

АКАДЕМИЯ НАУК КИРГИЗСКОЙ ССР

Институт математики

На правах рукописи

Югай Сергей Александрович

УДК 681.3:518.5

РАЗРАБОТКА И ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО-
ИНТЕРВАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ОБЕСПЕЧЕНИЯ
ДОКАЗАТЕЛЬНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЙ НА ЭВМ

01.01.07 - вычислительная математика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических
наук, П.С.Панков

Фрунзе - 1988

СОДЕРЖАНИЕ

стр.

Введение	4
Глава I. Гарантированная двусторонняя аппроксимация вещественных функций на ЭВМ	20
§ I.1. Аппроксимация вещественных функций в интервальном анализе	20
§ I.2. Функционально-интервальная арифметика и гарантированная двусторонняя аппроксимация вещественных функций линейными сплайнами	23
§ I.3. О применении функционально-интервальной арифметики в доказательных вычислениях на ЭВМ	34
Глава 2. Программная реализация функционально-интервальной арифметики	40
§ 2.1. Описание программных модулей	40
§ 2.2. Операции формирования и выделения элементов	42
§ 2.3. Арифметические операции	47
§ 2.4. Теоретико-множественные операции	53
§ 2.5. Математические функции	58
Глава 3. Приложения функционально-интервального анализа для некоторых математических задач	64
§ 3.1. Алгоритмы вычислений определенных интегралов в гарантированных границах	64
§ 3.2. Алгоритм построения гарантированных оценок решений обыкновенных дифференциальных уравнений	68
§ 3.3. Применение доказательных вычислений на ЭВМ к одной задаче теории выпуклых фигур	75
§ 3.4. Применение доказательных вычислений на ЭВМ к улучшению оценки наибольшей плотности упаковок равных шаров в пространстве	87

Список использованных источников	99
Приложение I. Перечень использованных программных модулей интервального анализа	I05
Приложение 2. Перечень построенных программных модулей функционально-интервального анализа для ЕС ЭВМ	I08
Приложение 3. Тексты программных модулей функционально- интервального анализа	III
Приложение 4. Тексты программ для доказательных вычисле- ний на ЭВМ	II9

ВВЕДЕНИЕ

Целью настоящей работы является разработка функционально-интервального анализа, а также построение и реализация соответствующего пакета программ в дополнение к существующему комплексу программ для обеспечения доказательности вычислений на ЭВМ.

Актуальность работы обусловлена потребностью автоматизации процесса получения строгих математических утверждений вычислениями на ЭВМ и заключается в расширении сферы применения вычислительных машин в математических исследованиях.

Новизна работы состоит в следующем:

- разработана функционально-интервальная арифметика, опирающая множествами вещественных функций, заданных на отрезках, и построен соответствующий пакет программ для ЭВМ серии ЕС, позволяющий автоматически строить функционально-интервальные расширения по аналитической записи функций;
- составлены и реализованы алгоритмы для вычисления определенных интервалов с гарантированной точностью и для получения двусторонних решений обыкновенных дифференциальных уравнений, предложен алгоритм доказательства существования периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений на ЭВМ;
- доказательными вычислениями на ЭВМ получена новая оценка в одной задаче теории выпуклых фигур и улучшена известная верхняя оценка наибольшей плотности упаковок равных шаров в пространстве.

Практическое значение работы состоит в том, что построенный пакет программ функционально-интервального анализа является частью математического обеспечения для доказательных вычислений на ЕС ЭВМ и позволяет получать автоматически гарантированную двустороннюю аппроксимацию вещественных функций линейными сплайнами.

Это позволяет вычислять определенные интегралы в достаточно узких границах с автоматическим учетом ошибок округлений и погрешности метода. Разработанные алгоритмы решения обыкновенных дифференциальных уравнений могут применяться для получения двусторонних аппроксимаций решений, а также для доказательства существования периодических траекторий. Эти алгоритмы в случае одного уравнения реализованы в виде подпрограмм и требуют минимальной подготовительной работы со стороны пользователей.

Приступая к обзору работ, с которыми связаны полученные в данной работе результаты, отметим, что в некоторых математических задачах и приложениях решающим фактором является получение гарантированного результата за допустимое время с помощью реальной ЭВМ, а не реализация того или иного численного метода, дающего приближенное решение, то есть возникает необходимость вычисления не только приближенных решений задач, но и гарантированных оценок их близости к точным решениям. Вместе с тем, во многих работах, связанных с получением строгих математических утверждений на ЭВМ, имеется тот недостаток, что полученные в процессе вычислений результаты, как правило, содержат ошибки округлений и погрешности, возникающие из-за дискретизации численных методов. Существующие способы учета такого рода ошибок позволяют получать лишь приближенное представление об их величине, т.е. если f - некоторая величина, $f_{\text{ЭВМ}}$ - полученное в результате вычислений на ЭВМ значение этой величины, то можно лишь утверждать, что $f_{\text{ЭВМ}} \approx f$, но математической строгости при этом нет.

В связи с этим разработан метод, использующий доказательные вычисления, такие вычисления на ЭВМ, которые предназначены для получения строгих математических утверждений и организованы таким образом, что полученные в результате величины гарантированно

содержат истинные, т.е. $f \in [f]$ док. выч. ЭВМ.

С применением этого метода П.С.Панковым, М.И.Иманалиевым совместно с И.Г.Габитовым, С.Л.Долматовым, Г.Д.Панковой, Б.Д.Баячевой получены результаты в комбинаторной геометрии, теории выпуклых фигур, теории дифференциальных уравнений, обратных задач, теории функций.

Подобные целенаправленные вычисления на ЭВМ, комбинируемые с аналитическими исследованиями, которые в результате приводят к установлению новых фактов, проводились также в работах К.И.Бабенко совместно с М.М.Васильевым и В.Ю.Петровичем, С.Н.Васильева, В.М.Матросова, Ю.В.Матиясевича, Я.Г.Синая.

Приведем некоторые результаты, полученные с помощью доказательных вычислений на ЭВМ.

В теории выпуклых фигур известна задача А.Лебега о нахождении минимальной площади \mathcal{T} универсальной выпуклой покрышки всех фигур диаметра единица и оценка для нее $0.825\dots \leq \mathcal{T} \leq 0.844\dots$. В /20/ доказательными вычислениями на ЭВМ получена оценка $\mathcal{T} \geq 0.830$. Также построена фигура с площадью, большей $0.479\dots$, которую можно поместить в любую выпуклую фигуру ширины единица.

В /52/ с помощью ЭВМ было получено количество правильных пятиугольников, которые могут касаться такого же пятиугольника, и доказано, что оно не больше шести.

В /46/ с помощью вычислений на ЭВМ доказано одно новое неравенство для треугольника, связывающее длины биссектрис и медиан со сторонами: $b_a + b_\beta + m_c \leq \frac{\sqrt{3}}{2}(a + \beta + c)$. Идея доказательства состоит в сведении исходной задачи к исследованию функции двух переменных на экстремум в двумерной области, которое проводится на первом этапе вблизи точки экстремума с помощью бесконечно малых, а затем, в остальной области, - на дискрет-

ной сетке, вычислениями на ЭВМ, но со строгим учетом погрешностей.

С помощью счета на ЭВМ, в рамках интервального анализа, в /17/ доказано неравенство

$$n\alpha_n^2 - (n+1)\alpha_{n-1}\alpha_{n+1} > 0$$

являющееся необходимым условием справедливости гипотезы Римана.

В /15/ с помощью ЭВМ доказано, что система

$$\dot{x}_1 = x_1(\alpha x_2/(1+x_2) - \beta x_2 - \gamma)$$

$$\dot{x}_2 = x_2(1-\mu)/(1+\nu x_2) - x_2 ,$$

описывающая модель динамики иммунной клеточной противоопухолевой реакции, при заданных значениях коэффициентов имеет свойство, близкое к наблюдаемому экспериментально явлению: при выходе из дремлющего состояния опухоли (неустойчивого фокуса) после нескольких колебаний может произойти либо выздоровление (приход в точку $x_1 = 0, x_2 = 0$), либо гибель (неограниченное возрастание x_2 - количества опухолевых клеток).

Для статической модели Лоренца

$$\frac{dx}{dt} = \alpha_1 x + \beta_1 y z + \beta_2 x z$$

$$\frac{dy}{dt} = \alpha_2 y - \beta_1 y z - \beta_2 x z$$

$$\frac{dz}{dt} = -\alpha_3 z + (x+y)(\beta_2 x + \beta_3 y)$$

в /7/, на основании результатов численного счета с удвоенной точностью, математически строго установлено существование периодической траектории.

В /12/ рассмотрена одна модельная задача фильтрации: определение толщины водоносного слоя U по давлению P на флютбере плотины, которая приводит к интегральному уравнению

$$\rho = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{4-t^2(1+q^2)(1-t^2q)}} / \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)((1+q^2)^2-4qt^2)}},$$

где $q = t h^2(\pi/(4U))$. Методом доказательных вычислений показана однозначная разрешимость этого уравнения.

В /4/ с помощью ЭВМ получена оценка

$$|S_1(x_1, x_2) - f(x_1, x_2)| \leq \frac{1}{2} (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) (f_{11} + f_{12} + f_{21}),$$

где $S_1(x_1, x_2)$ – интерполяционный сплайн первой степени, который совпадает с $f(x_1, x_2)$ в вершинах треугольника Δ со сторонами a, b, c :

$$f_{ij} = \sup_{\Delta} |\partial^2 f / (\partial x_j \partial x_i)|.$$

Заканчивая на этом краткий обзор результатов, полученных с помощью доказательных вычислений на ЭВМ, более подробно остановимся на одном из возможных способов обеспечения доказательности вычислений – применении интервального анализа, основная идея которого, как известно /48/, заключена в замене вещественных чисел и операций над ними соответственно интервальными числами (интервалами) и интервальными операциями так, что полученные в результате интервалы – значения интервальных функций, содержат истинные решения задач.

Возникнув первоначально как средство автоматического контроля ошибок округлений при вычислениях, интервальный анализ в настоящее время получил развитие и применение в различных областях математики и техники. Достоинство интервальных методов заключено в возможности получения результатов вместе с полным и строгим учетом ошибок, причем учет их ведется апостериорно, а ошибки округлений учитываются автоматически. Кроме того, такие методы позволяют учитывать неточности в исходных данных задач, т.е. в тех случаях, когда о входных параметрах известны лишь границы

изменения, они дают возможность получать решения также в некоторых границах.

Достаточно полный обзор работ по интервальной математике сделан в /49, I3/. В последней приведен полный перечень работ советских авторов по интервальной математике и ее реализации на ЭВМ. Имеется несколько реализаций интервальной арифметики для отечественных ЭВМ /35, I8, 27, 8, 43/.

В целях создания универсального математического обеспечения для доказательных вычислений на ЭВМ, в /27/ построен комплекс программ интервального анализа, включающий подпрограммы для операций формирования элементов, модули, реализующие арифметические и теоретико-множественные операции, а также интервальные расширения математических функций. Некоторые из приведенных выше результатов получены с применением этого комплекса программ.

Вместе с тем, как отмечается многими авторами в работах по интервальному анализу, вычисления на ЭВМ в рамках интервальной арифметики могут давать в результате неприемлемо широкие интервалы: из-за недостаточной точности реализуемого интервального метода; из-за накопления ошибок округлений, возникающих вследствие усечения разрядов в представлении интервальных чисел в памяти ЭВМ; из-за неустранимых ошибок, связанных с субдистрибутивностью, отсутствием обратных операций для сложения и умножения и некоторых других специфических свойств интервальной арифметики.

Первые две причины могут быть устранины с разработкой более точных интервальных и интервально-аналитических методов и созданием "интервальной ЭВМ", в которой аппаратурно реализуются интервальные операции.

Последнее неприятное обстоятельство приводит к необходимости его "устранения" различными приемами в каждом конкретном случае. Этим объясняется, по-видимому, появление различных модифи-

каций и "уточнений" интервальной арифметики: "огрубление полиномами" /54/, "обобщенной интервальной арифметики" /45/, "модифицированной арифметики"/14/ и др.

В настоящей работе предложен, теоретически обоснован и реализован на ЭВМ способ гарантированной двусторонней аппроксимации вещественных функций линейными сплайнами. Эти исследования являются дальнейшим расширением математического обеспечения для доказательных вычислений на ЭВМ, и вместе с тем это – попытка сделать интервальную арифметику более точной в конкретных вычислениях.

Опишем основное содержание настоящей диссертационной работы.

Работа состоит из трех глав и приложений.

Первая глава посвящена вопросам гарантированной двусторонней аппроксимации вещественных функций на ЭВМ. Одним из способов такой аппроксимации является применение интервального анализа, что позволяет получать кусочно-постоянную аппроксимацию. Предложен способ гарантированной двусторонней аппроксимации вещественных функций линейными сплайнами (функциональными интервалами) и обоснована возможность применения такого способа в рамках доказательных вычислений на ЭВМ.

В § I.I приведены основные сведения из интервального анализа, некоторые специфические свойства арифметики, а также различные способы вычисления значений вещественно-значных функций в рамках интервальной арифметики.

Кратко описана машинная реализация интервальной арифметики, ориентированная для доказательных вычислений на ЭВМ /27/. Как уже отмечалось, непосредственные вычисления в рамках машинной интервальной арифметики значений вещественно-значных функций без дополнительных построений и оценок позволяют получать только кусочно-постоянную аппроксимацию этих функций.

В § I.2 вводится функционально-интервальная арифметика, оперирующая объектами – множествами вещественных функций, заданных на отрезке так, что ее применение позволяет получать гарантированные двусторонние аппроксимации решений задач в кусочно-линейных границах.

Определение. Функциональным интервалом P на отрезке $[a, b]$ будем называть множество всех вещественных функций $p(x)$, ограниченное линейными функциями $p_1(x), p_2(x)$

$$(p_1(x) \leq p(x) \leq p_2(x), \quad x \in [a, b]):$$

$$P = \{p(x) \mid p_1(x) \leq p(x) \leq p_2(x)\} . \quad (I)$$

Будем обозначать

$$P = \{[p_1(a), p_2(a)], [p_1(b), p_2(b)]\} .$$

Пусть P и Q – функциональные интервалы $p_i(x), q_j(x)$ – соответствующие линейные граничные функции. Функционально-интервальная арифметика в общем случае вводится следующим образом:

$$P * Q = \left\{ y(x) \mid \overline{\min_{i,j=1,2} [p_i * q_j]} \leq \overline{\max_{i,j=1,2} [p_i * q_j]} \right\} \quad (2)$$

(черта означает линейную оболочку множества).

Введенная таким образом арифметика не однозначна.

Определение. Функционально-интервальной арифметикой будем называть набор правил, дающий по двум заданным P и Q функциональный интервал \bar{Y} , удовлетворяющий условиям:

- а) если $p(x) \in P, q(x) \in Q$, то $p(x) * q(x) \in \bar{Y}$;
- б) если некоторый функциональный интервал \bar{Y} , отличный от \bar{Y} , удовлетворяет первому свойству, то не может быть $\bar{Y} \neq \bar{Y}$.

Далее получены вычислительные формулы для арифметических операций, обладающие свойством наибольшей суженности в средней точке функционального множества (2), введено определение функционально-интервального расширения функции скалярного аргумента.

В последнем пункте этого параграфа рассмотрены функциональные интегралы. Получены явные формулы для вычисления определенных интегралов с заданной точностью, а также оценка погрешности метода.

Пусть вещественная, непрерывная на интервале $[\alpha, \beta]$ функция $f(x)$ имеет функционально-интервальное расширение $\{f\}(x)$, заданное при $x = [\alpha, \beta]$:

$$f(x) \in \{f\}(X_i) = \{A_i, B_i\} (\forall x \in X_i), \quad (i=1, n).$$

При любом способе разбиения $[\alpha, \beta]$ на подинтервалы выполнено включение

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \in \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (A_i + B_i) w(X_i) \quad (3)$$

и имеет место оценка

$$\omega\left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (A_i + B_i) w(X_i)\right) \leq \frac{L}{2} (w(X_i))^2, \quad (4)$$

где число L – интервальный коэффициент Липшица.

Для интеграла с переменным верхним пределом $\int_{\alpha}^x f(x) dx$ получена вычислительная формула:

$$\int_{\alpha}^x f(x) dx \in \left\{ [\varphi_0 - \varphi_1 (\beta - \alpha)/2], [\varphi_1 (\beta - \alpha), \varphi_0 + \varphi_1 (\beta - \alpha)/2] \right\}, \quad (5)$$

где

$$\varphi_0 = (\beta - \alpha)(3A + B)/8, \quad \varphi_1 = (A + B)/2.$$

В § I.3 приведена общая схема метода доказательных вычислений на ЭВМ и показана принципиальная возможность применения таких вычислений для получения строгих математических утверждений в теории выпуклых фигур и комбинаторной геометрии.

Во второй главе описано представление функциональных интервалов в памяти ЭВМ типа ЕС и построены программные модули функционально-интервальных операций, которые разделены на следующие

подгруппы:

- операции формирования и выделения элементов;
- арифметические операции;
- теоретико-множественные операции;
- расширения математических функций.

Подпрограммы первой группы написаны на машинно-ориентированном языке Ассемблер, остальные операции реализованы на алгоритмическом языке высокого уровня Фортран-IV. Все операции описаны в следующем порядке: назначение, форма обращения, алгоритм работы, требуемые функции и подпрограммы.

В первом параграфе выбрано с учетом особенностей ЕС ЭВМ машинное представление функциональных интервалов и описаны подпрограммы формирования машинных функциональных интервалов и обратных операций – выделения его элементов.

В § 2.2 построены машинные функционально-интервальные арифметические операции: сложение, вычитание, умножение, деление и возведение в степень с использованием следующего.

Л е м м а . Если $f''(x)$ не меняет знак на отрезке $[\alpha, \beta]$, то

$$f(x) \in \{ [f(\alpha), f(x_0) - \ell f'(x_0)], [f(\beta), f(x_0) + \ell f'(x_0)] \},$$

где $[c, d] = [\min(c, d), \max(c, d)]$,

$$x_0 = (\alpha + \beta)/2, \quad \ell = (\beta - \alpha)/2.$$

Далее в § 2.3 описаны машинные функционально-интервальные операции, являющиеся реализацией некоторых теоретико-множественных операций. Эти операции (проверка вложения, знак разности, определение знака) позволяют описывать в алгоритмах разветвляющиеся процессы, определять минимальные и максимальные функциональные интервалы, формировать внешнее представление и др.

В последнем параграфе этой главы приведены описания подпрограмм, предназначенных для построения на ЭВМ функционально-ин-

тервальных расширений некоторых математических функций: квадратного корня, экспоненты, синуса, косинуса, натурального логарифма. Применение функционально-интервальных операций и расширений математических функций позволяет строить соответствующие расширения практически для любой конкретной вещественной функции.

В третьей главе построены алгоритмы вычислений интегралов с гарантированной точностью и решений обыкновенных дифференциальных уравнений в рамках функционально-интервальной арифметики, получены результаты применения доказательных вычислений на ЭВМ к некоторым задачам теории выпуклых фигур и комбинаторной геометрии. Отметим, что использование функционально-интервальной арифметики в доказательных вычислениях обеспечивает гарантированную связь между истинными решениями задач и полученными результатами.

В § 3.1 построены алгоритмы для вычисления определенных интегралов с гарантированной точностью. Пусть $\{f\}(X)$ — функционально-интервальное расширение гладкой функции $f(x)$, заданной на отрезке $[\alpha, \beta]$. Для равномерного разбиения отрезка $[\alpha, \beta]$ на подынтервалы $X_1, X_2 \dots, X_n$ так, что $w(X_i) = (\beta - \alpha)/n$,

$$w([\mathfrak{f}](X_i)) \leq L \cdot w(X_i),$$

имеет место включение

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \in \frac{\beta - \alpha}{2n} \sum_{i=1}^n (A_i + B_i),$$

где

$$\{A_i, B_i\} = \{f\}(X_i), i = 1, n$$

и справедлива оценка

$$w\left(\frac{\beta - \alpha}{2n} \sum_{i=1}^n (A_i + B_i)\right) \leq L \frac{(\beta - \alpha)^2}{2n}$$

(L — интервальный коэффициент Липшица для $f(x)$).

По существу, эта формула является интервальным аналогом классической формулы трапеций, но, в отличие от последней, ее применение позволяет получить оценку погрешности численного ин-

тегрирования без привлечения информации о производных функции. Учет ошибок округлений и погрешности метода ведется автоматически при вычислении функционально-интервального расширения функции на ЭВМ.

Для вычисления интеграла $\int_a^x f(x) dx, x \in [a, b]$ в гарантированных границах, с использованием вычислительной формулы (5), составлена подпрограмма *QFIN*, практически строящая функционально-интервальные расширения заданных интегралов.

В § 3.2 разработан и реализован алгоритм построения гарантированных оценок решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Для получения таких оценок применялись методы интервального анализа /13, 36, 48/. Как правило, в них требуются вычисления и оценки производных правых частей, а также априорное задание области изменения искомого решения. Предлагаемый алгоритм не требует этого, вместо чего используется ее автоматическое апостериорное определение на каждом шаге с использованием следующего результата.

Теорема. Если функциональный интервал $\{A, B\}$ удовлетворяет условию

$$\{\underline{F}, \bar{F}\} = \{\bar{f}\}(x, \{Y_0, Y_0 + \frac{x_1 - x_0}{2}(A + B)\}) \subset \{A, B\}, \quad (6)$$

где $\{\bar{f}\}$ – функционально-интервальная функция, соответствующая гладкой функции $f(x, y)$, такая, что из

$$y(x) \in \{U, V\}$$

следует

$$f(x, y(x)) \in \{\bar{f}\}(x, \{U, V\}),$$

то решение начальной задачи

$$y' = f(x, y), x \in X = [x_0, x_1], y(x_0) \in Y_0 \quad (7)$$

существует и имеет место включение

$$y(x_1) \in Y_0 + \frac{x_1 - x_0}{2} (E + \bar{F}) .$$

Суть алгоритма, определяющего траекторию решения начальной задачи на одном шаге, заключается в следующем.

Выбирается некоторый функциональный интервал $\{A, B\}$ и проверяется условие (6). Если оно выполнено, то имеем:

$$y(x) \in \left\{ Y_0, Y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds \right\}, \quad x \in X .$$

Иначе расширяется $\{A, B\}$ и опять проверяется условие (6).

В случае одного уравнения возможно параллельное нахождение верхней и нижней границ траекторий решений (7). При таком подходе значительно сужается ширина функциональных интервалов, содержащих решения, а при достаточно малом шаге интегрирования получаются сужающиеся полосы, если интегральные кривые фактически сближаются. Однако это требует дополнительных затрат машинного времени.

Такой алгоритм реализован на ЭВМ ЕС-1022 программой *GDIFE*, написанной на алгоритмическом языке Фортран-IV с использованием интервальных и функционально-интервальных операций. Этот алгоритм может быть применен для доказательства существования периодических траекторий обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть $Y(t, w)$ - решение уравнения

$$y' = f(t, y), \quad f(t + T, y) = f(t, y), \quad t \in E^n, \quad (8)$$

такое, что $Y(0, w) = w$. Обозначим $\{Y\}([t, \bar{t}], w)$ - векторное функционально-интервальное расширение функции $Y(t, w)$, $\Phi(w)$ - правый интервальный вектор в вычислитльном значении этой функции при $\bar{t} = T$. Если для некоторого параллелепипеда $w \in E^n$ и набора покрывающих его параллелепипедов $\{W_i | i=1, \bar{m}\}$

имеют место вложения $(\forall i)(\{\Phi\}(W_i) = W)$, то (8) имеет периодическое решение.

В § 3.3 рассмотрена следующая задача теории выпуклых фигур: какова выпуклая фигура Φ наименьшей возможной площади такая, что в нее можно заключить любую кривую длины 1?

Доказано /53/, что такой фигурой может быть ромб со сторонами $1/\sqrt{3}$ и диагональю, равной 1, имеющий площадь 0.2887 Здесь же анонсировано существование выпуклой фигуры с площадью 0.2861... .

Принципиальная возможность применения доказательных вычислений на ЭВМ в теории выпуклых фигур и комбинаторной геометрии следует из того, что доказательство известной теоремы о компактности множества выпуклых кривых в ограниченной области по хаусдорфовой метрике является по существу конструктивным, и множество фигур, конгруэнтных данной, конечномерно.

Применительно к поставленной задаче доказано, что фигура Φ , ограниченная ломаной $y = k|x|$ и кривой $y = \max(T_1(k, |x|), T_2(k, |x|))$, где $k = \operatorname{tg} \alpha$, $30^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$, $T_1(k, x)$, $T_2(k, x)$ – известные вычислимые функции на отрезке $[-0.5, 0.5]$, покрывает любую кривую единичной длины.

Вследствие сложности задания функций $T_1(k, x)$ и $T_2(k, x)$ обычными приемами не удается получить приемлемую оценку площади Φ . Расчеты на ЭВМ границы этой фигуры и оптимизация ее площади относительно параметра α , с применением пакета программ функционально-интервальной арифметики, дают доказательную оценку 0.26714, что улучшает известные оценки площади "универсальной покрышки" для кривых постоянной длины.

В § 3.4 рассматривается задача о наиболее плотной упаковке равных шаров в пространстве. Для наибольшей плотности произволь-

ных упаковок C единичных шаров в E^n

$$d_n = \sup_{R \rightarrow \infty} \left\{ \ell \bar{\Omega}(R) / V(R) \mid C \right\},$$

где $\Omega(R)$ - объем единичных шаров и их частей, попавших в шар радиуса R с объемом $V(R)$, даже в трехмерном случае имеются только оценки:

$$0.7404 \dots \leq d_3 \leq 0.77963 \dots .$$

Нижняя оценка достигается для наиболее плотных из решетчатых упаковок, верхняя - была получена /28/, путем рассмотрения тетраэдров, образованных центрами четырех соседних единичных шаров, и соответствует заполнению правильного тетраэдра частями этих шаров.

Принципиальная возможность применения численных методов для получения оценок d_n следует из утверждения.

Теорема. Для любого натурального n число d_n конструктивно вычислимо, т.е. можно построить алгоритм для вычисления с любой, наперед заданной, точностью.

Для улучшения верхней оценки для d_3 было использовано разбиение пространства на области Дирихле-Вороного плоскостями, равноудаленными от соседних шаров упаковки, а также оценка для плотности заполнения наименьшей ячейки единичным шаром

$$d_3 \leq (4/3) \pi / \inf \{ V_{D-V} \mid C \},$$

где \inf берется по всевозможным многогранникам разбиения (ячейкам). Проводится разбиение ячейки на "частичные объемы" W_k , $k=1, 2, \dots, 4$ путем триангуляции центров m соседних шаров на центральную сферу. Тогда для объема ячейки справедлива оценка

$$V_m = \sum_{k=1}^{2m-4} W_k \geq \inf \left\{ \sum_{k=1}^{2m-4} W(\Delta_k) \mid \sum_{k=1}^{2m-4} S(\Delta_k) = 4\pi \right\}, \quad (9)$$

где $W(\Delta)$ - минимальный частичный объем, $S(\Delta)$ - площадь сферы

ческого треугольника Δ .

Аналитическими методами не удается получить приемлемые оценки (8). С помощью доказательных вычислений на ЭВМ получена оценка

$$\inf\{V_{D-V}|C\} > 5.402,$$

откуда $d_3 < 0.7753$.

В качестве приложений приведены:

- список модулей комплекса программ интервального анализа для ЕС ЭВМ;
- список построенных в настоящей работе программных модулей функционально-интервальной арифметики;
- тексты программных модулей функционально-интервального анализа для ЕС ЭВМ (к гл. 2);
- тексты программ для доказательных вычислений на ЭВМ (к гл. 3).

