

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Ордена Ленина Сибирское Отделение
Институт вычислительных технологий

Шарый Сергей Петрович

Интервальные алгебраические задачи и их численное решение

Диссертация на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

01.01.07 — вычислительная математика

Новосибирск, 2000 г.

Оглавление

Введение	7
1 Постановки интервальных задач	19
1.1 Анализ интервально заданных систем	19
1.1 а Описание практической ситуации	19
1.1 б Предварительная постановка задачи	22
1.2 Обобщённые множества решений интервальных уравнений	24
1.2 а Кванторный формализм	24
1.2 б Интерпретация	30
1.2 с Множества АЕ-решений	31
1.3 Детальная постановка задачи	36
1.3 а Обсуждение	36
1.3 б Что такое интервальная “задача оценивания”?	37
1.3 с Задачи, которые будут рассматриваться	40
2 Характеризации и свойства множеств решений	45
2.1 Аналитическая характеристика множеств АЕ-решений	45
2.2 Интервальные арифметики	49
2.2 а Классическая интервальная арифметика	49
2.2 б Интервальная арифметика Кахана	49
2.2 с Неформальное обсуждение	50
2.2 д Полная интервальная арифметика Каухера	52
2.2 е Интервальные векторы и матрицы	56
2.2 ф Арифметика Каухера — минимаксная интервальная арифметика	59
2.3 Множества АЕ-решений интервальных линейных уравнений	61
2.3 а Кванторный формализм в линейном случае	61
2.3 б Характеризация и постановки задач	68
2.4 Управляемое множество решений интервальных линейных систем	74
3 Внешнее оценивание множеств решений	83
3.1 Основы формального подхода	84
3.2 Оптимальность внешнего оценивания	86
3.3 Интервальный метод Гаусса-Зейделя для обобщённых множеств решений	92
3.4 Исследование обобщённого метода Гаусса-Зейделя	95
3.5 Предобуславливание	99
3.6 Внешнее оценивание для нелинейных систем	105

3.7	Обсуждение и численные эксперименты	112
4	Оптимальное внешнее оценивание множеств решений	121
4.1	Оптимальные решения и их цена	121
4.2	Пассивный переборный алгоритм	124
4.3	Интервальные методы глобальной оптимизации	127
4.4	Методы дробления решений	132
4.4 a	Решение одномерных включений	133
4.4 b	Основной алгоритм	134
4.4 c	Доказательство сходимости	139
4.5	Модификации методов дробления решений	144
4.5 a	Оценивание по знакоопределённым брусам	144
4.5 b	Использование локальных решателей	146
4.5 c	Новая стратегия дробления	149
4.5 d	Итоговая схема	151
4.6	Численные эксперименты с методами дробления решений	155
4.7	Методы дробления параметров	160
4.7 a	Общая схема методов	160
4.7 b	Решение линейных систем	163
4.8	Модификации методов дробления параметров	167
4.8 a	Тест на монотонность	167
4.8 b	Стратегия дробления	169
4.8 c	Модификация Рона	171
4.8 d	Влияние базового алгоритма	179
4.8 e	Отсев бесперспективных записей	181
4.8 f	Итоговая схема алгоритма	183
4.9	Численные эксперименты с методами дробления параметров	185
4.10	Последовательно гарантирующие и финально гарантирующие алгоритмы	190
5	Внутреннее оценивание множеств решений	197
5.1	Формальный подход	197
5.2	Внутреннее оценивание для интервальных линейных систем	201
5.3	Максимальность внутренних оценок	203
5.4	Коррекция внутренних оценок	205
5.5	Интервальные линейные системы с неотрицательными матрицами	210
5.5 a	Теоретическая основа	211
5.5 b	Алгоритм	215
5.5 c	Выбор начальной точки	217
5.5 d	Численные эксперименты	219
6	Численное нахождение формальных решений	223
6.1	Погружение в линейное пространство	223
6.1 a	Зачем погружать?	223
6.1 b	Определение и основные свойства	224
6.1 c	Стандартное погружение	228
6.1 d	Сопутствующие матрицы	230
6.1 e	Вполне невырожденные матрицы	232

6.2	Исследование индуцированных уравнений	234
6.2 a	Порядковая выпуклость и субдифференцируемость	236
6.2 b	Полиэдральность	239
6.2 c	Оценки субдифференциалов	242
6.3	Существование и единственность формальных решений	244
6.4	Субдифференциальный метод Ньютона	247
6.4 a	Алгоритм	247
6.4 b	Доказательство сходимости	247
6.4 c	Вычисление субдифференциала	252
6.5	Численные эксперименты с субдифференциальным методом Ньютона	256
6.6	Стационарные одношаговые итерационные методы	258
6.6 a	Общий подход: расщепление матрицы ИСЛАУ	258
6.6 b	Отщепление вещественного слагаемого	261
6.6 c	Треугольное расщепление матрицы системы	265
6.7	Численные эксперименты со стационарными итерационными методами	267
7	Библиография	271
8	Дополнение Solving the interval linear tolerance problem	293
8.1	Introduction	293
8.2	Discussion of the problem statement	296
8.3	Quick examination of solvability	300
8.4	Detailed examination of solvability	303
8.5	Correction of the linear tolerance problem	307
8.6	Formula for the size of interval solution	311
8.7	Exact exhaustive algorithms to construct interval solution	315
8.8	Algorithms based on “branch-and-bound” strategy	317
8.9	References	325

Введение

Что такое Интервальный Анализ? Каждая научная дисциплина характеризуется, как известно, своим отдельным *предметом* и собственным специфическим *методом*. На наш взгляд, Интервальный Анализ — это область знаний на стыке информатики и математики,

- предметом которой является решение задач с интервальными (или, более общо, ограниченными) неопределённостями и неоднозначностями в данных на входе, выходе либо на промежуточных стадиях,
- чьей характеристической особенностью является рассмотрение множеств неопределённости как самостоятельных целостных объектов, посредством установления между ними арифметических, аналитических и т.п. операций и отношений.

Интервальный анализ и его специфичные методы имеют, таким образом, наивысшую ценность в задачах, где неопределённости и неоднозначности возникают с самого начала, будучи неотъемлемой частью самой постановки. В частности, интервальный анализ никоим образом не сводится к так называемым *доказательным (надёжным) вычислениям* на ЭВМ, *вычислениям с гарантированной точностью* и т.п., в которых интервальные методы являются всего лишь вспомогательным средством для решения задач, неинтервальных по своей природе.

В некоторых своих аспектах интервальный анализ можно рассматривать как вычислительный отдел знакомого теоретическим математикам многозначного анализа [127], хотя основополагающие базисные идеи этих дисциплин, по существу, противоположны друг другу. Интервальная идея по самой своей сути алгоритмична, требует реализации на машине, и потому неудивительно, что в докомпьютерную эпоху развитие интервального анализа не состоялось. Но уже в 50-е годы, с появлением и распространением первых ЭВМ, потребность в интервальных методах и оценках стала ощущаться столь остро, что пионерские работы по интервальному анализу появились практически одновременно и независимо в СССР, США, Японии и Польше. Первая отечественная теоретическая работа по интервальному анализу [46] принадлежит перу академика Л.В. Канторовича и опубликована в 1962-м году в “Сибирском математическом журнале”, хотя ещё с конца 20-х годов для учета погрешностей приближенных вычислений известный педагог-математик В.М. Брадис развивал “метод границ” [13, 14, 15], тождественный в основных своих идеях интервальному подходу.

Исторически интервальный анализ и интервальные методы первоначально возникли как средство автоматического учёта ошибок округлений при счете на ЭВМ с конечной точностью представления чисел (конечной разрядной сеткой). На протяжении ряда лет этот акцент в развитии интервального анализа был доминирующим, и именно так представлена новая научная дисциплина, например, в “Математической энциклопедии” [67] и “Математическом энциклопедическом словаре” [68]. В некоторых странах (например, в Германии) это

обстоятельство со временем повлекло за собой даже постепенную эволюцию научной терминологии. Выявилась, в частности, отчётливая тенденция к устранению самих слов “интервальный”, “интервальность” и т.п., некогда характеризовавших отдельное и целостное научное направление. Взамен предлагается говорить о “надёжных/достоверных/научных вычислениях” (соответствующие английские термины — *reliable/validated/scientific computation*). Под влиянием этих веяний название специализированного научного журнала *Interval Computations*, возникшего как трибуна специалистов по интервальному анализу и его приложениям, было изменено на *Reliable Computing*.

Однако идеи, положенные в основу нового научного направления, оказались гораздо шире чисто “округленческих” приложений. Вскоре выяснилось, что нарождающиеся интервальные подходы и модели получают чрезвычайно плодотворное применение как язык описания некоторого особого класса неопределённостей, — так называемых ограниченных по амплитуде неопределённостей (соответствующие английские термины — *bounded disturbances, bounded error approach, bounded parameter model* и т.п.). А.П. Воцинин и Г.Р. Сотиров в учебнике [19] отмечают, что интервальное представление факторов неопределённости “в последнее время привлекает все большее внимание исследователей как наименее ограниченное и отвечающее широкому классу задач.” И далее : “Во многих прикладных задачах часто нет оснований или недостаточно информации для того, чтобы рассматривать факторы неопределённости как случайные Это приводит к необходимости учета неопределённости нестатистической (или, в общем случае, неизвестной) природы, когда относительно факторов . . . ничего неизвестно, кроме их свойства быть ограниченными” [19]. В этом же смысле высказываются А.Б. Куржанский в обзоре [56], В.А. Грановский и Т.Н. Сирая в монографии [25] и другие авторы. Замечательно, что в упомянутой первой отечественной интервальной статье Л.В. Канторовича [46], где новое научное направление ещё не называется явно, но рельефно очерчивается, акцент в приложениях нового подхода делается как на повышении точности и надёжности численных алгоритмов, так и на перспективах развития аппарата для оперирования с ограниченными неопределённостями.

Характерная черта исследований, в которых интервальный анализ используется для получения математически гарантированных результатов (т.е. автоматического учета ошибок округлений) на ЭВМ с конечной разрядной сеткой — допущение о малости интервалов изменений “входных” данных, позволяющее во многих случаях осуществлять асимптотический анализ и т.п. Но погрешности вычислений необходимо учитывать при этом во всех без исключения операциях на ЭВМ, формирующих окончательный результат. Существенное влияние на работы по этой тематике оказывают конкретные особенности вычислительных машин и процессоров, их архитектура, языки программирования и пр. За обзорами результатов и подробной библиографией по “округленческому” направлению мы отсылаем читателя к книгам Р. Е. Мура [209, 211], Г. Алефельда и Ю. Херцбергера [4], С.А. Калмыкова, Ю.И. Шокина и З.Х. Юлдашева [45], Р.Б. Кирфотта [181], О. Аберта [122] и другим.

Напротив, в тех работах, где интервальный анализ служит средством для исследования ограниченных по амплитуде неопределённостей, допущение о малости возмущений не работает, размеры “входных” интервалов могут быть сколь угодно велики, но зато предполагается, что все арифметические операции как с точечными величинами, так и с интервалами выполняются абсолютно точно. В этом же духе выдержана и настоящая диссертационная работа, посвященная теоретическому анализу и построению численных алгоритмов решения ряда интервальных алгебраических задач, возникающих в теории автоматического управления, исследовании операций, теории принятия решений, теории идентификации и оценивания параметров и ряде смежных дисциплин.

Основным объектом рассмотрения в нашей работе является *интервальная система уравнений* вида

$$\begin{cases} F_1(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l, x_1, \dots, x_n) = \mathbf{b}_1, \\ F_2(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l, x_1, \dots, x_n) = \mathbf{b}_2, \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \vdots \\ F_m(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l, x_1, \dots, x_n) = \mathbf{b}_m, \end{cases} \quad (1)$$

с интервалами $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$, которую мы будем также записывать в краткой форме

$$F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b} \quad (2)$$

с

$$F = \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{a}, x) \\ F_2(\mathbf{a}, x) \\ \vdots \\ F_m(\mathbf{a}, x) \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

и интервальными векторами

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_l \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m \end{pmatrix}.$$

Для интервальных систем уравнений, у которых количество переменных совпадает с количеством уравнений, нам потребуется также переходить от (1)–(2) к рекуррентному виду, в котором вектор переменной выделен в левой части “в чистом виде”:

$$x = G(\mathbf{a}, x) + \mathbf{b}, \quad (3)$$

$G(\mathbf{a}, x) = (G_1(\mathbf{a}, x), G_2(\mathbf{a}, x), \dots, G_n(\mathbf{a}, x))^T$. Интервальные системы (1)–(3) мы понимаем как *формальные записи, обозначающие семейства точечных систем уравнений той же структуры, образованные варьированием параметров* $a_1, \dots, a_l, b_1, \dots, b_m$ *в пределах соответствующих интервалов* $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$.

Значительная часть результатов работы относится не к общим нелинейным системам (1)–(2), а к более простым (но не менее важным) *интервальным линейным системам*

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{11}x_1 + \mathbf{a}_{12}x_2 + \dots + \mathbf{a}_{1n}x_n = \mathbf{b}_1, \\ \mathbf{a}_{21}x_1 + \mathbf{a}_{22}x_2 + \dots + \mathbf{a}_{2n}x_n = \mathbf{b}_2, \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \vdots \\ \mathbf{a}_{n1}x_1 + \mathbf{a}_{n2}x_2 + \dots + \mathbf{a}_{nn}x_n = \mathbf{b}_m, \end{cases} \quad (4)$$

с интервалами \mathbf{a}_{ij} и \mathbf{b}_i , или в краткой форме

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b} \quad (5)$$

с интервальной матрицей $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$ и интервальным вектором правой части $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_i)$.

Представляемая работа посвящена решению различных постановок задач, связанных с интервальными системами уравнений (1)–(2) и (4)–(5). Но собственно математическим результатам мы предпосылаем исследование процесса постановки и формулировки интервальных задач. Необходимость детального рассмотрения этого вопроса является очень насущной и вызвана его неразработанностью в современном интервальном анализе, а также общей методологической и терминологической запутанностью.

Принятая нами точка зрения состоит в том, что в большинстве случаев некорректно говорить о *решении интервальных уравнений* (или систем уравнений, неравенств и т.п.) вообще. Правильным является вести речь о *решении тех или иных постановок задач* связанных с интервальными уравнениями (системами уравнений, неравенств и т.п.). В свою очередь, формулировка той или иной *постановки* интервальной задачи подразумевает указание, как минимум, *множества решений задачи и способа его оценивания*.

В этом отношении ситуация в интервальном анализе отчасти напоминает теорию дифференциальных уравнений, где также избегают говорить о решении просто уравнений самих по себе. Вместо этого исследуются и решаются *задача Коши* или *краевая задача* (для обыкновенных дифференциальных уравнений), *смешанная задача*, *задача Дирихле* или *задача Неймана* и т.п. (для уравнений в частных производных).

Итак, в самом начале работы мы даём аккуратную и математически корректную формулировку того, что есть постановка интервальной задачи. Одним из первых итогов нашего критического анализа является обобщение понятия *множества решений* для интервальных систем уравнений, неравенств и т.п.

Как мы уже отмечали, исторически интервальный анализ возник из необходимости учета ошибок вычислений и задач чувствительности. Поэтому неудивительно, что на первоначальном этапе своего развития множество решений задачи с интервальными данными понималось как множество всевозможных решений точечных задач с коэффициентами, могущими принимать значения из заданных интервалов. В частности, для интервальных систем алгебраических уравнений вида (1)–(2) в течение многих лет единственным рассматривавшимся множеством решений было так называемое *объединённое множество решений*

$$\Xi_{uni} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists a \in \mathbf{a})(\exists b \in \mathbf{b})(F(a, x) = b) \},$$

образованное всеми решениями систем $F(a, x) = b$ с $a \in \mathbf{a}$ и $b \in \mathbf{b}$. Для случая интервальных линейных систем это определение выглядит так

$$\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(Ax = b) \}.$$

Приведённые выше определения, математически наиболее корректные, организованы в соответствии с *аксиомой выделения* из формальной теории множеств. Именно, точка \tilde{x} принадлежит рассматриваемому множеству тогда и только тогда, когда подстановка её вместо переменной x в предикат, выписанный после вертикальной черты, превращает его в истинное высказывание. Таким образом, имеет смысл называть подобные предикаты *выделяющими предикатами* соответствующих множеств решений, коль скоро они задают характеристические свойства, которые *выделяют* точки этого множества.

По мере развития интервальных методов и расширения сферы их приложений постепенно выяснилось, что обыденное понимание множества решений интервальной системы уравнений (неравенств и т.п.) как множества всевозможных решений вещественных систем того же вида с параметрами из указанных интервалов не приложимо в ряде практически важных интервальных задач. Таковой, является, например, *линейная задача о*

допусках, осознанная в эконометрике [249, 250] и позже в 80-е годы в теории автоматического управления для объектов с интервальными неопределённостями в данных (см. работы Н.А. Хлебалина [89, 90, 85], Е.М. Смагиной и И.В. Дугаровой [30, 86, 309] и других авторов). Решение линейной задачи о допусках приводит к необходимости рассмотрения так называемого *допустимого множества решений* интервальных линейных систем вида (4)–(5), образованного всеми такими векторами $x \in \mathbb{R}^n$, что произведение Ax попадает в \mathbf{b} для любой матрицы $A \in \mathbf{A}$. Формально это множество определяется как

$$\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(Ax = b) \},$$

и впервые оно было рассмотрено еще в 1972-м году немецким исследователем Е. Нудингом в [230]^{0.1}. На наш взгляд, работа Нудинга [230] явилась пионерским вкладом в интервальный анализ и была по достоинству оценена уже в 90-е годы. Нудинг, в действительности, продемонстрировал нам возможность варьирования логических кванторов в выделяющем предикате при определении множества решений интервальной задачи. Следующий шаг на этом пути был сделан лишь в 1991–92 годах, когда несколько российских исследователей независимо и почти одновременно столкнулись с необходимостью введения множества решений

$$\Xi_{ctrl}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall b \in \mathbf{b})(\exists A \in \mathbf{A})(Ax = b) \},$$

образованного такими векторами $x \in \mathbb{R}^n$, что для любого желаемого вектора $b \in \mathbf{b}$ мы можем подобрать соответствующую матрицу $A \in \mathbf{A}$ удовлетворяющую $Ax = b$. В работах [281, 299] С.П. Шарый предложил называть его *управляемым множеством решений* и, похоже, термин постепенно привился в литературе.

Заметим, что символическое обозначение $(\forall A \in \mathbf{A})$ означает $(\forall a_{11} \in \mathbf{a}_{11})(\forall a_{12} \in \mathbf{a}_{12}) \dots (\forall a_{mn} \in \mathbf{a}_{mn})$ и то же самое верно в отношении $(\exists A \in \mathbf{A})$, $(\forall b \in \mathbf{b})$ и $(\exists b \in \mathbf{b})$. Кроме того, кванторы \forall и \exists не коммутируют друг с другом. Следовательно дальнейшее обобщение понятия множества решений интервальных систем, как линейных так и общих нелинейных, можно получить, разделив действие логических кванторов по отдельным элементам матрицы и правой части и далее комбинируя кванторы \forall и \exists с различными интервальными параметрами, меняя их порядок. Мы покажем в работе, что такие множества решений не являются чисто теоретическим курьёзом но могут быть проинтерпретированы как решения некоторых игр или многошаговых процессов принятия решений в условиях интервальной неопределенности, т.е. как решения минимаксных задач исследования операций.

Основной итог представляемой диссертационной работы — развитие и обоснование эффективных численных методов внешнего и внутреннего оценивания множеств АЕ-решений интервальных систем уравнений. Столь широкая постановка задачи ранее никем не рассматривалась и не решалась (и не только потому, что понятие обобщенного множества решений не существовало). Но отдельные частные задачи оценивания тех или иных множеств решений интервальных уравнений являются достаточно популярными и хорошо изученными.

