособенная интервальная матрица, 112, 637

- неособенность сильная, 122  
 непрерывность по Липшицу, 151  
 неразложимая матрица, 107  
 несвязное множество, 270  
 нечетких множеств теория, 77  
 норма интервального вектора, 103  
 норма интервальной матрицы, 105
- область значений совместная, 29  
 оболочка интервальная, 95  
 обратная интервальная матрица, 124  
 объединённое множество решений, 261  
 оператор Кравчика, 421  
 оператор Ньютона интервальный, 412, 418, 429, 430  
 оператор Хансена-Сенгупты, 425  
 опорная функция, 613  
 оптимальное решение, 242  
 ортант, 116  
 основная теорема интервальной арифметики, 34  
 отбраковка по значению, 183  
 отклонение интервала, 36  
 относительная ширина, 41  
 относительный интервал, 41  
 отображение  $P$ -сжимающее, 112  
 отображение изотонное, 609  
 отображение порядково-выпуклое, 611  
 отображение сжимающее, 111, 112  
 отрицательная часть интервала, 617  
 отрицательная часть числа, 55
- погружение, 598  
 подчинённая норма, 105  
 полиэдральная функция, 319, 614  
 полиэдральное множество, 267  
 полная интервальная арифметика, 50  
 положительная часть интервала, 617  
 положительная часть числа, 55  
 положительно обратимая матрица, 127  
 порядок по включению, 28, 51  
 построчная однородность, 609  
 правильная проекция, 52  
 предельная теорема Крейнвича, 79  
 предобуславливание, 384  
 предобуславливатель, 384  
 предобуславливающая матрица, 384  
 признак Адамара интервальный, 114  
 признак Бекка, 116  
 признак Рона-Рекса, 120  
 признак Румпа, 118
- принцип Биркгофа-Тарского, 76  
 принцип вложенных интервалов, 71, 110  
 производная односторонняя, 612  
 процедура Хансена-Блика-Рона, 394
- разложимая матрица, 107  
 разложимая функция, 148  
 распознающий функционал, 317  
 расстояние между интервалами, 68  
 расщепление оператора, 641  
 решётка, 50
- связанные интервальные величины, 29  
 связное множество, 270  
 сегментные арифметики, 75  
 сжатие, 111, 112  
 сильное свойство, 218  
 сингулярное число матрицы, 106  
 слабое свойство, 218  
 случайное интервальное дробление, 201  
 совместная область значений, 29  
 согласованная матричная норма, 105  
 спектральный радиус, 107  
 список инструкций, 149  
 среднезначная форма, 159  
 стандартное погружение, 601  
 субградиент, 612  
 субдистрибутивность, 46  
 субдифференциал, 612  
 субдифференциальный метод Ньютона, 625  
 супердистрибутивность, 57
- твин, 71  
 теорема Алефельда, 365  
 теорема Алефельда-Крейновича-Майера, 286  
 теорема Алефельда-Херцбергера, 379  
 теорема Апостолатоса-Кулиша, 378  
 теорема Банаха о неподвижной точке, 111  
 теорема Барта-Нудинга, 375  
 теорема Барта-Нудинга-Бекка, 367  
 теорема Бауманна, 172  
 теорема Бекка-Никеля, 273  
 теорема Брауэра о неподвижной точке, 24  
 теорема В.С. Зюзина, 619  
 теорема И.А. Шарой о допусковом множестве решений, 307  
 теорема Крейнвича предельная, 79

- теорема Куттлера, 132  
теорема Лакеева-Носкова, 276  
теорема Майера-Варнке, 376  
теорема Миранды, 24  
теорема Перрона-Фробениуса, 107  
теорема Рогинской-Шульмана, 80  
теорема Рона о допусковом множестве  
решений, 308  
теорема Шрёдера о неподвижной точке,  
112  
теорема о максимальной внутренней  
оценки, 560  
тест средней системы, 313  
тесты существования, 433  
точечная величина, 18  
треугольное расщепление, 638
- управляемое множество решений, 261  
уравнение в дуализациях, 553, 556  
уравновешенный интервал, 36  
условие Липшица, 151  
условный экстремум по включению, 54
- формальное решение, 240, 592  
формулы Лакеева, 56  
функционал Рачека, 41  
функциональное выражение  
элементарное, 148  
функция вогнутая, 317  
функция квазивогнутая, 586  
функция обрезки, 172  
функция полиэдральная, 319, 614
- характеризация Бекка, 357, 552, 580  
характеризация Оетгли-Прагера, 267
- центрированная форма, 157
- чебышёвская норма, 105
- эффект зависимости, 33  
эффект обёртывания, 99  
эффект связанности, 33