По результатам работы опубликованы статьи /23, 24, 25, 40, 41, 42/ и тезисы докладов /25, 37, 38, 39/.

Основные результаты диссертации были доложены на семинаре Отдела геометрии МИАН СССР (Москва, 1982), Школе молодых ученых МГУ "Актуальные проблемы вычислительной математики и математической физики", руководимой академиком А.Н.Тихоновым (Москва, 1983), Всесоюзных совещаниях по интервальной математике (Красноярск, 1984, 1988), семинаре "Методы сплайн-функций" ИМ СО АН СССР (Новосибирск, 1984), семинаре Отдела численных методов ИГМ ТГУ (Тбилиси, 1986), семинаре "Теория кодирования" кафедры математической кибернетики МГУ (1986), Республиканских конференциях молодых ученых и семинарах ИМ АН Киргизской ССР (Фрунзе, 1982-1986).

В заключение выражают глубокую признательность научному руководителю П.С.Панкову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

I. ГАРАНТИРОВАННАЯ ДВУСТОРОННЯЯ АППРОКСИМАЦИЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ НА ЭВМ

§ I.I. Аппроксимация вещественных функций в интервальном анализе

Для получения гарантированных двусторонних аппроксимаций вещественных функций может быть применен интервальный анализ. В его основе лежат идея двусторонней аппроксимации вещественного числа и замена арифметических операций над вещественными числами и вещественных функций интервальными операциями и функциями. Применительно к скалярным функциям непосредственное использование интервальной арифметики соответствует кусочно-постоянной аппроксимации.

Для полноты приведем некоторые сведения из интервального анализа /13/.

Интервальное число определяется парой вещественных чисел, являющихся его границами:

$$A = [\underline{a}, \bar{a}] = \{x | \underline{a} \leq x \leq \bar{a}\}.$$

Величину $w(A) = \bar{a} - \underline{a}$ называют шириной интервального числа.

Интервальная арифметика вводится следующим образом:

$$A * B = \{x * y | x \in A, y \in B\},$$

где $*$ - любая из операций $+$, $-$, \cdot , $/$. В случае деления $0 \notin B$.

Легко получаются соответствующие формулы для каждой из интервальных операций:

$$[\underline{a}, \bar{a}] + [\underline{\beta}, \bar{\beta}] = [\underline{a} + \underline{\beta}, \bar{a} + \bar{\beta}],$$

$$[\underline{a}, \bar{a}] - [\underline{\beta}, \bar{\beta}] = [\underline{a} - \bar{\beta}, \bar{a} - \underline{\beta}],$$

$$[\underline{a}, \bar{a}] \cdot [\underline{\beta}, \bar{\beta}] = [\min(\underline{a}\underline{\beta}, \underline{a}\bar{\beta}, \bar{a}\underline{\beta}, \bar{a}\bar{\beta}), \max(\underline{a}\underline{\beta}, \underline{a}\bar{\beta}, \bar{a}\underline{\beta}, \bar{a}\bar{\beta})],$$

$$[\underline{a}, \bar{a}] / [\underline{\beta}, \bar{\beta}] = [\underline{a}, \bar{a}] [1/\bar{\beta}, 1/\underline{\beta}].$$

В интервальной арифметике возвведение в степень вводится как отдельная операция:

$$[\underline{a}, \bar{a}]^k = \{x^k \mid x \in [\underline{a}, \bar{a}]\} .$$

Множество интервальных чисел замкнуто относительно введенных операций. Интервальное сложение и умножение ассоциативно и коммутативно. Закон дистрибутивности, вообще говоря, не имеет места, а выполнено включение (субдистрибутивность):

$$A(B+C) \subset AB + AC .$$

Кроме этого, вычитание и деление не являются обратными операциями к сложению и умножению: $A-A \neq 0$, $A/A \neq 1$, если $w(A) > 0$. Эти обстоятельства существенно отличают интервальную арифметику от обычной и в ряде случаев приводят к возрастанию ширины получаемых в результате вычислений интервалов.

Вместе с тем, интервальная арифметика обладает свойством монотонности по включению: из того, что $A \subset C$ и $B \subset D$, следует $A * B \subset C * D$, и имеет место следующий фундаментальный результат.

Если $F(X)$ является рациональным выражением от интервального вектора X , то из того, что $A = B$, следует $F(A) = F(B)$, где A , B - постоянные интервальные векторы - значения X .

Пусть $f(x)$ - вещественная рациональная функция с областью определения $x \in X$, $F(X)$ - интервальное выражение относительно X , полученное из f заменой x на X и арифметических операций на соответствующие интервальные операции. Имеет место включение: $\{f(x) \mid x \in X\} \subset F(X)$ (естественное расширение).

Для получения возможно более узких интервальных расширений вещественнозначных функций используются различные формы. Пусть $f(x)$ определена на интервале $[\underline{a}, \bar{a}]$ и X_i - некоторое разбиение $[\underline{a}, \bar{a}]$ такое, что $\bigcup_{i=1}^n X_i \equiv [\underline{a}, \bar{a}]$. Тогда

$$f(x) \in \bigcup_{i=1}^n F(X_i) \quad (\text{областное расширение}).$$

Пусть непрерывная, вещественнозначная функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f'(x)$, $m(X)$ — средняя точка интервала X , тогда:

$$\{f(x) | x \in X\} = f(m(X)) + F'(m(X) + [0,1](X - m(X))) (X - m(X))$$

(среднезначная форма).

Обозначая $x = m(X) + y$, $g(y) = f(m(X) + y) - f(m(X))$, получаем центрированную форму интервального расширения:

$$\{f(x) | x \in X\} = f(m(X) + g(x - m(X))).$$

В качестве примера построим различные расширения функции $f(x) = x - x^2$, $x \in X \equiv [0,1]$.

a) естественное интервальное расширение:

$$F_1(X) \equiv X - X^2 = [-1, 1];$$

б) вложенная форма:

$$F_2(X) \equiv X(1-X) = [0,1];$$

в) среднезначная форма:

$$\begin{aligned} F_3(X) &= (x_0 - x_0^2) + \{1 - 2(X - x_0)\} (X - x_0) = \\ &= [-0.25, 0.25], \quad x_0 \equiv m(X) = 0.5; \end{aligned}$$

г) центрированная форма:

$$\begin{aligned} F_4(X) &= (x_0 - x_0^2) + (X - x_0)(1 - 2x_0 + X + x_0^2) = \\ &= [0, 0.5], \quad x_0 \equiv m(X) = 0.5. \end{aligned}$$

Таким образом, значения интервальных функций существенно зависят от форм записи расширений, а также от особенностей самой интервальной арифметики. В связи с этим, разными авторами предлагались обобщения и расширения интервальной арифметики, а также способы устранения некоторых присущих интервальной арифметике свойств, приводящих в конкретных вычислениях к возрастанию ширины

получаемых результатов.

В заключение отметим, что применение интервальной арифметики, а также различных интервальных расширений и их форм к вычислению границ областей значений вещественных функций, на практике дает возможность получать лишь кусочно-постоянные аппроксимации этих функций.

§ I.2. Функционально-интервальная арифметика

и гарантированная двусторонняя аппроксимация вещественных функций линейными сплайнами

Из предыдущего параграфа следует, что непосредственное применение интервальной арифметики без дополнительных построений и оценок дает возможность получать гарантированную двустороннюю аппроксимацию вещественных функций в виде кусочно-постоянных полос (рис. I.1). Очевидно, кусочно-линейная аппроксимация вещественных функций должна быть точнее (рис. I.2).

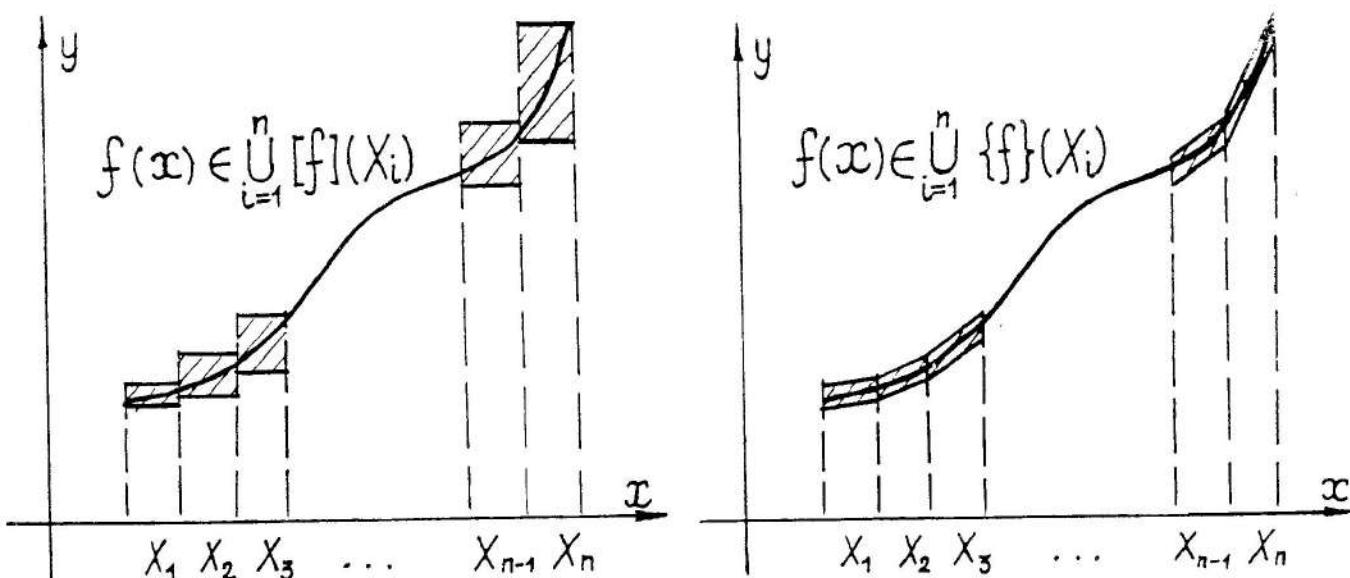


Рис. I.1

Рис. I.2

В связи с этим введем следующее

Определение I.I. Функциональным интервалом P на отрезке $[\alpha, \beta]$ будем называть множество всех вещественных функций $\{y(x)\}$, ограниченное линейными функциями $p_1(x)$ и $p_2(x)$ ($p_1(x) \leq p_2(x)$) :

$$P = \{y(x) \mid p_1(x) \leq y(x) \leq p_2(x)\} . \quad (I.I)$$

С другой стороны, такое множество может быть определено двумя граничными интервалами $A = [p_1(\alpha), p_2(\alpha)]$, $B = [p_1(\beta), p_2(\beta)]$, т.е. $P = \{A, B\}$. Это позволяет представлять машинные функциональные интервалы в памяти ЭВМ в виде цельных объектов, определяемых парами интервалов.

За ширину функционального интервала $P = \{A, B\}$ примем ширину "среднего интервала": $W(P) = w((A + B)/2)$.

Очевидно, для двух функциональных интервалов P и Q , если $P \subset Q$, то $W(P) \leq W(Q)$.

I.2.I. Функционально-интервальная (Ф-И) арифметика

Прежде чем определить Ф-И арифметику, введем сначала арифметические операции над функциональными множествами, у которых, в отличие от функциональных интервалов, граничные функции не обязательно линейные.

Пусть $x \in [\alpha, \beta]$,

$$\tilde{P} = \{p(x) \mid p_1(x) \leq p(x) \leq p_2(x)\},$$

$$\tilde{Q} = \{q(x) \mid q_1(x) \leq q(x) \leq q_2(x)\}.$$

Функционально-множественную арифметику (Ф-М) введем следующим образом:

$$\tilde{P} * \tilde{Q} = \{p(x) * q(x) \mid p(x) \in \tilde{P}, q(x) \in \tilde{Q}\} . \quad (I.2)$$

где $* \in \{ +, -, \cdot, / \}$. Если $*$ означает деление, то для любого элемента $q \in Q$ требуется, чтобы $q(x) \neq 0$. Всюду в дальнейшем это условие для операции деления предполагается выполненным.

Очевидно, Ф-М арифметика хотя и замкнута, но не конструктивна, т.е. для произвольных P и Q нельзя задать, вообще говоря, алгоритм вычисления соответствующей операции над ними.

Пусть теперь P и Q - функциональные интервалы, т.е. граничные функции $p_i(x)$, $q_j(x)$ ($i, j = 1, 2$) являются линейными, P и Q также однозначно определены через граничные интервалы:

$$P = \{A, B\}, \quad Q = \{C, D\}.$$

Непосредственно из теоретико-множественного определения (I.2) следуют формулы для операций сложения и вычитания:

$$P \pm Q = \{A \pm C, B \pm D\}. \quad (I.3)$$

Очевидно, правые части в (I.3) также функциональные интервалы.

В случае операции умножения или деления над функциональными интервалами P и Q в правой части (I.2) получается функциональное множество, вообще говоря, ограниченное криволинейными границами:

$$P * Q = \left\{ y(x) / \min_{i,j=1,2} [p_i(x) * q_j(x)] \leq y(x) \leq \max_{i,j=1,2} [p_i(x) * q_j(x)] \right\}. \quad (I.4)$$

Поэтому непосредственное использование Ф-М арифметики для определения этих операций над функциональными интервалами не позволяет построить замкнутую арифметику.

Определение I.2. Функционально-интервальной арифметикой будем называть набор правил, дающий по двум заданным P и Q функциональный интервал \bar{Y} , удовлетворяющий условиям:

- 1) если $p(x) \in P, q(x) \in Q$, то $p(x) * q(x) \in \bar{Y}$;
- 2) если некоторый функциональный интервал \bar{Y} , отличный от

\bar{Y} , удовлетворяет первому свойству, то не может быть $\bar{Y} \neq \bar{\bar{Y}}$.

П р и м е р . Пусть $y(x) = x^2$, $x \in [0, 0.5]$. Тогда можно задать

$$1) \quad y(x) \in \{[0, 0], [0, 0.25]\} \equiv Y_1;$$

$$2) \quad y(x) \in \{[-0.25, 0], [0.25, 0.25]\} = Y_2.$$

Оба этих функциональных интервала нельзя сузить и $Y_1 \neq Y_2$, $Y_2 \neq Y_1$ (предпочтительнее выбрать первый способ, поскольку $y = x^2 \geq 0$, рис. I.3).

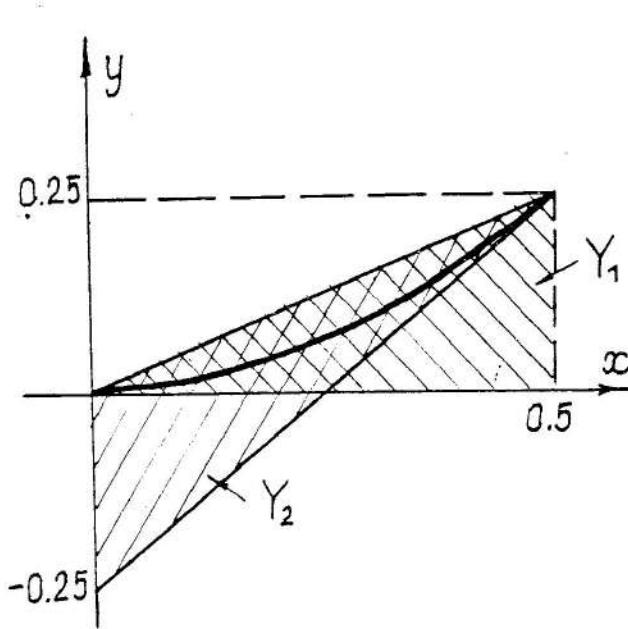


Рис. I.3

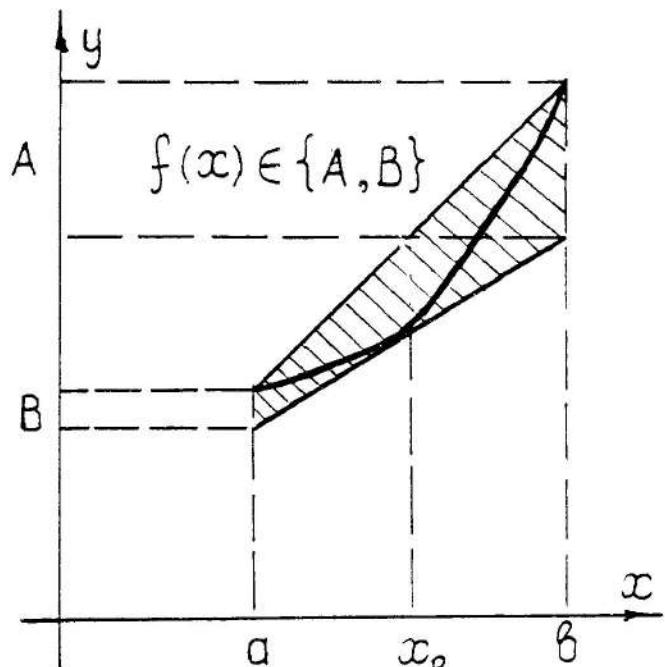


Рис. I.4

I.22. Вычислительные формулы для арифметических операций и оценка погрешности аппроксимации

В качестве критерия оптимальности формул, задающих результаты операций умножения и деления, накладываются условия "наибольшей суженности" в средней точке функционального множества – результата (I.4). Для задания формул этих операций, а также построения соответствующих расширений некоторых математических функций

нам понадобится следующий результат.

Л е м м а I.I. Если для дважды непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$ вторая производная $f''(x)$ знакопостоянна на отрезке $[\alpha, \beta]$, то

$$f(x) \in \{ [f(\alpha), f(x_0) - \ell \cdot f'(x_0)], [f(\beta), f(x_0) + \ell \cdot f'(x_0)] \}, \quad (I.5)$$

где $x_0 = (\alpha + \beta)/2$, $\ell = (\beta - \alpha)/2$, $[c, d] = [\min(c, d),$

$\max(c, d)]$ – представление внешним интервалом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, для определенности, что $f''(x) > 0$ на $[\alpha, \beta]$ (рис. I.4). Тогда, очевидно, график $f(x)$ заключен в линейной полосе, ограниченной отрезком с концами $(\alpha, f(\alpha))$, $(\beta, f(\beta))$ и касательной к $f(x)$ в средней точке $x_0 = (\alpha + \beta)/2$. Таким образом, в этом случае имеем включение

$$f(x) \in \{ [f(x_0) - \ell f'(x_0), f(x_0)], [f(x_0) + \ell f'(x_0), f(\beta)] \},$$

из которого следует утверждение леммы.

Обозначим $f_{ij}(x) \equiv \rho_i(x) * q_j(x)$, ($i, j = 1, 2$), где $\rho_i(x)$, $q_j(x)$ – линейные граничные функции; $*$ – одна из арифметических операций: умножение или деление. Тогда $f''(x)$ не меняет знак на отрезке $[\alpha, \beta]$ и, следовательно, в силу леммы для каждой пары (i, j) имеют место включения:

$$f_{ij}(x) \in \{ [f_{ij}(\alpha), f_{ij}(x_0) - \ell f'_{ij}(x_0)], [f_{ij}(\beta), f_{ij}(x_0) + \ell f'_{ij}(x_0)] \}. \quad (I.6)$$

Обозначим левый и правый интервалы соответственно через A_{ij} и B_{ij} . Используя (I.4), получаем

$$\begin{aligned} P * Q = \{ y(x) \mid \min_{i,j=1,2} [f_{ij}(x)] \leq y(x) \leq \max_{i,j=1,2} [f_{ij}(x)] \} &\equiv \\ &\equiv \left\{ \bigcup_{i,j=1,2} A_{ij}, \bigcup_{i,j=1,2} B_{ij} \right\} \equiv \{ A, B \} . \end{aligned} \quad (I.7)$$

Здесь \bar{U} – интервальная операция, внешнее представление объединения.

Формулы (I.5)-(I.7) задают алгоритмы получения линейной двусторонней аппроксимации для операции умножения и деления функциональных интервалов, таким образом, введенная арифметика замкнута относительно арифметических операций.

По вышеописанному алгоритму заведомо происходит "загрубление" результата аппроксимации соответствующей операции, но вместе с тем, имеет место монотонность по включению: если $P = Q$, $S = T$, то $P * S \subseteq Q * T$.

Оценим погрешность аппроксимации для введенных операций.

Пусть $P = \{A, B\}$ и $Q = \{C, D\}$. Обозначим

$X = (A+B)/2$, $Y = (C+D)/2$. Используя свойства ширины интервалов, получаем:

$$W(P+Q) = w(X+Y) \leq w(X) + w(Y) \equiv W(P) + W(Q),$$

$$W(P-Q) = w(X-Y) \leq w(X) + w(Y) \equiv W(P) + W(Q).$$

Для операций умножения и деления справедливо включение:

$$\begin{aligned} P * Q &\equiv \left\{ \left[\min_{i,j=1,2} (f_{ij}(a), f_{ij}(x_0) - \ell f'_{ij}(x_0)), \max_{i,j=1,2} (f_{ij}(a), f_{ij}(x_0) - \ell f'_{ij}(x_0)) \right], \right. \\ &\quad \left. \left[\min_{i,j=1,2} (f_{ij}(b), f_{ij}(x_0) + \ell f'_{ij}(x_0)), \max_{i,j=1,2} (f_{ij}(b), f_{ij}(x_0) + \ell f'_{ij}(x_0)) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Следовательно, справедлива оценка:

$$\begin{aligned} W(P * Q) &\leq \frac{1}{2} W \left(\left[\min_{i,j} (f_{ij}(a), f_{ij}(x_0) - \ell f'_{ij}(x_0)) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \min_{i,j} (f_{ij}(b), f_{ij}(x_0) + \ell f'_{ij}(x_0)), \max_{i,j} (f_{ij}(a), f_{ij}(x_0) - \ell f''_{ij}(x_0)) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \max_{i,j} (f_{ij}(b), f_{ij}(x_0) + \ell f'_{ij}(x_0)) \right] \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\max_{i,j} (f_{ij}(a), f_{ij}(x_0) - \ell f'_{ij}(x_0)) - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\min_{i,j} (f_{ij}(x), f_{ij}(x_0) - \ell f'_{ij}(x_0)) / + \\
 & + |\max_{i,j} (f_{ij}(x), f_{ij}(x_0) + \ell f'_{ij}(x_0)) - \\
 & - \min_{i,j} (f_{ij}(x), f_{ij}(x_0) + \ell f'_{ij}(x_0))| .
 \end{aligned}$$

В правой части последнего, в частности, получается ширина произведения (деления) обычных интервалов, если

$$\max_{i,j=1,2} (f_{ij}(x), f_{ij}(x_0) - \ell f'_{ij}(x_0)) = \max_{i,j=1,2} f_{ij}(x) .$$

$$\min_{i,j=1,2} (f_{ij}(x), f_{ij}(x_0) + \ell f'_{ij}(x_0)) = \min_{i,j=1,2} f_{ij}(x) .$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
 & W([\rho_1(x), \rho_2(x)] * [q_1(x), q_2(x)]) = \\
 & = W([\min_{i,j=1,2} (\rho_i(x) * q_j(x)), \max_{i,j=1,2} (\rho_i(x) * q_j(x))]) = \\
 & = \max_{i,j=1,2} f_{ij}(x) - \min_{i,j=1,2} f_{ij}(x) .
 \end{aligned}$$

I.2.3. Вычислительные формулы для аппроксимации расширений некоторых математических функций

Учитывая определение Ф-И арифметики, введем

Определение I.3. Для заданной скалярной функции f скалярного аргумента будем называть Q функционально-интервальным расширением, если для любого интервала $X = [\underline{x}, \bar{x}]$ график сужения функции $\{f(x) | x \in X\}$ принадлежит функциональному интервалу $Q(X)$. Будем обозначать такие расширения через $\{f\}(X)$.

В частности, для функции $f(x) = x$ имеем Ф-И расширение

$$\{f\}(X) = \{X\} = \{[\underline{x}, \bar{x}], [\bar{x}, \underline{x}]\} , \quad (I.8)$$

являющееся точным представлением заданной линейной функции, т.е.

$$W(\{f\}(X)) = 0 .$$

Пусть $f_1(x) = 2x - x$, $x \in X$. Тогда имеем

$$\{f_1\}(X) = \{y(x) | 2x - x \leq y(x) \leq 2x - x\} \equiv \{X\}$$

так, что $W(\{f_1\}(X)) = 0$.

В рамках интервальной арифметики соответствующие естественные расширения этих функций дают

$$[f](X) = X = [\underline{x}, \bar{x}], W([f](X)) = \bar{x} - \underline{x} \neq 0 .$$

$$[f_1](X) = 2X - X = [2\underline{x} - \bar{x}, \bar{x} - 2\underline{x}], W([f_1](X)) = 3(\bar{x} - \underline{x}) .$$

Таким образом, Ф-И расширение вещественных функций, "близких" к линейным (на достаточно малом интервале X), дают практически точные двусторонние аппроксимации, тогда как в рамках интервальной арифметики, в лучшем случае, можно получить в результате интервал $[f](X) = [\inf_{x \in X} f(x), \sup_{x \in X} f(x)]$.

Пусть непрерывная рациональная функция $f(x)$ определена при $x \in X$. Заменяя x на $\{X\}$ и арифметические операции, получаем Ф-И функцию $\{f\}(X)$, для которой, в силу монотонности введенных операций, справедливо включение:

$$\{f(x) | x \in X\} \subseteq \{f\}(X) . \quad (I.9)$$

Кроме того, если $[\alpha, \beta] \subseteq \bigcup_{i=1}^n X_i$, то

$$\{f(x) | x \in [\alpha, \beta]\} \subseteq \bigcup_{i=1}^n \{f\}(X_i) . \quad (I.10)$$

Рассмотрим Ф-И расширение элементарных функций x^n , a^x , e^x , $\ln x (x > 0)$, $\sqrt{x} (x \geq 0)$, $\sin x$, $\cos x (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$. Пусть $f(x)$, $x \in X$ одна из этих функций. Тогда, очевидно, существуют $f'(x)$ и $f''(x)$, кроме того, $f''(x)$ знакопостоянны. В силу леммы I.1 имеем включение:

$$\begin{aligned} & \{f(x) \mid x \in X\} = \\ & = \{[f(\underline{x}), f(x_0) - \ell f'(x_0)], [f(\bar{x}), f(x_0) + \ell f'(x_0)]\}, \end{aligned} \quad (I.II)$$

где $x_0 = (\alpha + \beta)/2$, $\ell = (\bar{x} - \underline{x})/2$.

В качестве примера найдем области значений функции $f(x) = x^2 - x^4$ при $x \in [-0.3, 0.5]$. В рамках интервальной арифметики естественное расширение дает границы при $X = [-0.3, 0.5]$:

$$[f](X) = x^2 - x^4 = [-0.2125, 0.2875], \quad w([f](X)) = 0.5.$$

Используя лемму I.I, получаем соответствующее Ф-И расширение:

$$\begin{aligned} \{f\}(X) &= \{[f(0.1) - 0.4f'(0.1), f(-0.3)], [f(0.1) + 0.4f'(0.1), f(0.5)]\} = \\ &= \{[0.0099 - 0.4 \cdot 0.196, 0.0819], [0.0099 + 0.4 \cdot 0.196, 0.0625]\} = \\ &= \{[-0.585, 0.0081], [0.883, 0.1875]\}, \end{aligned}$$

откуда

$$W(\{f\}(X)) = 0.00728.$$

Таким образом, полученное Ф-И расширение (в смысле точности аппроксимации $f(x)$) значительно точнее, чем в интервальном анализе.