По-видимому, исторически первая постановка для интервальных систем уравнений — это задача внешнего покоординатного оценивания множества всевозможных решений точечных систем, содержащихся в (1)–(2) (или в (4)–(5)), т.е. объединённого множества решений этих интервальных систем уравнений. Как правило, её формулируют в следующем

^{0.1}В оригинальной статье [230] сам Нудинг называл его *множеством внутренних решений*.

виде

<i>найти интервальный вектор V, включающий объединённое множество решений интервальной системы уравнений.</i>	(6)
--	-----

Фактически — это интервальная форма задачи о чувствительности решения системы уравнений к конечным возмущениям. Часто, имея в виду именно эту задачу, говорят (не совсем корректно) о “решении интервальной системы уравнений”.

История задачи внешнего оценивания объединённого множества решений для интервальных систем уравнений, линейных и нелинейных, является давней и насыщенной. Ее формулировка настолько проста и естественна, что, фактически, посвященные ей работы появлялись задолго до выхода в свет классической книги Р.Е. Мура [209], с которой, как принято считать, и началось быстрое развитие интервального анализа. В частности, первой советской работой о характеристике и оценивании объединённого множества решений ИСЛАУ была статья Б.И. Белова и Е.Г. Анциферова [7]. К настоящему времени среди общей массы публикаций по интервальной математике доля тех, в которых рассматриваются различные аспекты решения “внешней” задачи для ИСЛАУ, — одна из наибольших.

Практические приложения “внешней” задачи для ИСЛАУ многочисленны и разнообразны. Е.К. Корноушенко в цикле статей [51] сводит к решению этой задачи проблему оценивания множества достижимых состояний линейной стационарной системы. В работе Н.К. Пылаева и И.Б. Ядыкина [83] “внешняя задача” естественно возникает в связи с синтезом интервального управления по неявной эталонной модели. В.З. Манусов, С.М. Моисеев и С.Д. Перков в [66] приводят к “внешней задаче” для ИСЛАУ решение некоторых линейных задач электротехники с интервальными неопределённостями во входных параметрах. В последние годы работами многих исследователей интенсивное развитие получили методы идентификации систем управления в условиях ограниченных возмущений их параметров (см. обзор А.Б. Куржанского [56] и книгу Э. Вольтера и Л. Пронцато [313]). Для случая систем, описываемых линейными зависимостями “вход-выход”, математической основой этих методов также служит решение “внешней задачи” для ИСЛАУ, как правило, с прямоугольными интервальными матрицами.

Кроме отмеченных выше приложений в технике и естествознании “внешняя задача” для ИСЛАУ имеет и более опосредованные применения. Например, на каждом шаге популярного интервального метода Ньютона требуется решать “внешние задачи” для некоторых промежуточных ИСЛАУ [166]. С необходимостью решения “внешней задачи” для интервальных систем алгебраических уравнений (линейных или нелинейных) сталкиваются при дискретизации различных интервальных версий краевых задач для дифференциальных уравнений (см. [45, 275]) и интегральных уравнений [29]. В интервальном методе наименьших квадратов [158] построение регрессионной прямой по заданному семейству результатов наблюдений, имеющих интервальную неопределённость, также сводится к решению “внешней задачи” для ИСЛАУ.

За прошедшие три десятилетия методология решения “внешней задачи” претерпела эволюцию от подражания известным вещественным методам решения СЛАУ (метод Гаусса, простой итерации и т.п.) до создания самостоятельных “интервальных” концепций и подходов. Хорошие обзоры методов решения задачи внешнего оценивания объединённого множества решений ИСЛАУ (по состоянию на середину 80-х годов) были сделаны А. Ноймайером в [215, 219]. Немало материалов, касающихся интервальных алгебраических систем (линейных, в частности), воспроизведено в широко известных монографиях Р. Мура [209, 211], Г. Алефельда и Ю. Херцбергера [4], А. Ноймайера [219], С.А. Калмыкова,

Ю.И. Шокина и З.Х. Юлдашева [45], Б.С. Добронца и В.В. Шайдурова [29], Р.Б. Кирфотта [181]. Тем не менее, на сегодняшний день подавляющая часть результатов по этой теме остается разбросанной по разрозненным журнальным публикациям. Среди работ последних лет отметим статьи Ю. Гарлоффа [155], Д. Гея [156], монографию Р.Б. Кирфотта [181], работы Г. Майера по выяснению условий применимости интервального метода Гаусса [205, 206, 207], капитальную монографию А. Ноймайера [219] и его последующие статьи [220, 221], многочисленные исследования И. Рона [247, 257, 258, 259, 263], З. Румпа [268, 270], Х. Швандта [274].

В последние годы в связи с бурным развитием теории и практики параллельных вычислений все возрастающее количество публикаций посвящается реализации различных интервальных алгоритмов на векторных и параллельных ЭВМ. Решение на таких вычислителях "внешней задачи" для ИСЛАУ рассмотрено, например, в [275].

Интересно сопоставить саму интервальную постановку задачи о внешнем оценивании множеств решений (6) и интервально-аналитические подходы к её решению с другими методиками, которые более или менее успешно применялись и применяются для решения задач, аналогичных (6). Это, во-первых, широко известные методы *анализа чувствительности* решений систем уравнений [157, 218] и, во-вторых, так называемые *методы гарантированной точности* для решений систем уравнений, интенсивно развивавшиеся в работах школы С.К. Годунова [23].

В традиционном анализе чувствительности оценке вариаций решений обычно предшествует линеаризация исходного уравнения относительно некоторого частного решения, на основе которой и выводят заключение о влиянии на решение тех или иных параметров. Так как члены второго и более высоких порядков при этом игнорируются, то подобная методика работоспособна лишь при "достаточно малых" изменениях параметров системы и к тому же не обеспечивает гарантированности оценок решений.

В методах гарантированной точности из [23] вариации параметров (коэффициентов) системы вообще рассматриваются как некоторый нежелательный паразитный эффект, искажающий исходно точную постановку задачи. В связи с такой методологической установкой, а также из-за особенностей применяемой в [23] техники "большие" изменения параметров решаемой системы (иначе называемые также *крупномасштабными* или *нелокальными*) школой С.К. Годунова просто не рассматриваются. Напомним, что в современном интервальном анализе "очень широкие" интервальные данные в системах (1)–(2) и (4)–(5) также вызывают затруднения, но задачи для интервальных линейных систем с сильно невырожденными интервальными матрицами (см. Определение 3.5.1) надёжно решаются без особых проблем. Наконец, как вариации параметров системы, так и оценки вариаций решения С.К. Годунов и его последователи измеряют отклонением по норме (т.е. одним числом), тогда как в интервальном анализе в постановке задачи и ответе неопределённость с гораздо большей степенью детализации описывается многомерным интервалом.

Изложим кратко содержание представляемой диссертационной работы. Структурно она состоит из Введения, указателя обозначений, собственно основного текста, разбитого на шесть Глав и списка литературы. Мы предполагаем уже известными читателю основные понятия и факты интервального анализа, не уделяя их развёрнутому изложению специального места в диссертации (для введения в предмет мы рекомендуем, например, книги [4, 29, 45, 166, 181, 219]). Вместо этого, чтобы придать тексту самодостаточный характер, необходимые известные результаты даны конспективно и с подробными литературными ссылками.

Каждая из шести глав основного текста диссертации концентрируется вокруг одной или нескольких родственных основных идей.

Для Главы 1 это концепции *обобщённого множества решений* и общей постановки так называемых *интервальных задач оценивания*. Глава 2 представляет результаты по характеристике и геометрическим свойствам обобщённых множеств решений, как для общего нелинейного случая, так и для интервальных линейных систем.

Глава 3 посвящена развитию методик внешнего интервального оценивания множеств АЕ-решений. При этом отдельное внимание уделяется классической задаче внешнего оценивания объединённого множества решений ИСЛАУ, и нам удаётся существенно продвинуться в этом вопросе. Основные результаты Главы 3 — *формальный подход* и *метод Гаусса-Зейделя* для задач оценивания множеств АЕ-решений интервальных линейных систем, а также *предобуславливание*.

При внешнем оценивании множеств решений особую ценность и в теории и для практики имеет получение интервального вектора, объёмлющего решение и имеющего наименьшую возможную ширину, или, что эквивалентно, нахождение оптимальных (точных) покоординатных оценок множеств решений. Но подобная усиленная постановка “внешней задачи” оказалась крепким орешком. Даже для объединённых множеств решений большинство разработанных до сих пор методов позволяют эффективно находить интервальный вектор, гарантированно содержащий множество, но лишь немногие из практических алгоритмов обеспечивают в общем случае его оптимальность. При этом все они имеют, в конечном счёте, переборный характер и потому чрезвычайно трудоёмки. Основные итоги Главы 4 представляемой работы — построение двух классов алгоритмов — *методов дробления решений* и *методов дробления параметров* (иначе называемых ещё *PSS-алгоритмами* и *PPS-алгоритмами*) — для нахождения именно оптимальных или близких к оптимальным решений “внешней задачи” для ИСЛАУ и некоторых нелинейных систем уравнений. Решающей предпосылкой для их создания послужило представление “внешней задачи” как задачи конечномерной оптимизации. При этом вместо традиционной формулировки “внешней задачи” в виде (0.3) в алгоритмах Главы 4 предлагается перейти к вычислению $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$ и $\max\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$ для каждого отдельного $\nu = 1, 2, \dots, n$. Мы докажем сходимость развиваемых алгоритмов и рассмотрим некоторые из их обобщений на случай более общих интервальных алгебраических задач. В предварительном порядке часть из излагаемых ниже результатов была опубликована в работах автора по оптимальному оцениванию объединённых множеств решений ИСЛАУ [102, 278, 279, 280, 288], но теперь мы рассматриваем более общую ситуацию.

Параграфы §4.6 и 4.9 Главы 4 содержащий описание и сравнительный анализ численных экспериментов с различными методами дробления решений и методами дробления параметров. Самостоятельным результатом этих параграфов можно считать также использованное в расчётах параметрическое семейство ИСЛАУ для тестирования алгоритмов решения “внешней задачи”.

Короткая, но очень важная Глава 5 диссертации посвящена решению задачи *внутреннего* — с помощью гипербрусков — оценивания множеств решений интервальных линейных систем уравнений. Несмотря на большой устойчивый спрос на решение подобных задач со стороны инженеров и практиков, имеется лишь очень небольшое количество работ по этой теме (см. Х. Бек [131], А. Ноймайер [216], А.Ф. Бочков и Т.В. Евтушенко [11]). Мы предлагаем результаты, концентрирующиеся вокруг *формального подхода*, которые позволяют эффективно и с хорошим качеством решать задачи внутреннего интервального оценивания множеств АЕ-решений интервальных линейных систем и некоторого специ-

ального класса нелинейных систем. Кроме того, на основе тонких геометрических свойств множеств решений ИСЛАУ с неотрицательными матрицами мы предлагаем в §5.5 ещё одну простую и гибкую методику внутреннего оценивания множеств решений. Оба этих подхода дают для ИСЛАУ *максимальные по включению* внутренние интервальные оценки множеств решений.

Наконец, предмет заключительной Главы 6 диссертации — развитие подходов и методов нахождения формальных решений в полной интервальной арифметике Каухера для различных интервальных линейных систем, которые возникают при практической реализации формального подхода к задачам внутреннего и внешнего оценивания множеств решений интервальных систем уравнений. Помимо собственно численных методов в этой главе мы также рассматриваем вопросы существования и единственности формальных решений, свойства операторов в интервальных пространствах. После вводного §6.1, посвященного исследованию конструкции *погружения* интервальных пространств в евклидовы пространства двойной размерности, мы излагаем в §6.2 теорию операторов, индуцированных умножениями на интервальную матрицу. Наконец, параграфы §§6.4–6.6 представляют собственно численные методы для нахождения формальных решений интервальных линейных систем и результаты вычислительных экспериментов с ними. Главным достижением этой части работы является *субдифференциальный метод Ньютона*, позволяющий эффективно и качественно находить формальные решения широких классов интервальных линейных систем.

Автор благодарен своим коллегам — А.В. Лакееву, И.С. Голосову, В.А. Новикову, Б.С. Добронцу, В.В. Шайдурову, А.В. Кулибабе, П.С. Панкову — за плодотворные научные дискуссии, а также академику Ю.И. Шокину за поддержку в занятиях интервальным анализом.

Обозначения

Наша система обозначений следует, в основном, тем неофициальным международным рекомендациям, которые были выработаны в результате дискуссии и подытожены в книге [181]^{0.2}. Всюду в тексте работы интервалы и другие интервальные величины (векторы, матрицы и др.) будут обозначаться жирным шрифтом, например, \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \dots , \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{z} , тогда как неинтервальные (точечные) величины никак специально не выделяются. Арифметические операции с интервальными величинами — это операции соответствующих интервальных арифметик: либо классической интервальной арифметики \mathbb{IR} (см., например, [4, 29, 45, 166, 181, 219]), либо полной интервальной арифметики Каухера \mathbb{KR} , краткому описанию которой мы посвящаем §2.2 d. Наконец, под векторами (точечными или интервальными) всюду понимаются вектор-столбцы.

Другие обозначения

\mathbb{N}	множество натуральных (положительных целых) чисел	
\mathbb{Z}	множество целых чисел	
\mathbb{R}	множество вещественных (действительных) чисел	
\mathbb{R}^n	множество вещественных n -мерных векторов	
$\mathbb{R}^{m \times n}$	множество вещественных $m \times n$ -матриц	
\mathbb{IR}	классическая интервальная арифметика, или её носитель — множество замкнутых интервалов $[a, b]$ на \mathbb{R} , $a \leq b$	49
\mathbb{IR}^n	множество n -мерных векторов с элементами из \mathbb{IR}	
$\mathbb{IR}^{m \times n}$	множество $m \times n$ -матриц с элементами из \mathbb{IR}	
\mathbb{KR}	полная интервальная арифметика Каухера, или её носитель — множество всех пар $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$	52
\mathbb{KR}^n	множество n -мерных векторов с элементами из \mathbb{KR}	
$\mathbb{KR}^{m \times n}$	множество $m \times n$ -матриц с элементами из \mathbb{KR}	

^{0.2}Отчёт об этой дискуссии можно увидеть в Интернете на сайте, посвящённом интервальным вычислениям — <http://www.cs.utep.edu/interval-comp/notations/suggestion.html>. Дальнейшие попытки стандартизации интервальных обозначений нашли своё отражение в проекте неформального стандарта, который можно найти на <http://www.mat.univie.ac.at/~neum/software/int/>

$\underline{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}$	левый и правый концы интервала \mathbf{a} , соответственно	52
$ \mathbf{a} $	абсолютная величина интервала \mathbf{a}	53
$\langle \mathbf{a} \rangle$	наименьшее из расстояний точек интервала \mathbf{a} до нуля, антипод абсолютной величины интервала	95
$\langle \mathbf{A} \rangle$	матрица сравнения для интервальной матрицы \mathbf{A}	95
$\text{mid } \mathbf{a}$	середина (медиана) интервала \mathbf{a}	59
$\text{wid } \mathbf{a}$	ширина интервала \mathbf{a}	59
$\text{rad } \mathbf{a}$	радиус интервала \mathbf{a}	59
$\text{dev } \mathbf{a}$	отклонение интервала \mathbf{a} от нуля	105
$\text{dual } \mathbf{a}$	дуальный к \mathbf{a} интервал	53
$\text{opp } \mathbf{a}$	противоположный к \mathbf{a} интервал	54
$\text{pro } \mathbf{a}$	правильная проекция интервала \mathbf{a}	53
\ominus	операция в \mathbb{KR} , обратная сложению	54
\otimes	операция в \mathbb{KR} , обратная умножению	55
$\mathbf{x}^+, \mathbf{x}^-$	положительная и отрицательная части интервала \mathbf{x}	242
$\chi(\mathbf{x})$	функционал Рачека — “относительная узость” интервала	76
$\mathfrak{s}(\mathbf{x})$	знак середины интервала \mathbf{x}	
Ξ_{uni}	объединённое множество решений интервальной системы уравнений	33, 65
Ξ_{tol}	допустимое множество решений интервальной системы уравнений	33, 65
Ξ_{ctrl}	управляемое множество решений интервальной системы уравнений	33, 66, 74
$\Xi_{\alpha\beta}$	множество АЕ-решений типа $\alpha\beta$ интервальной системы уравнений	65
\mathbf{A}^c	характеристическая матрица, соответствующая некоторому АЕ-множеству решений ИСЛАУ	71
\mathbf{b}^c	характеристический вектор правой части, соответствующий некоторому АЕ-множеству решений ИСЛАУ	71
$\text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$	расстояние (метрика) в интервальных пространствах	58
$\text{Dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$	расстояние (псевдометрика) в интервальных пространствах	58
\circ	знак композиции отображений	
$\text{epi } f$	надграфик функции f	239
$\text{hyp } f$	подграфик функции f	239
∂f	субдифференциал функции f	237
$\text{vert } \mathbf{a}$	множество концов (крайних точек) интервала или вершин интервального вектора (матрицы)	72

$Q\sim$	матрица, сопутствующая для матрицы Q	231
\wedge	минимум в частично упорядоченном множестве	
\vee	максимум в частично упорядоченном множестве	
I	условная решеточная операция	59
$\square S$	интервальная оболочка множества S	49
$\operatorname{sgn} x$	знак вещественного числа x	
x^+, x^-	положительная и отрицательная части числа x	55
$\operatorname{int} X$	топологическая внутренность множества X	
I	единичная матрица соответствующих размеров	
$\operatorname{diag} \{z_1, \dots, z_n\}$	диагональная $n \times n$ -матрица с элементами z_1, \dots, z_n по главной диагонали	
$\ \cdot\ $	какая-нибудь из эквивалентных норм в \mathbb{R}^n или же индуцированная матричная (операторная) норма	
$\ \cdot\ _u$	векторная (или индуцированная матричная норма), масштабированная положительным вектором u	
$\rho(A)$	спектральный радиус матрицы A	

К интервальным векторам и матрицам все введённые выше операции за исключением операции “ $\langle \cdot \rangle$ ” (взятия наименьшего из расстояний точек интервала до нуля) будут применяться покомпонентно, так что если, к примеру, $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_i)$ — интервальный вектор, то $\operatorname{mid} \mathbf{a}$ — это вещественный вектор ($\operatorname{mid} \mathbf{a}_i$).

Конец доказательства теоремы или предложения выделяется в тексте стандартным знаком ■.

Постановки интервальных задач

Формально, предметом этой главы являются математические вопросы моделирования систем в условиях неопределённости и неоднозначности, заданных в интервальной форме. Но, в действительности, содержание этой части работы совсем не исчерпывается прикладными рассмотрениями. Мы используем практическую постановку задачи как повод для более широкого обсуждения и уточнения таких понятий как *интервальная задача*, *решение интервальной задачи*, а также некоторых других фундаментальных концепций интервального анализа, которые будут далее интенсивно использоваться во всей работе. Мы делаем попытку рассмотрения интервальных статических систем с общей нелинейной зависимостью вход-выход, но детально и во всех тонкостях исследуется более простой линейный случай.

1.1 Анализ интервально заданных систем

1.1 а Описание практической ситуации

Нашим основным практическим примером будет так называемая *обратная задача* системного анализа^{1.1} для статических (безынерционных) систем, заданных зависимостью вход-состояние-выход:

*Для заданных входов и выходов системы
найти (или как-то оценить) её состояние.*

Особенность ситуации, с которой мы будем иметь дело, заключается в том, что входы и выходы системы не являются заданными точно. Для них будут известны лишь границы их возможных значений (изменений), верхняя и нижняя, или, что эквивалентно, нам даны только интервалы, в пределах которых могут находиться значения входов и выходов.

Пусть внутреннее состояние системы, входной сигнал и выходной отклик описываются вещественными векторами $x \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^l$ и $b \in \mathbb{R}^m$ соответственно. Во множестве всех входных воздействий мы будем выделять

- *возмущения* a_1, \dots, a_r , которые действуют независимо от нашей воли в пределах интервалов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$, и

^{1.1}Часто её называют также *задачей идентификации*.

- управления a_{r+1}, \dots, a_l , значения которых мы сами можем устанавливать в интервалах $\mathbf{a}_{r+1}, \dots, \mathbf{a}_l$.

Возмущения оказывают дестабилизирующее воздействие на систему, стремятся вывести её из заданного режима, в то время как подходящими управлениями мы стремимся компенсировать влияние этих возмущений и способствовать достижению требуемых характеристик функционирования. В классической теории управления выходы системы, на которых требуется поддержание сигнала на некотором заранее заданном уровне или же его изменение в соответствии с предопределённым планом, называются, как известно, *регулируемыми выходами*. Но введение интервальности для описания конечного назначения системы вносит дополнительную специфику в рассматриваемую ситуацию. Именно, мы должны разделить множество всех выходов системы на

- компоненты b_1, b_2, \dots, b_s , которые мы должны быть способны перевести в любое значение из заранее заданных интервалов $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_s$ (будем называть их *интервалами достижимости*), и
- компоненты b_{s+1}, \dots, b_m , для которых мы должны обеспечить гарантированное попадание в интервалы $\mathbf{b}_{s+1}, \dots, \mathbf{b}_m$ (будем называть их *интервалы стабилизации*).

Соответственно, выходы первого типа мы будем называть *управляемыми*, тогда как выходы второго типа будут называться *стабилизируемыми*.

Примером управляемого выхода системы может служить координата “механической руки” робота-манипулятора. Положение этой руки должно гарантированно “накрывать” каждую точку некоторой данной рабочей области. Если это покрытие имеет место, то обычно не возражают и против того, чтобы манипулятор мог дополнительно достигать некоторые другие позиции вне рабочей области.

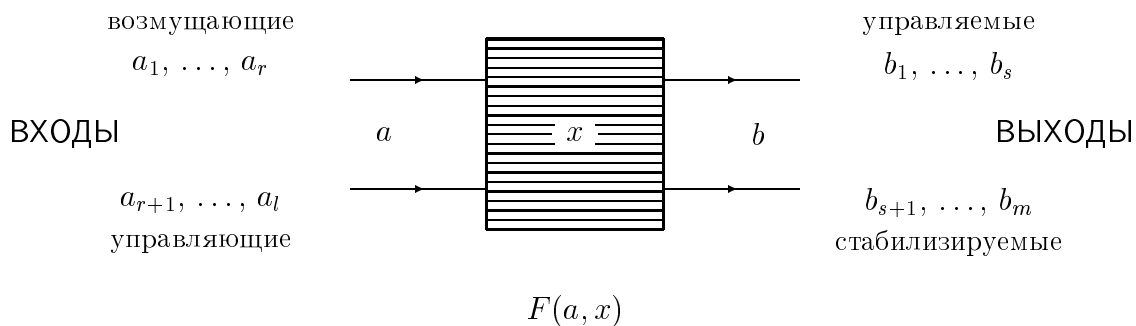


Рис. 1.1: Структурная схема статической системы управления.

Типичным примером стабилизируемого выхода системы является температура внутри химического реактора в ряде химико-технологических процессов. Она не должна отличаться от номинальной T больше, чем на некоторую предписанную величину δT , но любая температура из интервала $[T - \delta T, T + \delta T]$ равно допустима и конкретное значение этой температуры t не имеет значения при условии, если выполнено включение $t \in [T - \delta T, T + \delta T]$. В частности, некоторые значения из $[T - \delta T, T + \delta T]$ могут оказаться недостижимыми реальным процессом.

Предположим, что зависимость вход-состояние-выход в рассматриваемой системе имеет вид

$$F(a, x) = b \tag{1.1}$$

с некоторым отображением $F : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. В самом общем случае отображение F может иметь очень сложный вид, но в значительной части нашей работе мы будем считать, что компоненты $F_i(a, x)$, $i = 1, 2, \dots, m$, являются *рациональными выражениями*, т.е. конечными комбинациями переменных a , x и констант с элементарными арифметическими операциями (ср. [211, 219]). Будем также предполагать, что все F_i непрерывны на своих областях определения, так что деление на нуль не встречается в $F_i(a, x)$ в пределах рассматриваемых интервалов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l$ и области значений x . В целом ситуация описывается структурной схемой, представленной на Рисунке 1.

Уместно отметить, что в описанной выше ситуации наше использование терминов “управление”, “регулирование”, “управляемый” и т.п. не вполне совпадает с тем, которое принято в классической теории автоматического управления и технической кибернетике, где обычно исследуются динамические системы, с непрерывным либо дискретным временем. Тем не менее, развитие общей теории систем привело к пониманию того, что зависимость от временной переменной является второстепенной при определении “управления” и “управляемости” (см., например, [70]). Это обстоятельство делается особенно прозрачным при абстрактной математической постановке задач управления, когда фазовые траектории, фазовые ограничения, управляющие воздействия и т.п. представляются как элементы некоторых функциональных пространств. В наиболее общей форме понятие “управляемости системы” (или, более общо, параметризованного отображения) тесно связано с понятием “достижимости”.

Месарович и Такахага [70], в частности, управляемость формулируют как условие того, что всякий элемент из некоторого выделенного подмножества множества прибытия^{1,2} отображения может быть достигнут (накрыт) при условии подходящего выбора параметров и аргументов отображения. Более точно, пусть функция $\Phi(c)$ описывает результат функционирования системы (выход) в зависимости от параметра (управления) c . Тогда система является (полностью) управляемой в том и лишь в том случае, если выполнено следующее условие:

для любого состояния R из некоторого отмеченного множества существует управляющее воздействие C из допустимой области, такое что $R = \Phi(C)$.

Но в таком виде понятие управляемости в равной мере применимо также и к статическим (безынерционным) системам, в которых переменная времени и временной интервал вообще не фигурируют (см., например, [299]).

Напомним также, что теория автоматического управления не является единственной дисциплиной, имеющей дело с “управлениями”. В частности, смысл, в котором мы используем термин “управление” (и ему родственные) находится в хорошем согласии с терминологией исследования операций. Напомним следующее повсеместно принятое определение [3, 43]: *операцией* называется целенаправленное действие, которое может быть количественно описано как

$$U = f(X, Y),$$

^{1,2}Codomain по английски.

где U есть полезность или значение критерия, характеризующего качество функционирования системы, X — вектор переменных, которыми можно *управлять*, а Y — вектор переменных (и постоянных), не поддающихся управлению (т.е. *неуправляемых*, или, иначе, *возмущающих*). Так или иначе, наше словоупотребление вполне законно.

Другое замечание. Слово *неопределённость*, которое мы используем в связи с управляющими входами системы, строго говоря, не вполне адекватно практическому смыслу, который вкладывается в интервальные границы возможных значений. Например, не совсем корректно говорить о “неопределённости” по отношению к интервалам, представляющим множества возможных положений рулей высоты и направления в самолёте. Тем не менее, для единообразия терминологии мы далее используем все-таки слово “неопределённость”, имея в виду как наше незнание (недостаток информации), так и неединственность (неоднозначность) возможных значений (альтернатив), аналогично тому, как это имеет место в приведённом выше примере с самолётом.

1.1 b Предварительная постановка задачи

В связи с описанной в предшествующих пунктах управляемой системой могут возникать вопросы различного сорта, но мы далее будем исследовать следующую математическую постановку — задачу гарантированного оценивания внутреннего состояния системы по значениям сигнала на её входах и выходах:

Для каких состояний системы x при любых внешних возмущениях $a_1 \in \mathbf{a}_1, \dots, a_r \in \mathbf{a}_r$ и любых а priori заданных значениях $b_1 \in \mathbf{b}_1, \dots, b_s \in \mathbf{b}_s$, мы можем выбрать соответствующие управления $a_{r+1} \in \mathbf{a}_{r+1}, \dots, a_l \in \mathbf{a}_l$ так, чтобы выходной отклик системы $F(a, x)$ был бы в точности равен b_1, \dots, b_s на управляемых выходах и находился бы внутри $\mathbf{b}_{s+1}, \dots, \mathbf{b}_m$ на стабилизируемых выходах?

(1.2)

Если все входы и выходы системы были бы определены точно, то решение задачи, аналогичной (1.2) свелось бы к решению относительно x уравнения (1.1). В рассматриваемом нами случае, когда входы и выходы системы имеют интервальную неопределённость, мы в соответствии с терминологической традицией интервального анализа также будем говорить по поводу задачи (1.2), что “задана интервальная система уравнений

$$F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b} \quad (1.3)$$

с интервальными параметрами $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_l)^\top \in \mathbb{I}\mathbb{R}^l$ и $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m)^\top \in \mathbb{I}\mathbb{R}^m$. Но необходимо подчеркнуть, что интервальную систему (1.3) саму по себе следует понимать лишь как формальную запись, обозначающую семейство точечных систем $F(a, x) = b$ с коэффициентами $a \in \mathbf{a}$ и $b \in \mathbf{b}$, не более. В частности, мы даже не имеем права выполнять с (1.3) какие-либо преобразования (приводить подобные, переносить члены из одной части в другую и т.п.), пока не определены точный смысл “решения” системы и то, как следует понимать эквивалентность преобразований с (1.3). Таким образом, некоторые слова, проясняющие постановку задачи, совершенно необходимы в нашем контексте, и первоначально мы определим, что имеется в виду под “множеством решений” системы (1.3).

Начнем с того, что переформулируем словесную постановку основной задачи (1.2) в математически строгих терминах. Для этого мы воспользуемся языком *исчисления предикатов* первого порядка с логическими кванторами \forall (квантор всеобщности, “для всех”) и \exists (квантор существования, “существует”) [49]. В частности, условие

для любых $a_1 \in \mathbf{a}_1, \dots, a_r \in \mathbf{a}_r$ и для любых $b_1 \in \mathbf{b}_1, \dots, b_s \in \mathbf{b}_s$, существуют $a_{r+1} \in \mathbf{a}_{r+1}, \dots, a_l \in \mathbf{a}_l$ такие что $F_1(a, x), \dots, F_s(a, x)$ равны b_1, \dots, b_s и $F_{s+1}(a, x), \dots, F_m(a, x)$ находятся в $\mathbf{b}_{s+1}, \dots, \mathbf{b}_m$,

которое является сердцевинной постановки задачи (1.2), должно быть эквивалентным образом переформулировано как следующий предикат (логическая формула):

$$(\forall a_1 \in \mathbf{a}_1) \cdots (\forall a_r \in \mathbf{a}_r) (\forall b_1 \in \mathbf{b}_1) \cdots (\forall b_s \in \mathbf{b}_s) (\exists a_{r+1} \in \mathbf{a}_{r+1}) \cdots (\exists a_l \in \mathbf{a}_l) (\exists b_{s+1} \in \mathbf{b}_{s+1}) \cdots (\exists b_m \in \mathbf{b}_m) (F(a, x) = b). \quad (1.4)$$

В целом, множество всех состояний x удовлетворяющих вопросу задачи (1.2) (мы будем обозначать его посредством Ξ), описывается следующим образом:

$$\Xi := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall a_1 \in \mathbf{a}_1) \cdots (\forall a_r \in \mathbf{a}_r) (\forall b_1 \in \mathbf{b}_1) \cdots (\forall b_s \in \mathbf{b}_s) (\exists a_{r+1} \in \mathbf{a}_{r+1}) \cdots (\exists a_l \in \mathbf{a}_l) (\exists b_{s+1} \in \mathbf{b}_{s+1}) \cdots (\exists b_m \in \mathbf{b}_m) (F(a, x) = b) \}, \quad (1.5)$$

в то время как рассматриваемая нами основная задача может быть переформулирована так:

Найти (или как-нибудь оценить) множество Ξ , определённое (1.5).

Определение (1.5), математически наиболее корректное, организовано в соответствии с так называемой *аксиомой выделения* формальной теории множеств ZFC (названной по первым буквам фразы *Zermelo-Fraenkel-axiom of Choice*, см., например [49, 55]). Именно, точка \tilde{x} принадлежит множеству (1.5) тогда и только тогда, когда подстановка её значения вместо переменной x в предикате (1.4) приводит к верному высказыванию. Иными словами, свойство (1.4), которое указано в виде предиката после вертикальной черты в записи (1.5) “выделяет” некоторые значения x , которые и образуют множество решений.

Определение 1.1.1 *Логическая формула, выписанная после вертикальной черты в определении множества решений (1.5) и задающая характеристическое свойство точек этого множества, будет называться выделяющим предикатом соответствующего множества решений.*

Подчеркнем, что, помимо задания функциональной зависимости F и интервальных векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} , ключевым моментом в определении (1.5) является указание нами кванторов \forall и \exists при различных параметрах a и b системы (1.3). При этом множество Ξ , определяемое посредством (1.5) имеет полное право также быть названным *множеством решений*

интервальной системы уравнений (1.3), наряду, например, с множеством всевозможных решений точечных систем $F(a, x) = b$ с $a \in \mathbf{a}$ и $b \in \mathbf{b}$. Ясно, что это и есть множество решений в некотором обобщенном смысле, который мы обсудим в следующих параграфах. Поэтому впредь множества решений, задаваемые посредством (1.5) и аналогичными определениями, в которых встречаются вхождения различных логических кванторов мы будем называть *обобщенными множествами решений* интервальных систем уравнений.

1.2 Обобщённые множества решений интервальных уравнений

1.2 а Кванторный формализм

Подытожим сделанное в параграфе 1.1. Взяв в качестве практического примера обратную задачу системного анализа (1.2), мы пришли к необходимости рассмотрения множества решений (1.5). При этом мы применили логические кванторы всеобщности и существования по отношению к интервально заданным входам системы a_j , чтобы выразить принципиальное различие между

- входными воздействиями, не зависящими от нашей воли и являющимися внешними неконтролируемыми возмущениями (это соответствует записи “ $\forall a_j \in \mathbf{a}_j$ ”),

и

- входными воздействиями, которые мы сами можем варьировать в пределах некоторых заданных интервалов, т.е. управлять ими по нашему желанию (это соответствует записи $\exists a_j \in \mathbf{a}_j$ ”).

По отношению к интервально заданным выходам системы b_i логические кванторы были применены для того, чтобы различать между

- коридорами стабилизации системы, в пределах которых требуется обеспечить функционирование системы вне зависимости от значений возмущений (это соответствует записи “ $\exists b_i \in \mathbf{b}_i$ ”),

и

- множествами достижимости системы, каждый элемент из которых должен быть накрыт в результате подходящего выбора управляющих воздействий (это соответствует записи “ $\forall b_i \in \mathbf{b}_i$ ”).

Но математический объект, описываемый определением (1.5), имеет и самостоятельное значение, а к введению общего определения множеств решений (1.5) можно было бы прийти также с совершенно абстрактной точки зрения, не привлекая практические соображения из анализа интервально заданных систем, на которых мы останавливались в параграфе 1.1.

Заметим, что любой интервал, представляющий неопределённость (незнание, неоднозначность) некоторой вещественной величины, может быть интерпретирован двояко в соответствии с двойственной природой, присущей самой интервальной неопределённости. Дело в том, что в реальных практических задачах интервалы редко интересуют нас сами

по себе, как самостоятельные целостные и внутренне нерасчленимые объекты без внутренней структуры. В подавляющем большинстве случаев мы используем некоторый интервал \mathbf{v} лишь потому, что он содержит *точки*, и для этих принадлежащих ему точек выполнено или не выполнено некоторое свойство (обозначим его через P ; реально это может быть вещественное уравнение, неравенство и т.п.). В этих условиях могут представиться следующие две принципиально различные ситуации:

либо рассматриваемое свойство $P(v)$ имеет место *для всех* точек v из заданного интервала \mathbf{v} ,

либо свойство $P(v)$ выполняется лишь *для некоторых* точек v из интервала \mathbf{v} , не обязательно всех (возможно, что даже только для одного значения v).

Сказанное означает, в частности, что в первом случае интервал \mathbf{v} отождествляется с совокупностью всех своих точек, тогда как во втором он представляет из себя лишь границы, вместилище для некоторой неизвестной величины, которая может и не принимать некоторых значений из заданного интервала. Это различие между двумя типами интервальной неопределённости особенно выпукло проявляется в тех ситуациях, когда рассматриваемая система имеет несколько интервальных параметров, описывающих воздействия различной природы, которые, возможно, конфликтуют друг с другом (как возмущение-управление).

В формальной записи очерченное выше различие выражается использованием логических кванторов — либо квантора всеобщности \forall , либо квантора существования \exists :

- в первом случае мы пишем “ $(\forall v \in \mathbf{v}) P(v)$ ”
и будем говорить о \forall -*типе* (A -*типе*) неопределённости,
- во втором случае мы пишем “ $(\exists v \in \mathbf{v}) P(v)$ ”
и станем говорить о \exists -*типе* (E -*типе*) неопределённости

Следует подчеркнуть, что наши рассуждения, мотивирующие использование кванторов и кванторного языка в отношении интервально неопределённых параметров в равной мере приложимы не только к интервальным алгебраическим системам вида (1.3), но также к интервальным неравенствам, интервальным дифференциальным уравнениям и т.п. В частности, при определении для них “решений” и “множеств решений” мы должны аккуратно принимать во внимание различие между указанными типами интервальной неопределённости.

Рассмотрим конкретные примеры. Пусть некоторый объект описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u), \tag{1.6}$$

$$t \in [0, T], \quad x(0) = x_0, \tag{1.7}$$

где t — переменная времени,
 $x(t)$ — вектор фазового состояния,
 $u(t)$ — вектор управления, который предполагается ограниченным и принадлежащим некоторому интервалу \mathbf{U} , т.е. $u(t) \in \mathbf{U}$.

Множеством достижимости рассматриваемой системы называется, как известно [44, 64], множество всех концов $x(T)$ траекторий системы (1.6)–(1.7), исходящих из точки x_0

и соответствующих всевозможным значениям управления $u(t)$, т.е. множество

$$\left\{ x(T) \mid (x(0) = x_0) \ \& \ (\exists u(t) \in \mathbf{U})(\dot{x} = f(t, x(t), u(t))) \right\}.$$

Усложним ситуацию, предположив, что рассматриваемый объект подвержен воздействию внешнего ограниченного неконтролируемого возмущения (шума) $v(t) \in \mathbf{V}$, $\mathbf{V} \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n$, так что его математической моделью становится система уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u, v), \quad (1.8)$$

$$t \in [0, T], \quad x(0) = x_0, \quad (1.9)$$

а не (1.6)–(1.7). Известно, что управление динамическим объектом, направленное на достижение некоторых целей и/или оптимизацию критерия качества, может быть выполнено одним из двух следующих способов. Именно,

- управляющее воздействие может иметь вид заранее определённой *программы*, вычисленной по информации о системе, которая известна нам *a priori*, либо,
- управляющее воздействие может формироваться *a posteriori*, основываясь на информации о системе и её поведении, которую мы приобретаем уже в течение процесса; в этом случае говорят о *позиционной стратегии*.

Практически первая из этих альтернатив соответствует управлению по жестко заданному плану, а вторая — регулированию с обратной связью. Исследование и конструирование позиционных управлений в динамических системах является предметом теории *дифференциальных игр* (см. [1, 43]), интересной и сложной дисциплины, останавливаться подробнее на которой мы не будем в нашей работе. Тем не менее, в рамках позиционного подхода имеет смысл следующий “глобальный” вопрос:

Каково множество конечных точек $x(T)$, в которые, независимо от конкретной реализации возмущения $v(t) \in \mathbf{V}$, начальные положения $x(0)$ могут быть переведены путем подходящего выбора управления $u(t) \in \mathbf{U}$?