I.2.4. Вычисление определенных интегралов с помощью функциональных интервалов

Пусть непрерывная функция $f(x)$ имеет Ф-И расширение $\{f\}(X)$, удовлетворяющее интервальному условию Липшица: $w([f](X)) \leq L \cdot w(X)$ на любом подинтервале $X \subset [\alpha, \beta]$.

Имеет место

Теорема I.I. Для любого разбиения отрезка $[\alpha, \beta]$

на n подынтервалов X_1, X_2, \dots, X_n выполнено включение

$$\int_a^b f(x) dx \in \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (A_i + B_i) w(X_i) \quad (I.I2)$$

и справедлива оценка

$$w\left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (A_i + B_i) w(X_i)\right) \leq \frac{L}{2} \sum_{i=1}^n (w(X_i))^2, \quad (I.I3)$$

где $\{A_i, B_i\} = \{f\}(X_i)$, $i = 1, n$.

Доказательство. Для любого $x \in X_i$ справедливо включение:

$$f(x) \in \{f\}(X_i) = \{A_i, B_i\},$$

откуда следует

$$\int_{X_i} f(x) dx \in \frac{1}{2} (A_i + B_i) w(X_i), \quad i = 1, n.$$

Суммируя последние включения по всем подынтервалам и используя свойство аддитивности интеграла, получаем:

$$\int_a^b f(x) dx \in \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (A_i + B_i) w(X_i).$$

Для доказательства второй части теоремы воспользуемся свойствами ширины интервала и условием Липшица:

$$\begin{aligned} w\left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (A_i + B_i) w(X_i)\right) &= \sum_{i=1}^n w\left(\frac{A_i + B_i}{2}\right) \cdot w(X_i) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left| f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) - \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} \right| w(X_i) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left(\left| f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) - f(x_i) \right| + \left| f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) - f(x_{i-1}) \right| \right) w(X_i) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(L \frac{w(X_i)}{2} + L \frac{w(X_i)}{2} \cdot w(X_i) \right) = \\ &= \frac{L}{2} \sum_{i=1}^n (w(X_i))^2. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

По существу, эта формула является интервальным аналогом классической формулы трапеций, но, в отличие от последней, ее применение позволяет получить оценку погрешности численного интегрирования без привлечения информации о производных функции $f(x)$. Учет ошибок округлений и погрешности метода ведется автоматически на ЭВМ при вычислении Φ -И расширения функции $f(x)$.

Далее, рассмотрим функцию

$$g(x) = \int_a^x f(x) dx, \quad x \in [\alpha, \beta].$$

Пусть для любого подынтервала $X \subset [\alpha, \beta]$ определено Φ -И расширение f :

$$\{f\}(X) = \{y(x) \mid y_1(x) \leq y(x) \leq y_2(x)\}.$$

Имеет место включение

$$g(x) \in \left\{ z(x) \mid \int_a^x y_1(x) dx \leq z(x) \leq \int_a^x y_2(x) dx \right\}.$$

В правой части последнего, вообще говоря, функциональное множество с квадратичными граничными функциями. С использованием леммы I.I получаем для него линейное сужение:

$$\left\{ \overline{\bigcup}_{i=1,2} [\varphi_i(\alpha), \varphi_i(x_0) - \ell \varphi_i'(x_0)], \overline{\bigcup}_{i=1,2} [\varphi_i(\beta), \varphi_i(x_0) + \ell \varphi_i'(x_0)] \right\}, \quad (I.14)$$

где $\varphi_i(x) = \int_a^x y_i(x) dx$, $\varphi_i'(x) = y_i(x)$.

Таким образом, если известно Φ -И расширение $\{f\}([\alpha, \beta]) = \{A, B\}$, удовлетворяющее интервальному условию Липшица, то справедлива формула

$$g(x) \in \{[0, M_0 - \ell \cdot M_1], [2\ell M_1, M_0 + \ell M_1]\}, \quad (I.15)$$

где $M_0 = (\beta - \alpha)/8(3A + B)$, $M_1 = (A + B)/2$, $\ell = (\beta - \alpha)/2$,

и имеет место оценка погрешности аппроксимации функции $g(x)$:

$$W(\{g\}(X)) \leq \frac{L}{4} (\beta - \alpha) w(X) . \quad (I.I6)$$

§ I.3. О применении функционально-интервальной арифметики в доказательных вычислениях на ЭВМ

Как уже отмечалось в введении, в большинстве работ, в которых применялись численные методы для получения математических утверждений, имеется тот недостаток, что погрешности вычислений, как правило, не учитывались. Для устранения этого недостатка, а также автоматического учета погрешности дискретизации численных методов в /20/ предложено в качестве исходных данных и промежуточных объектов использовать конструктивно представимые множества объектов в памяти ЭВМ, участвующих в математической постановке задачи таким образом, чтобы получаемые в результате вычислений на ЭВМ объекты гарантировано содержали истинные решения задач. Введено

Определение I.4. Доказательные вычисления на ЭВМ – это вычисления, предназначенные для получения строгих математических утверждений и в этих целях организованные таким образом, что полученные в результате их объекты гарантированно содержат истинные.

В частности, если $[f]_{\text{док.выч}}$ – полученное доказательными вычислениями на ЭВМ значение некоторой теоретической величины f , то должен гарантироваться знак величины $\delta = f - [f]_{\text{док.выч}}$, причем величина $|\delta|$ должна быть достаточно мала. В общем случае, вообще говоря, должно гарантироваться включение $f \in [f]_{\text{док.выч}}$. (если в результате получаются объекты-множества: интервалы, функциональные интервалы).

Доказательные вычисления могут содержать /21/:

а) предварительный (неформализованный) математический текст,

в котором доказательство теоремы сводится к оценке некоторой конструктивно вычислимой величины;

б) описание алгоритма для вычисления f такое, что гарантируется включение $f \in [f]_{\text{док. выч.}}$ (Здесь $[f]_{\text{док. выч.}}$ в общем случае, полученный результат, включающий в себя истинное значение f);

в) реализация этого алгоритма на одном из алгоритмических языков или с использованием специального математического обеспечения для доказательных вычислений на ЭВМ;

г) результаты вычислений, из которых следует $f \in [f]_{\text{док. выч.}}$.

Таким образом, алгоритмы доказательных вычислений автоматизируют вычисление f , обеспечивая при этом гарантированное вложение истинных значений в получаемые в результате объекты. Такими объектами могут быть интервалы (множество вещественных чисел) или функциональные интервалы (множества вещественных функций на отрезке). Вычисления на ЭВМ в рамках арифметик, соответствующих таким объектам, позволяют автоматически получать гарантированные аппроксимации вещественных функций. Для доказательных вычислений применимо следующее

Определение I.5. Если функция f определена на множестве X и D_X — покрытие X , то будем называть функцию F , определенную на D_X , расширением f , если для любого $G \in D_X \Rightarrow F(G)$ содержит сужение $\{f(x)\}_{x \in X}$.

I.3.1. Основные теоремы о применимости доказательных вычислений на ЭВМ

Принципиальная возможность организации доказательных вычислений на ЭВМ следует из конструктивной вычислимости на конструктивно компактных множествах. Приведем здесь теорему, представляющую

щую собой приспособленный для практического применения один результат конструктивного математического анализа /16/.

Теорема I.2. Если X - конструктивно компактное метрическое пространство, $F: X \rightarrow R$ - конструктивно вычислимая равномерно непрерывная функция, то $\sup_{x \in X} F(x)$ может быть вычислен со сколь угодно малой погрешностью.

Доказательство. Обозначим через $[f]_\delta$ значение f , вычисленное с точностью δ . По заданному $\varepsilon > 0$, применив соответствующий алгоритм, найдем $\gamma > 0$ такое, что из

$\rho(x_1, x_2) < \gamma$ следует

$$|F(x_1) - F(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Теперь по заданному $\gamma > 0$ построим конечную ε -сеть $\{x_1, \dots, x_n\}$ в X . По условию теоремы каждое число $F(x_i)$ конструктивно вычислимо.

Обозначим $\bar{f} = \max_{i=1, \dots, n} [F(x_i)]_{\frac{\varepsilon}{2}}$. Пусть этот максимум достигается при $i=j$. Для любого $x \in X$ найдется такое i , что $\rho(x, x_i) < \gamma$, откуда

$$\begin{aligned} F(x) &\leq [F(x_i)]_{\frac{\varepsilon}{2}} + |F(x_i) - [F(x_i)]_{\frac{\varepsilon}{2}}| + \\ &+ |F(x) - F(x_i)| < \bar{f} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \bar{f} + \varepsilon . \end{aligned}$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} \sup_{x \in X} F(x) &\geq F(x_j) \geq [F(x_j)]_{\frac{\varepsilon}{2}} - |[F(x_j)]_{\frac{\varepsilon}{2}} - F(x_j)| = \\ &= \bar{f} - |[F(x_j)]_{\frac{\varepsilon}{2}} - F(x_j)| > \bar{f} - \frac{\varepsilon}{2} > \bar{f} - \varepsilon . \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\bar{f} - \varepsilon \leq \sup_{x \in X} F(x) \leq \bar{f} + \varepsilon .$$

Отсюда следует, что

$$\left| \sup_{x \in X} F(x) - \max_{i=1, n} [F(x_i)]_{\frac{\varepsilon}{2}} \right| < \varepsilon .$$

Теорема доказана.

Поскольку множества выпуклых фигур и выпуклых кривых в ограниченной области по хаусдорфовой метрике являются по существу конструктивно-компактными, то из теоремы I.2 следует принципиальная возможность применения доказательных вычислений на ЭВМ в теории выпуклых фигур и комбинаторной геометрии.

В рамках 18-й проблемы Гильбертом была поставлена задача о наиболее плотной упаковке равных шаров в пространстве. Поскольку пространство E^n некомпактно, то непосредственно теорема I.2 в данном случае неприменима. Следующая теорема доказывается в § 3.4 путем упаковки в единичный куб n одинаковых шаров максимального радиуса и устремлением $n \rightarrow \infty$.

Теорема I.3. Число d_n — наибольшая плотность упаковки равных шаров в пространстве E^n , является конструктивно вычислимым числом, т.е. можно построить алгоритм для вычисления его с любой наперед заданной точностью.

I.3.2. Математическое обеспечение для доказательных вычислений на ЭВМ

При реализации арифметических операций на вычислительной машине как с фиксированной, так и с переменной длиной слов, как сами исходные числа, так и результаты операций над ними являются не точными, а округленными. Поэтому не всякий интервал и расширения операций над интервалами можно представить точно в памяти ЭВМ.

Будем использовать следующие

Определение I.6. Машинным интервальным числом называется совокупность вещественных чисел, определенная двумя ма-

шинными числами – нижней и верхней границами:

$$[\alpha, \beta] = \{x \in R \mid \alpha \leq x \leq \beta, \alpha, \beta \in I_m\},$$

(I_m – конечное множество машинных чисел).

Определение 1.7. Машинной интервальной операцией называется алгоритм, записанный на языке программирования и содержащий среди входных данных машинные интервальные числа.

Монотонность по вложению практически построенных интервально-значных функций следует из наличия этого свойства у машинных интервальных операций и его сохранения при суперпозициях.

Таким образом, если ξ, γ – машинные представления интервальных чисел X, Y соответственно, и Δ – машинная интервальная операция, соответствующая интервальной операции $*$, то гарантировано включение

$$X * Y \subseteq \xi \Delta \gamma.$$

В /27/ построен пакет программ интервального анализа для ЭВМ серии ЕС. В нем реализованы программы интервальных арифметических операций (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень), интервальных вспомогательных операций (формирование интервального числа, выделение нижней и верхней границ, определение знака разности, определение вложения, представление внешним интервалом, пересечение), интервальных расширений соответствующих математических функций (максимум, минимум, абсолютная величина, корень квадратный, синус, косинус, экспонента, логарифм).

Как уже отмечалось выше, функционально-интервальный анализ может быть применен в доказательных вычислениях путем его реализации на ЭВМ. В соответствии с определением доказательных вычислений в математическом обеспечении, кроме стандартных целочисленных, действительных констант, машинных интервальных чисел и переменных, должны быть представления функциональных интервалов (опре-

деляется набором из четырех машинных чисел) и расширений операций над ними. Пакет программ функционально-интервального анализа должен содержать следующие операции:

- формирование функционального интервала;
- выделение составляющих элементов функционального интервала;
- теоретико-множественные и логические операции;
- арифметические операции;
- представление расширений некоторых математических функций (x^n , e^x , \sqrt{x} , $\sin x$, $\cos x$, $\ln x$ и др.).

2. ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ИНТЕРВАЛЬНОЙ АРИФМЕТИКИ

Для реализации описанных в предыдущей главе арифметических и других операций над функциональными интервалами на ЭВМ необходим соответствующий пакет программ, основанный на понятии их машинного представления.

Определение 2.1. Машинным функциональным интервалом Y_M будем называть совокупность вещественных функций $\{y(x)\}$, определенную двумя машинными интервалами A_M и B_M :

$$Y_M = \{A_M, B_M\}.$$

Поскольку для функции одной переменной любой интервал значений аргумента $[a, b]$ может быть линейно преобразован к отрезку $[0, 1]$, то достаточно рассматривать множество машинных функциональных интервалов и операции над его элементами на отрезке $[0, 1]$.

Множество машинных функциональных интервалов обозначим через Q_M . Пусть $Y_M, Z_M \in Q_M$, $*$ — одна из арифметических операций. Введем

Определение 2.2. Машинной функционально-интервальной операцией $\boxed{*}$ будем называть любой алгоритм, записанный на языке программирования, дающий по двум функциональным интервалам Y_M и Z_M результат $P_M \in Q_M$ так, что выполнены условия:

- если $y(x) \in Y_M, z(x) \in Z_M$, то $y(x) * z(x) \in P_M$;
- если некоторый $P'_M \in Q_M$, не равный P_M , удовлетворяет первому свойству, то не может быть $P'_M \subseteq P_M$.

§ 2.1. Описание программных модулей

В настоящей работе нами построены следующие машинные Ф-И операции и расширения функций:

- операции формирования и выделения элементов (§ 2.2);
- арифметические операции (§ 2.3);
- теоретико-множественные операции (§ 2.4);
- расширения некоторых математических функций (§ 2.5);
- подпрограммы для решения некоторых математических задач (гл. 3).

Программы выделения элементов написаны на машинно-ориентированном языке АССЕМБЛЕР. Остальные программные модули (программы формирования, арифметические операции над функциональными интервалами, теоретико-множественные операции и Ф-И расширения некоторых математических функций) написаны на алгоритмическом языке ФОРТРАН-IV. В этих программах используются модули комплекса программ интервального анализа для ЕС ЭВМ. Перечень использованных программ приведен в приложении I. Применение последних в реализации Ф-И операций осуществляет автоматический учет ошибок округлений при счете на ЭВМ и обеспечивает доказательность вычислений расширений этих операций.

Не повторяя содержания работы /27/, приведем здесь основные принципы построения нашего пакета программ. Отметим, что предлагаемый пакет программ Ф-И арифметики является развитием существующего комплекса программ, ориентированного для доказательных вычислений на ЭВМ.

Поскольку машинное интервальное число представляется в памяти ЭВМ целым объектом в виде последовательных записей длиной 8 байт, то для удобства использования желательно машинный функциональный интервал также иметь целым объектом. С этой целью под машинный функциональный интервал будем отводить 16 байт памяти (первые 8 байт - для левой границы (машинальное интервальное число), следующие 8 байт - для правой границы (машинальное интервальное число)).

Для удобства обращения к Ф-И операциям и осуществления суммирований действий соответствующие машинные операции оформлены программными единицами типа функций. Использование возможностей ФОРТРАН-ІУ для ЕС ЭВМ позволяет неявно описывать тип результата машинных операций. С этой целью имя машинной операции начинается с буквы *G(GEMINATE)*, если результат – машинное интервальное число; *R(REAL)*, если результат – действительное число; *I(INTEGER)*, если результат – целое число; *Q(QUADRANGLE)*, если результат – машинный функциональный интервал.

Для обозначения переменных, принимающих значения машинных интервальных чисел, используются идентификаторы, начинающиеся с букв *A, B, ..., H*; целых чисел – *I, J, ..., N*; машинных функциональных интервалов – *O, P, Q*; действительных чисел – *R, S, ..., Z*. Для этой цели в программах, написанных на языке ФОРТРАН-ІУ, используется оператор неявного описания типа:

*IMPLICIT REAL * 8(A-H), COMPLEX * 16(O-Q)*

§ 2.2. Операции формирования и выделения элементов

Эти операции очень простые, но поскольку функциональный интервал – цельный объект, то они необходимы, поэтому приведем здесь их краткое описание.

2.2.1. Формирование машинного функционального интервала *QP*

Эта операция предназначена для формирования машинного функционального интервала по заданным границам – интервалам *A* и *B* ($A, B \in Q_M$)

Ф о р м а о б р а щ е н и я : $QP(A, B)$

По заданным интервальным числам A и B , представленными в памяти ЭВМ в виде вещественных чисел удвоенной точности (длиной 8 байт), получаем результат – машинный функциональный

интервал в виде комплексного числа удвоенной точности, у которого действительная часть – интервал A , мнимая – интервал B .

Примечание. Эта операция при работе использует программу $DCMPLX$ из библиотеки стандартных подпрограмм алгоритмического языка ФОРТРАН-ИУ, формирующую комплексное число удвоенной точности.

2.2.2. Формирование машинного функционального интервала аргумента QF

Эта операция предназначена для формирования функционального интервала для вещественного аргумента $x \in X$ по нижней и верхней границам области определения (соответствует Ф-И расширению (I.8) $\{X\} = \{[\underline{x}, \bar{x}], [\bar{x}, \underline{x}]\}$).

Ф о р м а о б р а щ е н и я : $QF(X)$

По заданному интервальному числу X формируется функциональный интервал, имеющий точное представление расширения функции $f(x) \equiv x$ при $x \in X$.

Алгоритм состоит в следующем:

а) Выделяем \underline{x} и \bar{x} – нижнюю и верхнюю границы интервала X .

б) Формируем результат $QF = \{[\underline{x}, \bar{x}], [\bar{x}, \underline{x}]\}$

Примечание. Операция QF при работе использует машинные интервальные операции GRL и GRM (формирование интервального числа соответственно по нижней и верхней границам заданного интервала) и подпрограмму $DCMPLX$

2.2.3. Формирование машинной функционально- интервальной константы QR

Эта операция предназначена для формирования машинного функционального интервала по вещественной константе.

Ф о р м а о б р а щ е н и я : $QR(R)$

По заданному вещественному числу R формируется функциональный интервал, имеющий одинаковые левую и правую границы.

Примечание. Операция QR при работе использует машинную интервальную операцию GR (формирование интервальной константы) и программу $DCMPLX$.

2.2.4. Выделение левой границы функционального интервала GQL

Эта операция предназначена для выделения левой границы заданного функционального интервала.

Ф о р м а о б р а щ е н и я : $GQL(P)$

По заданному машинному функциональному интервалу $P \equiv \{A, B\}$ выделяется машинный интервал A .

2.2.5. Выделение правой границы функционального интервала GQR

Эта операция предназначена для выделения правой границы функционального интервала.

Ф о р м а о б р а щ е н и я : $GQR(P)$

По заданному машинному функциональному интервалу $P \equiv \{A, B\}$ выделяется машинный интервал B .

Примечание. В целях экономии машинного времени эти операции

реализованы на машинно-ориентированном языке АССЕМБЛЕР и учитывают специфику представления машинных интервальных и функционально-интервальных чисел в регистрах памяти ЕС ЭВМ.

2.2.6. Формирование машинных функциональных интервалов по нижним и верхним границам QRL и QRM

Эти операции предназначены для формирования машинных функциональных интервалов по нижним (верхним) границам левого и правого интервалов заданного функционального интервала.

Ф о р м а о б р а щ е н и я : $QRL(P)$, $QRM(P)$

В результате выполнения этих операций формируются машинные функциональные интервалы, у которых левые и правые границы - точечные интервалы, соответствующие нижним (верхним) границам левого и правого интервалов заданного функционального интервала P .

Примечание. Эти программы используют машинные интервальные операции GRL и GRM (формирование интервального числа соответственно по нижним и верхним границам) и функционально-интервальные операции GQL и GQR .

2.2.7. Выделение среднего интервала GQH

Эта операция предназначена для получения по машинному функциональному интервалу $P = \{A, B\}$ среднего интервала

Ф о р м а о б р а щ е н и я : $GQH(P)$

Алгоритм состоит в следующем:

- а) Выделяем левую и правую границы P .
- б) Вычисляем $C = (A + B)/2$.

Алгоритм заканчивает свою работу.

Примечание. Эта программа использует при работе машинные функционально-интервальные операции GQL и GQR (выделение левой и правой границ), а также машинные интервальные операции GA (сложение) и GD (деление).

2.2.8. Выделение нижней границы левого интервала RLL

Эта операция предназначена для получения по машинному функциональному интервалу нижней границы левого интервала.

Ф о р м а о б р а щ е н и я : $RLL(\rho)$

По машинному функциональному интервалу

$$\rho = \{[\underline{\alpha}, \bar{\alpha}], [\underline{\beta}, \bar{\beta}]\}$$

получаем действительную переменную $\underline{\alpha}$, являющуюся нижней границей левого интервала.

2.2.9. Выделение верхней границы левого интервала RLM

Эта операция предназначена для получения по машинному функциональному интервалу верхней границы левого интервала.

Ф о р м а о б р а щ е н и я : $RLM(\rho)$

По машинному функциональному интервалу

$$\rho = \{[\underline{\alpha}, \bar{\alpha}], [\underline{\beta}, \bar{\beta}]\}$$

получаем действительную переменную $\bar{\alpha}$, являющуюся верхней границей левого интервала.

2.2.10. Выделение нижней границы правого интервала RRL

Эта операция предназначена для получения по машинному функци-

циональному интервалу нижней границы правого интервала.

Ф о р м а о б р а щ е н и я : $RRL(\rho)$

По машинному функциональному интервалу

$$\rho = \{[\underline{\alpha}, \bar{\alpha}], [\underline{\beta}, \bar{\beta}]\}$$

получаем действительную переменную $\underline{\beta}$, являющуюся нижней границей правого интервала.

2.2.II. Выделение верхней границы правого интервала RRM

Эта операция предназначена для получения по машинному функциональному интервалу верхней границы правого интервала.

Ф о р м а о б р а щ е н и я : $RRM(\rho)$

По машинному функциональному интервалу

$$\rho = \{[\underline{\alpha}, \bar{\alpha}], [\underline{\beta}, \bar{\beta}]\}$$

получаем действительную переменную $\bar{\beta}$, являющуюся верхней границей правого интервала.

Примечание. Эти программы используют при своей работе машинные интервальные операции RL и RM (выделение нижней и верхней границ) и функционально-интервальные операции GQL и GQR (выделение левого и правого интервалов).

§ 2.3. Арифметические операции

Опишем алгоритмы для реализации арифметических операций над функциональными интервалами. Далее всюду мы будем предполагать, что производится арифметическая операция, соответствующая типу операндов, не вводя дополнительных обозначений для интервальных, функционально-интервальных и соответствующих машинных операций.

Алгоритмы операций сложения и вычитания сводятся к выполне-

нию соответствующих машинных интервальных операций над интервалами – границами операндов. Из результатов § I.2 следует, что не существует "самого узкого" функционального интервала, содержащего в себе результат операции умножения (деления). Поэтому алгоритмы для этих операций строятся из условия наибольшей суженности в средней точке интервала $[0,1]$ (оптимизация в смысле "средней ширины" интервала).

В основе алгоритмов для реализации на ЭВМ арифметических операций лежат формулы (I.3) – (I.7).

2.3.1. Сложение QA

Эта операция предназначена для получения по двум заданным машинным функциональным интервалам P и Q результата – машинного функционального интервала QA , включающего в себя всевозможные суммы функций, входящих в операнды.

Ф о р м а о б р а щ е н и я : $QA(P,Q)$

Алгоритм состоит в следующем:

- а) выделяем левые и правые границы операндов $\{A,B\}$ и $\{C,D\}$ соответственно;
- б) применяем алгоритм сложения машинных интервальных чисел:

$$\xi = A + C, \quad \zeta = B + D;$$

- в) формируем машинный функциональный интервал – результат по полученным ξ и ζ :

$$QA = \{\xi, \zeta\};$$

- г) алгоритм заканчивает работу.

Примечание. Эта операция использует при своей работе машинные функционально-интервальные операции GQL и GQR (выделение границ), OP (формирование), а также машинную интервальную операцию GA (сложение).

2.3.2. Вычитание QS

Эта операция предназначена для получения по двум заданным машинным интервалам P и Q результата - QS , включающего в себя всевозможные разности функций, входящих в операнды.

Ф о р м а о б р а щ е н и я : $QS(P, Q)$

Алгоритм состоит в следующем:

а) выделяем левые и правые границы операндов P и Q соответственно;

б) применяем алгоритм вычитания машинных чисел:

$$\xi = A - C, \quad \zeta = B - D;$$

в) формируем функциональный материал-результат по полученным ξ и ζ :

$$QS = \{ \xi, \zeta \}.$$

Примечание. Эта операция используется при работе машинные функционально-интервальные операции GQL и GQR (выделение границ), QP (формирование), а также машинную интервальную операцию GS (вычитание).

2.3.3. Умножение функциональных интервалов QM

Эта операция предназначена для получения по двум исходным функциональным интервалам P и Q машинного функционального интервала QM , включающего в себя произведения всевозможных функций, входящих в операнды.

Ф о р м а о б р а щ е н и я : $QM(P, Q)$

В результате выполнения этой операции формируется машинный функциональный интервал QM такой, что гарантировано вложение

$$P \boxtimes Q \subset QM.$$

Алгоритм состоит в следующем:

а) выделяем левые и правые границы операндов P и Q :

$$\xi_P = [\alpha_{11}, \alpha_{12}], \quad \gamma_P = [\alpha_{21}, \alpha_{22}],$$

$$\xi_Q = [\beta_{11}, \beta_{12}], \quad \gamma_Q = [\beta_{21}, \beta_{22}];$$

б) применяем алгоритм умножения машинных интервальных чисел

$$\xi_0 = \xi_P \triangle \xi_Q, \quad \gamma_0 = \gamma_P \triangle \gamma_Q.$$

Для заданных $i, j = 1, 2$ выполняем п.п. в) – д).

в) Вычисляем коэффициенты параболы $\alpha_{ij}x^2 + \beta_{ij}x + c_{ji} \equiv \varphi_{ij}(x)$:

$$\alpha_{ij} = (\alpha_{2i} - \alpha_{1i}) / (\beta_{2j} - \beta_{1j});$$

$$\beta_{ij} = \beta_{1i}(\alpha_{2i} - \alpha_{1i}) + \alpha_{1i}(\beta_{2j} - \beta_{1j}),$$

$$c_{ij} = \alpha_{1i}\beta_{1j}.$$

г) Вычисляем

$$\varphi'_{ij}(0.5) \equiv \alpha_{ij} + \beta_{ij}, \quad \varphi_{ij}(0.5) \equiv \alpha_{ij}/4 + \beta_{ij}/2 + c_{ij}.$$

д) Формируем интервалы ξ и γ :

$$\xi = [\varphi_{ij}(0), \varphi_{ij}(0.5) - 0.5 \cdot \varphi'_{ij}(0.5)] \bar{U} \xi_0,$$

$$\gamma = [\varphi_{ij}(1), \varphi_{ij}(0.5) + 0.5 \cdot \varphi'_{ij}(0.5)] \bar{U} \gamma_0.$$

е) Увеличиваем i, j и возвращаемся к п. в);

ж) формируем результат

$$QM = \{\xi, \gamma\}.$$

Примечание. Эта операция использует при своей работе функционально-интервальные операции GQL и GQR (выделение границ), (формирование), а также машинные интервалы операции $GA, GS, GM, GD, GUN, GRL, GRM$.