Множеством точек, удовлетворяющих выписанному требованию, является в точности

$$\left\{ x(T) \mid (x(0) = x_0) \ \& \ (\forall v(t) \in \mathbf{V})(\exists u(t) \in \mathbf{U})(\dot{x} = f(t, x(t), u(t), v(t))) \right\}, \quad (1.10)$$

т.е., фактически, может быть охарактеризовано, как некоторое обобщённое множество решений интервальной системы дифференциальных уравнений (1.8)–(1.9).

Как видим, задача исследования управления может быть эквивалентным образом переформулирована как задача нахождения точек из множества (1.10), образованного решениями в некотором обобщённом смысле, и которое строится с использованием кванторного формализма. В целом рассмотренные нами идеи кванторной формализации постановок в применении к интервальным дифференциальным уравнениям все еще ожидают более детальной разработки и претворения в практику. Но опыт исследования интервальных неравенств и интервальных оптимизационных задач уже имеется (см. [16]).

Для интервальных линейных неравенств

$$\mathbf{A}x \leq \mathbf{b}, \quad (1.11)$$

А. П. Воцинин и Г. Р. Сотиров [19], по-видимому, были первыми, кто рассматривал множества решений

$$\begin{aligned} & \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (x \geq 0) \& (\forall A \in \mathbf{A})(\forall b \in \mathbf{b})(Ax \leq b) \}, \\ & \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (x \geq 0) \& (\exists A \in \mathbf{A})(\forall b \in \mathbf{b})(Ax \leq b) \}, \\ & \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (x \geq 0) \& (\forall A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(Ax \leq b) \}, \\ & \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (x \geq 0) \& (\exists A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(Ax \leq b) \} \end{aligned}$$

в связи с задачами линейной ограниченной оптимизации в условиях интервальной неопределённости. Позднее Рон и Креслова [267] изучали понятия *слабой разрешимости* и *сильной разрешимости* для интервальных неравенств (1.11):

- интервальная система (1.11) называется *слабо разрешимой*, если для каждого $A \in \mathbf{A}$, $b \in \mathbf{b}$ точечная система $Ax \leq b$ имеет решение (которое в общем случае зависит от A и b);
- интервальная система (1.11) называется *сильно разрешимой* если найдется решение \tilde{x} удовлетворяющее всем вещественным системам $Ax \leq b$ для каждого $A \in \mathbf{A}$ и $b \in \mathbf{b}$.

Нетрудно видеть, что сильная разрешимость интервальной системы неравенств $\mathbf{A}x \leq \mathbf{b}$ эквивалентно непустоте её множества решений

$$\{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \mathbf{A})(\forall b \in \mathbf{b})(Ax \leq b) \},$$

которое может быть охарактеризовано как одно из обобщённых множеств решений интервальной системы неравенств $\mathbf{A}x \leq \mathbf{b}$.

В целом, математический объект, определяемый записью (1.5), имеет самостоятельное значение и потому имеет смысл выделить его в отдельное понятие. Но, прежде чем делать это, следует отметить, что определение (1.5) все же не является самым общим. Так как кванторы различного типа не коммутируют друг с другом, то мы можем формировать и другие множества решений для интервальных систем уравнений путем сочетания “ \forall ” и “ \exists ” с интервальными параметрами и комбинирования их порядка!

Например, для одномерного интервального уравнения

$$\phi(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, x) = \mathbf{b}$$

с четырьмя интервальными параметрами в левой части можно рассмотреть в качестве множеств решений

$$\{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists a_2 \in \mathbf{a}_2)(\forall a_1 \in \mathbf{a}_1)(\forall a_4 \in \mathbf{a}_4)(\forall b \in \mathbf{b})(\exists a_3 \in \mathbf{a}_3)(\varphi(a_1, a_2, a_3, a_4, x) = b) \},$$

или

$$\{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall a_1 \in \mathbf{a}_1)(\forall a_2 \in \mathbf{a}_2)(\exists a_4 \in \mathbf{a}_4)(\forall b \in \mathbf{b})(\exists a_3 \in \mathbf{a}_3)(\varphi(a_1, a_2, a_3, a_4, x) = b) \},$$

и т.д.

Прежде чем дать общее формальное определение, напомним, что наиболее глубоким обобщением классического понятия системы уравнений (неравенств и т.п.) является так называемая *задача удовлетворения ограничениям* возникшая в исследованиях по искусственному интеллекту [199] в конце 70-х. Нам потребуется несколько модифицированное определение *численной задачи удовлетворения ограничениям*:

Определение 1.2.1 [198] *Численной задачей удовлетворения ограничениям называется тройка $P = (V, D, C(x))$, в которой*

$V = \{x_1, \dots, x_n\}$ — множество численных переменных,

$D = \{D_1, \dots, D_n\}$ — множество областей, таких что D_i представляет множество числовых значений, ассоциированное с переменной x_i ,

$C(x) = \{C_1(x), \dots, C_m(x)\}$ — множество ограничений, где ограничение $C_i(x)$ определяется любым числовым отношением (равенством, неравенством и т.п.), связывающим рассматриваемые переменные.

Решением численной задачи удовлетворения ограничениям $P = (V, D, C)$ называется такое множество значений переменных из V , что они содержатся в соответствующих областях из D и удовлетворены все ограничения из C , иными словами, множество

$$\{x \in D \mid C(x) \text{ удовлетворено} \}.$$

Усложним ситуацию. Пусть фигурирующие в Определении 1.2.1 ограничения $C_i(x)$ зависят от некоторых параметров p_1, p_2, \dots, p_l , о которых известно лишь то, что они могут принадлежать интервалам $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_l$. В целом, мы имеем зависящую от интервальных параметров систему ограничений $C(p, x) = \{C_1(p, x), \dots, C_m(p, x)\}$ и, как следствие, *интервальную задачу удовлетворения ограничениям*. При этом, принимая во внимание двойственную интерпретацию интервальности, наиболее общим определением множества решений интервальной задачи удовлетворения ограничениям должно быть признано множество

$$\{x \in D \mid (Q_1 p_{\pi_1} \in \mathbf{p}_{\pi_1})(Q_2 p_{\pi_2} \in \mathbf{p}_{\pi_2}) \cdots (Q_l p_{\pi_l} \in \mathbf{p}_{\pi_l})(C(p, x) \text{ удовлетворено}) \}, \quad (1.12)$$

где Q_i — логические кванторы \forall или \exists ,

$p = (p_1, p_2, \dots, p_l)$ — вектор параметров рассматриваемой системы ограничений $C(p, x)$,

$\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_l)$ — интервальный вектор возможных значений этих параметров,

$\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_l)$ — некоторая перестановка натуральных чисел $1, 2, \dots, l$.

Определение 1.2.2 *Множество вида (1.12) мы будем называть обобщённым множеством решений интервальной задачи удовлетворения ограничениям $(V, D, C(\mathbf{p}, x))$.*

В частности, для интервальных систем уравнений (1.3) мы принимаем

Определение 1.2.3 *Обобщёнными множествами решений интервального уравнения*

$$F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$$

будем называть множества вида

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid (Q_1 z_{\pi_1} \in \mathbf{z}_{\pi_1})(Q_2 z_{\pi_2} \in \mathbf{z}_{\pi_2}) \cdots (Q_{l+m} z_{\pi_{l+m}} \in \mathbf{z}_{\pi_{l+m}})(F(a, x) = b)\},$$

где

$$Q_1, Q_2, \dots, Q_{l+m}$$

— логические кванторы \forall или \exists ,

$$(z_1, z_2, \dots, z_{l+m}) := (a_1, \dots, a_l, b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^{l+m}$$

— агрегированный (составной) вектор параметров рассматриваемой системы уравнений,

$$(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_{l+m}) := (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m) \in \mathbb{I}\mathbb{R}^{l+m}$$

агрегированный вектор интервалов возможных значений этих параметров,

$$(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{l+m})$$

— некоторая перестановка натуральных чисел $1, 2, \dots, l + m$.

Определения 1.2.2 и 1.2.3 являются, в действительности, чрезвычайно общими. Каждому интервальному элементу в них соответствует одно из двух возможных значений логического квантора — \forall или \exists — и порядок кванторов в выделяющем предикате также существен. Следовательно, общее число множеств решений, которые, к примеру, охватываются Определением 1.2.3 для интервальной линейной системы уравнений (1.3) далеко превосходит 2^{l+m} , т.е. 2 в степени “количество интервальных параметров системы”. В общем случае эти множества решений можно интерпретировать на практике как решения некоторых *игр* или *многошаговых процессов принятия решений* в условиях интервальной неопределённости (что впервые было отмечено в [16]), а также как решения некоторых минимаксных задач исследования операций [116, 289, 290].

Рассмотрим, наконец, важный вопрос об эквивалентности преобразований с интервальными системами. Именно, какие преобразования интервальных систем уравнений сохраняют неизменными их множества решений?

Из Определения 1.2.3 следует, что в случае, когда с точечным прототипом $F(a, x) = b$ интервальной системы уравнений (1)–(2) мы осуществляем какие-то эквивалентные в обычном смысле преобразования, не изменяющие символы переменных x и параметров a , b , выделяющий предикат остаётся истинным при тех же самых значениях x , что и ранее. Следовательно, если в процессе этих преобразований мы приходим к системе уравнений $\tilde{F}(a, x) = b$, интервализацией которой является некоторая новая система уравнений

$$\tilde{F}(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b},$$

то обобщенные множества решений систем $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$ и $\tilde{F}(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$ совпадают. Отсюда, в частности, вытекает привычная возможность переносить интервальные члены из одной части уравнения в другую “с переменной знака”.

1.2 b Интерпретация

Известно, что одним из современных методов анализа логики взаимодействия двух или более рациональных субъектов является теория игр. Как математическая дисциплина теория игр занимается конструированием и исследованием моделей конфликтных явлений, в которых задействованы участники (называемые *игроками*), преследующие различные цели путём использования некоторых *стратегий*.

В теории игр (и многошаговых процессов принятия решений) мы должны не только описать какие параметры являются управляемым, но также и то, кто конкретно ими управляет и в каком порядке. Формально *конечная позиционная игра* (в *нормальной форме*) — это, как известно, (см., например, [43]) четверка

$$\langle \mathcal{I}, X, \mathcal{R}, \{h_i\}_{i \in I} \rangle,$$

где \mathcal{I} — конечное множество игроков;

X — конечное дерево игры, узлы которого называются *позициями*, а корень называется *начальной позицией*.

Для позиций определено отношение следования; позиция, следующая за данной позицией $x \in X$ называется *альтернативой* x ;

позиции, не имеющие альтернатив — это *конечные позиции*, а пути, которые ведут к ним, называются *партиями*;

множество конечных позиций обычно обозначают через X^* ;

\mathcal{R} — это разбиение множества $X \setminus X^*$ на n подмножеств приоритета X_1, X_2, \dots, X_n , такие, что i -ый игрок делает ход в позиции из X_i ;

h_i — *платёжные функции* игры, т.е. функции, назначающие платёж i -ого игрока в каждой из конечных позиций.

Вышеприведённое определение является наиболее общим и, в действительности, нам не потребуются все его тонкости. Для интерпретации обобщённых множеств решений достаточно ограничиться простейшей игрой двух лиц, дерево которой является *простой цепью* [75], функции платежа булевозначны, а интересы игроков (т.е. значения платёжных функций) диаметрально противоположны. Такие игры называются *антагонистическими*. Мы, таким образом, можем считать, что множество возможных исходов игры — $\{0, 1\}$ — это просто состояния “выигрыш-проигрыш”, причём проигрыш одного игрока означает выигрыш другого и наоборот.

Рассмотрим подобную игру между игроками Π (*Природа*) и M (*Мы*), в которой ходы делаются поочерёдно, один за другим, так что дерево игры есть простая цепь, и его возможные виды представлены на Рисунке 1.2 в зависимости от того, кто из игроков делает первый ход. Результат игры определяется тем, достигнуто ли в конце концов равенство $F(a, x) = b$ или нет: если игроку M удастся его обеспечить, то он выиграл игру. Иначе, когда равенство $F(a, x) = b$ не достигнуто, игрок M проиграл, а победителем является Π . Таким образом, множество решений

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists a_2 \in \mathbf{a}_2)(\forall a_1 \in \mathbf{a}_1)(\forall a_3 \in \mathbf{a}_3)(\exists a_4 \in \mathbf{a}_4)(\forall b_2 \in \mathbf{b}_2) \cdots (F(a, x) = b)\}$$

может быть проинтерпретировано следующим образом: у первого игрока (который начинает игру) существует такой первый ход a_2 , что вне зависимости от ответного хода второго игрока первый снова найдет подходящий ответ и т.д., так что равенство $F(a, x) = b$ будет в конечном итоге получено.

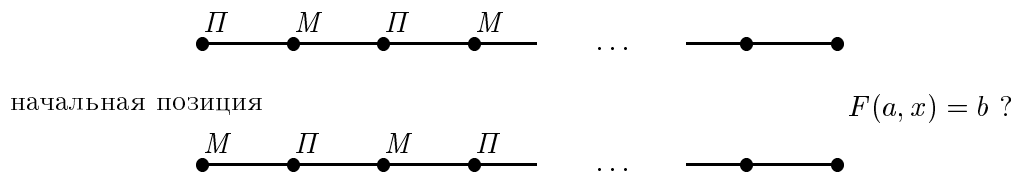


Рис. 1.2: Деревья игры, интерпретирующей обобщённые множества решений

В заключение отметим, что в книге [191] В. Я. Крейнвич с соавторами дают краткий критический обзор развиваемого нами кванторного формализма, указывают на некоторые его достоинства и недостатки.

1.2 с Множества АЕ-решений

Далее в нашей работе мы ограничимся рассмотрением лишь множеств решений вида (1.5), у которых в выделяющем предикате *все* вхождения квантора всеобщности “ \forall ” предшествуют вхождениям квантора существования “ \exists ”. Перформулируя это условие в терминах алгебры логики, можно сказать, что соответствующий выделяющий предикат должен иметь АЕ-форму.

Определение 1.2.4 *Множествами АЕ-решений (или АЕ-множествами решений) называются обобщенные множества решений интервальных уравнений (неравенств и т.п.) для которых выделяющий предикат имеет АЕ-форму.*

Рассмотрим для множеств АЕ-решений различные возможные способы описания того, как распределены различные типы неопределённости по интервальным параметрам системы.

1. Поскольку порядок логических кванторов фиксирован определением, то простейший из этих способов описания — прямое указание кванторов, которые соответствуют тем или иным элементам интервальной системы. Именно, введём n -вектор $\alpha = (\alpha_i)$ и m -вектор $\beta = (\beta_i)$, составленные из логических кванторов и такие, что

$$\alpha_i := \begin{cases} \forall, & \text{если } \mathbf{a}_i \text{ имеет А-неопределённость,} \\ \exists, & \text{если } \mathbf{a}_i \text{ имеет Е-неопределённость,} \end{cases} \quad (1.13)$$

$$\beta_i := \begin{cases} \forall, & \text{если } \mathbf{b}_i \text{ имеет А-неопределённость,} \\ \exists, & \text{если } \mathbf{b}_i \text{ имеет Е-неопределённость.} \end{cases} \quad (1.14)$$

Указание, наряду с самой интервальной системой, векторов α и β полностью определяет соответствующее множество АЕ-решений.

2. Другой способ представления типов неопределённости, соответствующих элементам интервальной системы состоит в задании разбиений индексных множеств компонент вектора \mathbf{a} и правой части \mathbf{b} . Более точно, пусть все множество индексов i

компонент a_i , т.е. множество $\{1, 2, \dots, l\}$, разбито на две непересекающиеся части $\hat{\Gamma} := \{\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_p\}$ и $\check{\Gamma} := \{\check{\gamma}_1, \dots, \check{\gamma}_q\}$, $p + q = l$ так, что

$$\begin{aligned} a_i &\text{ имеет интервальную А-неопределённость при } i \in \hat{\Gamma}, \\ a_i &\text{ имеет интервальную Е-неопределённость при } i \in \check{\Gamma}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом мы вводим непересекающиеся множества натуральных индексов $\hat{\Delta} := \{\hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_s\}$ и $\check{\Delta} := \{\check{\delta}_1, \dots, \check{\delta}_t\}$, $\hat{\Delta} \cup \check{\Delta} = \{1, 2, \dots, m\}$ так, что в векторе правых частей

$$\begin{aligned} b_i &\text{ имеет интервальную А-неопределённость при } i \in \hat{\Delta}, \\ b_i &\text{ имеет интервальную Е-неопределённость при } i \in \check{\Delta}. \end{aligned}$$

Мы допускаем также естественную возможность того, что некоторые из множеств $\hat{\Gamma}$, $\check{\Gamma}$, $\hat{\Delta}$, $\check{\Delta}$ могут быть пустыми. Очевидно, что

$$\alpha_i = \begin{cases} \forall, & \text{если } i \in \hat{\Gamma}, \\ \exists, & \text{если } i \in \check{\Gamma}, \end{cases} \quad \beta_i = \begin{cases} \forall, & \text{если } i \in \hat{\Delta}, \\ \exists, & \text{если } i \in \check{\Delta}, \end{cases}$$

так что задание $\hat{\Gamma}$, $\check{\Gamma}$, $\hat{\Delta}$, $\check{\Delta}$ приводит к полному описанию множества АЕ-решений для интервальной системы уравнений.

3. Третий способ описания распределения типов неопределённости по интервальным параметрам системы заключается в указании *дизъюнктивных разложений* векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} . Именно, определим интервальные векторы $\mathbf{a}^\forall = (\mathbf{a}_i^\forall)$ и $\mathbf{a}^\exists = (\mathbf{a}_i^\exists)$ и интервальные векторы $\mathbf{b}^\forall = (\mathbf{b}_i^\forall)$ и $\mathbf{b}^\exists = (\mathbf{b}_i^\exists)$, тех же размеров, что и \mathbf{a} и \mathbf{b} следующим образом:

$$\mathbf{a}_i^\forall := \begin{cases} \mathbf{a}_i, & \text{если } \alpha_i = \forall, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad \mathbf{a}_i^\exists := \begin{cases} \mathbf{a}_i, & \text{если } \alpha_i = \exists, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (1.15)$$

$$\mathbf{b}_i^\forall := \begin{cases} \mathbf{b}_i, & \text{если } \beta_i = \forall, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad \mathbf{b}_i^\exists := \begin{cases} \mathbf{b}_i, & \text{если } \beta_i = \exists, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1.16)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{a}^\forall + \mathbf{a}^\exists, & \mathbf{a}_i^\forall \cdot \mathbf{a}_i^\exists &= 0, \\ \mathbf{b} &= \mathbf{b}^\forall + \mathbf{b}^\exists, & \mathbf{b}_i^\forall \cdot \mathbf{b}_i^\exists &= 0 \end{aligned}$$

для всех i . В векторах \mathbf{a}^\forall и \mathbf{b}^\forall оказываются сосредоточенными все интервальные элементы системы, соответствующие А-неопределённости, тогда как в векторах \mathbf{a}^\exists и \mathbf{b}^\exists хранятся все элементы, соответствующие интервальной Е-неопределённости.