2.3.4. Деление функциональных интервалов QD

Эта операция предназначена для получения по двум машинным функциональным интервалам P и Q машинного функционального интервала QD , включающего в себя частные всевозможных функций, входящих в операнды.

Ф о р м а о б р а щ е н и я : $QD(P, Q)$

В результате выполнения этой операции формируется машинный функциональный интервал QD такой, что гарантировано вложение

$$P \square Q \subset QD.$$

Алгоритм состоит в следующем:

а) выделяем границы операндов P и Q ;

$$\xi_P = [\alpha_{11}, \alpha_{12}], \quad \gamma_P = [\alpha_{21}, \alpha_{22}],$$

$$\xi_Q = [\beta_{11}, \beta_{12}], \quad \gamma_Q = [\beta_{21}, \beta_{22}];$$

б) применяем алгоритм деления машинных интервальных чисел:

$$\xi_0 = \xi_P \Delta \xi_Q, \quad \gamma_0 = \gamma_P \Delta \gamma_Q.$$

Для заданных $i, j=1,2$ выполняем п.п. в) - д);

в) вычисляем коэффициенты функции

$$(a_i x + b_i) / (c_j x + d_j) \equiv \Psi_{ij}(x) :$$

$$a_i = \alpha_{2i} - \alpha_{1i}, \quad b_i = \alpha_{1i},$$

$$c_j = \beta_{2j} - \beta_{1j}, \quad d_j = \beta_{1j};$$

г) вычисляем значения:

$$\Psi'_{ij}(0.5) = 4(a_i d_i - c_j b_i) / (c_j + 2d_j)^2, \quad \Psi_{ij}(0.5) = (a_i + 2b_i) / (c_j + 2d_j);$$

д) вычисляем

$$\xi = [\Psi_{ij}(0), \Psi_{ij}(0.5) - 0.5 \cdot \Psi'_{ij}(0.5)] \bar{U} \xi_0;$$

$$\gamma = [\Psi_{ij}(1), \Psi_{ij}(0.5) + 0.5\Psi'_{ij}(0.5)] \bar{U} \gamma_0 ;$$

е) формируем результат

$$QD = \{\xi, \gamma\} .$$

Алгоритм заканчивает свою работу.

Примечание. Эта операция используется при работе функционально-интервальные операции GQL и GQR (выделение границ), QP , а также машинные интервальные операции GA, GS, GM, GD, GUN, GRL и GRM .

2.3.5. Возвведение в степень QW

Эта операция предназначена для возведения в целую положительную степень K функционального интервала P .

Ф о р м а о б р а щ е н и я : $QW(P, K)$

Алгоритм состоит в следующем:

- а) проверяем условие существования: если $k > 0$, то переходим к следующему пункту; если $k = 0$, то полагаем $QW = I$, иначе ($k < 0$) на печать выдается сообщение: *IA 1005 NEGATIVE POWER*
- б) полагаем $N = (k/2)*2$;
- в) выделяем границы операнда P , машинные интервальные числа A и B ;
- г) вычисляем машинные интервальные числа

$$F_A = A^N, \quad F_B = B^N,$$

$$F_0 = [(A+B)/2]^N, \quad F_1 = N[(A+B)/2]^{N-1};$$

- д) вычисляем границы результата :

$$\xi = F_A \bar{U}(F_0 - F_1(B-A)/2),$$

$$\gamma = F_B \bar{U}(F_0 + F_1(B-A)/2);$$

ж) по полученным ξ и γ формируем результат

$$QW = \{\xi, \gamma\}.$$

Алгоритм заканчивает свою работу.

Примечание. Операция "возвведение в степень" при работе использует функционально-интервальные операции GQL , GQR и QP , а также машинные интервальные операции GW , GA , GS , GD , GUN , GRL .

§ 2.4. Теоретико-множественные операции

В данном параграфе описаны машинные Ф-И операции, являющиеся реализацией некоторых теоретико-множественных операций над функциональными интервалами. Эти операции позволяют описывать в алгоритмах разветвляющиеся вычислительные процессы, определять минимальные и максимальные функциональные интервалы, формировать внешние представления и др.

2.4.1. Определение вложения IMQ

Эта операция предназначена для определения вложения двух функциональных интервалов. В зависимости от их соотношения, в результате получаем целую константу I , принимающую значения $-1, 0, 1$.

Ф о р м а о б р а щ е н и я : $IMQ(P, Q)$

Константа принимает значение -1 , если первый функциональный интервал вложен во второй ($I = -1$, если $P \subset Q$).

Константа принимает значение 1 , если исходные функциональные интервалы не имеют ни одной общей вещественной функции, определенной на отрезке $[0, 1]$ ($I = 1$, если $P \cap Q = \emptyset$).

И, наконец, константа принимает значение 0 во всех остальных случаях ($I = 0$, если $P \neq Q$, но $P \cap Q = \emptyset$).

Примечание. Операция IMQ при своей работе использует ма-

шинную интервальную операцию IMR (определение вложения интервальных чисел) и машинные функционально-интервальные операции GQL и GQR (выделение границ).

2.4.2. Определение знака разности IQS

Эта операция предназначена для определения знака разности исходных функциональных интервалов P и Q .

Ф о р м а о б р а щ е н и я : $IQS(P, Q)$

По двум машинным функциональным интервалам P и Q получаем целую константу I , принимающую значения $-1,0$ или 1 , в зависимости от соотношения между ними.

Константа I принимает значение -1 , если первый исходный функциональный интервал включает в себя функции, значения которых меньше значений функций, входящих во второй операнд.

Константа I принимает значение 1 , если первый исходный функциональный интервал включает в себя функции, значения которых больше значений функций, входящих во второй операнд.

Во всех остальных случаях ($P \cap Q \neq \emptyset$) полагаем $I = 0$.

Примечание. Операция IQS при своей работе использует машинную интервальную операцию ISG (определение знака разности двух интервальных чисел) и машинные функционально-интервальные операции GQL и GQR (выделение границ).

2.4.3. Определение знака ISQ

Эта операция предназначена для определения знака исходного функционального интервала.

Ф о р м а о б р а щ е н и я : $ISQ(P)$

По исходному машинному функциональному интервалу P получа-

ем целую константу I , принимающую значения -1 , 0 , или 1 , в зависимости от знака значений вещественных функций, входящих в P .

Константа I принимает значение -1 , если все функции, входящие в P , отрицательны:

$$(I = -1) (\forall x \in [0,1]) \quad \text{и} \quad (\forall y \in P) \Rightarrow (y(x) < 0).$$

Константа I принимает значение 1 , если все функции, входящие в P , положительны:

$$(I = 1) (\forall x \in [0,1]) \quad \text{и} \quad (\forall y \in P) \Rightarrow (y(x) > 0).$$

Во всех остальных случаях константу I полагаем равной 0 , ($I = 0$, если $\exists y \in P$ и для некоторого $x = x_0$ из $[0,1]$ $y(x_0) = 0$)

Примечание. Эта операция используется при своей работе операцию IGS (определение знака интервального числа) и машинные функционально-интервальные операции GQL , GQR и GUN (представление внешним объединением).

2.4.4. Представление внешним функциональным интервалом QUN

Эта операция предназначена для получения по двум исходным функциональным интервалам P и Q результата – функционального интервала QUN , являющегося внешним представлением их объединения.

Ф о р м а о б р а щ е н и я : $QUN(P,Q)$

Алгоритм состоит в следующем:

а) выделяем левые и правые границы операндов:

$$\{A, B\} = P, \quad \{C, D\} = Q;$$

б) формируем внешние представления соответственно левых и

правых интервалов:

$$\xi = A \bar{U} B, \quad \gamma = B \bar{U} D;$$

в) формируем функциональный интервал - результат по полученным интервалам ξ и γ .

Примечание. Операция QUN при своей работе использует машинные интервальные операции GUN и функционально-интервальные операции GQL , GQR .

2.4.5. Определение минимума двух машинных функциональных интервалов $QMIN$

Эта машинная функционально-интервальная операция предназначена для получения по двум машинным функциональным интервалам P и Q результата - машинного функционального интервала $QMIN$, являющегося функционально-интервальным расширением двуместной операции минимума.

Ф о р м а о б р а щ е н и я : $QMIN(P, Q)$

Алгоритм состоит в следующем:

а) выделяем левые и правые границы операндов:

$$\{A, B\} = P, \quad \{C, D\} = Q;$$

б) за левую границу результата принимаем наименьшую из левых границ A и C :

$$\xi = GMIN(A, C);$$

в) за правую границу результата принимаем наименьшую из правых границ B и D :

$$\gamma = GMIN(B, D);$$

г) формируем результат по полученным ξ и γ :

$$QMIN = \{\xi, \gamma\}.$$

Алгоритм заканчивает работу.

Примечание. Операция $QMIN$ при своей работе использует машинную интервальную операцию $GMIN$ и машинные функционально-интервальные операции GQL и GQR .

2.4.6. Определение максимума двух машинных функциональных интервалов $QMAX$

Эта машинная функционально-интервальная операция предназначена для получения по двум машинным функциональным интервалам P и Q результата – машинного функционального интервала $QMAX$, являющегося функционально-интервальным расширением двуместной операции максимума.

Ф о р м а о б р а щ е н и я : $QMAX(P, Q)$

Алгоритм состоит в следующем:

а) выделяем левые и правые границы операндов:

$$\{A, B\} \equiv P, \quad \{C, D\} \equiv Q ;$$

б) за левую границу результата принимаем наибольшую из левых границ A и C :

$$\xi = GMAX(A, C) ;$$

в) за правую границу результата принимаем наибольшую из правых границ B и D :

$$\gamma = GMAX(B, D) ;$$

г) формируем результат по полученным ξ , γ :

$$QMAX = \{\xi, \gamma\} .$$

Алгоритм заканчивает работу.

Примечание. Операция $QMAX$ при своей работе использует машинную интервальную операцию $GMAX$ и машинные функционально-интервальные операции GQL и GQR .

§ 2.5. Функционально-интервальные расширения некоторых математических функций

Эти программы предназначены для построения на ЭВМ функционально-интервальных расширений некоторых математических функций. Их суперпозиции позволяют строить расширения практически для любой конкретно заданной вещественной функции и получать автоматически достаточно узкие линейные полосы, гарантировано содержащие графики этих функций.

Для повышения точности и обеспечения доказательности вычислений на ЭВМ в алгоритмах используются известные свойства и приемы интервального анализа /13/ (использование монотонности функции на отдельных участках, свойства дистрибутивности и др.), а также интервальные операции и построенные интервальные расширения некоторых математических функций (Приложение I).

Все алгоритмы построены на основании леммы I.I , из которой следует общий алгоритм для построения функционально-интервальных расширений математических функций.

а) Проверяем условия существования функции $f(x)$. Если они не выполняются, то на печать выдается соответствующее сообщение и управление передается операционной системе (ОС) , иначе переходим к следующему пункту.

б) Выделяем границы операнда – машинные интервальные числа A и B .

в) Вычисляем машинные интервальные числа

$$F_A = [f](A) , \quad F_B = [f](B) ,$$

$$F_0 = [f]((A + B)/2) , \quad F_1 = [f']((A + B)/2) ,$$

где $[f']$ – интервальное расширение f' .

г) Вычисляем границы результата – машинные интервальные числа ξ и ζ :

$$\xi = F_A \bar{U}(F_0 - F_1(B-A)/2), \quad \zeta = F_B \bar{U}(F_0 + (B-A)/2).$$

д) По полученным ξ и ζ формируем результат $\{f\}(P) = \{\xi, \zeta\}$. Алгоритм заканчивает свою работу.

2.5.1. Вычисление квадратного корня $QSQRT$

Эта операция предназначена для получения функционального интервала – результата, содержащего в себе функцию \sqrt{x} , определенную на заданном интервале ($x > 0$).

Ф о р м а о б р а щ е н и я : $QSQRT(P)$

Алгоритм этой операции состоит в следующем:

а) выделяем границы операнда

$$\{A, B\} \equiv P;$$

б) проверяем условие существования заданной функции: если $x > 0 (x \in A \bar{U} B)$, то переходим к следующему пункту, иначе выдается соответствующее сообщение и происходит выход в ОС ;

в) вычисляем машинные интервальные числа

$$F_A = \sqrt{A}, \quad F_B = \sqrt{B}, \quad H = (A + B)/2,$$

$$F_0 = \sqrt{H}, \quad F_1 = (B - A)/(\sqrt{H} \cdot 4);$$

г) вычисляем границы результата – машинные интервальные числа ξ , ζ :

$$\xi = F_A \bar{U}(F_0 - F_1(B-A)/2), \quad \zeta = F_B \bar{U}(F_0 + F_1(B-A)/2);$$

д) по полученным ξ и ζ формируем результат

$$QSQRT = \{\xi, \zeta\}.$$

Алгоритм заканчивает свою работу.

Получившийся машинный функциональный интервал $\{\xi, \gamma\}$ является результатом работы $QSQRT$ для неотрицательного x .

В противном случае ($A \bar{U} B < 0$) программой $SQRT$ на печать выдается сообщение $ILF251I$ о попытке извлечения квадратного корня из отрицательного числа с последующим выходом в ОС.

Примечание. Эта операция при своей работе использует функционально-интервальные операции GQL , GQR и QP , а также машинные интервальные операции CR , $GSQRT$, GA , GS , GM , GP и GUN .

2.5.2. Функционально-интервальные расширения $QEXP$

Эта операция предназначена для получения функционального интервала – результата, содержащего в себе экспоненту e^x , определенную на заданном интервале.

Ф о р м а о б р а щ е н и я : $QEXP(P)$

Алгоритм этой операции состоит в следующем:

а) выделяем границы операнда: машинные интервальные числа A и B ;

б) вычисляем машинные интервальные числа

$$F_A = e^A, F_B = e^B, H = (A + B)/2,$$

$$F_0 = e^H, F_1 = F_0 \cdot H;$$

г) вычисляем границы результата – машинные интервальные числа ξ , γ :

$$\xi = F_A \bar{U}(F_0 - F_1(B-A)/2), \gamma = F_B \bar{U}(F_0 + F_1(B-A)/2);$$

д) по полученным ξ и ζ формируем результат

$$QEXP = \{ \xi, \zeta \} .$$

Алгоритм заканчивает свою работу.

Примечание. Эта операция при работе использует функционально-интервальные операции GQL , GQR и QP , а также машинные интервальные операции GR , $GEXP$, GA , GS , GM , GD , GUN .

2.5.3. Функционально-интервальное расширение $QLGN$

Эта операция предназначена для получения функционального интервала – результата, содержащего в себе натуральный логарифм, определенный для положительных аргументов.

Ф о р м а о б р а щ е н и я: $QLGN(P)$

Алгоритм этой операции состоит в следующем:

а) выделяем границы операнда P : машинные интервальные числа A и B ;

б) вычисляем машинные интервальные числа

$$F_A = \ln A, \quad F_B = \ln B, \quad H = (A + B)/2,$$

$$F_0 = \ln H, \quad F_1 = 1/H;$$

г) вычисляем границы результата – машинные интервальные числа ξ , ζ :

$$\xi = F_A \bar{U}(F_0 - F_1(B-A)/2), \quad \zeta = F_B \bar{U}(F_0 + F_1(B-A)/2);$$

д) по полученным ξ и ζ формируем результат

$$QLGN = \{ \xi, \zeta \} .$$

Алгоритм заканчивает свою работу.

Примечание: Эта операция при работе использует функционально-интервальные программы GQL , GQR , QP , а также машинные интервальные операции GR , $GLGN$, GA , GS , GM , GD , GUN .

2.5.4. Функционально-интервальное расширение $QSIN$

Эта операция предназначена для получения функционального интервала – результата, содержащего в себе функцию синус ($\sin x$), определенную на заданном интервале.

Ф о р м а о б р а щ е н и я: $QSIN(P)$

Алгоритм состоит в следующем:

а) выделяем границы операнда: машинные интервальные числа

A , B ;

б) проверяем условие существования $\sin x$, если

$A \cup B = [0, \pi/2]$, то переходим к следующему пункту, иначе полагаем $QSIN = \{[-1, 1], [-1, 1]\}$ и переходим на конец.

в) вычисляем машинные интервальные числа:

$$F_A = \sin A, \quad F_B = \sin B, \quad H = (A + B)/2$$

$$F_0 = \sin H, \quad F_1 = \cos H;$$

г) вычисляем границы результата – машинные интервальные числа ξ , γ :

$$\xi = F_A \bar{U}(F_0 - F_1, (B - A)/2), \quad \gamma = F_B \bar{U}(F_0 + F_1, (B - A)/2);$$

д) по полученным ξ , γ формируем результат:

$$QSIN = \{\xi, \gamma\}.$$

Алгоритм заканчивает свою работу.

Примечание. Эта операция использует при работе функционально-интервальные операции GQL , GQR и QP , а также машинные

интервальные операции $GSIN$, $GCOS$, GR , GA , GS , GM , GD , GUN .

2.5.5. Функционально-интервальное расширение $Qcos$

Эта операция предназначена для получения функционального интервала – результата, содержащего в себе функцию косинус ($\cos x$), определенную на заданном интервале.

Ф о р м а о б р а щ е н и я : $Qcos(P)$

Алгоритм состоит в следующем:

- выделяем границы операнда : машинные интервальные числа A и B ;
- проверяем условие существования $\cos x$: если $A \cup B = [0, \pi/2]$ то переходим к следующему пункту, иначе полагаем $Qcos = \{-1, 1\}$, $[-1, 1]\}$ и переходим на конец.
- вычисляем машинные интервальные числа

$$F_A = \cos A, \quad F_B = \cos B, \quad H = (A + B)/2,$$

$$F_0 = \cos H, \quad F_1 = -\sin H;$$

- вычисляем границы результата – машинные интервальные числа ξ , γ :

$$\xi = F_A \bar{U}(F_0 - F_1, (B - A)/2), \quad \gamma = F_B \bar{U}(F_0 + F_1, (B - A)/2);$$

- по полученным ξ и γ формируем результат:

$$Qcos = \{\xi, \gamma\}.$$

Алгоритм заканчивает свою работу.

Примечание. Эта операция использует при работе функционально-интервальные операции GQL , GQR и QP , а также машинные интервальные операции $GSIN$, $GCOS$, GR , GA , GS , GM , GD и GUN .

3. ПРИЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ИНТЕРВАЛЬНОГО
АНАЛИЗА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ
ЗАДАЧ

§ 3.1. Алгоритмы вычислений определенных
интегралов в гарантированных гра-
ницах

Классические численные методы вычисления определенных интегралов позволяют получать лишь приближенные значения, т.к. в них не учитываются, как правило, ошибки округлений и весьма затруднительна оценка старших производных. Возможность применения интервального анализа для получения гарантированных оценок с автоматическим учетом таких погрешностей отмечена в /34/.

Пусть $f(x)$ непрерывная вещественная функция, имеющая в качестве интервального расширения функцию $[f](X)$, $X = [a, b]$, монотонную по включению и удовлетворяющую интервальному условию Липшица, т.е. $w([f](X)) \leq L w(X)$. Для произвольного разбиения отрезка $[a, b]$ на n подинтервалов x_1, x_2, \dots, x_n :
 $x_i = [x_{i-1}, x_i]$, ($i = 1, \dots, n$), такого, что $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, справедливо включение

$$\int_a^b f(x) dx \in \sum_{i=1}^n [f](x_i) w(x_i) \quad (3.1)$$

и имеет место оценка

$$w\left(\sum_{i=1}^n [f](x_i) w(x_i)\right) \leq L \sum_{i=1}^n (w(x_i))^2. \quad (3.2)$$

Отметим также, что для решения поставленной задачи могут быть использованы формулы типа

$$\int_a^b f(x) dx \in \sum_{i=1}^n [f](x_i) C_i + R_n(f), \quad (3.3)$$

требующие вычислений старших производных f и их гарантированных оценок.

Пусть $f(x)$ имеет Φ -И расширение $\{f\}(X)$ такое, что для всех $x \in X_i$

$$f(x) \in \{f\}(X_i) \equiv \{A_i, B_i\}, \quad (i = 1, \dots, n).$$

Возьмем разбиение отрезка $[a, b]$ на равные подынтервалы

$$X_i \equiv [x_{i-1}, x_i], \quad w(X_i) = (b - a)/n.$$

Тогда по теореме I.I следует справедливость включения

$$\int_a^b f(x) dx \in \frac{b-a}{2n} \sum_{i=1}^n (A_i + B_i) \quad (3.4)$$

и имеет место оценка

$$w\left(\frac{b-a}{2n} \sum_{i=1}^n (A_i + B_i)\right) \leq \frac{L}{2} \frac{(b-a)^2}{n}. \quad (3.5)$$

Применим формулу (3.4) для вычисления определенного интеграла с гарантированной точностью на ЭВМ. Алгоритм состоит в следующем:

- a) полагаем $m = 1, S = 0, h = A/m$;
- б) для заданного $i = 1, \dots, m$:
 - b_1) формируем подынтервал разбиения $X_i = [a + (i-1)h, a + ih]$;
 - b_2) вычисляем ширину интервала X_i : $w_0 = w(X_i)$;
 - b_3) вычисляем соответствующее Φ -И расширение $\{f\}(X_i)$;
 - b_4) вычисляем интервалы-границы A_i и B_i Φ -И расширения;
 - b_5) вычисляем сумму $S = S + A_i + B_i$;
 - b_6) если $i \leq m$, то повторить п.п. b_1 - b_6 , иначе перейти к следующему пункту;
 - в) вычисляем окончательный результат: $FS = S w_0 / 2$;
 - г) вычисляем ширину интервала FS : $w_1 = w(FS)$;
 - д) если $w_1 < \varepsilon$, то переходим к п. ж), иначе полагаем $m = 10m$ и переходим к следующему пункту;

е) если $n \leq N$, то переходим к п. б), иначе печатается текст:

ТРЕБУЕМАЯ ТОЧНОСТЬ НЕ ДОСТИГНУТА
ЗНАЧЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА В ИНТЕРВАЛЕ

(нижняя граница) (верхняя граница)

и выход на конец;

ж) печатается текст

ТРЕБУЕМАЯ ТОЧНОСТЬ ДОСТИГНУТА
ЗНАЧЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА В ИНТЕРВАЛЕ

(нижняя граница) (верхняя граница)

Алгоритм заканчивает свою работу.

На основании этого алгоритма была составлена подпрограмма *FNTGLQ*, автоматизирующая вычисления определенных интегралов в гарантированных границах. Программа была написана на алгоритмическом языке ФОРТРАН-ЛУ с использованием машинных интервальных и Ф-И операций и оформлена программной единицей типа

FUNCTION FNTGLQ (QFUN, A, N, W, IP) ,

где *QFUN* - подпрограмма-функция, реализующая функционально-интервальное расширение функции $f(x)$; *A* - интервал интегрирования; *N* - допустимое число разбиений интервала; *W* - требуемая точность; *IP* - признак выдачи сообщений на печать.

Текст подпрограммы *FNTGLQ* и контрольно-тестовый пример обращения к ней приведены в приложении 4.

Результаты расчетов показывают хорошую практическую точность формулы (3.4). Например,

$$I = \int_0^1 (x^3 - x) dx = -0,25 .$$

При выборе шага $h = 0.01$ расчет по методу трапеций дает приближенное значение $I \approx -0.24988$. Применение подпрограммы *FNTGLQ* с тем же числом шагов, дает гарантированный результат

$I \in [-0.25011, -0.24989]$, так, что в середине этого интервала $I_0 = -0.25$.

Пусть теперь требуется вычислить в гарантированных границах интеграл с переменным верхним пределом

$$\int_a^x f(x) dx \equiv g(x), \quad x \in [a, b]. \quad (3.6)$$

Из результатов § I.2 имеем вычислительную формулу:

$$g(x) \in \{[0, g(x_0) - g'(x_0) \cdot \ell], [g(b), g(x_0) + \ell \cdot g'(x_0)]\}, \quad (3.7)$$

где $x_0 = (\alpha + \beta)/2$, $\ell = (\beta - \alpha)/2$.

С использованием этой формулы составлен алгоритм, предназначенный для вычисления функционального интервала, включающего в себя функцию (3.6).

Алгоритм состоит в следующем.

- а) Вычисляем функционально-интервальное расширение $\{f\}(X) \equiv \{A, B\}$ на заданном интервале H .
- б) Выделяем левую и правую границы-интервалы A и B .
- в) Вычисляем машинные интервалы по формулам (3.7)

$$F_A = 0, \quad F_B = (A + B) \cdot H/2,$$

$$F_0 = (\beta - \alpha)(3A + B)/8.$$

- г) Вычисляем

$$\xi = F_A \bar{U}(F_0 - F_1(\beta - \alpha)/2),$$

$$\gamma = F_B \bar{U}(F_0 + F_1(\beta - \alpha)/2).$$

- д) Формируем функциональный интервал-результат

$$QFIN = \{\xi, \gamma\}.$$

Алгоритм заканчивает свою работу.

Программа $QFIN$, реализующая этот алгоритм, написана на ал-

горитмическом языке ФОРТРАН-ИУ с использованием машинных интервальных и Ф-И операций и оформлена программной единицей типа

FUNCTION :

FUNCTION QFIN (QFUNC,H) ,

где *QFUNC* - подпрограмма-функция, реализующая функционально-интервальное расширение $\{f\}(X)$; *H* - интервал интегрирования.

Текст программы *QFIN* и расчеты контрольно-тестовых примеров представлены в приложении 4. К примеру, расчетами на ЭВМ получено, что на интервале $[0, 0.5]$:

$$\int_0^x t dt \in \{[-0.125, 0], [0.375, 0.5]\} = \bar{Y},$$

ширина которого $W(\bar{Y}) = 0.075$. Нижняя граница левого интервала получилась отрицательной в силу "загрубления до линейных границ" в функционально-интервальной арифметике.

§ 3.2. Алгоритм построения гарантированных оценок решений обыкновенных дифференциальных уравнений

3.2.1. Постановка задачи и основная теорема

Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения в интервальной постановке

$$\dot{y} = f(x, y), \quad x \in [x_0, x_1] = X_0, \quad y(x_0) \in Y_0, \quad (3.8)$$

где $f(x, y)$ - гладкая функция, для которой будем предполагать существование монотонного по включению Ф-И расширения такого, что из $y(x) \in \bar{U}$ (\bar{U} - некоторый функциональный интервал) следует

Имеет место

Теорема 3.1 (следствие принципа Шаудера). Если функциональный интервал $\{A, B\}$ удовлетворяет условию

$$\{F_1, F_2\} \equiv \{f\}(X_0, \{Y_0, Y_0 + (x_0 - x_0) \frac{A+B}{2}\}) = \{A, B\}, \quad (3.9)$$

то решение начальной задачи (3.8) существует и удовлетворяет условию

$$y(x_0) \in Y_0 + (x_0 - x_0) \frac{F_1 + F_2}{2}. \quad (3.10)$$

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции для последовательных приближений

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt, \quad x \in X_0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.11)$$

Возьмем в качестве начального приближения функцию

$$y_0(x) = y_0 + \int_{x_0}^x \varphi_0(t) dt \quad \text{где } \varphi_0(x) \in \{A, B\}.$$

Из последнего включения следует монотонность по включению для интегралов

$$\int_{x_0}^x \varphi_0(t) dt \in \int_{x_0}^x \{A, B\} dt, \quad x \in X_0,$$

откуда имеем

$$y_0(x) \in \{Y_0, Y_0\} + \int_{x_0}^x \{A, B\} dt. \quad (3.12)$$

Покажем, что все последовательные приближения (3.11) удовлетворяют условию (3.12).

Пусть

$$\varphi_n(x) \in \{A, B\}, \quad y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x \varphi_n(t) dt.$$

Докажем, что

$$y_{n+1}(x) \in \{Y_0, Y_0\} + \int_{x_0}^x \{A, B\} dt.$$

Действительно, используя условие (3.9) и учитывая монотонность по вложению Φ -И расширения для $f(x, y)$, имеем:

$$\begin{aligned} y_{n+1}(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt = \\ &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0 + \int_{x_0}^t \varphi_n(s) ds) dt \in \\ &\in \{Y_0, Y_0\} + \int_{x_0}^x \{f\}(X, \{Y_0, Y_0\} + \int_{x_0}^t \{A, B\} ds) dt = \\ &= \{Y_0, Y_0\} + \int_{x_0}^x \{F_1, F_2\} dt = \{Y_0, Y_0\} + \int_{x_0}^x \{A, B\} dt . \end{aligned}$$

Вследствие замкнутости функционального интервала $\{Y_0, Y_0\} + \int_{x_0}^x \{A, B\} dt$ на отрезке $[x_0, x]$ из доказанного следует, что

$$y(x) \in \{Y_0, Y_0\} + \int_{x_0}^x \{F_1, F_2\} dt . \quad (3.13)$$

Следовательно, на правом конце $x = x$, траектория решения исходного уравнения гарантированно пересекает правую границу функционального интервала (3.13), т.е.

$$y(x) \in Y_0 + (x - x_0) \frac{F_1 + F_2}{2} .$$

Теорема доказана.

Отметим, в частности, что условие (3.10) может быть использовано при построении продолжающихся решений, положив за начальное условие на следующем шаге полученный интервал.

3.2.2. Алгоритм *GDIFE*

Из теоремы следует, что функциональный интервал $\{A, B\}$ мо-

жно подбирать любым способом, а затем проверять выполнение условия (3.10). Геометрически функциональный интервал $\{A, B\}$ представляет собой полосу, в которой заключен график функции $f(x, y)$ на интервале $[x_0, x_1]$ при некотором фиксированном y . Поэтому на практике $\{A, B\}$ строится в зависимости от функции $f(x, y)$. В частности, в качестве начального приближения достаточно положить следующий функциональный интервал (кусочно-постоянную полосу):

$$\{A_0, B_0\} = \{f\}(X_0, \{Y_0, Y_0\}) .$$

Суть алгоритма, определяющего траекторию решения уравнения (3.8), состоит в следующем.

I. Выдвигается предположение о функциональном интервале $\{A, B\}$, содержащем график функции $f(x, y_0)$ на интервале X_0 .

II. Эта гипотеза проверяется по теореме 3.1.

Если условие (3.9) не выполняется, то в качестве $\{A, B\}$ берем Ф-И расширение $\{f\}(X, \{Y_0, Y_0\})$ и возвращаемся к началу этого пункта. Иначе переходим к следующему пункту.

III. По формулам (3.13) и (3.10) вычисляем соответственно функциональный интервал, содержащий траекторию решения уравнения, и отрезок, гарантированно пересекаемый этой траекторией на правом конце $x = x_1$.

IV. При машинной реализации на печать выдается следующая информация в зависимости от значений показателей печати I_p и N_p .

Если $I_p = 0$, то печать не производится; если $I_p = 1$, то печатаются только начальные данные X_0 , Y_0 и конечный результат-интервал Y_1 ; наконец, если $I_p = 2$, то результаты печатаются через N_p шагов в виде:

$$I \bar{x} \underline{y}, \bar{y}, \tau(Y_i) w(Y_i)$$

где I - номер шага интегрирования; \bar{x} - правый конец отрезка

интегрирования; Y_1 - отрезок, пересекаемый траекторией решения на правом конце (при $x = x_1$); $\pi(Y_1)$ - середина интервала Y_1 , $w(Y_1)$ - его ширина.

Следует отметить, что в случае одного уравнения возможно параллельное нахождение верхней и нижней границ траекторий решения. При таком подходе значительно сужается ширина функциональных интервалов, содержащих решения, а при достаточно малом шаге интегрирования получаются сужающиеся полосы, если интегральные кривые фактически сближаются. Однако это увеличивает объем вычислений.

Опишем более подробно алгоритм параллельного нахождения двусторонних аппроксимаций траекторий решений задачи (3.8).

Обозначим

A_1, A_2 - точечные интервалы такие, что $A_1 \bar{U} A_2 = Y_0$; x_0 - начальное значение независимой переменной; h - длина шага интегрирования; N - заданное число шагов; N_p - число, при кратности количества шагов которому производится печать результатов;

I_p - показатель печати; P - функциональный интервал, которому по предположению принадлежит график функции $f(x, y_0)$ на интервале $[x_0, x_1]$; $\{f\}$ - функционально-интервальное расширение f .

Алгоритм состоит в следующем.

При заданных $x_0, Y_0, h, N, I, I_p, N_p$:

а) полагаем $A_1 = [\underline{y}_0, \bar{y}_0], A_2 = [\bar{y}_0, \bar{\bar{y}}_0];$

б) задаем $X = [x_0, x_1].$

Для $j = 1, 2:$

в) полагаем $\bar{U} = \{A_j, A_j\};$

г) вычисляем для заданного \bar{U} :

$$P = \{f\}(X, \bar{U});$$

д) вычисляем Ф-И расширение определенного интеграла (см.

I.2.4):

$$\bar{V} = \left\{ \int_{x_0}^x \rho \, ds \right\}, \quad x \in X;$$

е) вычисляем Φ -И расширение $f(x, y)$:

$$Q_j = \{f\}(X, \bar{U} \boxplus \bar{V});$$

ж) проверяем выполнение основного условия (3.9).

Если $Q_j \subset \rho$, то (в силу теоремы 3.1 $y(x) \in Q_j ; x \in X$) для точности продолжаем итерации д) - ж), полагая $\rho = Q_j$, до тех пор, пока машинные функциональные интервалы ρ и Q_j станут равными.

Если оно не выполнено, т.е. $Q_j \not\subset \rho$, то полагаем $\rho = Q_j$ и возвращаемся к п. д).

Повторяем эту процедуру для $j = 1, 2$.

з) находим внешнее представление объединения решений:

$$Q = Q_1 \bar{U} Q_2$$

и далее вычисляем по формуле (3.10) интервал, гарантированно пересекаемый траекторией решения:

$$Y_1 = Y_0 + \int_{x_0}^{x_1} Q \, dx; \quad S = S + \frac{Y_0 + Y_1}{2} \cdot h;$$

и) при $I \leq N$ полагаем $x_0 = x$, $Y_0 = Y_1$ и возвращаемся к пункту а), иначе печатается текст:

РАСЧЕТ ОКОНЧЕН ШАГ $h = \dots$ ШИРИНА КОРИДОРА $S = \dots$

Алгоритм заканчивает свою работу.

П р и м е ч а н и е. Здесь за "ШИРИНУ КОРИДОРА" принята площадь совокупности линейных полос, заключающих в себе траекторию решения.

3.2.3. Описание программы

Приведенный выше алгоритм был реализован программой

GDIFE (GEMINATE DIFFEREN. EQUATION) . Эта программа написана на алгоритмическом языке ФОРТРАН-ЛУ с использованием машинных интервальных и Ф-И операций и оформлена программной единицей типа *FUNCTION* . Текст программы приведен в приложении 4.

Ф о р м а о б р а щ е н и я :

$$Y = GDIFE (QFUNC, X0, AYO, XH, N, IP, NP)$$

О п и с а н и е п а р а м е т р о в :

QFUNC - подпрограмма-функция, реализующая машинное представление Ф-И расширения функции $f(x,y)$; $X0$ - действительная переменная, задающая начальное значение независимой переменной;

$AY0$ - машинное интервальное число, задающее начальный интервал; XH - действительная переменная, задающая длину шага; N - целая переменная, задающая количество шагов; IP , NP - целые переменные, показатели печати.

П р и м е ч а н и е . При работе программа *GDIFE* использует: машинные интервальные и Ф-И операции; программу-функцию

QFUNC , которая должна быть образована как программная единица типа *FUNCTION QFUNC(HX,QY)* ; программу-функцию *QFIN*, вычисляющую Ф-И расширение определенного интеграла (см. § 3.1).

3.2.4. Контрольно-тестовые примеры

Расчеты контрольно-тестовых примеров показывают хорошее совпадение теоретической и практической точности. Заметим, что предлагаемый алгоритм не требует задания априорной области изменения для искомого решения, а также вычисления и оценок старших производных для $f(x,y)$. Расчеты проводились на ЭВМ ЕС-1022 для следующих задач (табл. 3.1).

Результаты расчетов приведены в табл. 3.2.

Таблица 3.1

$\#$	$y = f(x, y)$	x_0	Y_0	Точное решение
1.	$\dot{y} = -y$	0	[0.99, 1]	$[0.99, 1]e^{-x}$
2.	$\dot{y} = y$	0	[0.9, 1.1]	$[0.9, 1]e^x$
3.	$\dot{y} = x^2 - y$	0	[1.99, 2]	$x^2 - 2x + 2 + [1.99, 2]e^{-x}$
4.	$\dot{y} = e^y / (1+x)^2$	0	[0, 0.1]	$-\ln(1/(1+x) + e^{-[0, 0.1]})$
5.	$\dot{y} = y - x$	0	[0.9, 1.1]	$x + 1 + [-0.1, 0.1]e^{-x}$
6.	$\dot{y} = y / (1+x)$	0	[0.99, 1]	$[0.99, 1] / (x+1)$

§ 3.3. Применение доказательных вычислений
на ЭВМ к одной задаче теории выпук-
лых фигур

Принципиальная возможность использования доказательных вычислений на ЭВМ в теории выпуклых фигур и комбинаторной геометрии была отмечена в § I.3. Рассмотрим применение этого метода к задаче нахождения "универсальной покрышки" для кривых постоянной длины (см. напр. /33/, стр. 90-91).

До сих пор не известно, какова (выпуклая фигура ϕ) наименьшей возможной площади такая, что в нее можно заключить любую кривую длины L ?

В /53/ доказано, что любую кривую длины L можно покрыть ромбом с диагональю L и со сторонами, равными $L/\sqrt{3}$, площадь которого $0.2887 \dots L^2$. Здесь же анонсировано существование универсальной покрышки с площадью $0.2861 \dots L^2$.

Нетрудно видеть, что наименьшая по площади выпуклая фигура ϕ_o , которой можно покрыть одновременно отрезок длины L и ло-

Таблица 3.2

№ 1. $\dot{y} = -y, x_0 = 0, y_0 \in [0.99, 1]$

10	0.10	0.8957875	0.9048383	0.9003129	0.4525423E-02
20	0.20	0.8105405	0.8187323	0.8146362	0.4095912E-02
30	0.30	0.7334059	0.7408204	0.7371130	0.3707260E-02
40	0.40	0.6636117	0.6703228	0.6669669	0.3355563E-02
50	0.50	0.6004593	0.6065339	0.6034966	0.3037274E-02
60	0.60	0.5433167	0.5488152	0.5460658	0.2749234E-02
70	0.70	0.4916121	0.4965891	0.4941006	0.2488524E-02
80	0.80	0.4448279	0.4493330	0.4470804	0.2252549E-02
90	0.90	0.4024958	0.4065737	0.4045348	0.2038956E-02
100	1.00	0.3641921	0.3678836	0.3660378	0.1845747E-02

РАСЧЕТ ОКОНЧЕН ШАР Н=,01000 ШИРИНА КОРИДОРА S=,6379161E-02

№ 2. $\dot{y} = y, x_0 = 0, y_0 \in [0.9, 1.1]$

1	0.10	0.9946088	1.2157898	1.1051989	0.1105905E 00
2	0.20	1.0991621	1.3437681	1.2214651	0.1223030E 00
3	0.30	1.2147064	1.4852180	1.3499622	0.1352558E 00
4	0.40	1.3423967	1.6415577	1.4919767	0.1495805E 00
5	0.50	1.4835100	1.8143539	1.6489315	0.1654220E 00
6	0.60	1.6394577	2.0053396	1.8223982	0.1829410E 00
7	0.70	1.8117981	2.2164288	2.0141134	0.2023153E 00
8	0.80	2.0022554	2.4497375	2.2259960	0.2237411E 00
9	0.90	2.2127333	2.7076054	2.4601688	0.2674360E 00
10	1.00	2.4453373	2.9926176	2.7189770	0.2736402E 00

РАСЧЕТ ОКОНЧЕН ШАР Н=,10000 ШИРИНА КОРИДОРА S=,4000143E 00

№ 3. $\dot{y} = \dot{x} - y, x_0 = 0, y_0 \in [1.99, 2]$

10	0.10	1.8009367	1.8100090	1.8054724	0.4536152E-02
20	0.20	1.6317835	1.6400166	1.6358995	0.4116535E-02
30	0.30	1.4825497	1.4900227	1.4862862	0.3736496E-02
40	0.40	1.3532457	1.3600283	1.3566370	0.3391266E-02
50	0.50	1.2438736	1.2500334	1.2469530	0.3079891E-02
60	0.60	1.1544409	1.1600380	1.1572390	0.2798557E-02
70	0.70	1.0849552	1.0900421	1.0874987	0.2543449E-02
80	0.80	1.0354195	1.0400457	1.0377321	0.2313137E-02
90	0.90	1.0058403	1.0100489	1.0079441	0.2104282E-02
100	1.00	0.9962292	1.0000515	0.9981403	0.1911163E-02

РАСЧЕТ ОКОНЧЕН ШАР Н=,01000 ШИРИНА КОРИДОРА S=,6466061E-02

Продолжение

№ 4. $\dot{y} = e^{y/(1+x)^2}$, $x_0 = 0$, $y_0 \in [0, 0.1]$

10	0.10	0.0953047	0.1063213	0.1008130	0.5508304E-02
20	0.20	0.1823111	0.1943442	0.1883276	0.6016552E-02
30	0.30	0.2623493	0.2753989	0.2688740	0.6524771E-02
40	0.40	0.3364533	0.3505195	0.3434864	0.7033080E-02
50	0.50	0.4054423	0.4205257	0.4129840	0.7541716E-02
60	0.60	0.4699773	0.4860784	0.4780278	0.8050591E-02
70	0.70	0.5305984	0.5477182	0.5391579	0.8559883E-02
80	0.80	0.5877535	0.6058926	0.5968227	0.9069562E-02
90	0.90	0.6418175	0.6609768	0.6513968	0.9579659E-02
100	1.00	0.6931075	0.7132879	0.7031975	0.1009020E-01

РАСЧЕТ ОКОНЧЕН ШАГ №=,01000 ШИРИНА КОРИДОРА S=,1529479E-01

№ 5. $\dot{y} = y-x$, $x_0 = 0$, $y_0 \in [0.9, 1.1]$

1	0.10	0.9894735	1.2105265	1.0999994	0.1105264E 00
2	0.20	1.0778389	1.3221617	1.1999998	0.1221614E 00
3	0.30	1.1649790	1.4350214	1.3000002	0.1350212E 00
4	0.40	1.2507658	1.5492353	1.4000006	0.1492348E 00
5	0.50	1.3350563	1.6649446	1.5000000	0.1649442E 00
6	0.60	1.4176931	1.7823076	1.6000004	0.1823072E 00
7	0.70	1.4985027	1.9014983	1.7000008	0.2014980E 00
8	0.80	1.5772915	2.0227098	1.8000002	0.2227092E 00
9	0.90	1.6538477	2.1461535	1.9000006	0.2461529E 00
10	1.00	1.7279367	2.2720652	2.0000010	0.2720642E 00

РАСЧЕТ ОКОНЧЕН ШАГ №=,10000 ШИРИНА КОРИДОРА S=,3985342E 00

№ 6. $\dot{y} = -y/(1+x)$, $x_0 = 0$, $y_0 \in [0.99, 1]$

10	0.10	0.8999951	0.9090937	0.9045444	0.4549265E-02
20	0.20	0.8249919	0.8333378	0.8291645	0.4172981E-02
30	0.30	0.7615280	0.7692366	0.7653823	0.3854275E-02
40	0.40	0.7071308	0.7142923	0.7107115	0.3580749E-02
50	0.50	0.6599869	0.6666739	0.6633301	0.3343523E-02
60	0.60	0.6187359	0.6250076	0.6218715	0.3135860E-02
70	0.70	0.5823383	0.5882432	0.5852904	0.2952456E-02
80	0.80	0.5499848	0.5555637	0.5527740	0.2789497E-02
90	0.90	0.5210369	0.5263262	0.5236802	0.2643675E-02
100	1.00	0.4949839	0.5000085	0.4974962	0.2512306E-02

РАСЧЕТ ОКОНЧЕН ШАГ №=,01000 ШИРИНА КОРИДОРА S=,7013090E-02

маную со сторонами $L/2$ и углом 60° , "натянута" на отрезок и эту ломаную, расположенные так, что концы этой ломаной лежат на отрезке. Площадь Φ_0 равна $0.2162 \dots L^2$.

3.4.1. Вспомогательные утверждения

Пусть кривая \tilde{PQ} длины L имеет выпуклую оболочку V . Справедлива

Л е м м а 3.1. Существует кривая $\hat{\ell}$ для \tilde{PQ} , которая имеет такую же выпуклую оболочку V и наименьшую длину $|\ell| \leq L$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если кривая \tilde{PQ} выпуклая, то существование кривой $\hat{\ell}$ очевидно, поскольку в этом случае она совпадает с \tilde{PQ} .

Пусть \tilde{PQ} произвольная кривая, V - ее выпуклая оболочка. Построим последовательность спрямляемых кривых $\{\hat{\ell}^{(n)}\}$, имеющих соответственно длины $|\ell_n|$ и выпуклую оболочку V , заменяя вогнутые части (дуги) кривой \tilde{PQ} на отрезки, соединяющие их концы, или отбрасывая некоторые ее части (дуги), не образующие выпуклую оболочку. Упорядочим эту последовательность таким образом, чтобы $|\ell_n| \leq |\ell_{n-1}| \leq \dots \leq |\ell_1| \leq L$.

Поскольку множество спрямляемых кривых ограниченной длины в ограниченной области компактны по хаусдорфовой метрике, то построенная выше последовательность кривых $\{\hat{\ell}^{(n)}\}$ сходится к некоторой кривой $\hat{\ell}$, имеющей по построению выпуклую оболочку V , причем длина этой кривой $|\ell| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\ell_n| \leq L$.

Лемма доказана.

С л е д с т в и е. Для того, чтобы некоторая фигура Φ вмещала в себя некоторую кривую, необходимо и достаточно, чтобы она покрывала выпуклую оболочку этой кривой.

Таким образом, достаточно рассмотреть всевозможные выпуклые

кривые длины L . Для построения универсальной покрышки нам понадобится также следующее утверждение из элементарной геометрии.

Л е м м а 3.2. В равнобедренном треугольнике с углом между боковыми сторонами α ($60^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$), сумма расстояний от любой точки внутри треугольника до его сторон не меньше высоты, проведенной из вершины с углом α .

3.3.2. Основная теорема

Рассмотрим в прямоугольной системе координат xOy фигуру, ограниченную прямоугольным треугольником AOB , у которого $AB \perp Oy$, $|AB| = L$, $\angle A = \angle B = \alpha$ (рис. 3.I). Рассмотрим множества G_1 и G_2 точек на плоскости, удовлетворяющих условиям:

$$G_1 = \{M_1(x, y) \mid |M_1C_1| + |M_1D_1| \leq L/2, C_1 \in Oy, M_1 \in AOB\},$$

$$G_2 = \{D_2(x, y) \mid |M_2C_2| + |M_2D_2| \leq L/2, C_2 \in Oy, D_2 \in AOB\}.$$

Введем функции

$$T_1(\alpha, x) = \sup \{y(x) \mid (x, y) \in G_1\}, \quad (3.14)$$

$$T_2(\alpha, x) = \sup \{y(x) \mid (x, y) \in G_2\}. \quad (3.15)$$

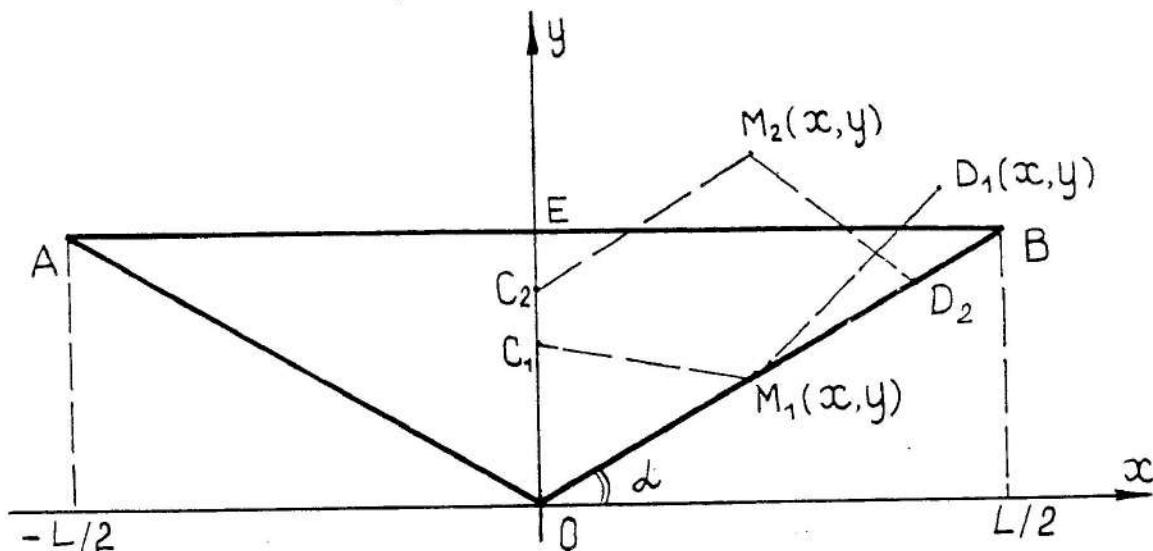


Рис. 3.I

Имеет место

Теорема 3.2. Всякую кривую длины L можно заключить внутри фигуры Φ , ограниченной ломаной $y = k|x|$ и кривой $y = \max_{-\ell \leq x \leq \ell} (T_1(\alpha, |x|), T_2(\alpha, |x|))$, где $30^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$, $k = \operatorname{tg} \alpha$, $\ell = L/2$.

Доказательство. Пусть C — середина кривой \widehat{PQ} . Расположим \widehat{PQ} так, чтобы точка C лежала на оси Oy и при этом кривая находилась выше ломаной AOB . Сдвигом кривой \widehat{PQ} в направлении начала координат и поворотом ее относительно точки C так, чтобы при этом $C \in Oy$, добиваемся такого положения, чтобы \widehat{PQ} касалась ломаной своими "половинами" (возможно, не в одной точке).

В силу симметричности фигуры Φ достаточно рассматривать только положение одной из половин кривой \widehat{PQ} относительно Φ . При этом возможны два случая положения точки C на Oy : $C \in OE$ либо C — выше точки E .

а) Рассмотрим первый случай: $C \in O$ (рис. 3.2). Обозначим точку касания дуги \widehat{CQ} с отрезком BO через M (если точек касания более, чем одна, то берем любую из них). Для произвольной точки $Z \in \widehat{CQ}$ справедливы оценки:

$$|CZ| + |ZM| \leq |\widehat{CZ}| + |\widehat{ZM}| \leq |\widehat{CZ}| + |\widehat{ZQ}| \leq \ell, \quad \text{если } Z \in \widehat{MC};$$

$$|CM| + |MZ| \leq |\widehat{CM}| + |\widehat{MZ}| \leq |\widehat{CZ}| + |\widehat{ZQ}| \leq \ell, \quad \text{если } Z \in \widehat{MQ}.$$

Таким образом, любая точка $Z \in \widehat{CQ}$ удовлетворяет условиям в определении функций $T_1(\alpha, x)$ и $T_2(\alpha, x)$, следовательно, \widehat{CQ} покрывается фигурой Φ .

б) Пусть теперь C лежит выше точки E и при этом \widehat{PQ} касается ломаной AOB (рис. 3.3). Рассмотрим кривую $\widehat{P'Q'}$ и ломаную $AO'B$ — отображения \widehat{PQ} и AOB соответственно, относи-

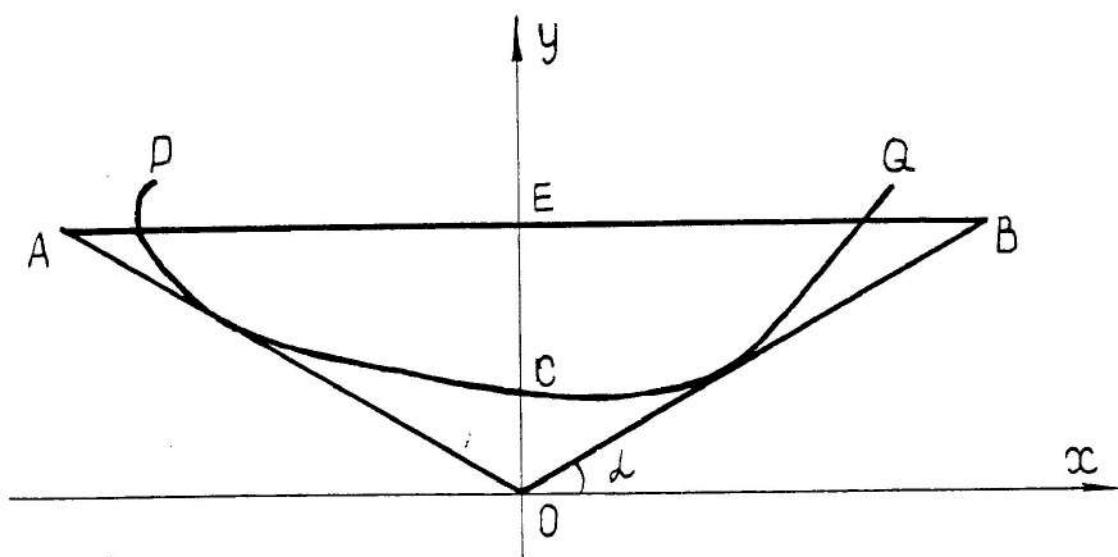


Рис. 3.2

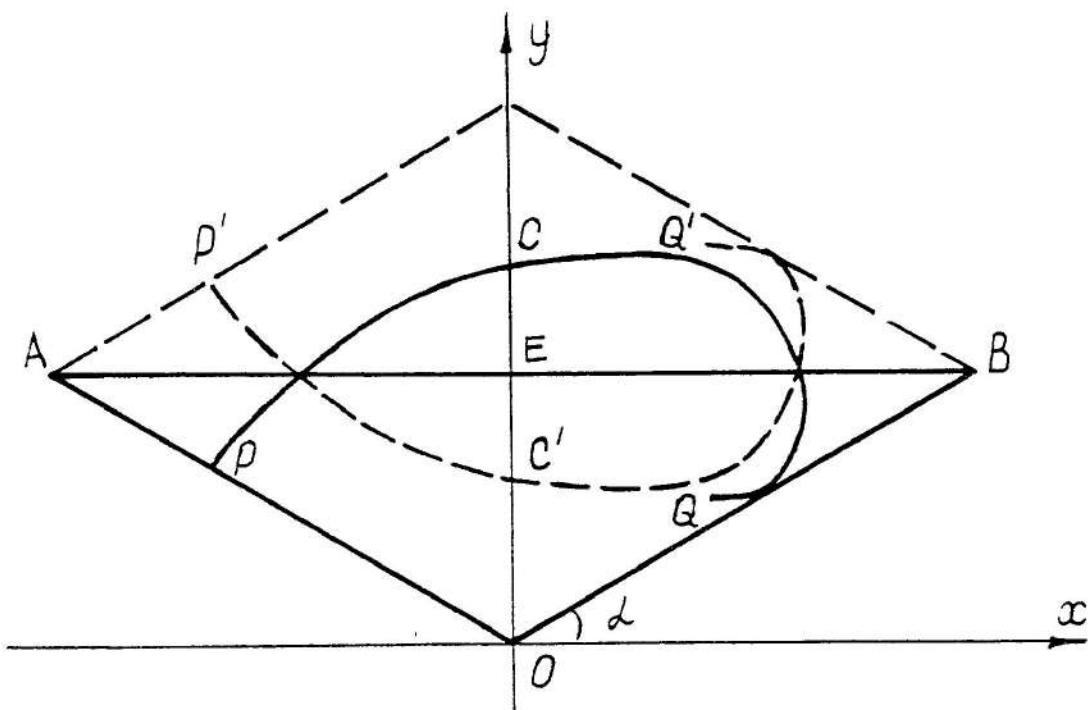


Рис. 3.3

тельно отрезка AB . Тогда точка C' — середина кривой $P'\tilde{Q}'$, принадлежит OE и при этом $P'\tilde{Q}'$ касается $AO'B$ дугами $P'C'$ и $\tilde{Q}'C'$. Покажем, что $P'\tilde{Q}'$ не имеет общих точек со сторонами ломаной AOB .