Следует отметить, что три рассмотренные группы объектов, возникающих в связи с множествами АЕ-решений интервальных систем уравнений, именно

- 1) кванторные векторы α и β ,
- 2) разбиения индексных множеств векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} на непересекающиеся подмножества $\hat{\Gamma}$, $\check{\Gamma}$, $\hat{\Delta}$, $\check{\Delta}$,

3) дизъюнктные разложения интервальных векторов $\mathbf{a} = \mathbf{a}^\forall + \mathbf{a}^\exists$ и $\mathbf{b} = \mathbf{b}^\forall + \mathbf{b}^\exists$,

находятся во взаимно однозначном соответствии, таком что указание любого одного из пунктов этой триады немедленно определяет два других. Далее мы будем интенсивно использовать все три способа описания и переходить от одного из них к другому без специальных разъяснений.

Подытоживая сказанное, мы можем дать следующее

Определение 1.2.5 Пусть для интервальной системы уравнений $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$ распределение типов неопределённости по интервальным элементам параметров \mathbf{a} и \mathbf{b} задается кванторными векторами α и β , указанными (1.14)–(1.13), или, что эквивалентно, соответствующими разбиениями индексных множеств векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} или же дизъюнктными разложениями $\mathbf{a} = \mathbf{a}^\forall + \mathbf{a}^\exists$ и $\mathbf{b} = \mathbf{b}^\forall + \mathbf{b}^\exists$. Мы будем называть множество

$$\begin{aligned} \{ x \in \mathbb{R}^n \mid & \\ & (\forall a_{\hat{\gamma}_1} \in \mathbf{a}_{\hat{\gamma}_1}) \cdots (\forall a_{\hat{\gamma}_p} \in \mathbf{a}_{\hat{\gamma}_p}) (\forall b_{\hat{\delta}_1} \in \mathbf{b}_{\hat{\delta}_1}) \cdots (\forall b_{\hat{\delta}_s} \in \mathbf{b}_{\hat{\delta}_s}) \\ & (\exists a_{\check{\gamma}_1} \in \mathbf{a}_{\check{\gamma}_1}) \cdots (\exists a_{\check{\gamma}_q} \in \mathbf{a}_{\check{\gamma}_q}) (\exists b_{\check{\delta}_1} \in \mathbf{b}_{\check{\delta}_1}) \cdots (\exists b_{\check{\delta}_t} \in \mathbf{b}_{\check{\delta}_t}) \\ & \qquad \qquad \qquad (F(a, x) = b) \} \end{aligned} \quad (1.5)$$

множеством АЕ-решений типа $\alpha\beta$ для интервальной системы $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$ (либо АЕ-множеством решений типа $\alpha\beta$) и обозначать через $\Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Частными случаями этого определения являются следующие три множества решений, которые в современном интервальном анализе были объектом (более или менее) интенсивного исследования:

◇ объединённое множество решений

$$\Xi_{uni}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists a \in \mathbf{a})(\exists b \in \mathbf{b})(F(a, x) = b) \}, \quad (1.17)$$

образованное решениями всех точечных систем $F(a, x) = b$ с $a \in \mathbf{a}$ и $b \in \mathbf{b}$. Оно является, несомненно, наиболее популярным из множеств решений, что обусловлено, главным образом, историческим происхождением интервального анализа из задач чувствительности. Ξ_{uni} часто называется просто *множеством решений*. Его аналогом для динамических систем является хорошо известное *множество достижимости* (см. [44, 64]).

◇ допустимое множество решений

$$\Xi_{tol}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall a \in \mathbf{a})(\exists b \in \mathbf{b})(F(a, x) = b) \}, \quad (1.18)$$

образованное всеми точечными векторами x , такими что образ $F(a, x) \in \mathbf{b}$ для любого $a \in \mathbf{a}$ (см., например, [143, 183, 216, 219, 282, 286, 291]).

◇ управляемое множество решений

$$\Xi_{ctrl}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall b \in \mathbf{b})(\exists a \in \mathbf{a})(F(a, x) = b) \}, \quad (1.19)$$

образованное точечными векторами $x \in \mathbb{R}^n$, такими что для любого желаемого $b \in \mathbf{b}$ мы можем найти подходящий параметр $a \in \mathbf{a}$ удовлетворяющий $F(a, x) = b$ (см. [299]).

Интересно, что до 70-х годов объединённое множество решений было единственным объектом внимания исследователей, работавших с интервальными системами уравнений. Как свидетельствует А. Ноймайер [216], допустимое множество решений ИСЛАУ впервые было рассмотрено в докторской диссертации западногерманского математика Х. Бека (1971 год), но задачу внутреннего оценивания допустимого множества решений (так называемую *задачу о допусках*) для общих интервальных алгебраических систем, не обязательно линейных, первым сформулировал другой исследователь из Германии, Е. Нудинг, годом позже. Постановке этой же задачи для ИСЛАУ посвящена работа [230], причём в ней были указаны некоторые из возможных её содержательных приложений новой задачи. Тем не менее, в последующие несколько лет посвящённые этой задаче работы были немногочисленными и малодоступными (см. обзор А. Ноймайера [216]). В конце 70-х И. Рон [249, 250] обратился к задаче о допусках в связи с анализом линейных балансовых экономических моделей с интервальной неопределённостью (интервального аналога уравнения В. Леонтьева). В этих его работах приводятся явные формулы, позволяющие выяснить разрешимость линейного случая задачи о допусках и построить его интервальное решение, но лишь для случая матрицы \mathbf{A} специального вида и положительного вектора \mathbf{b} .

В качестве конкретного примера естественного возникновения множеств АЕ-решений рассмотрим *управление качеством продукции* на промышленном предприятии. Похожая модель недавно была рассмотрена в интервальном контексте С. Хаджихасан, Э. Вольтером и Л. Пронцато [160], но в более упрощённом виде. Именно, в [160] рассмотрено управление качеством только на этапе проектирования, тогда как мы собираемся исследовать более полную и реалистичную модель, которая учитывает неопределённость (незнание) как на этапе проектирования, так и на этапе собственно производства.

Развивая идеи известного японского исследователя Г. Тагучи (см., например, [160]), естественно разделить множество всех факторов (параметров), влияющих на выходные характеристики производства некоторой продукции, на следующие три подмножества:

- *проектируемые факторы* $x \in \mathbb{R}^n$, значения которых выбираются на этапе проектирования продукции,
- *факторы помех* $v \in \mathbb{R}^q$, значения которых мы не можем ни предсказать на стадии проектирования, ни изменить в процессе производства, и
- *факторы управления производством* $u \in \mathbb{R}^p$, которые мы можем и должны использовать на стадии производства для компенсации влияний факторов помех, чтобы обеспечить желаемые выходные характеристики производства.

Типичная задача управления качеством продукции состоит в требовании достичь некоторых определенных целевых значений y_i^* рассматриваемых характеристик функционирования y_i , $i = 1, 2, \dots, m$, в то время как зависимость y_i от факторов u , v , x описывается некоторой математической моделью

$$y_i = F_i(u, v, x), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

с известными функциями $F_i : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

При этом мы предположим, что единственная доступная информация о значениях факторов помех выражена в виде интервалов их возможных значений: $v_i \in \mathbf{v}_i = [\underline{v}_i, \bar{v}_i]$, $i = 1, 2, \dots, q$. Аналогично, производственные факторы u_i также не могут быть совершенно произвольными. Как правило, границы их изменений тоже конечны, т.е. мы можем

выбирать их из некоторых интервалов $\mathbf{u}_i = [\underline{u}_i, \bar{u}_i]$, $i = 1, 2, \dots, q$. Наконец, существенной модификацией нашей модели в сравнении с рассмотренной в [160], является то, что на выходе производственного процесса вместо точечных целевых значений y_i^* мы назначаем для допустимых характеристик функционирования интервалы ненулевой ширины $\mathbf{y}_i = [\underline{y}_i, \bar{y}_i]$, $i = 1, 2, \dots, m$, попадание в которые допускается в соответствии со спецификацией процесса и/или критериями качества. В частности, если $\underline{y}_i = \bar{y}_i = y_i^*$, мы приходим к традиционной модели.

В описанной ситуации основная задача управления качеством формулируется следующим образом:

Как следует выбрать проектируемые параметры x , чтобы для любых возмущающих факторов $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_q$, лежащих в пределах интервалов $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q$ соответственно, могли бы быть найдены такие факторы управления производством $\tilde{u}_1 \in \mathbf{u}_1, \dots, \tilde{u}_p \in \mathbf{u}_p$, что результирующие выходные характеристики $F_i(\tilde{u}, \tilde{v}, x)$ будут оставаться в пределах \mathbf{y}_i , $i = 1, 2, \dots, m$, заданных спецификацией производственного процесса?

Нетрудно понять, что все такие проекты x образуют множество

$$\{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall v_1 \in \mathbf{v}_1) \cdots (\forall v_q \in \mathbf{v}_q) (\exists u_1 \in \mathbf{u}_1) \cdots (\exists u_p \in \mathbf{u}_p) \\ (F_1(u, v, x) \in \mathbf{y}_1 \ \& \ \cdots \ \& \ F_m(u, v, x) \in \mathbf{y}_m) \},$$

или, если мы положим, $y = (y_1, \dots, y_m)^\top$,

$$\{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall v_1 \in \mathbf{v}_1) \cdots (\forall v_q \in \mathbf{v}_q) (\exists u_1 \in \mathbf{u}_1) \cdots (\exists u_p \in \mathbf{u}_p) \\ (\exists y_1 \in \mathbf{y}_1) \cdots (\exists y_m \in \mathbf{y}_m) (F(u, v, x) = y) \},$$

что в точности является некоторым обобщённым множеством АЕ-решений, как они были определены выше, для интервальной системы уравнений

$$\begin{cases} F_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}, x) = \mathbf{y}_1, \\ \vdots \\ F_m(\mathbf{u}, \mathbf{v}, x) = \mathbf{y}_m, \end{cases}$$

с $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p)^\top$ и $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q)^\top$.

Завершая параграф, необходимо сделать следующее замечание. Все наши рассуждения и построения, касающиеся кванторного формализма, носят весьма общий характер, но всё-таки ориентированы на определённый вид интервальных систем уравнений

$$F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}, \tag{2}$$

в котором неизвестные переменные присутствуют в составе некоторых выражений лишь в левой части уравнения, а ненулевой свободный член находится в правой части. Но нередко возникает необходимость рассмотрения интервальных систем уравнений и других видов. Например, при внешнем оценивании множеств решений полезно перейти к так называемой рекуррентной форме

$$x = G(\mathbf{a}, x), \tag{3}$$

когда неизвестная переменная выражена через себя же. В последнем случае для описания интервальной неопределённости в системе достаточно обходиться одним интервальным вектором \mathbf{a} , что, по крайней мере формально, не укладывается в выстроенную выше схему “АЕ-множеств решений типа $\alpha\beta$ ”.

С другой стороны, определения обобщённых множеств решений и множеств АЕ-решений не несут никакой специфики вида рассматриваемой интервальной системы уравнений и формулируются для (3) и прочих форм интервальных систем уравнений совершенно так же, как и для (2). В частности, что касается рекуррентной формы, то её единственная особенность будет состоять в том, что, говоря о величине и характере интервальной неопределённости, мы должны будем задействовать *один* буквенный идентификатор, который соответствует одному вектору интервальной неопределённости. Иными словами, нужно говорить не о “множествах АЕ-решений типа $\alpha\beta$ ”, а о “множествах АЕ-решений типа α ”, употребляя, к примеру, обозначение $\Xi_\alpha(G, \mathbf{a})$:

$$\Xi_\alpha(G, \mathbf{a}) := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{a} \in \mathbf{a}^\forall)(\exists \check{a} \in \mathbf{a}^\exists)(x = G(\hat{a} + \check{a}, x)) \}$$

1.3 Детальная постановка задачи

1.3 а Обсуждение

Теперь, после того, как мы определили, что является множествами решений для интервальной системы уравнений (неравенств и т.п.), настало время решить, что делать с ними дальше.

Это не праздный вопрос. Фундаментальный факт, касающийся окружающей нас реальности, состоит в том, что мы можем наблюдать, исследовать и использовать объекты, которые не просто *конечны*, но даже *не слишком сложны*. Конечность наших восприятий, рассматриваний, рассуждений, вычислений и т.п. широко осознана людьми и обычно не встречает возражений. Но какое обстоятельство является столь специфичным в интервальных задачах, что мы должны наложить второе требование — “не слишком сложный”? Ответ заключается в том, что вступая в царство множеств, рассматриваемых как существенно структурированные, составные объекты, образованные из различных элементарных частей, мы сталкиваемся с растущей (и даже доминирующей ролью) комбинаторных эффектов, которые едва ли обнаруживают себя в традиционной “точечной” математике. Но комбинаторика — это, как известно, основной источник больших, очень больших и огромных чисел, которые могут превзойти любую реальную физическую величину, и уж тем более возможности всех настоящих и будущих ЭВМ.

В частности, всё вышесказанное в полной мере справедливо для рассмотренных в предшествующем параграфе множеств решений интервальных задач, как простейшего объединённого множества решений, так и обобщённых множеств решений. Даже в простейших практических ситуациях прямое вычисление и описание множеств решений оказывается, как правило, трудоёмким, утомительным, а часто и просто невозможным. Например, для интервальных линейных $m \times n$ -систем вида $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ длина полного описания множеств АЕ-решений в общем случае может расти быстрее, чем 2^n , т.е. чем количество ортантов в \mathbb{R}^n . Это следует из того, что множество решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ может пересекать каждый из ортантов пространства \mathbb{R}^n и все эти пересечения являются выпуклыми полиэдрами, описание каждого из которых требует выписывания всех ограничивающих гиперплоскостей и

т.п. (см. §2.3 b). Недавний теоретический результат А. В. Лакеева [61] показывает, что задача распознавания и оценивания множеств АЕ-решений интервальных линейных систем принципиально труднорешаема (NP-трудна) при условии, что мы не накладываем никаких ограничений на интервальную матрицу системы (см. также [191]). Таким образом, сложность упомянутого прямого описания множеств решений становится больше знаменитого “шахматного числа” $2^{64} - 1$, если размерность интервальной системы равна всего лишь 64. Когда же размерность достигает нескольких сотен, то длина точного и исчерпывающего описания для $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ делается сравнимой с количеством элементарных частиц во всей наблюдаемой Вселенной.^{1,3} Заметим, что рассматриваемые нами в этих примерах размерности интервальных систем уравнений являются не столь уж и большими. Для сравнения, современные экономики вовлекают тысячи взаимодействующих объектов и участников, и даже в агрегированных балансовых моделях обычно рассматриваются около сотни отраслей промышленности.

Практическим следствием вышесказанного является неизбежная необходимость как-то огрублять точные описания множеств решений, т.е. заменять эти множества, полные описания которых слишком сложны, на более простые множества — их *приближения* (или оценки) с меньшей сложностью описания, способом, который не противоречит постановке решаемой практической задачи. В целом такая процедура приближения должна быть введена как составная часть в постановку решаемой задачи, а её детали должны обсуждаться и сознательно приниматься во внимание.

Конкретный критерий приближения и применяемые в задаче приближающие множества должны определяться для каждой конкретной практической задачи. Кроме того, в рассмотрение уместно ввести меру (метрику) ρ для измерения отклонения (в некотором заданном смысле) оценивающего множества от множества решений. Но главной отличительной особенностью рассматриваемых нами интервальных, которая делает их столь непохожими, например, на классические задачи теории приближения, состоит в присутствии помимо метрики ρ некоторого *качественного* (не количественного!) требования, которому должен удовлетворять ответ к задаче, и который совсем не связан с ρ . Это качественное требование является, как правило, условием на взаимное расположение (положение) множества решений и оценивающего множества. Например, при вычислении области значений функции нам часто нужны не просто какие-то оценки этой области значений, сколь бы близки они к ней ни были, но лишь такие оценки, которые гарантированно приближают эту область значений *снизу* и *сверху*. Дальнейшие примеры могут быть найдены в следующем пункте.

1.3 b Что такое интервальная “задача оценивания”?

Подытоживая обсуждение, мы приходим к следующей формализации понятия одного из классов интервальных задач, которые мы будем называть *интервальными задачами оценивания*:

Определение 1.3.1 *Массовой интервальной задачей оценивания P называется упорядоченная четверка вида $(S, \mathcal{E}, M, \rho)$, где*

^{1,3}Борель в [10], к примеру, указывает 10^{200} как максимально число элементарных событий, которое могло произойти во Вселенной после Большого Взрыва. Эта оценка, надо думать, не слишком увеличилась со времени выхода книги [10].

\mathcal{S} обозначает семейство множеств решений, т.е. отображение некоторого интервала Π из \mathbb{R}^p (или из более общего множества) в класс множеств;

Π описывает возможные значения параметров задачи P , так что индивидуальная задача оценивания I выделяется из P путём присвоения переменным \mathcal{S} некоторых конкретных значений, которые определяют (в результате процесса решения) индивидуальное множество решений $\mathfrak{S} \in \mathcal{S}$;

\mathcal{E} обозначает класс оценивающих множеств, т.е. семейство множеств, посредством которых мы собираемся приближать множества решений из \mathcal{S} ;

M указывает способ оценивания множества решений или, иначе, бинарное отношение между элементами \mathcal{S} и элементами \mathcal{E} , которое должно удовлетворяться в соответствии с содержательным смыслом решаемой задачи;

ρ обозначает неотрицательный функционал на $\mathcal{S} \times \mathcal{E}$ (метрику), который указывает “ошибку” результата, т.е. меру близости (в том или ином смысле) приближающего множества к настоящему множеству решений, которая определяется постановкой задачи.

Под решением задачи I мы будем понимать некоторое оценивающее множество $\mathfrak{E} \in \mathcal{E}$, такое что удовлетворено отношение $\mathfrak{S} M \mathfrak{E}$ и, возможно, дополнительно выполняется некоторое условие на величину $\rho(\mathfrak{S}, \mathfrak{E})$.

Конечно, нужно чётко осознавать, что в интервальном анализе существуют задачи, не укладывающиеся в выписанную выше схему. Таковы, например, задача вычисления формального решения интервальной системы уравнений, задача проверки невырожденности интервальной матрицы, задача проверки устойчивости интервальной матрицы и ряд других. Определением 1.3.1 выделяется некоторый довольно широкий и практически важный класс задач интервального анализа, который естественно называть специальным термином, что мы и делаем.

В современном интервальном анализе наиболее часто встречающиеся способы оценивания множества решений \mathfrak{S} являются, как известно,

внешнее интервальное оценивание, когда ищется интервальный вектор \mathbf{E} , такой что $\mathbf{E} \supseteq \mathfrak{S}$, и

внутреннее интервальное оценивание, когда ищется интервальный вектор \mathbf{E} , такой что $\mathbf{E} \subseteq \mathfrak{S}$.

минимизация или максимизация на множестве решений некоторого функционала.

Внешние и внутренние оценки, встречаясь в большом количестве разнообразных и практически важных интервальных задач, конечно же, не являются единственно возможными. Можно привести и другие примеры способов оценивания, которые отнюдь не являются теоретическим курьезом.

Пусть, к примеру, $\mathcal{E} = \mathbb{I}\mathbb{R}^n$, т.е. оценивающими множествами являются n -мерные интервальные векторы (их геометрическими образами служат *брусы* — прямоугольные параллелопапы со сторонами, параллельными координатным осям). Тогда, внешнее интервальное оценивание множества решений \mathfrak{S} интервалом \mathbf{E} эквивалентно

$$\text{pr}_i \mathfrak{S} \subseteq \mathbf{E}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

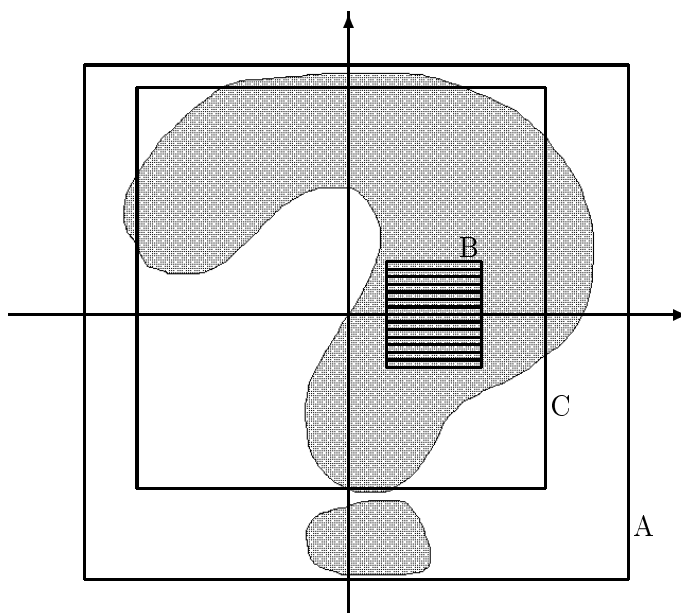


Рис. 1.3: Оценивание множества решений (затенённый вопросительный знак) “внешним” брусом (A), “внутренним” брусом (B) и “слабым внутренним” брусом (C).

где pr_i — операция проектирования на i -ую координатную ось. Требуя для оценивающих брусков обратные включения

$$pr_i \mathfrak{S} \supseteq \mathbf{E}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

мы получаем нетрадиционный способ оценивания, который может быть назван “слабым внутренним оцениванием”. Этот тип оценивания используется в ряде задач идентификации [19], а также когда необходимо знать точность внешнего интервального оценивания множеств решений [270]^{1.4}.

Нередко мы должны гарантировать включение $pr_i \mathfrak{S} \subseteq \mathbf{E}_i$ не для всех, а только для некоторых компонент $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, тогда как для остальных i требуется обратное включение $pr_i \mathfrak{S} \supseteq \mathbf{E}_i$. Иными словами, для некоторых индексов i бывают нужны нижние по координатные оценки величин $\min\{x_i \mid x \in \mathfrak{S}\}$, а для остальных i необходимо получить их верхние по координатные оценки. Аналогичное требование накладывается и на оценки для $\max\{x_i \mid x \in \mathfrak{S}\}$. Задаваемый таким образом способ оценивания естественно назвать “смешанным оцениванием”.

Обратимся теперь к рассмотрению классов оценивающих множеств. На практике помимо обычных интервалов одномерными оценивающими множествами могут быть “интервалами” арифметики Кахана [197], мультиинтервалами (т.е. конечными объединениями интервалов и бесконечных полуосей [121]). В многомерном случае кроме традиционных прямых произведений вещественных интервалов в качестве оценивающих множеств используются параллелотопы (параллелепипеды) со сторонами, не обязательно параллель-

^{1.4}Для обозначения этого способа оценивания З. Румп [270] использует термин “внутреннее включение” (inner inclusion), который, на наш взгляд, совершенно не адекватен ситуации.

ными координатным осям, эллипсоиды (последние особенно популярны в дифференциальных задачах, см. [94, 146] и указанные там ссылки), шары некоторой нормы [17], пересечения некоторых независимо построенных параллелотопов (обычно это является завершающим шагом вычислительного процесса) [145] и т.п. Помимо классических одномерных комплексных интервалов в виде прямоугольников и кругов комплексной плоскости [4] широко используются круговые кольца [233] и круговые секторы [185] и пр. Суммируя вышесказанное, можно констатировать существование огромного многообразия как оценивающих множеств, так и способов оценивания множеств решений, что имеет следствием огромное разнообразие постановок интервальных задач.

Отметим совершенно специфическую роль третьего члена четверки $(\mathcal{S}, \mathcal{E}, \mathcal{M}, \varrho)$, — способ оценивания \mathcal{M} . Можно сказать, что именно присутствие отношения \mathcal{M} в первую очередь обуславливает своеобразие и особенность формы интервальных задач. Как мы уже упоминали, решение этих задач должно прежде всего удовлетворять некоторому *качественному условию*, выраженному способом оценивания \mathcal{M} , а лишь потом принимаются во внимание ошибка, близость к идеальному множеству решений и т.п.

Завершая обсуждение, следует сказать, что ответ на вопрос ‘что делать с множеством решений?’ зависит от конкретной рассматриваемой практической задачи, т.е., к примеру, от конечных целей анализа системы в применении к нашей задаче (1.2).

1.3с Задачи, которые будут рассматриваться

В оставшейся части работы мы собираемся рассмотреть две наиболее популярные интервальные задачи оценивания — задачи *внутреннюю* и *внешнюю*, т.е. задачи оценивания множеств решений $\Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ *подмножествами* и *объемлющими множествами*.

Оценивание подмножествами важно нам в тех случаях, когда ответ к задаче, т.е. оценивающее множество, должно состоять лишь из точек, для которых справедливо определяющее условие (1.2). Оценивающие множества, которые находятся в любом другом отношении с оцениваемым множеством решений, могут содержать точки, для которых неверно (1.2), что нередко неприемлемо для практики. Короче говоря, лишь для подмножеств $\Pi \subseteq \Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ ответ на вопрос (1.2) остаётся справедливым для всех точек $x \in \Pi$.

Выбирая более простыми оценочными множествами брусы со сторонами, параллельными координатным осям (т.е. интервальные векторы), мы приходим к задаче внутреннего интервального оценивания множеств решений (1.5):

<p>Для интервальной системы уравнений $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$ и кванторных векторов α и β того же размера, что \mathbf{a} и \mathbf{b} соответственно, найти внутреннюю интервальную оценку множества решений $\Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$.</p>	(1.20)
--	--------

Ниже мы для краткости иногда будем называть эту задачу *внутренней задачей* для интервальной системы уравнений $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$ с распределением типов интервальной неопределённости, задаваемым квантификаторами α и β , или, что эквивалентно, дизъюнктивными разложениями $\mathbf{a} = \mathbf{a}^{\forall} + \mathbf{a}^{\exists}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{b}^{\forall} + \mathbf{b}^{\exists}$.

Полезно проследить те конкретные формы, которые принимает задача (1.20) в различных практических ситуациях. Если в качестве множества решений в (1.20) берётся

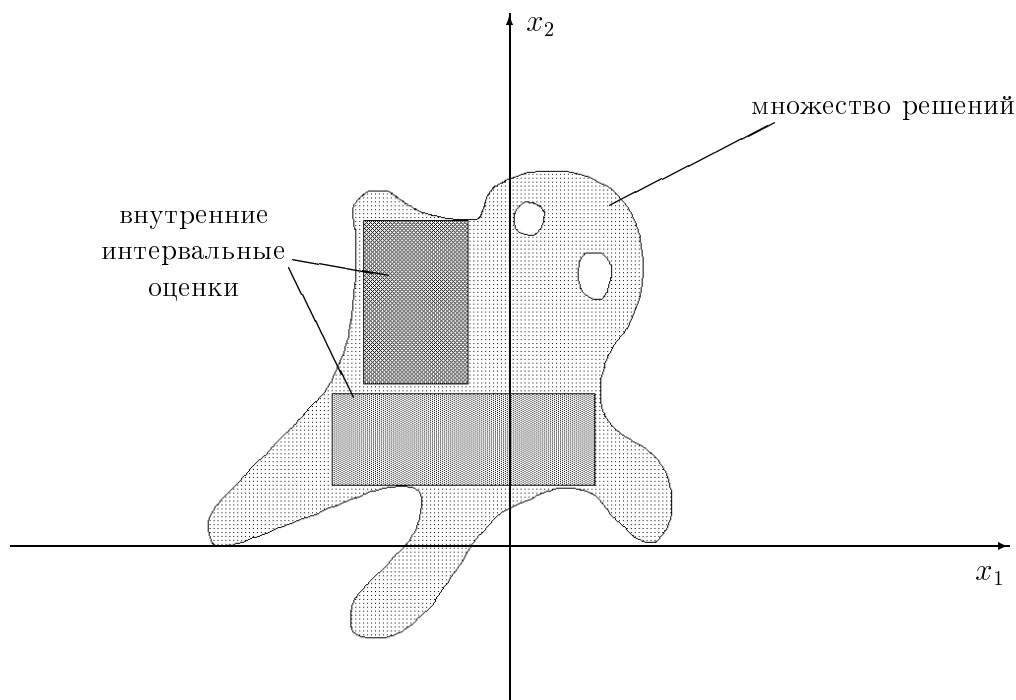


Рис. 1.4: “Внутренние задачи” — это задачи *внутреннего* интервального оценивания тех или иных множеств решений.

допустимое множество решений $\Xi_{tol}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$, то соответствующая задача — это классическая *задача о допусках (tolerance problem)* [143, 183, 216, 219, 282, 286, 291], которая имеет многочисленные плодотворные приложения. Задача о допусках есть, по существу, задача стабилизации системы в пределах заданного выходного коридора \mathbf{b} для случая, когда *все* параметры системы a_i подвержены некоторым ограниченным возмущениям.

Пусть неопределённость параметров a_i носит смешанный характер, часть из них имеют А-неопределённость, а остальные Е-неопределённость (т.е. некоторые входные параметры являются возмущающими, а некоторые — управляющими), но все $\beta_i = \exists, i = 1, 2, \dots, m$. Тогда мы приходим к задаче стабилизации системы, имеющей возможность управления, которую ряд исследователей называет “задача обеспечения устойчивости функционирования при крупномасштабных возмущениях” [38]. Такой же является задача управления качеством продукции, рассмотренная нами в §1.2 с. В важной методологической работе [5] задача обеспечения “устойчивости функционирования” иллюстрируется на конкретных практических примерах из кораблестроения, токсикологии, экономики и электроэнергетики. В литературе интенсивно используется и другое название этого типа задач: “задача обеспечения живучести системы” [5]. Напротив, если параметры a_i имеют смешанную неопределённость (часть А-неопределённость, а остальная часть — Е-неопределённость), тогда как все $\beta_i = \forall, i = 1, 2, \dots, m$, то перед нами задача управления в условиях ограниченных возмущений.

Следует отметить, что термин “условие живучести” давно и широко применяется в русской научной литературе для обозначения условия принадлежности выходов системы к некоторому а priori заданному множеству режимов [5]. Но этот же термин в последние годы часто применяется для совершенно других целей. В частности, Ж.-П. Обэн и его последователи (см., например, [73, 74, 126, 127]) говорят об “условии живучести” (viabil-

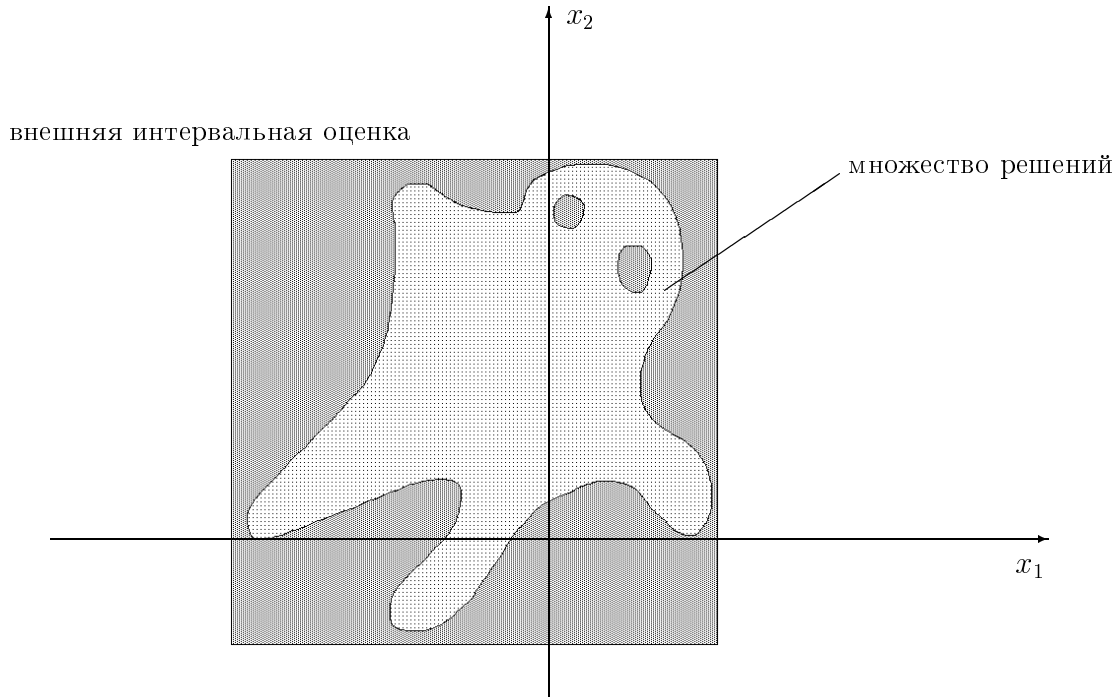


Рис. 1.5: “Внешние задачи” — это задачи *внешнего* интервального оценивания тех или иных множеств решений.

ity condition), “задаче о живучести” и т.п. в контексте некоторого специального раздела теории дифференциальных включений, вкладывая в эти понятия смысл, имеющий весьма отдаленное отношение к рассматриваемым нами вопросам.

В ряде ситуаций практический смысл имеет внешнее оценивание обобщённых множеств решений $\Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$, но это уже другая задача, отличная от (1.20), и её мы тоже рассмотрим в нашей работе:

Для интервальной системы уравнений $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$ и кванторных векторов α и β того же размера, что \mathbf{a} и \mathbf{b} соответственно, найти внешнюю интервальную оценку множества решений $\Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$.

(1.21)

Задача (1.21) — это, по существу, интервальная форма хорошо известной задачи о параметрической чувствительности системы управления, когда и вариации параметров и оценки вариаций решения рассматриваются в виде интервалов. Частный случай этой задачи, требующий внешнего оценивания объединённого множества решений, является одной из старейших и практически наиболее важных задач интервального анализа, а различным аспектам её решения с начала 60-х годов и по настоящее время посвящены несколько монографий и сотни статей. Обширную, но далеко не исчерпывающую, информацию о ней вместе с библиографией работ читатель может найти в [4, 29, 45, 166, 181, 219, 226, 288]. Часто встречается и покомпонентная форма рассмотренной задачи:

Для интервальной системы уравнений $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$ и кванторных векторов α и β того же размера, что \mathbf{a} и \mathbf{b} соответственно, найти “внешние” покоординатные оценки множества решений $\Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ или, иначе, оценить величины $\min\{x_k \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})\}$ снизу и $\max\{x_k \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})\}$ сверху для $k = 1, 2, \dots, n$.

Ниже мы иногда будем называть задачу (1.21)–(1.22) *внешней задачей* для интервальной системы $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$ с распределением интервальных неопределённостей, описываемых кванторами α и β , или, что эквивалентно, дизъюнктивными разложениями $\mathbf{a} = \mathbf{a}^\forall + \mathbf{a}^\exists$ и $\mathbf{b} = \mathbf{b}^\forall + \mathbf{b}^\exists$.

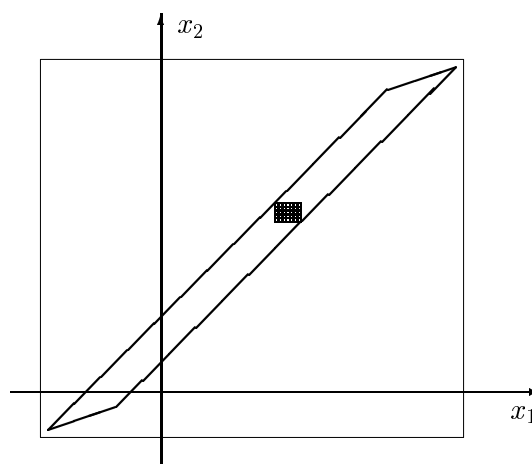


Рис. 1.6: Иногда интервальное оценивание множества решений (вытянутый косой параллелепипед) может оказаться малоинформативным.

До сих пор задачи вида (1.20) и (1.21) решались лишь минимаксными методами математического программирования (см., в частности, [5, 38]). Одной из целей нашей работы является развитие новых вычислительно эффективных *интервальных* подходов к анализу статических систем с интервальной неопределённостью, т.е. к решению задач (1.20) и (1.21). Принципы, на которых мы собираемся основывать наши методы, в значительной степени являются необычными для современного интервального анализа. Мы развиваем, в частности, *формальный подход* к решению вышеупомянутых задач, и краеугольным камнем многих наших построений является понятие *формального решения* интервального уравнения (называемое также иногда *алгебраическим решением*):

Определение 1.3.2 *Интервал (интервальный вектор, интервальная матрица и т.п.) называется формальным решением интервального уравнения (системы уравнений, неравенств и т.п.), если подстановка этого интервала в рассматриваемое уравнение и выполнение всех интервальных арифметических, аналитических и т.п. операций приводят к истинному отношению.*

Например, интервал $[0, 1]$ является формальным решением интервального квадратного уравнения $[1, 2]x^2 + [-1, 1]x = [-1, 3]$. Интервальная функция $\mathbf{x}(t) = 10.5[e^t, e^{2t}]$ есть формальное решение интервального дифференциального уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt} = [1, 2].$$

Интервальная функция $\mathbf{x}(t) = [0, 2t]$ на $[0, 1]$ — это формальное решение следующего интервального интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$x(t) + \int_0^1 (1.5s + t)x(s) ds = [0, 3t + 1].$$

Последние два (чисто иллюстративных) примера показывают главный недостаток термина “алгебраическое решение”: он подчеркивает алгебраическую природу операций, которые образуют рассматриваемое интервальное уравнение, так что говорить об “алгебраическом” решении интервальных дифференциальных, интегральных и т.п. уравнений по меньшей мере некорректно.

Понятие формального решения соответствует обычному общематематическому пониманию решения уравнения и выделение для него отдельного термина имеет скорее исторические причины. Впервые подобные решения рассмотрел С. Берти [133], который не дал им никакого имени и исследовал лишь простейший одномерный линейный случай. Впоследствии К. Никель [223] и Х. Рачек и В. Зауэр [244] изучали такого рода решения для интервальных линейных систем уравнений, причём в [244] и был введен популярный термин “алгебраическое решение”.

Тем не менее, большого резонанса упомянутые работы не получили, и для интервальных уравнений и систем уравнений формальные (алгебраические) решения долгое время считались малосодержательными и почти не изучались. При этом фраза “решение интервальной задачи” стала обозначать, главным образом, некоторую *оценку* (приближение, аппроксимацию) того или иного *множества решений* задачи, либо процесс получения такой оценки. В этом смысле рассматриваемые нами “внешняя задача” (1.21) и “внутренняя задача” (1.20) является типичными интервальными постановками: под их “решениями” имеются в виду внешняя и внутренняя интервальные оценки некоторых множеств решений.

Но в последние годы положение формального решения в интервальном анализе радикально изменилась. В основном трудами отечественных исследователей были обнаружены глубокие и практически важные приложения формальных решений. В частности, сущностью развиваемого нами в значительной части этой работы так называемого формального подхода является замена исходной задачи оценивания (1.2) множества решений (внутреннего или внешнего) на *задачу нахождения формального решения* некоторого специального вспомогательного уравнения в *полной интервальной арифметике Каухера* \mathbb{KR} . Тем самым первоначальная задача, по существу, сводится к традиционной задаче численного анализа. Такое сведение является чрезвычайно привлекательным с вычислительной точки зрения, хотя и обладает тем недостатком, что формальное решение вспомогательного интервального уравнения может не обязательно существовать даже в случае существования решения у исходной задачи (1.20), т.е. когда $\Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ непусто.

Характеризации и свойства множеств решений

Вторая Глава работы открывается параграфом, посвящённым аналитической характеристике множеств АЕ-решений интервальных систем общих нелинейных уравнений. Хотя полученный результат практически и не используется далее в нашей работе, он имеет методологическое значение, вскрывая минимаксную природу множеств АЕ-решений и связанных с ними задач.