Предположим противное. Пусть N — одна из общих точек ломаной AOB и кривой $P'\tilde{Q}'$, M — точка касания $P'\tilde{Q}'$ с отрезком BO' . Рассмотрим равнобедренный $\Delta OBO'$, у которого, в силу условий теоремы, угол $B = 2\alpha$: $60^\circ \leq \angle B \leq 90^\circ$. Опустим перпендикуляры NK , и NK_2 на стороны BO' и OO' . Из леммы 3.2 для точки $N \in \Delta OBO'$ имеет место неравенство:

$$|NK| + |NK_2| \geq |BE| \equiv l.$$

С другой стороны, очевидно,

$$|NK| + |NK_2| < |N\tilde{Q}'| + |\tilde{N}C'| \equiv l.$$

Получено противоречие.

Таким образом, кривая $P'\tilde{Q}'$ не имеет общих точек с ломаной AOB и поэтому, сдвигая ее вдоль Oy и вращая вокруг точки C так, чтобы C' оставалась на OE , добивается такого положения, чтобы $P'\tilde{Q}'$ касалась ломаной AOB своими "половинами": $P'C'$ и $C'\tilde{Q}'$. Следовательно, как и в случае а), кривая $P'\tilde{Q}'$ покрываетяется фиgурой Φ .

Теорема доказана.

Используя определения $T_1(\alpha, x)$ и $T_2(\alpha, x)$, вообще говоря, для каждого конкретного значения $x \in [-l, l]$, можно построить алгоритм для вычисления значений этих функций, иными словами, функция $y = \max(T_1(\alpha, x), T_2(\alpha, x))$ вычислима сколь угодно точно. Следовательно, по теореме I.2 для построения границы фигуры можно применять доказательные вычисления на ЭВМ.

Предварительный расчет на ЭВМ ("недоказательный") показал,

что оптимальное на отрезке $[30^\circ, 45^\circ]$ значение площади фигуры Φ , описанной в теореме 3.2, приблизительно равно 0.26901 и достигается при $\alpha \approx 34^\circ$.

3.3.3. Вычислительные формулы

Как было отмечено выше, $T_1(\alpha, x)$ и $T_2(\alpha, x)$ конструктивно вычислимые функции. Однако их реализация на ЭВМ приводит к слишком обширным вычислениям, поэтому, прежде чем перейти к доказательным вычислениям, найдем вычислительные формулы для них.

Имеет место

Т е о р е м а 3.3. Для функций $T_1(\alpha, x)$ и $T_2(\alpha, x)$ (определеных в теореме 3.2) справедливы формулы ($k = \operatorname{tg} \alpha$) :

$$T_1(\alpha, x) = \begin{cases} \sqrt{\ell^2 - x^2}, & |x| \leq x_0, \quad x_0 = \frac{\ell(1-k^2)}{1+k^2} \\ -\alpha|x| + \beta, & -x_0 \leq x \leq -\ell, \quad x_0 \leq x \leq \ell \end{cases} \quad (3.16)$$

$$\alpha = \frac{1-k^2}{2k}, \quad \beta = \frac{1+k^2}{2k} \ell.$$

$$T_2(\alpha, x) = [\varphi(x) + \sqrt{\varphi^2(x) - \frac{k^2 \psi(x)}{k^2+1}}] \frac{k^2+1}{k^2}, \quad (3.17)$$

$$\varphi(x) = k\ell - \frac{kx}{1+k^2} - \frac{\ell}{\sqrt{1+k^2}}, \quad \psi(x) = \left(\frac{|x|}{\sqrt{1+k^2}} - k\ell \right)^2 - \ell.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) Имеем по определению (3.14) для $x \in [0, \ell]$:

$$T_1(\alpha, x) = \sup \{y \mid (x, y) \in G\}.$$

Пусть u - абсцисса точки $M_u \in OB$, ее ордината равна uk , тогда

$$G = \{(x, y) \mid (x-u)^2 + (y-ku)^2 \leq \ell^2, \quad u \in [0, \ell]\}. \quad (3.18)$$

Таким образом, множество G , геометрически представляет собой од-

ннопараметрическое семейство окружностей вида

$$F(x, y, u) \equiv (x-u)^2 + (y-ku)^2 - \ell^2 = 0,$$

так, что огибающая для них описывается системой

$$\begin{cases} F(x, y, u) = 0 \\ \frac{\partial F(x, y, u)}{\partial u} = 0, \end{cases}, \quad (3.19)$$

или в развернутом виде

$$\begin{cases} (x-u)^2 + (y-ku)^2 - \ell^2 = 0 \\ (x-u) + k(ku-y) = 0. \end{cases}$$

Отсюда, в частности, следует, что при $u=0$ огибающая совпадает с дугой окружности

$$x^2 + y^2 = \ell^2.$$

После несложных преобразований находим уравнение огибающей в параметрическом виде

$$\begin{aligned} X(u) &= \ell - 2k^2(\ell - u)/(k^2 + 1), \\ Y(u) &= 2k(\ell - u)/(k^2 + 1), \quad u \in [0, \ell]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

В частности, при $u=0$ имеем:

$$X(0) = \frac{\ell(1-k^2)}{1+k^2}, \quad Y(0) = \frac{2k\ell}{1+k^2}. \quad (3.21)$$

Исключая теперь параметр u из (3.20) и учитывая (3.21), получаем уравнение кривой $T_1(x, x)$ в явном виде:

$$T_1(x, x) = \begin{cases} \sqrt{\ell^2 - x^2}, & 0 < x \leq x_0 \\ -\alpha x + \beta, & x_0 \leq x \leq \ell, \end{cases}$$

где

$$x_0 = \ell(1-k^2)/(1+k^2), \quad \alpha = (1-k^2)/(2k),$$

$$\beta = \ell(1+k^2)/(2k).$$

б) По определению (3.15)

$$T_2(\alpha, x) = \sup\{y \mid (x, y) \in G_2\}.$$

Опустим перпендикуляр M_2K на отрезок OB . Имеет место оценка:

$$|M_2K| = \frac{kx-y}{\sqrt{k^2+1}} \leq |M_2D_2|.$$

Отсюда получаем неравенство

$$\sqrt{x^2 + (y-k\ell)^2} + \frac{kx-y}{\sqrt{k^2+1}} \leq \ell.$$

Решая последнее неравенство и учитывая, что $y \geq 0$ получаем:

$$y \leq [\varphi(x) + \sqrt{\varphi^2(x) - \frac{k^2}{1+k^2} \psi(x)}] / (\frac{k^2}{1+k^2}) \equiv T_2(\alpha, x),$$

где

$$\varphi(x) = k\ell - \frac{kx}{1+k^2} - \frac{\ell}{\sqrt{1+k^2}}, \quad \psi(x) = \left[\frac{x}{\sqrt{1+k^2}} - k\ell \right]^2 - \ell.$$

Учитывая четность функций (3.14) и (3.15) получаем на всем отрезке $[-\ell, \ell]$ вычислительные формулы (3.16) и (3.17).

3.3.4. Доказательные вычисления на ЭВМ

Применим доказательные вычисления к построению границы универсальной покрышки Φ_0 , ограниченной функциями

$$y = k|x| \quad \text{и} \quad T(k, x) = \max(T_1(k, |x|), T_2(k, |x|)),$$

определенными в области

$$G = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \leq k \leq 1; \quad -0.5 \leq x \leq 0.5 \right\}.$$

Функции $T_1(k, x)$ и $T_2(k, x)$ определяются формулами (3.16) и (3.17). Для обеспечения доказательности вычислений на ЭВМ и получения наиболее точной аппроксимации этих функций применим ФИАРИФМЕТИКУ, позволяющую построить кусочно-линейную аппроксимацию границ фигуры Φ_0 .

Пусть $\{T_j\}(G_i)$ — Φ -И расширение соответствующей функции в подобласти $G_i \subset G$. Имеем

$$T(k, x) \in \bar{\cup}_{i=1, n} [\{T_1\}(G_i) \bar{\cup} \{T_2\}(G_i)] \equiv \{T\}(G_i).$$

Площадь фигуры Φ_o вычисляется по формуле:

$$S(\Phi_o) = \int_{-l}^l [T(k, x) - y(x)] dx = 2 \int_0^l T(x) dx k l,$$

откуда, с использованием результатов п. I.2.4, имеем:

$$S(\Phi_o) \in 2h \sum_{i=1}^n [\underline{T}(G_i) + \bar{T}(G_i)] - k/2.$$

где $\{T\}(G) = \bar{\cup}_{i=1, n} \{T\}(G_i)$ — объединенное Φ -И расширение функции $T(k, x)$.

Алгоритм состоит в следующем.

Для каждой подобласти $G_i \subset G$, $i = 1, n$:

а) вычисляем объединенные Φ -И расширения для функций $T_1(k, x)$ и $T_2(k, x)$:

$$\{T_1\}(G) = \bar{\cup}_{i=1, n} \{T_1\}(G_i),$$

$$\{T_2\}(G) = \bar{\cup}_{i=1, n} \{T_2\}(G_i);$$

б) вычисляем внешнее представление этих расширений:

$$\{T\}(G) = \{T_1\}(G) \bar{\cup} \{T_2\}(G);$$

в) вычисляем площадь фигуры Φ_o :

$$S(\Phi_o) \in 2h \sum_{i=1}^n [\underline{T}(G_i) + \bar{T}(G_i)] - k/2.$$

Этот алгоритм был реализован программой, написанной на алгоритмическом языке ФОРТРАН-IV с использованием комплекса программ интервального и функционально-интервального анализа. Текст приведен в приложении IV.

Расчет для $n = 500$ на ЭВМ ЕС-1022 занял 5 мин, в результате получена новая оценка универсальной покрышки $S(\Phi_0) < 0.26714$.

§ 3.4. Применение доказательных вычислений на ЭВМ
к улучшению оценки наибольшей плотности
упаковки равных шаров в пространстве

Важное место в дискретной математике занимает задача о плотнейшей упаковке равных шаров в пространстве. Кроме того, что она остается одной из важных нерешенных проблем в математике, в последние десятилетия были обнаружены приложения ее многомерного варианта в вычислительной математике и теории связи.

Пусть в евклидовом пространстве E^n задан набор C (бесконечный) непересекающихся равных шаров. Не нарушая общности всех результатов, будем считать радиус шаров дополнения равными единице. Выберем произвольную точку O в качестве центра сферы Ω радиуса R . Плотность рассматриваемой упаковки C определяется формулой /32/:

$$\mathcal{D}_n(C) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\Omega(R)}{V(R)} , \quad (3.22)$$

где $\Omega(R)$ - сумма объемов шаров заполнения и их частей, попавших внутрь сферы Ω , $V(R)$ - ее объем.

Наибольшей плотностью упаковки равных шаров называется величина

$$d_n = \sup \{ \mathcal{D}_n(C) | C \} \quad (3.23)$$

Задача нахождения чисел d_n решена пока только для $n \leq 2$. При $n > 2$ имеются лишь их верхние и нижние оценки, в частности, для $n = 3$

$$0.74048 < d_3 < 0.77964 . \quad (3.24)$$

Нижняя оценка $\frac{\pi}{(3\sqrt{2})} = 0.74048 \dots$ достигается для наиболее плотных из решетчатых упаковок, верхняя $\sqrt{2}(3 \operatorname{arc cos} \frac{1}{3} - \pi) = 0.77963 \dots$ получена К.Роджерсом /30/ и независимо от него Е.Барановским /2/, соответствует заполнению правильного тетраэдра, образованного центрами четырех касающихся соседних шаров упаковки, частями этих шаров. Поскольку правильными тетраэдрами нельзя заполнить все пространство, верхняя оценка является улучшаемой.

Ниже доказана принципиальная возможность сколь угодно точного вычисления величин d_n для любого натурального n и с применением доказательных вычислений на ЭВМ получена новая оценка

$$d_3 < 0.7753.$$

3.4.1. Вычислимость величины d_n

Следующая теорема показывает принципиальную возможность применения численных методов для получения оценок d_n .

Теорема 3.4. Для любого натурального n величина d_n конструктивно вычислима, т.е. можно построить алгоритм для вычисления ее с любой наперед заданной точностью.

Доказательство. Обозначим через k - куб с ребром 1 в E^n ; V_k - его объем; S_k - площадь поверхности. Тогда

$$V_k = 1, \quad S_k = 2n,$$

$$k = \{z = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n \mid 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, n\}.$$

Расстояние между точкой $z \in k$ и его поверхностью S определим следующим образом:

$$\rho(z, S) = \min \{ \min |x_i, 1 - x_i| \mid i = 1, n \}.$$

Рассмотрим упаковку n равных шаров радиуса r ($r \ll 1$) в кубе k . Максимальный радиус таких шаров с центрами в точках z ,

z_1, \dots, z_m и, целиком лежащих в кубе k , равен:

$$z_m = \max \{ \|z_j - z_k\| \mid (1 \leq j < k \leq m) \quad z_1, \dots, z_m \in k \}. \quad (3.25)$$

Кубами, конгруэнтными k , можно замостить пространство E^n , следовательно, наибольшая плотность упаковки равных шаров всего пространства не меньше плотности заполнения единичного куба m одинаковыми шарами, т.е. для произвольного m справедлива оценка

$$d_n \geq m \omega_n (z_m)^n \equiv \delta_n,$$

где ω_n - объем единичного радиуса в E^n . Из последнего, учитывая известную оценку $\omega_n > n^{-n}$, получаем

$$z_m < \sqrt[1/(m \cdot \omega_n)]{1} < n \sqrt[n]{m}. \quad (3.26)$$

С другой стороны, располагая все шары вдоль ребра куба k , получаем $z_m \geq 1/(2m)$.

Возьмем теперь некоторое расположение шаров радиуса z_m в E^n . Пусть k - количество шаров, целиком лежащих в кубе k . Имеем

$$k \leq V_k / (\omega_n \cdot z_m^n) < n^n (2m)^n \equiv \mathcal{K}_m.$$

Далее, объем шаров и их частей, попавших в куб k , не превосходит величины

$$\mathcal{D}_n(k) = k \omega_n z_m^n + 2n z_m.$$

Если $k \leq m$, то

$$\mathcal{D}_n(k) \leq m \omega_n z_m^n + 2n z_m \equiv \Delta_m.$$

Если $k > m$, то получаем, что $z_m \leq z_k$, откуда следует $z_m = z_k$ и $\mathcal{D}_n(k) = \Delta_k$. Таким образом,

$$(\forall n)(\exists k \in [m, \mathcal{K}_m])(\mathcal{D}_n(k) \leq \Delta_k).$$

Следовательно, для любого n имеет место оценка:

$$\max\{k\Delta_m \mid m \leq k \leq \mathcal{K}_m\} \leq d_n \leq \max\{\Delta_k \mid m \leq k \leq \mathcal{K}_m\}.$$

Обозначим левую часть последнего неравенства через $\tilde{\delta}_n$. Тогда, используя (3.26), оценим разность:

$$d_n - \tilde{\delta}_n \leq \max\{\Delta_k - \delta_k \mid m \leq k \leq \mathcal{K}_m\} \leq 4\pi \zeta_m < \frac{4n^2}{\sqrt{n}}. \quad (3.27)$$

Поскольку ζ_m — вычислимая величина, то δ_k и δ_m также являются вычислимыми для всех k и m . Следовательно, в силу (3.27), величина d_n также конструктивно вычислимая.

Теорема доказана.

Вместе с тем, можно видеть, что рассмотренный в доказательстве алгоритм вычисления величины d_n для фиксированного n малоэффективен для получения приемлемых оценок d_n . Поэтому сначала проведем некоторые дополнительные построения и оценки, а затем применим доказательные вычисления на ЭВМ.

3.4.2. Оценка плотности упаковки при помощи

$D-V$ разбиения пространства

Пусть в пространстве E^3 задана упаковка C единичных шаров Q_0, Q_1, Q_2, \dots , с центрами в точках M_0, M_1, M_2, \dots , такая, что к ней нельзя добавить ни одного равного им шара без сдвига остальных шаров упаковки. Рассмотрим для данной упаковки разбиение пространства E^3 на области Дирихле-Вороного ($D-V$ разбиение)

$$D_i = \{M \in E^3 \mid MM_i \leq MM_j, \quad (i \neq j, \quad i=0,1,2,\dots)\}, \quad (i=0,1,2,\dots),$$

образованные плоскостями, перпендикулярными отрезкам, соединяющим центры соседних шаров, и проведенными в серединах этих отрезков. Известно [28], что множество областей $\{D_i\}$ образует нормальное разбиение всего пространства и D_i является выпуклым многогран-

ником с конечным числом граней, содержащим ровно один шар упаковки. Многогранники $D-V$ разбиения будем называть ячейками, а два шара упаковки будем называть соседними, если их ячейки соприкасаются по общей грани.

Поскольку плотность любой упаковки не больше плотности заполнения наименьшей ячейки единичным шаром, то имеет место оценка

$$d_3 \leq \frac{\frac{4}{3} \pi}{\inf\{V_{D-V}|C\}} , \quad (3.28)$$

где V_{D-V} – объем ячейки, а \inf берется по всевозможным упаковкам в E^3 .

На пути оценки объема наименьшей ячейки естественно рассматривать такие ячейки, соответствующие шарам, к которым нельзя приблизить ни один шар упаковки без сдвига остальных. Если шар упаковки окружает не более двенадцати соседних равных ему шаров, то задача (3.28) сводится к известной задаче об описанном двенадцатиграннике наименьшего объема, который представляет собой правильный додекаэдр, описанный вокруг единичного шара (см. напр. /32/, гл. У), что может быть выражено неравенством

$$\inf\{V_{D-V} | \pi \leq 12\} \geq 10 \sin 72^\circ (3 \operatorname{tg}^2 36^\circ - 1) = 5.550 \dots , \quad (3.29)$$

где π – число граней ячейки. Таким образом, наибольшая плотность заполнения ячеек, у которых число граней $\pi \leq 12$, не превосходит

$$(4/3) \pi / 5.550 \dots = 0.7545 \dots .$$

Рассмотрим ячейку разбиения, имеющую более двенадцати граней. Произведем триангуляцию проекций центров π соседних шаров на центральную сферу. По теореме Эйлера, на центральной сфере образуется $N = 2\pi - 4$ сферических треугольников. Каждому из них соответствует часть трехгранного угла с вершиной в центре шара,

ограниченного гранями ячейки, которую мы будем называть частичным объемом W_k , $k=1, \bar{N}$. Обозначим через $W(\Delta)$ – минимальный частичный объем, который соответствует данному сферическому треугольнику Δ , $S(\Delta)$ – площадь Δ . Поскольку сеть сферических треугольников $\{\Delta_k | k=1, \bar{N}\}$ покрывает всю сферу, то имеет место оценка объема соответствующей ячейки

$$V_m = \sum_{k=1}^N W_k \geq \inf \left\{ \sum_{k=1}^N W(\Delta_k) \mid \sum_{k=1}^N S(\Delta_k) = 4\pi \right\}. \quad (3.30)$$

Получить приемлемые оценки для (3.30) аналитическими методами не удается из-за многомерности задачи ($m \geq 13$), а "обычные" численные расчеты на ЭВМ не являются строго обоснованными, в силу наличия ошибок округления и погрешностей счета с дискретным шагом.

3.4.3. Оценка частичного объема

Опустим перпендикуляры $M_0 k_i$, ($i=1, \bar{m}$) из центра шара на грани соответствующей ему ячейки. Как следует из результатов /2/, на пути оценки объема наименьшей ячейки достаточно рассматривать только такие, в которых основания перпендикуляров $M_0 k_i$ попадают внутрь грани или на ее границу.

Обозначим $M_0 k_i = \rho_i$, очевидно, $\rho_i \geq 1$.

Л е м м а 3.3. Если шары Q_0 и Q_i являются соседними в данной упаковке и в нее нельзя добавить ни одного равного им шара без сдвига остальных, то $\rho_i < 2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $\rho_i \geq 2$. Пусть Q_j – один из ближайших шаров упаковки (если их несколько) к точке k_i – середине отрезка $M_0 M_i$. Возможны два случая. Если $M_j k_i < \rho_i$, тогда в данную упаковку можно вставить еще

один единичный шар с центром в точке k_i , что противоречит условию леммы. Если $M_0 k_i < \rho_i$, тогда основание перпендикуляра $M_0 k_i$ не попадает на общую грань, образованную соседними ячейками, отвечающие шарам Q_0 и Q_j , поскольку треугольник $M_0 M_i M_j$ является в этом случае тупоугольным.

Лемма доказана.

Рассмотрим сферический треугольник Δ , образованный упомянутой триангуляцией. Обозначим ξ_i, γ_i ($i=1,2,3$) стороны и углы Δ , ρ_i - ребра многогранника $T(\Delta)$, соответствующего $W(\Delta)$, исходящие из центра M_0 .

Пусть ξ - угол между ρ_i и ρ_j . Имеет место

Л е м м а 3.4. Для любой пары ρ_i и ρ_j , удовлетворяющей условию $\rho_i \leq \rho_j$, справедливы оценки

$$\rho_i \geq \max\left(\frac{\cos \xi}{2 \sin \xi/2}, 1\right), \quad \rho_j \geq \max\left(\frac{1}{2 \sin \xi/2}, 1\right).$$

$$\xi > 2 \arcsin 0.25.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть R - радиус описанной вокруг треугольника $M_0 M_i M_j$ окружности. По теореме синусов $\sin \xi = M_i M_j / (2R) \geq 1/R$, откуда $R \geq 1 / \sin \xi$. Поскольку $\rho_i \leq \rho_j$, то имеем

$$\rho_j \geq R \cos \xi / 2 \geq \cos \xi / 2 / \sin \xi = 1 / (2 \sin \xi / 2),$$

$$\rho_i \geq \rho_j \cos \xi \geq \cos \xi / (2 \sin \xi / 2).$$

Учитывая, что $\rho_i \geq 1$, получаем оценки

$$\rho_i \geq \max\left(\frac{\cos \xi}{2 \sin \xi/2}, 1\right), \quad \rho_j \geq \max\left(\frac{1}{2 \sin \xi/2}, 1\right).$$

С другой стороны, $\rho_j < 2$, следовательно, $1 / (2 \sin \xi / 2) < 2$, откуда $\xi > 2 \arcsin 0.25 (\approx 27^\circ)$.

Лемма доказана.

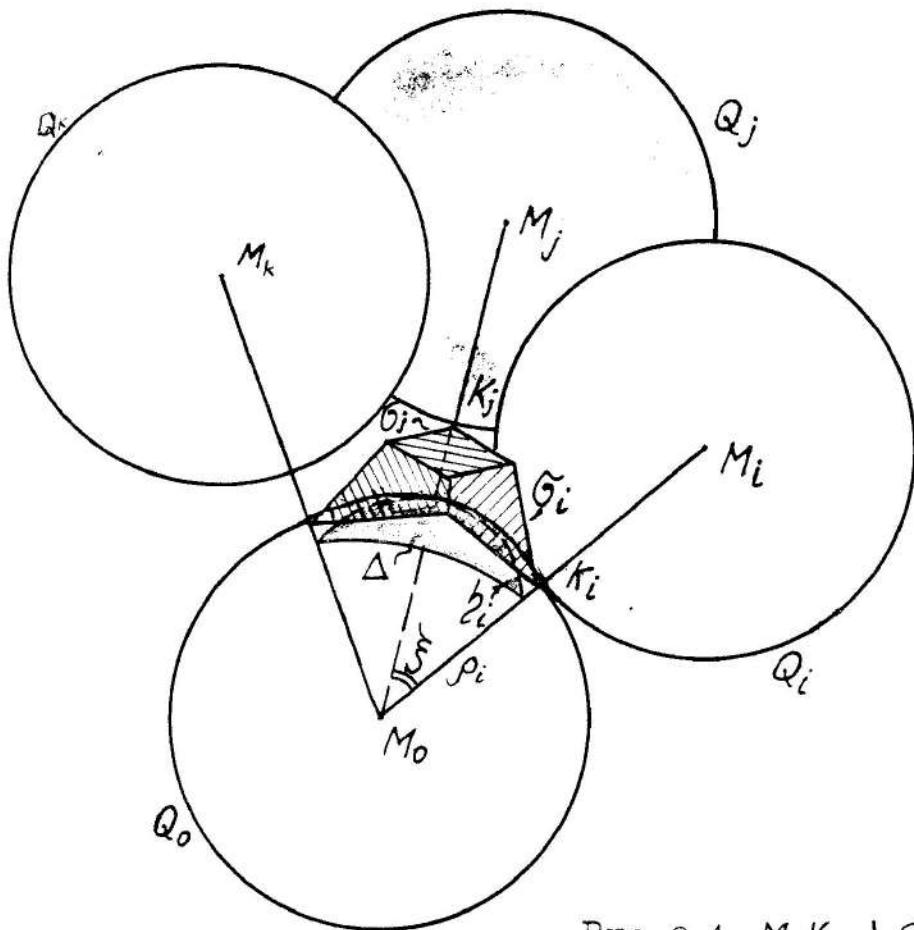


Рис. 3.4 $M_0K_i \perp \beta_i$

Многогранник $T(\Delta)$ представляет собой связку трех четырехугольных прямоугольных пирамид с общей вершиной в точке M_0 и высотами $M_0K_i \equiv \rho_i$. Обозначим через β_i площади оснований пирамид; h_{ij} ($i \neq j$) — соответствующие стороны этих оснований, примыкающие к ребрам M_0K_i ; γ_i — двугранный угол при ребре M_0K_i . Имеют место следующие вычислительные формулы:

$$W(\Delta) = \frac{1}{3} (\rho_1 \beta_1 + \rho_2 \beta_2 + \rho_3 \beta_3),$$

где

$$\beta_i = \frac{h_{ij} h_{ik}}{\sin \gamma_i} - \frac{h_{ij}^2 + h_{ik}^2}{2 \operatorname{tg} \gamma_i}, \quad (3.31)$$

$$h_{ij} = \frac{\rho_j - \rho_i \cos \xi_k}{\sin \xi_k}, \quad (i, j, k = 1, 2, 3, \quad i \neq j \neq k).$$

На основании леммы 3.3, не уменьшая общности, полагаем

$\rho_1 \leq \rho_2 \leq \rho_3 < 2$, откуда получаем с использованием леммы 3.4 следующие оценки:

$$\rho_1 \geq t = \tilde{\rho}_1, \quad (3.32)$$

$$\rho_2 \geq \max\left(\min\left(\frac{\cos \xi_1}{2 \sin \xi_1/2}, \frac{t}{2 \sin \xi_3/2}\right), t\right) = \tilde{\rho}_2,$$

$$\rho_3 \geq \max\left(\max\left(\frac{t}{2 \sin \xi_1/2}, \frac{t}{2 \sin \xi_2/2}\right), t\right) = \tilde{\rho}_3,$$

Таким образом, для частичного объема $W(\Delta)$ справедлива оценка:

$$W(\Delta) \geq \frac{1}{3} (\tilde{\rho}_1 \delta_1 + \tilde{\rho}_2 \delta_2 + \tilde{\rho}_3 \delta_3) = \hat{W}(\Delta). \quad (3.33)$$

3.4.4. Оценка углов сферического треугольника с помощью доказательных вычислений на ЭВМ

Пусть $\xi_i, \gamma_i (i=1,2,3)$ – соответственно стороны и углы одного из сферических треугольников, полученных триангуляцией в п. 3.4.2. Не умаляя общности, рассмотрим множество сферических треугольников

$$\omega_{\xi} = \{\Delta / \xi_0 \leq \xi_1 \leq \xi_2 \leq \xi_3 \leq \pi/2\}, \quad (3.34)$$

где $\xi_0 = 2 \arcsin 0.25$.

Обозначим

$$\cos \xi_i = x_i, \quad \sin \xi_i = \sqrt{1 - x_i^2}.$$

По формулам сферической геометрии имеем:

$$\cos \gamma_i = \frac{\cos \xi_i - \cos \xi_j \cos \xi_k}{\sin \xi_j \sin \xi_k} =$$

$$= \frac{x_i - x_j x_k}{\sqrt{1-x_j^2} \sqrt{1-x_k^2}} = f(x_i, x_j, x_k), \quad (3.35)$$

где ($i, j, k = 1, 2, 3$, $i \neq j \neq k$).

Условия существования сферических треугольников

$$\cos(\xi_j + \cos \xi_k) < \cos \xi_i$$

примут вид:

$$x_j x_k - \sqrt{1-x_j^2} \sqrt{1-x_k^2} < x_i. \quad (3.36)$$

Оценим функцию $f(x_i, x_j, x_k)$ в компактной области

$$\omega_x = \{(x_1, x_2, x_3) \mid 0 \leq x_3 \leq x_2 \leq x_1 \leq \cos \xi_0 = 0.875\};$$

$$x_j x_k - \sqrt{1-x_j^2} \sqrt{1-x_k^2} < x_i; \quad (i, j, k = 1, 2, 3, i \neq j \neq k). \quad (3.37)$$

Применим к данной задаче доказательные вычисления на ЭВМ, принципиальная возможность применения которых к таким экстремальным задачам следует из результатов § I.3. В частности, была использована подпрограмма *GINF* /27/, автоматизирующая поиск глобальных экстремумов функций в компактных областях и реализованная в рамках интервального анализа, что обеспечивает доказательность вычислений. В результате расчетов на ЭВМ получены следующие оценки:

$$\inf_{\omega_x} f(x_3, x_1, x_2) > -0.2308, \quad \sup_{\omega_x} f(x_1, x_2, x_3) < 0.4762,$$

откуда следуют гарантированные оценки для величин углов сферического треугольника

$$1.0745 < \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \gamma_3 < 1.8099. \quad (3.38)$$

Текст программы доказательных вычислений на ЭВМ приведен в приложении 4.

3.4.5. Оценка объема наименьшей ячейки с помощью доказательных вычислений

Рассмотрим на единичной сфере множество сферических треугольников

$$\omega_7 = \{ \Delta \mid 1.0745 \leq \gamma_i \leq 1.8099, (i=1,2,3) \} . \quad (3.39)$$

Пусть для любого $\Delta \in \omega_7$ и каких-либо чисел α и β выполняется неравенство

$$\tilde{W}(\Delta) \geq dS(\Delta) + \beta . \quad (3.40)$$

Тогда, в силу (3.30), имеет место оценка объема ячейки

$$\begin{aligned} V_m &\geq \inf \left\{ \sum_{k=1}^{2m-4} \tilde{W}(\Delta_k) \mid \sum_{k=1}^{2m-4} S(\Delta_k) = 4\pi \right\} \geq \\ &\geq \alpha \sum_{k=1}^{2m-4} S(\Delta_k) + (2m-4)\beta = 4\pi\alpha + (2m-4)\beta . \end{aligned} \quad (3.41)$$

Для величин $S(\Delta)$ и $\tilde{W}(\Delta)$ при $\Delta \in \omega_7$ в (3.41) имеем следующие вычислительные формулы:

$$S(\Delta) = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 - \pi ,$$

$$\cos \xi_i = \frac{\cos \gamma_i + \cos \gamma_j \cos \gamma_k}{\sin \gamma_j \cdot \sin \gamma_k} ,$$

$$\tilde{W}(\Delta) = \sum_{i=1}^3 \tilde{\rho}_i \delta_i ,$$

где δ_i , h_{ij} и $\tilde{\rho}_i$ определяются соответственно по формулам (3.31), (3.32).

Были проведены предварительные ("недоказательные") расчеты на ЭВМ функции $\tilde{W}(\Delta)$ и найдены следующие оптимальные значения константы α : для $m = 13$, $\alpha = 0.532$; для $m = 14$, $\alpha = 0.452$; для $m = 15$, $\alpha = 0.423$ и др. Для этих значений α , на основании оценки (3.41), с помощью доказательных вычислений на ЭВМ были получены строгие оценки величины

$$\beta_\alpha = \inf \left\{ \tilde{W}(\Delta) - \alpha S(\Delta) \mid \Delta \in \omega_2 \right\} : \quad (3.42)$$

$$\beta_{0.532} > -0.05759, \quad \beta_{0.452} > -0.01157,$$

$$\beta_{0.423} > 0.00716.$$

Доказательный поиск глобального минимума функционала (3.42) проводился на ЭВМ с использованием упомянутой интервальной программы *GINF*.

Таким образом, в силу (3.41), имеем

$$V_{13} \geq 4\pi 0.532 - 22 \cdot 0.05759 > 5.4183,$$

$$V_{14} \geq 4\pi 0.452 - 24 \cdot 0.01157 > 5.4023.$$

Поскольку $\beta_{0.423} > 0$, то для всех $m \geq 15$ получаем оценку

$$V_m \geq 4\pi 0.423 + (2m-4) \cdot 0.00716 > 5.5013.$$

Сравнивая (3.30) с этими гарантированными оценками для V_m при $m \geq 13$, получаем $V_m > 5.4023$ для всех m , откуда, в силу (3.28), $d_3 < 0.7753$, что улучшает верхнюю оценку (3.24).

Тексты программ для доказательных вычислений и результаты расчетов приведены в приложении 4.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Бабенко К.И. Основы численного анализа. -М.: Наука, 1986.
- 744 с.
2. Барановский Е.П. О заполнении n -мерных евклидовых пространств равными шарами, I // Известия высших учебных заведений. - 1964. - № 2. - Вып. 39: Математика. - С.14-24.
3. Барановский Е.П. Упаковки, покрытия, разбиения и некоторые другие расположения в пространствах постоянной кривизны. // Итоги науки. - М., 1969. - Вып. 16: Алгебра, топология, геометрия. - С.189-218.
4. Баячорова Б.Д. Применение доказательных вычислений на ЭВМ для получения оценок погрешностей сплайн-интерполяции на нерегулярной сетке // Вычислительные системы. - Новосибирск, 1983. - Вып. 98: Методы сплайн-функций в численном анализе. - С.134-143.
5. Болтянский В.Г. Проблемы геометрии // Итоги науки. - М., 1981. - Вып. 19: Алгебра, топология, геометрия. - С.260-270.
6. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. - М.: Наука, 1977. - С.11-15.
7. Вул Е.Б., Синай Я.Г. Обнаружение периодических траекторий динамических систем с помощью ЭВМ. - Черноголовка, 1979. - 27 с. (Препринт / Институт теоретической физики).
8. Глазунов Н.М. Библиотека программ интервального анализа // Программное обеспечение ЭВМ / Сб. науч. тр. - Киев: Ин-т кибернет. АН УССР. - 1982. - С.20-23.
9. Глушков В.М. Некоторые проблемы теории автоматов и искусственного интеллекта // Кибернетика - 1970. № 2. - С.3-13.
10. Добронец Б.С. Сплайновый метод решения нелинейных дифференциальных уравнений. - Красноярск, 1982. - 16 с. (Препринт / ВЦ СО АН СССР, № 3).

- II. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. - М.: Наука, 1980. - 352 с.
12. Иманалиев М.И., Панков П.С., Габитов И.Р. Применение ЭВМ для доказательства корректности одной обратной задачи // Известия АН Киргизской ССР. - 1978. - № 5. - С.25-28.
13. Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. - Новосибирск: Наука, 1986. - 224 с.
14. Каминская Э.Л., Каминский Т.Э. Модифицированная интервальная арифметика и теория погрешностей // Вычислительная математика и математическая физика. - М., 1982. - С.92-105.
15. Кузнецов В.А., Панкова Г.Д. Модель динамики иммунного противоопухолевого ответа и ее качественное исследование с помощью интервального анализа // Тез. докл. I Всесоюз. конф. по физиологической кибернетике. - М., 1981. - С.86-87.
16. Кушнер Б.А. Лекции по конструктивному математическому анализу, - М.: Наука, 1973. - 448 с.
17. Матиясевич Ю.В. Еще один машинный эксперимент в пользу гипотезы Римана // Кибернетика. - 1981. - № 6, - С.10,22.
18. Матиясевич Ю.В. вещественные числа и ЭВМ // Кибернетика и вычислительная техника. - 1986. - Вып. 2. - С.104-133.
19. Мусаев Э.М. Система интервальной обработки данных для ЕС ЭВМ // Всесоюзная конференция "Планирование и автоматизация эксперимента в научных исследованиях", Ленинград. Секции 2, 3, 24 - 26 сент. 1986 г.: Тез. докл. - Л., 1986. - С.22.
20. Панков П.С. Доказательные вычисления на электронных вычислительных машинах. - Фрунзе: Илим, 1978. - 179 с.
21. Панков П.С. Комбинированный способ доказательства некоторых теорем математического анализа при помощи ЭВМ // Кибернетика. - 1978. - № 3. - С.116-122.

22. Панков П.С., Долматов С.Л. Нахождение при помощи ЭВМ количества правильных пятиугольников, которые могут одновременно касаться того же пятиугольника // Зап. науч. семинаров ЛОМИ / Мат. ин-т им. Стеклова. Ленингр. отд-ние. - 1977. - Т.70. - С.160-177.
23. Панков П.С., Баячорова Б.Д., Югай С.А. Доказательные вычисления на ЭВМ и результаты их применения в различных разделах математики // Кибернетика. - 1982. - № 6. - С.III-II6,I24.
24. Панков П.С., Югай С.А. Об автоматизации доказательства теорем в теории выпуклых фигур на ЭВМ // Математические методы теории систем. - Фрунзе, 1979. - Вып. I. - С.108-III.
25. Панков П.С., Югай С.А. Функционально-интервальная арифметика и доказательство существования периодических траекторий при помощи ЭВМ // Тез. докл. X Международной конференции по нелинейным колебаниям, Варна, 12-17 сент., 1984 г. - София, 1984. - С.151.
26. Панков П.С., Югай С.А. Применение функционально-интервальной арифметики для построения гарантированных оценок решений дифференциальных уравнений // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. - Фрунзе: Илим, 1984. - С.343-344.
27. Панкова Г.Д. Комплекс программ для доказательных вычислений на ЕС ЭВМ / Кирг. гос. ун-т. - Фрунзе, 1980. - 57 с. - Деп. в ВИНИТИ 16.08.80, № 2392-80.
28. Роджерс К. Укладки и покрытия. - М.: Мир, 1968. - 152 с.
29. Сендов Б. Хаусдорфовы приближения. - София, 1979. - 372 с.
30. Слоэн Н.Дж.А. Упаковки шаров // В мире науки. - 1984. - № 3. - С.72-83.
31. Уlam С. Нерешенные математические задачи. - М.: Наука, 1964.

32. Фейеш Тот Л. Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. - М.: Наука, 1968. - 363 с.
33. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии. - М.: Наука, 1981, - 112 с.
34. Шокин Ю.И. Интервальный анализ. - Новосибирск: Наука, 1981. - 112 с.
35. Юлдашев З.Х. Алгоритмы реализации машинной интервальной арифметики для ЭЦВМ БЭСМ-6. - Гос. фонд алгоритмов и программ СССР, П002614. - Аннот.: Алгоритмы и программы (ВНИЦ). - 1978. - № I (21). - С.21-22.
36. Юлдашев З.Х. Некоторые вопросы интервального анализа и применения интервальных методов для решения задач вычислительной математики, Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.07. - Новосибирск, 1977. - 10 с.
37. Югай С.А. О применении численных методов к задаче о наиболее плотной упаковке конгруэнтных шаров в пространстве // I-я Респ. науч. техн. конф. молодых ученых Киргизии: Тез. докл. - Фрунзе, 1981. - С.39-40.
38. Югай С.А. Применение ЭВМ к задаче о наибольшем числе диаметров точечного множества в многомерном пространстве // Науч. конф. посвящ. 60-летию образ. СССР: Тез. докл. - Фрунзе: Илим, 1982. - С.125-126.
39. Югай С.А. Функционально-интервальная арифметика и возможности ее использования // Мат. УП Межресп. науч. конф. молодых ученых: Тез. докл. - Фрунзе: Илим, 1985. - С.81-83.
40. Югай С.А. Алгоритм построения гарантированных оценок решений дифференциальных уравнений при помощи пакета программ функционально-интервальной арифметики // Прикладная математика и ма-

тематическое обеспечение ЭВМ. Из-во МГУ. - М., 1985. - С.124-125.

41. Югай С.А. Применение доказательных вычислений на ЭВМ к улучшению оценки наибольшей плотности упаковки равных шаров // Неклассические уравнения математической физики. - Новосибирск, 1986. - С.120-126.

42. Югай С.А. О гарантированной двусторонней аппроксимации вещественных функций линейными сплайнами на ЭВМ // Вычислительные системы. - Новосибирск, 1986. - Вып. II5: Сплайны в вычислительной математике. - С.105-II5.

43. Яковлев А.Г. Машина арифметика мультиинтервалов // Вопросы кибернетики / Науч. совет по компл. проблеме "Кибернетика" АН СССР. - 1986. - Вып. I25. - С.66-81.

44. Caprany O., Madsen K. Contraction Mappings in Interval Analysis // BIT. - Vol. 15. - P. 362-366.

45. Hansen E.R. A generalized interval arithmetic // Lecture Notes Computing Science / Zum Karlsruher Simposium.-N 29. -P.7-18

46. Lessels G.S., Pelling M.J. An inequality for the two angle bisectors and a median // Univ. Beograd / Bubl. Electrotehn. Fact. Ser. Math. Fiz. - 1977. -N 577-598.-P. 59-62.

47. Markov S.M. Extended interval arithmetic // C.R. Acad. Bulg. Sciens. - 1977. - Vol. 30. - P. 1239-1242.

48. Moore R.E. Interval analysis // Prentice Hall. - New Jersey. - 1966. - 180 p.

49. Moore R.E. Methods and application of interval analysis // SIAM . -1979. - 199 p.

50. Nickel K. Die Überschätzung des Werteberlich einer Function in der Intervallrechnung mit Anwendungen auf lineare Gleichungssystems // Computing. - 1977. - Vol. 18. -N1. P. 15-36.

51. Nickel K. Verbandtheoretische Grundlagen der Intervall-Mathematik // Lecture Notes in Computer Science. - 1975. -Vol. 29. - P. 251-263.
52. Pankov P., Dolmatov S. Substatiable evalutions by electronic computers and their applications to one problem in combinatorical Geometry // Inf. Proc. Let. - 1979. - Vol. 18. - N 4. - P. 202-203.
53. Poole G., Gerriets J. Minimum covers for areas of constant length // Bul. Amer. Math. Sci. - 1973. - Vol. 79. - P. 462-463.
54. Rokne J. Polynomial Least Square Interval Approximation // Computing. - 1979. - Vol. 20. - N 2. - P. 165-176.
55. Skelboe S. Computation of rational interval functions // BIT. - 1974. - Vol. 14. - P. 87-95.

ПЕРЕЧЕНЬ ПРОГРАММНЫХ МОДУЛЕЙ ИНТЕРВАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Ниже приведен перечень программных модулей интервального анализа, реализованных на ЭВМ серии ЕС. Этот комплекс программ написан Г.Д.Панковой /27/ и вошел в состав математического обеспечения, предназначенный для обеспечения доказательных вычислений на ЕС ЭВМ.

Преобразующая программа

Назначение	Обращение
Преобразование исходного модуля на модифицированном языке ФОРТРАН-ІУ	INFFOR

Машинные интервальные операции

Назначение	Обращение	Тип аргументов	Тип значения функции
I	2	3	4

Операции формирования

Формирование ма- шинного интер- вального числа	GP(U,V)	Действ.	Интерв.
Выделение нижней границы	RL(A)	Интерв.	Действ.
Выделение верхней границы	RM(A)	Интерв.	Действ.

Арифметические операции

Сложение	GA(A,B)	Интерв.	Интерв.
Вычитание	GS(A,B)	Интерв.	Интерв.

Продолжение

:	I	:	2	:	3	:	4	:
---	---	---	---	---	---	---	---	---

Умножение	GM(A,B)		Интерв.		Интерв.
Деление	GD(A,B)		Интерв.		Интерв.
Возведение в степень	GW(A,N)		1-й интерв. 2-й целый		Интерв.

Вспомогательные операции

Выделение левой половины	GHL(A)	Интерв.	Интерв.
Выделение правой половины	GHM(A)	Интерв.	Интерв.
Минимум	GMIN(A,B)	Интерв.	Интерв.
Максимум	GMAX(A,B)	Интерв.	Интерв.
Абсолютное значение	GABS(A)	Интерв.	Интерв.
Объединение	GUN(A,B)	Интерв.	Интерв.
Пересечение	GIS(A,B)	Интерв.	Интерв.
Определение вложения	IMP(A, B)	Интерв.	Целый
Определение знака разности	ISG(A,B)	Интерв.	Целый

Интервальные расширения некоторых математических функций

Квадратный корень	GSQRT(A)	Интерв.	Интерв.
Экспонента	GEXP(A)	Интерв.	Интерв.
Синус	GSIN(A)	Интерв.	Интерв.
Косинус	GCOS(A)	Интерв.	Интерв.

Интервальные программы

Назначение	Обращение
Доказательство неравенства	CALL INEQPR(BD,I)
Поиск глобального минимума	CALL GINF(ND,N,W,FL,IP,NP)
Решение системы двух автономных дифференциальных уравнений	CALL EQUDIA(A1,A2,J,S,TH,N,NP)
Распознание образов чисел	CALL INREGN(A)

Приложение 2

ПЕРЕЧЕНЬ ПОСТРОЕННЫХ ПРОГРАММНЫХ МОДУЛЕЙ
ФУНКЦИОНАЛЬНО-ИНТЕРВАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ
ЕС ЭВМ

Машинные функционально-интервальные операции

Назначение	Обращение	Тип аргумента	Тип функции
I	2	3	4

Операции формирования и выделения элементов

Формирование функционального интервала	QP(A,B)	Интерв.	Функц.-интерв.
Формирование функционального интервала по нижней и верхней границам интервала	QF(A)	Интерв.	Функц.-интерв.
Формирование функционально-интервальнойной константы	QR (R)	Действ.	Функц.-интерв.
Формирование функционального интервала по верхней границе	QRM(P)	Функц.-интерв.	Функц.-интерв.
Формирование функционального интервала по нижней границе	QRL(P)	Функц.-интерв.	Функц.-интерв.
Выделение левого интервала	GQL(P)	Функц.-интерв.	Интерв.
Выделение правого интервала	GQR(P)	Функц.-интерв.	Интерв.
Выделение нижней границы левого интервала	RLL(P)	Функц.-интерв.	Действ.
Выделение верхней границы левого интервала	RLM(P)	Функц.-интерв.	Действ.

Продолжение

:	I	:	2	:	3	:	4	:
---	---	---	---	---	---	---	---	---

Выделение нижней границы правого интервала RRM(P) Функц.-интерв. Действ.

Выделение верхней границы правого интервала RRL(P) Функц.-интерв. Действ.

Выделение "среднего интервала" GQH(P) Функц.-интерв. Интерв.

Арифметические операции

Сложение QA(A,Q) Функц.-интерв. Функц.-интерв.

Вычитание QS(P,Q) Функц.-интерв. Функц.-интерв.

Умножение QM(P,Q) Функц.-интерв. Функц.-интерв.

Деление QD(P,Q) Функц.-интерв. Функц.-интерв.

Возведение в степень QW(P,K) I-й интерв. 2-й целый Функц.-интерв.

Умножение на число QMR(P,R) I-й функц.-интерв. 2-й действ. Функц.-интерв.

Теоретико-множественные операции

Представление внешним функц. интервалом QUN(P,Q) Функц.-интерв. Функц.-интерв.

Определение вложения IMQ(P,Q) Функц.-интерв. Целый

Определение знака разности IQS(P,Q) Функц.-интерв. Целый

Определение знака ISQ(P,Q) Функц.-интерв. Целый

Минимум QMIN(P,Q) Функц.-интерв. Функц.-интерв.

Максимум QMAX(P,Q) Функц.-интерв. Функц.-интерв.

Продолжение

:	I	:	2	:	3	:	4	:
---	---	---	---	---	---	---	---	---

Функционально-интервальные расширения
математических функций

Корень квадратный	QSQRT(P)	Функц.-интерв.	Функц.-интерв.
Экспонента	QEXP(P)	Функц.-интерв.	Функц.-интерв.
Натуральный логарифм	QLGN(P)	Функц.-интерв.	Функц.-интерв.
Синус	QSIN(P)	Функц.-интерв.	Функц.-интерв.
Косинус	QCOS(P)	Функц.-интерв.	Функц.-интерв.

Вспомогательные функции и подпрограммы

:	Назначение	:	Обращение	:
	Вычисление определенного интеграла		FUNCTION FNTGLQ(A,H,N,IP,NP)	
	Вычисление определенного интеграла с переменными пределами		FUNCTION QFIN(P,H)	
	Решение обыкновенного функционального уравнения в гарантированных границах		FUNCTION GDIFE(QFUN,XO,AYO,XH,N,IP,NP)	
	Печать на АЦПУ границ функционального интервала		CALL QPRINT(P)	

Операции формирования и выделения элементов

С П/Р ФОРМИРОВАНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ИНТЕРВАЛА

```
FUNCTION GR(A,B)
IMPLICIT REAL*8(A-H),COMPLEX*16(O-Q)
GR=DCMPLX(A,B)
RETURN
END
```

С П/Р ФОРМИРОВАНИЯ ФУНКЦИИ ИНТЕРВАЛА АРГУМЕНТА

```
FUNCTION GF(A)
IMPLICIT REAL*8(A-H),COMPLEX*16(O-Q)
GF=DCMPLX(GRL(A),GRM(A))
RETURN
END
```

С П/Р ФОРМИРОВАНИЯ ФУНКЦИИ ИНТЕРВАЛЬНОЙ КОНСТАНТЫ

```
FUNCTION GR(R)
IMPLICIT REAL*8(A-H),COMPLEX*16(O-Q)
GR=DCMPLX(GR(R),GR(R))
RETURN
END
```

ВЫДЕЛЕНИЕ ЛЕВОГО ИНТЕРВАЛА

```

      PRINT NOGEN
GRL   START 2
      USING *,15
BEGIN  SAVE  (14,12)
      L    3,0(1)
      LD   0,0(3)
      RETURN (14,12)
END   BEGIN
```

ВЫДЕЛЕНИЕ ПРАВОГО ИНТЕРВАЛА

```

      PRINT NOGEN
GRM   START 2
      USING *,15
BEGIN  SAVE  (14,12)
      L    3,0(1)
      LD   0,0(3)
      RETURN (14,12)
END   BEGIN
```

С П/П ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВНЕШНИМ ФУНКЦ. ИНТЕРВАЛОМ

```
FUNCTION GUN(P,Q)
IMPLICIT REAL*8(A-H),COMPLEX*16(O-Q)
GUN=GPR(GUN(GQL(P),GQL(Q)),GUN(GQR(P),GQR(Q)))
RETURN
END
```

С П/П ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАКА РАЗНОСТИ

```
FUNCTION IGS(P,Q)
IMPLICIT REAL*8(A-H),COMPLEX*16(O-Q)
IF (ISG(GQL(P),GQL(Q))+ISG(GQR(P),GQR(Q))) .LE. 3
1 IGS=1
RETURN
2 IGS=0
RETURN
3 IGS=1
RETURN
END
```

С П/П ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЗНАКА

```
FUNCTION ISQ(P)
IMPLICIT REAL*8(A-H),COMPLEX*16(O-Q)
ISQ=ISN(GUN(GQL(P),GQR(P)))
RETURN
END
```

С П/П ВЫЧИСЛЕНИЯ МИНИМУМА ФУНКЦ. ИНТЕРВАЛОВ

```
FUNCTION GMIN(P,Q)
IMPLICIT REAL*8(A-H),COMPLEX*16(O-Q)
GMIN=GPR(GMIN(GQL(P),GQL(Q)),GMIN(GQR(P),GQR(Q)))
RETURN
END
```

С П/П ВЫЧИСЛЕНИЯ МАКСИМУМА ФУНКЦ. ИНТЕРВАЛОВ

```
FUNCTION GMAX(P,Q)
IMPLICIT REAL*8(A-H),COMPLEX*16(O-Q)
GMAX=GPR(GMAX(GQL(P),GQL(Q)),GMAX(GQR(P),GQR(Q)))
RETURN
END
```

С ПУР ВЫДЕЛЕНИЯ НИЖНЕЙ ГРАНИЦЫ ЛЕВОГО ИНТЕРВАЛА

```
FUNCTION RLL(P)
IMPLICIT REAL*8(A-H),COMPLEX*16(D-Q)
RLL=RLL(GQL(P))
RETURN
END
```

С ПУР ВЫДЕЛЕНИЯ ВЕРХНЕЙ ГРАНИЦЫ ЛЕВОГО ИНТЕРВАЛА

```
FUNCTION RLM(P)
IMPLICIT REAL*8(A-H),COMPLEX*16(D-Q)
RLM=RM(GQL(P))
RETURN
END
```

С ПУР ВЫДЕЛЕНИЯ ВЕРХНЕЙ ГРАНИЦЫ ПРАВОГО ИНТЕРВАЛА

```
FUNCTION RRM(P)
IMPLICIT REAL*8(A-H),COMPLEX*16(D-Q)
RRM=RM(GQR(P))
RETURN
END
```

С ПУР ВЫДЕЛЕНИЯ НИЖНЕЙ ГРАНИЦЫ ПРАВОГО ИНТЕРВАЛА

```
FUNCTION RRL(P)
IMPLICIT REAL*8(A-H),COMPLEX*16(D-Q)
RRL=RL(GGR(P))
RETURN
END
```