Как известно, основным инструментом интервального анализа являются так называемые *интервальные арифметики* — алгебраические системы, формализующие арифметические операции между интервалами как целостными объектами. Во втором параграфе этой Главы мы даём обзор различных интервальных арифметик, уделив особое внимание *полной интервальной арифметике Каухера*, которая играет центральную роль в развиваемой нами теории, но пока недостаточно известна исследователям. Опираясь на свойства арифметики Каухера, мы далее в §2.3 выводим аналитические характеристики множеств АЕ-решений интервальных линейных систем уравнений, фактически, мост от кванторного формализма исходных определений к технике вычисления их оценок.

2.1 Аналитическая характеристика множеств АЕ-решений

Теорема 2.1.1

$$\Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \bigcap_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\forall} \bigcap_{\hat{b} \in \mathbf{b}^\forall} \bigcup_{\check{a} \in \mathbf{a}^\exists} \bigcup_{\check{b} \in \mathbf{b}^\exists} \{ x \in \mathbb{R}^n \mid F(\hat{a} + \check{a}, x) = \hat{b} + \check{b} \}.$$

Доказательство. По определению операций пересечения и объединения множеств

$$\begin{aligned} \Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{a} \in \mathbf{a}^\forall)(\forall \hat{b} \in \mathbf{b}^\forall)(\exists \check{a} \in \mathbf{a}^\exists)(\exists \check{b} \in \mathbf{b}^\exists)(F(\hat{a} + \check{a}, x) = \hat{b} + \check{b}) \} \\ &= \bigcap_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\forall} \bigcap_{\hat{b} \in \mathbf{b}^\forall} \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists \check{a} \in \mathbf{a}^\exists)(\exists \check{b} \in \mathbf{b}^\exists)(F(\hat{a} + \check{a}, x) = \hat{b} + \check{b}) \} \\ &= \bigcap_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\forall} \bigcap_{\hat{b} \in \mathbf{b}^\forall} \left(\bigcup_{\check{a} \in \mathbf{a}^\exists} \bigcup_{\check{b} \in \mathbf{b}^\exists} \{ x \in \mathbb{R}^n \mid F(\hat{a} + \check{a}, x) = \hat{b} + \check{b} \} \right). \end{aligned}$$

■

Теорема 2.1.2 Для интервальной системы уравнений

$$F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b} \quad (2)$$

принадлежность точки x множеству АЕ-решений $\Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ влечёт справедливость следующей системы неравенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \min_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\vee} \max_{\check{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_i(\hat{a} + \check{a}, x) \geq \bar{\mathbf{b}}_i, \\ \max_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\vee} \min_{\check{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_i(\hat{a} + \check{a}, x) \leq \underline{\mathbf{b}}_i, \\ \text{— для компонент } \mathbf{b}_i, i = 1, \dots, s, \\ \text{имеющих интервальную } A\text{-неопределённость,} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \min_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\vee} \max_{\check{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_i(\hat{a} + \check{a}, x) \geq \underline{\mathbf{b}}_i, \\ \max_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\vee} \min_{\check{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_i(\hat{a} + \check{a}, x) \leq \bar{\mathbf{b}}_i, \\ \text{— для компонент } \mathbf{b}_i, i = s + 1, \dots, m, \\ \text{имеющих интервальную } E\text{-неопределённость.} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Если же отображение $F : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ таково, что каждый из параметров a_{r+1}, \dots, a_l , соответствующих интервальной E -неопределённости, входит лишь в одну из компонент $F_i(a, x)$, то принадлежность $x \in \Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ равносильна системе неравенств (2.1).

Доказательство. Положим $b = (b_1, b_2, \dots, b_m) = \hat{b} + \check{b}$, $\hat{b}, \check{b} \in \mathbb{R}^m$, и выполним с выделяющим предикатом рассматриваемого АЕ-множества решений интервальной системы уравнений следующие эквивалентные преобразования:

$$\begin{aligned} & \Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ &= \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{a} \in \mathbf{a}^\vee)(\forall \hat{b} \in \mathbf{b}^\vee)(\exists \check{a} \in \mathbf{a}^\exists)(\exists \check{b} \in \mathbf{b}^\exists)(F(a, x) = b) \} \\ &= \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{a} \in \mathbf{a}^\vee)(\forall \hat{b} \in \mathbf{b}^\vee)(\exists \check{a} \in \mathbf{a}^\exists) \\ & \quad (F_1(a, x) = b_1 \ \& \\ & \quad \quad \dots \quad \& \\ & \quad F_s(a, x) = b_s \ \& \\ & \quad F_{s+1}(a, x) \in \mathbf{b}_{s+1} \ \& \\ & \quad \quad \dots \quad \& \\ & \quad F_m(a, x) \in \mathbf{b}_m) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{a} \in \mathbf{a}^\forall)(\forall \hat{b} \in \mathbf{b}^\forall)(\exists \check{a} \in \mathbf{a}^\exists) \\
 &\quad (F_1(a, x) \geq b_1 \ \& \ F_1(a, x) \leq b_1 \ \& \\
 &\quad \quad \dots \quad \& \\
 &\quad F_s(a, x) \geq b_s \ \& \ F_s(a, x) \leq b_s \ \& \\
 &\quad F_{s+1}(a, x) \geq \underline{b}_{s+1} \ \& \ F_{s+1}(a, x) \leq \overline{b}_{s+1} \ \& \\
 &\quad \quad \dots \quad \& \\
 &\quad F_m(a, x) \geq \underline{b}_m \ \& \ F_m(a, x) \leq \overline{b}_m) \} \\
 &\subseteq \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{a} \in \mathbf{a}^\forall)(\forall \hat{b} \in \mathbf{b}^\forall) \\
 &\quad ((\exists \check{a} \in \mathbf{a}^\exists)(F_1(a, x) \geq b_1) \ \& \ (\exists \check{a} \in \mathbf{a}^\exists)(F_1(a, x) \leq b_1) \ \& \\
 &\quad \quad \dots \quad \& \\
 &\quad (\exists \check{a} \in \mathbf{a}^\exists)(F_s(a, x) \geq b_s) \ \& \ (\exists \check{a} \in \mathbf{a}^\exists)(F_s(a, x) \leq b_s) \ \& \\
 &\quad (\exists \check{a} \in \mathbf{a}^\exists)(F_{s+1}(a, x) \geq \underline{b}_{s+1}) \ \& \ (\exists \check{a} \in \mathbf{a}^\exists)(F_{s+1}(a, x) \leq \overline{b}_{s+1}) \ \& \\
 &\quad \quad \dots \quad \& \\
 &\quad (\exists \check{a} \in \mathbf{a}^\exists)(F_m(a, x) \geq \underline{b}_m) \ \& \ (\exists \check{a} \in \mathbf{a}^\exists)(F_m(a, x) \leq \overline{b}_m)) \}.
 \end{aligned}$$

Отметим, что последнее включение обращается в точное равенство, если верны условия, накладываемые на $F(a, x)$ во второй части условия Теоремы. Именно, если каждая компонента F имеет лишь единственное вхождение переменных, соответствующих ненулевым элементам в \mathbf{a}^\exists и эти вхождения в разных компонентах F не пересекаются друг с другом, то мы имеем право “проносить” кванторы существования \exists к отдельным членам конъюнкций [49].

Далее, для любой функции f , непрерывной на некотором интервале \mathbf{a} , имеют место следующие эквивалентности:

$$(\exists a \in \mathbf{a})(f(a) \geq b) \iff \max_{a \in \mathbf{a}} f(a) \geq b, \quad (2.2)$$

$$(\exists a \in \mathbf{a})(f(a) \leq b) \iff \min_{a \in \mathbf{a}} f(a) \leq b. \quad (2.3)$$

Поэтому мы можем продолжить наши выкладки с выделяющим предикатом следующим образом

$$\begin{aligned}
 &\Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \\
 &\subseteq \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{a} \in \mathbf{a}^\forall)(\forall \hat{b} \in \mathbf{b}^\forall) \right. \\
 &\quad \left((\max_{\check{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_1(a, x) \geq b_1) \ \& \ (\min_{\check{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_1(a, x) \leq b_1) \ \& \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \dots \quad \& \\
& (\max_{\hat{a} \in \mathbf{a}^{\exists}} F_s(a, x) \geq b_s) \& (\min_{\hat{a} \in \mathbf{a}^{\exists}} F_s(a, x) \leq b_s) \& \\
& (\max_{\hat{a} \in \mathbf{a}^{\exists}} F_{s+1}(a, x) \geq \underline{\mathbf{b}}_{s+1}) \& (\min_{\hat{a} \in \mathbf{a}^{\exists}} F_{s+1}(a, x) \leq \overline{\mathbf{b}}_{s+1}) \& \\
& \dots \quad \& \\
& (\max_{\hat{a} \in \mathbf{a}^{\exists}} F_m(a, x) \geq \underline{\mathbf{b}}_m) \& (\min_{\hat{a} \in \mathbf{a}^{\exists}} F_m(a, x) \leq \overline{\mathbf{b}}_m) \Big) \}.
\end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}
(\forall b \in \mathbf{b})(f(a) \geq b) & \iff f(a) \geq \overline{\mathbf{b}}, \\
(\forall b \in \mathbf{b})(f(a) \leq b) & \iff f(a) \leq \underline{\mathbf{b}},
\end{aligned}$$

так что имеем

$$\begin{aligned}
& \Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \\
& \subseteq \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{a} \in \mathbf{a}^{\forall}) \right. \\
& \quad \left((\max_{\hat{a} \in \mathbf{a}^{\exists}} F_1(a, x) \geq \overline{\mathbf{b}}_1) \& (\min_{\hat{a} \in \mathbf{a}^{\exists}} F_1(a, x) \leq \underline{\mathbf{b}}_1) \& \right. \\
& \quad \quad \dots \quad \& \\
& \quad (\max_{\hat{a} \in \mathbf{a}^{\exists}} F_s(a, x) \geq \overline{\mathbf{b}}_s) \& (\min_{\hat{a} \in \mathbf{a}^{\exists}} F_s(a, x) \leq \underline{\mathbf{b}}_s) \& \\
& \quad (\max_{\hat{a} \in \mathbf{a}^{\exists}} F_{s+1}(a, x) \geq \underline{\mathbf{b}}_{s+1}) \& (\min_{\hat{a} \in \mathbf{a}^{\exists}} F_{s+1}(a, x) \leq \overline{\mathbf{b}}_{s+1}) \& \\
& \quad \quad \dots \quad \& \\
& \quad \left. (\max_{\hat{a} \in \mathbf{a}^{\exists}} F_m(a, x) \geq \underline{\mathbf{b}}_m) \& (\min_{\hat{a} \in \mathbf{a}^{\exists}} F_m(a, x) \leq \overline{\mathbf{b}}_m) \right) \}.
\end{aligned}$$

Наконец,

$$\begin{aligned}
(\forall a \in \mathbf{a})(f(a) \geq b) & \iff \min_{a \in \mathbf{a}} f(a) \geq b, \\
(\forall a \in \mathbf{a})(f(a) \leq b) & \iff \max_{a \in \mathbf{a}} f(a) \leq b,
\end{aligned}$$

и мы получаем

$$\begin{aligned}
& \Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \\
& \subseteq \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\min_{\hat{a} \in \mathbf{a}^{\forall}} \max_{\hat{a} \in \mathbf{a}^{\exists}} F_1(a, x) \geq \overline{\mathbf{b}}_1) \& (\max_{\hat{a} \in \mathbf{a}^{\forall}} \min_{\hat{a} \in \mathbf{a}^{\exists}} F_1(a, x) \leq \underline{\mathbf{b}}_1) \& \right. \\
& \quad \quad \dots \quad \& \\
& \quad \left. (\min_{\hat{a} \in \mathbf{a}^{\forall}} \max_{\hat{a} \in \mathbf{a}^{\exists}} F_s(a, x) \geq \overline{\mathbf{b}}_s) \& (\max_{\hat{a} \in \mathbf{a}^{\forall}} \min_{\hat{a} \in \mathbf{a}^{\exists}} F_s(a, x) \leq \underline{\mathbf{b}}_s) \& \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\min_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\vee} \max_{\check{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_{s+1}(a, x) \geq \underline{\mathbf{b}}_{s+1} \right) \& \left(\max_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\vee} \min_{\check{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_{s+1}(a, x) \leq \overline{\mathbf{b}}_{s+1} \right) \& \\ & \dots \quad \& \\ & \left. \left(\min_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\vee} \max_{\check{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_m(a, x) \geq \underline{\mathbf{b}}_m \right) \& \left(\max_{\hat{a} \in \mathbf{a}^\vee} \min_{\check{a} \in \mathbf{a}^\exists} F_m(a, x) \leq \overline{\mathbf{b}}_m \right) \right\}, \end{aligned}$$

что совпадает с системой неравенств (2.1). При этом справедливость условий второй части Теоремы действительно имеет следствием выполнение равенств на всех этапах выкладок. ■

2.2 Интервальные арифметики

2.2 а Классическая интервальная арифметика

Напомним, что классическая интервальная арифметика является алгебраической системой $\langle \mathbb{IR}, +, -, \cdot, / \rangle$, носитель которой — множество всех вещественных интервалов $\mathbf{x} := [\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}] = \{x \in \mathbb{R} \mid \underline{\mathbf{x}} \leq x \leq \overline{\mathbf{x}}\}$, а бинарные операции — сложение, вычитание, умножение и деление — определены “по представителям”, т.е. в соответствии со следующим фундаментальным принципом:

$$\mathbf{x} \star \mathbf{y} := \{x \star y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\} \quad (2.4)$$

для всех интервалов \mathbf{x}, \mathbf{y} , таких что выполнение точечной операции $x \star y$, $\star \in \{+, -, \cdot, /\}$, имеет смысл для любых $x \in \mathbf{x}$ и $y \in \mathbf{y}$ [4, 29, 45, 166, 181, 219]. Развёрнутое определение интервальных арифметических операций таково:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = [\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}}], \quad (2.5)$$

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = [\underline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}], \quad (2.6)$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = [\min\{\underline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}}\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\overline{\mathbf{y}}\}, \max\{\underline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}}\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\overline{\mathbf{y}}\}], \quad (2.7)$$

$$\mathbf{x}/\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot [1/\overline{\mathbf{y}}, 1/\underline{\mathbf{y}}] \quad \text{для } \mathbf{y} \not\ni 0. \quad (2.8)$$

При этом вещественные числа a отождествляются с интервалами нулевой ширины $[a, a]$, а через $(-\mathbf{a})$ обозначается интервал $(-1) \cdot \mathbf{a}$.

Если S — непустое ограниченное множество в \mathbb{R}^n , то его *интервальной оболочкой* $\square S$ называется наименьший по включению интервальный вектор, содержащий S . Эквивалентное определение: интервальная оболочка множества S — это пересечение всех интервальных векторов, содержащих S :

$$\square S = \cap \{ \mathbf{x} \in \mathbb{IR}^n \mid \mathbf{x} \supseteq S \}.$$

2.2 б Интервальная арифметика Кахана

Еще одна популярная интервальная арифметика — это *расширенная интервальная арифметика Кахана* [197]. Помимо обычных интервалов из \mathbb{IR} её элементами являются множества вида $(-\infty, p] \cup [q, +\infty)$, $p \leq q$, и $(-\infty, p]$, $[q, +\infty)$. Результаты сложения, вычитания, умножения и деления \mathbf{x}/\mathbf{y} при $0 \notin \mathbf{y}$ в классической интервальной арифметике и

арифметике Кахана полностью совпадают. Но в арифметике Кахана дополнительно определено деление обычных интервалов \mathbf{x} и \mathbf{y} с $0 \in \mathbf{y}$. Для удобства мы выпишем соответствующие результаты в развернутой форме:

$$\mathbf{x}/\mathbf{y} = \frac{[\underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}]}{[\underline{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{y}}]} = \begin{cases} \mathbf{x} \cdot [1/\bar{\mathbf{y}}, 1/\underline{\mathbf{y}}], & \text{если } 0 \notin \mathbf{y}, \\ (-\infty, \infty), & \text{если } 0 \in \mathbf{x} \text{ и } 0 \in \mathbf{y}, \\ [\bar{\mathbf{x}}/\underline{\mathbf{y}}, +\infty), & \text{если } \bar{\mathbf{x}} < 0 \text{ и } \underline{\mathbf{y}} < \bar{\mathbf{y}} = 0, \\ (-\infty, \bar{\mathbf{x}}/\bar{\mathbf{y}}] \cup [\bar{\mathbf{x}}/\underline{\mathbf{y}}, \infty), & \text{если } \bar{\mathbf{x}} < 0 \text{ и } \underline{\mathbf{y}} < 0 < \bar{\mathbf{y}}, \\ (-\infty, \bar{\mathbf{x}}/\bar{\mathbf{y}}], & \text{если } \bar{\mathbf{x}} < 0 \text{ и } 0 = \underline{\mathbf{y}} < \bar{\mathbf{y}}, \\ (-\infty, \underline{\mathbf{x}}/\underline{\mathbf{y}}], & \text{если } 0 < \underline{\mathbf{x}} \text{ и } \underline{\mathbf{y}} < \bar{\mathbf{y}} = 0, \\ (-\infty, \underline{\mathbf{x}}/\underline{\mathbf{y}}] \cup [\underline{\mathbf{x}}/\bar{\mathbf{y}}, \infty), & \text{если } 0 < \underline{\mathbf{x}} \text{ и } \underline{\mathbf{y}} < 0 < \bar{\mathbf{y}}, \\ [\underline{\mathbf{x}}/\bar{\mathbf{y}}, \infty), & \text{если } 0 < \underline{\mathbf{x}} \text{ и } 0 = \underline{\mathbf{y}} < \bar{\mathbf{y}}, \\ \emptyset, & \text{если } 0 \notin \mathbf{x} \text{ и } 0 = \mathbf{y}. \end{cases} \quad (2.9)$$

Подробное описание интервальной арифметики, формализующей операции над интервалами и их дополнениями, аналогичные (2.9), можно найти в [197]. Эта арифметика полезна, например, при вычислениях с цепными дробями, но для наших целей вполне достаточно использовать формулы (2.9), а затем пересечь результат с обычным интервалом.

Уместно отметить, что в арифметике Кахана выполняются как монотонность операций по включению, так и фундаментальное свойство

$$\mathbf{x} * \mathbf{y} = \{ x * y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y} \} \quad \text{для } * \in \{ +, -, \cdot, / \},$$

являющееся основой классической интервальной арифметики и её применений.

2.2 с Неформальное обсуждение

К сожалению, свойства классической интервальной арифметики \mathbb{IR} являются во многих отношениях неудовлетворительными. Алгебраические свойства \mathbb{IR} в целом плохи, поскольку

- все интервалы с ненулевой шириной, т.е. большинство элементов \mathbb{IR} , не имеют обратных по отношению к операциям (2.5)–(2.8),
- арифметические операции (2.5)–(2.8) связаны друг с другом довольно слабыми соотношениями (типа известной субдистрибутивности), а полноценная дистрибутивность умножения и деления относительно сложения и вычитания не имеет места.

Как следствие, во-первых, в \mathbb{IR} элементарные уравнения

$$\mathbf{a} + x = \mathbf{b},$$

$$\mathbf{a} \cdot x = \mathbf{b}$$

и им подобные не всегда имеют формального решения. Во-вторых, техника символьных преобразований в классической интервальной арифметике \mathbb{IR} довольно бедна. Мы не имеем возможности даже переносить члены из одной части уравнения в другую и, из-за отсутствия дистрибутивности, приводить подобные члены.