Теоретико - множественные операции

```
FUNCTION IMQ(P,Q)
IMPLICIT REAL*8(A-H),COMPLEX*16(D-Q)
IF (IQS(P,Q)) 1,2,1
1 IMQ=1
RETURN
2 IF (IM(GQL(P),GQL(Q)),EQ.,-1,AND,
*IM(GQR(P),GQR(Q)),EQ.,-1) GOTO 3
GOTO 4
3 IMQ=-1
RETURN
4 IMQ=0
RETURN
END
```

Арифметические операции

с п/п СЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕРВАЛОВ

```
FUNCTION GA(P,Q)
IMPLICIT REAL*8(A-H),COMPLEX*16(O-Q)
A=GQA(GQL(P),GQL(Q))
B=GQA(GGR(P),GGR(Q))
G=GP(A,B)
RETURN
END
```

с п/п УМНОЖЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕРВАЛОВ

```
FUNCTION GM(P,Q)
IMPLICIT REAL*8(A-H),COMPLEX*16(O-Q)
DIMENSION A(2,2),B(2,2),HA(2),HB(2)
c БЛОК ВЫДЕЛЕНИЯ ЛЕВОЙ И ПРАВОЙ ГРАНИЦ
HA(1)=GQL(P)
HA(2)=GGR(P)
HB(1)=GQL(Q)
HB(2)=GGR(Q)
c ФОРМИРОВАНИЕ ИНТЕРВАЛОВ ДЛЯ КОНЦОВ
DO 1 I=1,2
A(I,1)=GRL(HA(I))
A(I,2)=GRH(HA(I))
B(I,1)=GRL(HB(I))
B(I,2)=GRH(HB(I))
1 CONTINUE
c
c БЛОК ВЫЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ИНТЕРВАЛА РЕЗУЛЬТАТА
AL=GM(HA(1),HB(1))
AR=GM(HA(2),HB(2))
DO 2 J=1,2
DA=GS(A(2,J),A(1,J))
DO 2 J=1,2
DB=GS(B(2,J),B(1,J))
AFI=GM(DA,DB)
BFI=GA(GM(DA,B(1,J)),GM(DB,A(1,J)))
CFI=GM(A(1,J),B(1,J))
HK0=GS(CFI,GM(AFI,GR(0,25)))
HK1=GA(HK0,GA(AFI,BFI))
AL=GUN(AL,4K0)
AR=GUN(AR,4K1)
2 CONTINUE
c
c ФОРМИРОВАНИЕ РЕЗУЛЬТАТА
GM=GP(AL,AR)
RETURN
END
```

С ПУРДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕРВАЛОВ

```
FUNCTION QD(P,Q)
IMPLICIT REAL*8(A-H),COMPLEX*16(0-q)
DIMENSION A(2,2),B(2,2),HA(2),HB(2)
C БЛОК ПРОВЕРКИ ДЕЛИТЕЛЯ НА 'НЕ-НУЛЬ'
IF (ISQ(Q),NE,0) GOTO 3
PRINT 11
11 FORMAT(' IA102 Q-DIVISOR CONTAINS ZERO')
CALL QPR(Q)
STOP
3 CONTINUE

C БЛОК ВЫДЕЛЕНИЯ ЛЕВОЙ И ПРАВОЙ ГРАНИЦ
HA(1)=GQL(P)
HA(2)=GQR(P)
HB(1)=GQL(Q)
HB(2)=GQR(Q)

C ФОРМИРОВАНИЕ ИНТЕРВАЛОВ ДЛЯ КОНЦОВ
DO 1 I=1,2
A(I,1)=GRL(HA(I))
A(I,2)=GRM(HA(I))
B(I,1)=GRL(HB(I))
B(I,2)=GRM(HB(I))
1 CONTINUE

C БЛОК ВЫЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ИНТЕРВАЛА-РЕЗУЛЬТАТА
AL=GQ(HA(1),HB(1))
AR=GQ(HA(2),HB(2))
DO 2 J=1,2
DSA=GS(A(2,J),A(1,J))
DO 2 J=1,2
DSB=GS(B(2,J),B(1,J))
DB=GA(B(1,J),B(2,J))
DB2=GH(DB,2)
DM=GM(DSA,DSB)
D2=GH(GR(4,),GM(A(1,J),B(2,J)))
HL2=GD(GA(D2,DM),DB2)
D1=GM(GR(4,),GM(B(1,J),A(2,J)))
HL1=GD(GA(D1,DM),DB2)
AL=GUN(AL,HL2)
AR=GUN(AR,HL1)
2 CONTINUE

C ФОРМИРОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ИНТЕРВАЛА-РЕЗУЛЬТАТА
GD=QP(AL,AR)
RETURN
END
```

С П/П ВЫЧИТАНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕРВАЛОВ

```
FUNCTION GS(P,Q)
IMPLICIT REAL*8(A-H),COMPLEX*16(O-Q)
A=GS(GQL(P),GQL(Q))
B=GS(GQR(P),GQR(Q))
GS=QP(A,B)
RETURN
END
```

С П/П ВОЗВЕДЕНИЕ В СТЕПЕНЬ

```
FUNCTION GW(P,K)
IMPLICIT REAL*8(A-H),COMPLEX*16(O-Q)
C ПРОВЕРКА ПОКАЗАТЕЛЯ СТЕПЕНИ
   IF (K) 1,2,3
1 PRINT 10,K
   STOP
2 GW=GQR(1.)
   RETURN
3 N=K/2*2
   A=GQL(P)
   B=GQR(P)
   FA=GW(GRM(A),N)
   FB=GW(GRM(B),N)
   C2=GR(2.)
   AB2=GD(GA,(A+B),C2)
   BA2=GD(GS(B,A),C2)
   F0=GN(AB2,N)
   F1=GD(GM(GR(FLOAT(N)),F0),AB2)
   F=GM(F1,BA2)
   AL=GM(FA,GS(F0,F))
   AR=GM(FB,GA(F0,F))
   GW=QP(AL,AR)
   IF (K .GT. N) GW=QM(GW,P)
10 FORMAT (5X,'1A1005 NEGATIVE POWER ',5X,'K=';15)
   RETURN
END
```

Ф-И расширения математических функций

3 П/П ВЫЧИСЛЕНИЕ Ф-И РАСШИРЕНИЯ СИНУСА

```
FUNCTION QSIN(P)
IMPLICIT REAL*8(A-H),COMPLEX*16(O-Q)
C2=GR(2.)
A=GQL(P)
B=GGR(P)
IF (IH(GUN(A,B),GP(0.,1.5708))) 2,1,1
1 QSIN=GP(GP(-1.,1.),GP(-1.,1.))
RETURN
2 FA=GSIN(GRL(A))
FB=GSIN(GRL(B))
AB2=GD(GS(B,A),C2)
BA2=GD(GS(B,A),C2)
F0=GSIN(GRM(AB2))
F1=GM(GCOS(AB2),BA2)
AL=GUN(FA,GS(F0,F1))
AR=GUN(FB,GA(F0,F1))
QSIN=GP(AL,AR)
RETURN
END
```

3 П/П ВЫЧИСЛЕНИЕ Ф-И РАСШИРЕНИЯ КОСИНУСА

```
FUNCTION QCOS(P)
IMPLICIT REAL*8(A-H),COMPLEX*16(O-Q)
C2=GR(2.)
A=GQL(P)
S=GGR(P)
IF (IH(GUN(A,B),GP(0.,1.5708))) 2,1,1
1 QCOS=GP(GP(-1.,1.),GP(-1.,1.))
RETURN
2 FA=GCOS(GRM(A))
FB=GCOS(GRM(B))
AB2=GD(GA(A,B),C2)
BA2=GD(GS(B,A),C2)
F0=GSIN(GRL(AB2))
F1=GM(GSIN(AB2),BA2)
AL=GUN(FA,GA(F0,F1))
AR=GUN(FB,GS(F0,F1))
QCOS=GP(AL,AR)
RETURN
END
```

С П/П ВЫЧИСЛЕНИЕ КВАДРАТНОГО КОРНЯ

```
FUNCTION GSQRT(P)
IMPLICIT REAL*8(A-H),COMPLEX*16(0-Q)
C2=GR(2.)
A=GGL(P)
B=GGR(P)
FA=GSQRT(GRL(A))
FB=GSQRT(GRL(B))
AB2=GD(GA(A,B),C2)
BA2=GD(GS(B,A),C2)
F0=GSQRT(AB2)
F1=GD(BA2,GM(C2,F0))
AL=GUN(FA,GS(F0,F1))
AR=GUN(FB,GA(F0,F1))
GSQRT=GP(AL,AR)
RETURN
END
```

С П/П ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭКСПОНЕНТЫ

```
FUNCTION GEXP(P)
IMPLICIT REAL*8(A-H),COMPLEX*16(0-Q)
C2=GR(2.)
A=GGL(P)
B=GGR(P)
FA=GEXP(GRM(A))
FB=GEXP(GRM(B))
F0=GEXP(GD(GA(A,B),C2))
F1=GM(R0,GD(GS(B,A),C2))
AL=GUN(FA,GS(F0,F1))
AR=GUN(FB,GA(F0,F1))
GEXP=GP(AL,AR)
RETURN
END
```

С П/П ВЫЧИСЛЕНИЕ НАТУРАЛЬНОГО ЛОГАРИФМА

```
FUNCTION GLGN(P)
IMPLICIT REAL*8(A-H),COMPLEX*16(0-Q)
C2=GR(2.)
A=GGL(P)
B=GGR(P)
FA=GLOG(GRL(A))
FB=GLOG(GRL(B))
H1=GD(GA(A,B),C2)
H2=GD(GS(B,A),C2)
F0=GLOG(H1)
F1=GD(H2,GM(C2,F0))
AL=GUN(FA,GS(F0,F1))
AR=GUN(FB,GA(F0,F1))
GLGN=GP(AL,AR)
RETURN
END
```

Тексты программ для доказательных вычислений на ЭВМ

С П/П ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

```
FUNCTION FNTGLQ(QFUNC,A,N,W,IP)
IMPLICIT REAL*8(A-H),COMPLEX*16(O-S)
DIMENSION X(100000)
M=1
1 HS2=GR(0.)
U=(RM(1)-RL(1))/M
X(M+1)=RM(1)
DO 2 I=1,M
2 X(I)=RL(1)+(I-1)*U
DO 3 I=1,M
HX=GPI(X(I),X(I+1))
PF=QFUNC(HX)
DX=GS(GR(X(I+1)),GR(X(I)))
HY2=GA(GQL(PF),GQR(PF))
HS2=GA(GH(HY2,DX),HS2)
3 CONTINUE
FNTGLQ=GD(HS2,GR(2.))
RSL=RL(FNTGLQ)
RSM=R4(FNTGLQ)
IF(IP.EQ.2)PRINT 13,M,RSL,RSM
IF(RSM-RSL.LT.1)GOTO 5
M=M*12
IF(M.LE.N)GOTO 1
IF(IP.LT.1)RETURN
PRINT 11,W
GOTO 4
5 IF(IP.LT.1)RETURN
PRINT 10,W
6 PRINT 12,RSL,RSM
12 FORMAT(//5X,'ТРЕБУЕМАЯ ТОЧНОСТЬ',F12.6,' ДОСТИРНУТА')
11 FORMAT(//5X,'ТРЕБУЕМАЯ ТОЧНОСТЬ',F12.6,' НЕ ДОСТИРНУТА')
12 FORMAT(4X,'ЗНАЧЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА',
** В ИНТЕРВАЛЕ',//2F17.5)
13 FORMAT(115,2F15.6)
RETURN
END
```

e

```
FUNCTION QFIN(P,HW)
A=GOL(P)
B=GQR(P)
AB2=GD(GA(A,B),GR(2.))
EA=GR(0.1)
FB=GM(HW,AB2)
FO=GD(GM(HW,GA(AB2,A)),GR(4.))
F1=GM(AB2+GD(HW+GB(2.)))
AL=GUN(EA+GS(FO+F1))
AR=GUN(FB/GA(FO,F1))
QFIN=OP(AL,AR)
RETURN
END
```

№ 1. $\int_0^1 (x^3 - x) dx = -0.25$

1	-0.3750023	0.0000005
10	-0.2512508	-0.2474996
100	-0.2500142	-0.2499738

ТРЕБУЕМАЯ ТОЧНОСТЬ 0.0001000 ДОСТИГНУТА

ЗНАЧЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА В ИНТЕРВАЛЕ

-0.2500142 -0.2499738

№ 2. $\int_0^1 (5x^4 - 3x^2 + x/2) dx = 0.25$

1000	0.2499908	0.2500123
------	-----------	-----------

ТРЕБУЕМАЯ ТОЧНОСТЬ 0.0001000 ДОСТИГНУТА

ЗНАЧЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА В ИНТЕРВАЛЕ

0.2499908 0.2500123

№ 3. $\int_0^1 \frac{1}{1-x+x^2} dx = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = 1.2091\dots$

100	1.2091541	1.2092361
-----	-----------	-----------

ТРЕБУЕМАЯ ТОЧНОСТЬ 0.0001000 ДОСТИГНУТА

ЗНАЧЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА В ИНТЕРВАЛЕ

1.2091541 1.2092361

№ 4. $\int_0^1 \frac{1}{1+x+x^2} dx = 0.6045\dots$

1	0.4974483	0.8484865
10	0.6033154	0.6061717
100	0.6045775	0.6046248

ТРЕБУЕМАЯ ТОЧНОСТЬ 0.0001000 ДОСТИГНУТА

ЗНАЧЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА В ИНТЕРВАЛЕ

0.6045775 0.6046248

Текст программы к §3.2

3 П/Р РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

```
FUNCTION GDIFE(QFUNK,X0,AY0,XH,N,IH,NP)
IMPLICIT REAL*8(A-H),COMPLEX*16(Q-Z)
DIMENSION A(2)
XL=X0
AY=AY0
HS=GR(0.)
DO 4 I=1,N
XM=XL+XH
HX=GQ(XL,XH)
HS=GS(GR(XM),GR(XL))
H2=GD(H,GR(2,1))
A(1)=GRL(AY)
A(2)=GRM(AY)
DO 3 J=1,2
GY=GQ(A(J),A(J))
PF=QFUNK(HX,GY)
1 PY=PF
GY=GA(GY,QFIN(PY,H))
PF=QFUNK(HX,GY)
3 ПРОВЕРКА ОСНОВНОГО УСЛОВИЯ
IF (IMQ(PF,PY)) 2,4,1
2 PY=PF
GY=GA(GY,QFIN(PY,H))
PF=QFUNK(HX,GY)
3 ПРОВЕРКА ОСНОВНОГО УСЛОВИЯ
IF (IMQ(PY,PF)) 3,2,1
3 A(J)=GA(A(J),GM(GA(GQL(PF),GQR(PF)),H2))
AY=GUN(A(1),A(2))
HS=GA(HS,AY)
3 ПЕЧАТЬ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ
IF (MOD(I,NP),NE,2) GOTO 4
YL=GRL(AY)
YM=GRM(AY)
XM=(YM-YL)/2,
W=(YM-YL)/2,
PRINT 10,I,XH,YL,YM,XM,W
10 FORMAT(16,F12.4,3F14.7,E15.7)
4 XL=XH
HS=GA(GM(GR(2,1),HS)+GS(AY0,AY))
S=(RM(HS)-RGL(HS))*XH/2.
PRINT 11,XH,S
11 FORMAT(// ' РАСЧЕТ ОКОНЧЕН',2X,
*'ШАГ НЕ',F8.5,4X,'ШИРИНА КОРИДОРА S#',
'E15.7//')
GDIFE=AY
RETURN
END
```

Текст программы к §3.3

5

ПОСТРОЕНИЕ УНИВЕРСАЛЬНОЙ ПОКРЫШКИ

```
IMPLICIT REAL*8(A-H),COMPLEX*16(Q-Z)
DIMENSION X(10000)
READ 1,N
XL=0.5
HT=GP(0;16733,0;16745)
HS=GP(0;15568,0;15592)
HC=GP(0;18290,0;18307)
DS=21
HL=GR(XL)
PL=QP(HL,HL)
HC2=GM(GS(HC,HS),GA(HC,HS))
A=GD(HC2,HS2)
B=GD(HL,HS2)
PA=QP(A,A)
PB=QP(B,B)
PS2=2P(HS2,HS2)
HY=GM(HL,HT)
H2=GS(HY,GM(HL,HC))
RH2=GP(H2,H2)
C1=GS(HL,HY)
C2=GA(HL,HY)
PC1=GP(C1,C1)
PC2=2P(C2,C2)
H1=GH(HS,2)
P1=QP(A1,H1)
HX2=GM(HL,HC2)
X(N+1)=RM(HL)
N1=N+1
DO 2 I=1,N1
2 X(I)=(I-1)*RH
DO 3 I=1,N
DX=GP(X(I),X(I+1))
PX=QP(DX)
CX=GS(GR(X(I+1)),GR(X(I)))
IF (ISG(HX,HX0)) 4,5,9
4 PT1=4SGRT(GM(2S(PL,PX),GA(PL,PX)))
GOTO 6
5 PT1=GS(PB,GM(PX,PS2))
6 CONTINUE
P2=GS(RH2,GM(PX,PS2))
P3=GM(PX,QP(HC,HC))
P3=GS(P3,PC2),GA(P3,PC1))
PT2=GD(GA(P2,4SGRT(GS(RH2,P2,2),GM(P1,P3))),P1)
PT=QUNI(PT1,PT2)
D=GA(GQL(PT),GQR(PT))
3 DS=GA(DS,GM(DX,D))
FS=GS(DS,GM(HL,HY))
S=RM(FS)
PRINT 10,S
10 FORMAT (//$X,'ПЛОЩАДЬ УНИВЕРСАЛЬНОЙ ПОКРЫШКИ ЧЕНЬШЕ ',F10,5)
STOP
END
```

Текст программы к §3.4

```
      COMMON HA,H8,API,AP2,AS1,ED,EC
      DIMENSION D(28),B(7)
C ЧИСЛО ПИ
      API=3.1415926,3.1415927
C ЗНАЧЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ
      D(13)=0.1532
      D(14)=1.452
      D(15)=1.423
C БЛОК ОЦЕНКИ ОБЪЕМА ЯЧЕЙКИ
      DVM=1000;
      DO 11 J=13,15
      DO 1  I=1,3
      1  B(I)=GUN(1;0745,1;6099)
      HA=D(J)
C ПУД ПОИСКА ГЛОБАЛЬНОГО МИНИМУМА
      CALL GINF(FUNC,B,3,9782,3.804,0,0)
C ОЦЕНКА ЧАСТИЧНОГО ОБЪЕМА
      NJ=G1(2*J+4)
      DVMIN=41*API*HA+FL*H8
      RL=RL(DVMIN)
C ПЛОТНОСТЬ ЗАПОЛНЕНИЯ ЯЧЕЙКИ
      DVH=EGMIN(DVM,DVMIN)
      P1=RL(D(J))
      P2=RL(FL)
      PRINT 20,J,P1,P2,PL
      IF (P2 .GT. 0) GOTO 10
11  CONTINUE
12  C3=41*API/(3)*DVM
      RM=RM(C3)
      PRINT 21,PM
20  FORMAT(//5X,'ОЦЕНКА ОБЪЕМА',13,1 - ГРАНИЦА Д-Р 13.16-ВСРОЧНОСТЬ
      *F14.5//5X,'ЗНАЧЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ А=1,F7.4,2X,'B=1,F10.5
      *2/5X,'ПОБЫВШИЙ С-У МНОГОГРАДИЕНТНОЙ ЗОНЫ Е',F12.5)
21  FORMAT(//5X,65('')/5X,'*АИБОЛШАЯ'
      *'ПЛОТНОСТЬ ЗАПОЛНЕНИЯ С-У МНОГОГРАДИЕНТНОВ',
      *'ЧИСЛЫЕ ',F14.5/5X,65(''))
      STOP
      END
```

С ИНТЕРВАЛЬНОЕ РАСШИРЕНИЕ МИНИМИЗИРУЕМОЙ ФУНКИИ

```
FUNCTION FUNC(B)
COMMON H1,H2,E1,AP1,AP2,AS1,ED,ED
DIMENSION CT(6),AST(6),C(6),AC(6),B(7),
*H(3,6),AR(6),F(3),CTG(6),CSC(6)
C ФОРМУЛЯ ДЛЯ ПЛОЩАДИ ОСНОВАНИЯ
FS(H1,H2,E,C)=H1*H2/E+(H1**2+H2**2)*C*2/5
HP(H1,H2,E,C)=(H2-H1*E)/C
C ПЛОЩАДЬ СФЕРИЧЕСКОГО ТРЕУГЛЬНИКА
    B1=B(2)+B(3)-B(1)
    B2=B(1)+B(3)-B(2)
    B3=B(1)+B(2)-B(3)
    IF (ISG(GMAX(B1,GMAX(B2,B3)),AP1)) .GT. 0 GOTO 17
C РЕШЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОГО ТРЕУГЛЬНИКА
    DO 2 I=1,3
        CT(I)=1;#2)*GSIN(B(I)/2))**2
        AST(I)=GSQRT(1-CT(I)**2)
        AST(I+3)=AST(I)
        CT(I+3)=CT(I)
        CTG(I)=CT(I)/AST(I)
        CTG(I+3)=CTG(I)
    2 CONTINUE
    DO 3 I=1,3
        C(I)=CT(I)/(AST(I+1)*AST(I+2))+CTG(I+1)*CTG(I+2)
        IF (ISG(C(I),ED) .NE. 0) GOTO 17
        C(I)=GIS(C(I),ED)
        C(I+3)=C(I)
        AC(I)=GSQRT(1-C(I)**2)
        AC(I+3)=AC(I)
    3 CONTINUE
C ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЫСОТ
    DO 4 I=1,3
    4 F(I)=1/((GSQRT(2)-2)*C(I))
        AR(2)=GMAX(GMIN(F(3),C(1)*F(1)),1)
        AR(2)=SRL(AR(2))
        AR(5)=AR(2)
        AR(3)=GMAX(GMIN(F(1),F(2)),1)
        AR(3)=SPL(AR(3))
        AR(1)=1
        AR(4)=AR(1)
C ВЫЧИСЛЕНИЕ ЧАСТИЧНОГО ОБЪЕМА
    DW=0;
    DO 5 I=1,3
        H(I,I+1)=HP(AR(I),AR(I+1),C(I+2),AC(I+2))
        H(I,I+2)=HP(AR(I),AR(I+2),C(I+1),AC(I+1))
        R(I,I+1)=GP(RL(H(I,I+1)),RL(H(I,I+1)))
        R(I,I+2)=GP(RL(H(I,I+2)),RL(H(I,I+2)))
        F1=FS(H(I,I+1),H(I,I+2),AST(I),CTG(I))
        DW=DW+F1*AR(I)
    5 CONTINUE
```

```
С МИНИМИЗИРУЕМАЯ ФУНКЦИЯ
FUNC=D*3;НАКАС
RETURN
12 FUNC=1680;
RETURN
END
```

ОЦЕНКА ОБЪЕМА 13 → ГРАННИКА ДИРИХЛЕ-ВОРОНОГО

ЗНАЧЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ А = 0,5320 В = -0,05759

ОБЪЕМ ОЧУ МНОГОГРАННИКОВ БОЛЬШЕ 5,41630

ОЦЕНКА ОБЪЕМА 14 → ГРАННИКА ДИРИХЛЕ-ВОРОНОГО

ЗНАЧЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ А = 0,4520 В = -0,01157

ОБЪЕМ ОЧУ МНОГОГРАННИКОВ БОЛЬШЕ 5,48230

ОЦЕНКА ОБЪЕМА 15 → ГРАННИКА ДИРИХЛЕ-ВОРОНОГО

ЗНАЧЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ А = 0,4230 В = -0,00716

ОБЪЕМ ОЧУ МНОГОГРАННИКОВ БОЛЬШЕ 5,53130

НАИБОЛЬШАЯ ПЛОТНОСТЬ ЗАПОЛНЕНИЯ ОЧУ МНОГОГРАННИКОВ МЕНЬШЕ 0,77529

С ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОЦЕНКА УГЛОВ СФЕРИЧЕСКОГО ТРЕУГЛЯ

```
DIMENSION B(3)
DO 10 I=1,3
  B(I)=GUN(21,01875)
10 CONTINUE
C ОБРАЩЕНИЕ К ВИД ГЛОБАЛЬНОЙ МИНИМИЗАЦИИ
  CALL GIN(FUNC,B,3,5200,0,01,0,1)
  STOP
END
```

С ИНТЕРВАЛЬНОЕ РАСПРОРЯЖЕНИЕ ФУНКЦИИ

```
FUNCTION FUNC(ND)
DIMENSION C(6),H(6),F(6),B(3)
G=0;45
IF (ISG(B(3),B(2)) .GT. 0) GOTO 1
IF (ISG(B(2),B(1)) .GT. 0) GOTO 1
C ВЫЧИСЛЕНИЕ СИНУСОВ СТОРОН ТРЕУГЛЯ
  DO 1 I=1,3
    C(I)=GSQRT(1-B(I)**2)
    C(I+3)=C(I)
    B(I+3)=B(I)
1 CONTINUE
C УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ СФЕРИЧЕСКОГО ТРЕУГЛЯ
  DO 2 I=1,3
    H(I)=B(I+1)*B(I+2)+C(I+1)*C(I+2)
    IF (ISG(H(I),B(I)) .GT. 0) GOTO 2
2 CONTINUE
C ВЫЧИСЛЕНИЕ КОСИНУСОВ УГЛОВ
  DO 4 I=1,3
    F(I)=(B(I)*B(I+1)*B(I+2))/C(I+1)*C(I+2)
    IF (ISG(F(I),G) .GT. 0) GOTO 3
4 CONTINUE
C МИНИМИЗИРУЕМАЯ ФУНКЦИЯ
  FUNC=F(3)
  RETURN
3 FUNC=100;
  RETURN
END
```

С ДОКАЗАТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА УГЛОВ СФЕРИЧЕСКОГО ТРЕУГЛЯ

```
DIMENSION B(3)
DO 10 I=1,3
  B(I)=GUN(01,8)B75
10 CONTINUE
С ОБРАЩЕНИЕ К П/П ГЛОБАЛЬНОЙ МАКСИМИЗАЦИИ
CALL GSUP(FUNC,B,3,5232,2,61,3,1)
STOP
END
```

С ИНТЕРВАЛЬНОЕ РАСШИРЕНИЕ ФУНКЦИИ

```
FUNCTION FUNC(ND)
DIMENSION C(3),H(6),F(6),B(3)
G=0;48
IF (ISG(B(3),B(2)),GT, 0) GOTO 1
IF (ISG(B(2),B(1)),GT, 0) GOTO 1
С ВЫЧИСЛЕНИЕ СИНУСОВ СТОРОН ТРЕУГЛЯ
DO 1 I=1,3
  C(I)=GSGR(1)-B(I)**2
  C(I+3)=C(I)
  B(I+3)=B(I)
1 CONTINUE
```

С УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ СФЕРИЧЕСКОГО ТРЕУГЛЯ

```
DO 2 I=1,3
  H(I)=B(I+1)*B(I+2)+C(I+1)*C(I+2)
  IF (ISG(H(I),B(I)),GT, 0) GOTO 2
2 CONTINUE
```

```
С ВЫЧИСЛЕНИЕ КОСИНОВЫХ УГЛОВ
DO 4 I=1,3
  F(I)=(B(I)+B(I+1)*C(I+2))/H(I+1)*C(I+2)
  IF (ISG(F(I),6),GT, 0) GOTO 3
4 CONTINUE
```

С МАКСИМИЗУЕМАЯ ФУНКЦИЯ

```
FUNC=F(1)
RETURN
3 FUNC=-1
RETURN
END
```