Кроме того, порядковые свойства классической интервальной арифметики \mathbb{IR} также неудовлетворительны: она не является решеткой [8] относительно естественного упорядочения по включению “ \subseteq ”. Первая из операций

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} := \inf_{\subseteq} \{ \mathbf{x}, \mathbf{y} \} = [\max\{\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}\}, \min\{\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}\}], \quad (2.10)$$

— взятие точной нижней грани относительно \subseteq , —

$$\mathbf{x} \vee \mathbf{y} := \sup_{\subseteq} \{ \mathbf{x}, \mathbf{y} \} = [\min\{\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}\}, \max\{\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}\}], \quad (2.11)$$

— взятие точной верхней грани относительно \subseteq , —

не всегда выполнима в классической интервальной арифметике.^{2.1}

Наконец, как мы увидели в §2.1, поставленные нами основные задачи (1.2), (1.20) и (1.21) являются по своей природе *минимаксными*, т.е. такими, которые требуют вычисления минимаксов функций многих переменных. Но для решения минимаксных задач желательно иметь в своем распоряжении специальную “минимаксную” интервальную арифметику, которая реализует вычисление минимаксов на уровне элементарных арифметических операций, т.е. при сложении, вычитании, умножении и делении, каждая из которых также является функцией “многих” (двух) переменных. Но классическая интервальная арифметика и её хорошо известные обобщения — арифметика Кахана, арифметика Хансена (см. [166]) и ряд других — разработаны для оценивания областей значений арифметических операций и выражений или, иначе, для вычисления чистых минимумов и максимумов по всем переменным сразу. Следовательно, эти интервальные арифметики не вполне пригодны нам ещё и потому, что плохо соответствуют внутренней природе рассматриваемых задач.

Отсутствие дистрибутивности и вытекающая из неё невозможность приводить подобные члены является, конечно, наиболее серьёзным дефектом интервальной арифметики, для исправления которого потребуется, по-видимому, её значительная переделка как алгебраической системы. В настоящий момент не вполне ясны даже возможность и целесообразность этого шага. Что же касается необратимости арифметических операций и плохих порядковых свойств интервальной арифметики, то эти неудобства могут быть частично преодолены более лёгким и естественным путём: нам следует достроить \mathbb{IR} до некоторой более широкой и полной алгебраической системы \mathfrak{A} (или, иначе, вложить \mathbb{IR} в более широкую алгебраическую систему \mathfrak{A}), которая имела бы более хорошие алгебраические и порядковые свойства (обратимость элементов и т.п.), в которой была бы более богатой техника эквивалентных преобразований и более мощны аналитические средства. Затем мы будем искать требуемое формальное решение интервальной системы уравнений в этой более широкой алгебраической системе \mathfrak{A} , а не в обычной интервальной арифметике \mathbb{IR} , так как можно надеяться, что модифицированная подобным образом задача является более лёгкой в силу более благоприятных свойств алгебраической системы \mathfrak{A} . Но если полученный в результате этой процедуры интервальный вектор окажется лежащим в \mathbb{IR} (а не в $\mathfrak{A} \setminus \mathbb{IR}$), то он и будет искомым формальным решением исходной системы уравнений. Идея облегчить нахождение формальных решений путём предварительного перехода в более широкую алгебраическую систему была впервые предложена С. П. Шарым в [100].

Как можно осуществить требуемое расширение классической интервальной арифметики? Здесь нам на выручку приходит абстрактная алгебра. С более общей точки зрения

^{2.1}Если \mathbf{x}, \mathbf{y} — обычные одномерные интервалы с непустым пересечением, то $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ и $\mathbf{x} \vee \mathbf{y}$ совпадают с $\mathbf{x} \cap \mathbf{y}$ и $\mathbf{x} \cup \mathbf{y}$ соответственно. Но в общем случае это не так.

арифметика \mathbb{IR} является коммутативной полугруппой как относительно сложения, так и относительно умножения.^{2.2} Известно (см., например, [57]), что всякая коммутативная полугруппа, в которой справедлив так называемый “закон сокращения”, может быть вложена в группу (или, что эквивалентно, расширена до группы), т.е. в действительно более богатую алгебраическую систему, в которой каждый элемент имеет обратный. Интервальная арифметика как раз таки и является коммутативной полугруппой, удовлетворяющей закону сокращения относительно сложения, а относительно умножения полугруппу с законом сокращения образуют все интервалы, не содержащие нуля.^{2.3}

По счастью, все технические конструкции, необходимые для такого согласованного расширения интервальных полугрупп по сложению и умножению были реализованы немецким исследователем Э. Каухером ещё в 70-е годы. В работах [177, 178, 179], Каухер построил алгебраическую систему, названную им “расширенной интервальной арифметикой”, которая включает в себя классическую интервальную арифметику \mathbb{IR} как собственное подмножество и вполне удовлетворяет нашим требованиям: она является группой по сложению и “почти группой” по умножению. Кроме того, арифметика Каухера — решётка относительно порядка по включению, т.е. обладает лучшими в сравнении с классической арифметикой \mathbb{IR} порядковыми свойствами. Каухер при расширении \mathbb{IR} опирался на свойство монотонности интервальных арифметических операций по включению и сохранил его в новой интервальной арифметике. Подчёркивая хорошие свойства новой алгебраической системы, мы будем называть её *полной интервальной арифметикой* или, по имени её создателя, *интервальной арифметикой Каухера*, обозначая \mathbb{KR} . Ещё одним замечательным свойством полной интервальной арифметики Каухера является то, что именно она является минимаксной интервальной арифметикой, в которой вычисление минимаксов может быть осуществлено на уровне сложения, вычитания, умножения и деления.

Подробное описание арифметики \mathbb{KR} и её многочисленных замечательных свойств можно найти, например, в оригинальных работах Э. Каухера [177, 179]^{2.4}, или же в трудах испанских исследователей под руководством Э. Гарденьеса [151, 152, 153, 154, 149, 307].^{2.5}

2.2 d Полная интервальная арифметика Каухера

Элементами арифметики \mathbb{KR} являются пары вещественных чисел $[\eta, \vartheta]$, не обязательно связанных соотношением $\eta \leq \vartheta$. Таким образом, \mathbb{KR} получается присоединением *неправильных* интервалов $[\eta, \vartheta]$, $\eta > \vartheta$, ко множеству $\mathbb{IR} = \{[\eta, \vartheta] \mid \eta, \vartheta \in \mathbb{R}, \eta \leq \vartheta\}$ *правильных* интервалов и вещественных чисел (отождествляемых с вырожденными интервалами нулевой ширины). Элементы арифметики Каухера и образуемые из них более сложные объекты (векторы, матрицы) мы будем выделять жирным шрифтом, как и обычные интервалы. При этом, если $\mathbf{x} = [\eta, \vartheta]$, то η называется *левым концом* интервала \mathbf{x} и обозначается $\underline{\mathbf{x}}$, а ϑ называется *правым концом* интервала \mathbf{x} и обозначается $\bar{\mathbf{x}}$.

Определение 2.2.1 *Интервал \mathbf{x} назовём уравновешенным, если $\underline{\mathbf{x}} = -\bar{\mathbf{x}}$.*

^{2.2}Строго говоря, арифметика \mathbb{IR} является даже коммутативным *моноидом* относительно сложения и умножения, т.е. полугруппой с нейтральным элементом, но этот факт уже не столь важен для последующих рассуждений.

^{2.3}Применительно к интервальной арифметике “закон сокращения” означает, что для любых интервалов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ имеет место импликация $(\mathbf{a} \star \mathbf{c} = \mathbf{b} \star \mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{b})$, где \star — рассматриваемая операция.

^{2.4}Сам Каухер обозначал новую арифметику через \mathbb{IR} .

^{2.5}При этом следует иметь в виду то обстоятельство, что, интенсивно применяя полную арифметику Каухера, испанцы пользуются своим собственным весьма специфическим языком, говоря о так называемых “модальных интервалах” и т.п.

Определение 2.2.2 Абсолютной величиной (модулем) интервала \mathbf{x} называется величина

$$|\mathbf{x}| = \max\{|\underline{\mathbf{x}}|, |\overline{\mathbf{x}}|\}.$$

Правильные и неправильные интервалы, две половинки \mathbb{KR} , меняются местами в результате отображения дуализации $\text{dual} : \mathbb{KR} \rightarrow \mathbb{KR}$, меняющего местами (переворачивающего) концы интервала, т.е. такого что

$$\text{dual } \mathbf{x} := [\overline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{x}}].$$

Правильной проекцией интервала \mathbf{x} называется величина

$$\text{pro } \mathbf{x} := \begin{cases} \mathbf{x}, & \text{если } \mathbf{x} \text{ правильный,} \\ \text{dual } \mathbf{x}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Совершенно аналогично классической интервальной арифметике отношение включения одного интервала в другой определяется на полной интервальной арифметике так:

$$\mathbf{x} \subseteq \mathbf{y} \iff \underline{\mathbf{x}} \geq \underline{\mathbf{y}} \text{ и } \overline{\mathbf{x}} \leq \overline{\mathbf{y}}. \quad (2.12)$$

Например, $[3, 1] \subseteq [2, 2] = 2 \in \mathbb{R}$. Определение (2.12) делает арифметику Каухера \mathbb{KR} не просто решёткой, но даже условно полной решёткой [8] относительно порядка по включению.^{2.6}

Помимо теоретико-множественного включения на множестве интервалов \mathbb{KR} существует ещё одно частичное упорядочение, которое естественно обобщает линейный порядок “ \leq ” на вещественной оси:

Определение 2.2.3 [151] Для интервалов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{KR}$ условимся считать, что \mathbf{x} превосходит \mathbf{y} и писать “ $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ ” тогда и только тогда, когда $\underline{\mathbf{x}} \leq \underline{\mathbf{y}}$ и $\overline{\mathbf{x}} \leq \overline{\mathbf{y}}$.

Интервал (интервальный вектор, интервальная матрица) называется неотрицательным (т.е. ≥ 0), если неотрицательны оба его конца.

Интервал (интервальный вектор, интервальная матрица) называется неположительным (т.е. ≤ 0), если неположительны оба его конца.

Например, $[1, 2] \leq [3, 2]$, причём оба сравниваемых интервала $[1, 2]$ и $[3, 2]$ неотрицательны. Нередко бывает удобно оперировать понятием знака интервала, который мы определяем как

$$\text{sgn } \mathbf{x} = \begin{cases} +, & \text{если } \mathbf{x} \geq 0, \\ -, & \text{если } \mathbf{x} \leq 0, \\ \text{не определён,} & \text{если } 0 \in \text{int } \mathbf{x}. \end{cases}$$

Нулю, т.е. нулевому интервалу $[0, 0]$, может быть приписан любой знак.

Сложение и умножение на вещественные числа определяются на \mathbb{KR} следующим образом:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} := [\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}}], \quad (2.13)$$

$$\mu \cdot \mathbf{x} := \begin{cases} [\mu \underline{\mathbf{x}}, \mu \overline{\mathbf{x}}], & \text{если } \mu \geq 0, \\ [\mu \overline{\mathbf{x}}, \mu \underline{\mathbf{x}}], & \text{иначе.} \end{cases} \quad (2.14)$$

^{2.6}Условно полная решётка — это частично упорядоченное множество, в котором каждое непустое ограниченное подмножество имеет точные верхнюю и нижнюю грани [8]. Таким образом, это уже больше, чем просто решётка, но меньше, чем полная решётка.

Итак, каждый элемент \mathbf{x} из \mathbb{KR} имеет единственный обратный по сложению, обозначаемый через “орр \mathbf{x} ”, и

$$\mathbf{x} + \text{орр } \mathbf{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{орр } \mathbf{x} := [-\underline{\mathbf{x}}, -\overline{\mathbf{x}}]. \quad (2.15)$$

Непосредственно из этого факта следует, что относительно сложения \mathbb{KR} является коммутативной группой, изоморфной аддитивной группе стандартного линейного пространства \mathbb{R}^2 . Для краткости мы будем обозначать операцию, обратную сложению, так называемое внутреннее (алгебраическое) вычитание в \mathbb{KR} , через “ \ominus ”, так что

$$\mathbf{x} \ominus \mathbf{y} := \mathbf{x} + \text{орр } \mathbf{y} = [\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{y}}].$$

Ниже нам также будут полезны следующие дистрибутивные свойства сложения по отношению к решёточным операциям (см. [151, 179]):

$$\mathbf{x} + (\mathbf{y} \wedge \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \wedge (\mathbf{x} + \mathbf{z}), \quad (2.16)$$

$$\mathbf{x} + (\mathbf{y} \vee \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \vee (\mathbf{x} + \mathbf{z}), \quad (2.17)$$

Для того, чтобы выписать явные формулы для умножения, выделим в \mathbb{KR} следующие подмножества:

$$\mathcal{P} := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{KR} \mid (\underline{\mathbf{x}} \geq 0) \ \& \ (\overline{\mathbf{x}} \geq 0) \}, \quad \text{— неотрицательные интервалы,}$$

$$\mathcal{Z} := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{KR} \mid \underline{\mathbf{x}} \leq 0 \leq \overline{\mathbf{x}} \}, \quad \text{— нульсодержащие интервалы,}$$

$$-\mathcal{P} := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{KR} \mid -\mathbf{x} \in \mathcal{P} \}, \quad \text{— неположительные интервалы,}$$

$$\text{dual } \mathcal{Z} := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{KR} \mid \text{dual } \mathbf{x} \in \mathcal{Z} \}, \quad \text{— интервалы, содержащиеся в нуле.}$$

В целом $\mathbb{KR} = \mathcal{P} \cup \mathcal{Z} \cup (-\mathcal{P}) \cup (\text{dual } \mathcal{Z})$. Тогда умножение в интервальной арифметике Каухера может быть описано следующей таблицей [179]:

Таблица 2.1: Умножение в полной арифметике

\cdot	$\mathbf{y} \in \mathcal{P}$	$\mathbf{y} \in \mathcal{Z}$	$\mathbf{y} \in -\mathcal{P}$	$\mathbf{y} \in \text{dual } \mathcal{Z}$
$\mathbf{x} \in \mathcal{P}$	$[\underline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\overline{\mathbf{y}}]$	$[\overline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\overline{\mathbf{y}}]$	$[\overline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}}\overline{\mathbf{y}}]$	$[\underline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}}\overline{\mathbf{y}}]$
$\mathbf{x} \in \mathcal{Z}$	$[\underline{\mathbf{x}}\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\overline{\mathbf{y}}]$	$[\min\{ \underline{\mathbf{x}}\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{y}} \}, \max\{ \underline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\overline{\mathbf{y}} \}]$	$[\overline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{y}}]$	0
$\mathbf{x} \in -\mathcal{P}$	$[\underline{\mathbf{x}}\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{y}}]$	$[\underline{\mathbf{x}}\overline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{y}}]$	$[\overline{\mathbf{x}}\overline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{y}}]$	$[\overline{\mathbf{x}}\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{y}}]$
$\mathbf{x} \in \text{dual } \mathcal{Z}$	$[\underline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{y}}]$	0	$[\overline{\mathbf{x}}\overline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}}\overline{\mathbf{y}}]$	$[\max\{ \underline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\overline{\mathbf{y}} \}, \min\{ \underline{\mathbf{x}}\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{y}} \}]$

Как видим, умножение в арифметике Каухера допускает нетривиальные делители нуля. Например, $[-1, 2] \cdot [5, -3] = 0$. Интервальное умножение в арифметике Каухера

оказывается коммутативным и ассоциативным [151, 178, 179], но группу по умножению в \mathbb{KR} образуют лишь интервалы \mathbf{x} с $\underline{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{x}} > 0$, поскольку “закон сокращения” не выполняется ни на каком более широком подмножестве \mathbb{KR} . Для краткости мы будем обозначать операцию, обратную умножению, так называемое внутреннее (алгебраическое) деление в \mathbb{KR} , через “ \circ ”, так что

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} := \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}^{-1} = \mathbf{x} \cdot [1/\underline{\mathbf{y}}, 1/\bar{\mathbf{y}}], \quad 0 \notin \text{pro } \mathbf{y}.$$

Выписанные выше явные формулы для умножения в полной интервальной арифметике являются довольно громоздкими и малообозримыми. В ряде случаев оказывается полезным прибегнуть к другим формулам для интервального умножения, которые были предложены А. В. Лакеевым в [194]. Напомним следующее определение [8]:

Определение 2.2.4 *Для вещественного числа x величины*

$$\begin{aligned} x^+ &:= \max\{x, 0\}, \\ x^- &:= \max\{-x, 0\} \end{aligned}$$

называются положительной частью и отрицательной частью x соответственно.

Предложение 2.2.1 [194] *Для любых интервалов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{KR}$ справедливо*

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = & \\ [\max\{ \underline{\mathbf{x}}^+ \underline{\mathbf{y}}^+, \bar{\mathbf{x}}^- \bar{\mathbf{y}}^- \} - \max\{ \bar{\mathbf{x}}^+ \underline{\mathbf{y}}^-, \underline{\mathbf{x}}^- \bar{\mathbf{y}}^+ \}, \max\{ \bar{\mathbf{x}}^+ \bar{\mathbf{y}}^+, \underline{\mathbf{x}}^- \underline{\mathbf{y}}^- \} - \max\{ \underline{\mathbf{x}}^+ \bar{\mathbf{y}}^-, \bar{\mathbf{x}}^- \underline{\mathbf{y}}^+ \}]. \end{aligned}$$

Если один из интервалов \mathbf{x}, \mathbf{y} является правильным, то

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = [\underline{\mathbf{x}}^+ \underline{\mathbf{y}}^+ + \bar{\mathbf{x}}^- \bar{\mathbf{y}}^- - \max\{ \bar{\mathbf{x}}^+ \underline{\mathbf{y}}^-, \underline{\mathbf{x}}^- \bar{\mathbf{y}}^+ \}, \max\{ \bar{\mathbf{x}}^+ \bar{\mathbf{y}}^+, \underline{\mathbf{x}}^- \underline{\mathbf{y}}^- \} - \underline{\mathbf{x}}^+ \bar{\mathbf{y}}^- - \bar{\mathbf{x}}^- \underline{\mathbf{y}}^+]. \quad (2.18)$$

Эта формула не упрощается в случае, когда нам дополнительно известно, что оба интервала \mathbf{x}, \mathbf{y} правильные.

Если же из интервалов \mathbf{x}, \mathbf{y} один является правильным, а другой неправильным, то

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = [\underline{\mathbf{x}}^+ \underline{\mathbf{y}}^+ + \bar{\mathbf{x}}^- \bar{\mathbf{y}}^- - \bar{\mathbf{x}}^+ \underline{\mathbf{y}}^- - \underline{\mathbf{x}}^- \bar{\mathbf{y}}^+, \bar{\mathbf{x}}^+ \bar{\mathbf{y}}^+ + \underline{\mathbf{x}}^- \underline{\mathbf{y}}^- - \underline{\mathbf{x}}^+ \bar{\mathbf{y}}^- - \bar{\mathbf{x}}^- \underline{\mathbf{y}}^+]. \quad (2.19)$$

Достоинство формул Лакеева — их глобальный характер. Они дают единое выражение для интервального произведения $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ на всей области определения \mathbf{x} и \mathbf{y} , тогда как представление через Таблицу 2.1 имеет кусочный характер. Это неудобно, к примеру, при исследовании свойств дифференцируемости, гладкости и их аналогов, вычислении производных и т.п.

Вычитание и деление в арифметике \mathbb{KR} определяются так же, как и в классической интервальной арифметике:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} - \mathbf{y} &:= \mathbf{x} + (-1) \cdot \mathbf{y} = [\underline{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}], \\ \mathbf{x} / \mathbf{y} &:= \mathbf{x} \cdot [1/\bar{\mathbf{y}}, 1/\underline{\mathbf{y}}] \quad \text{для } 0 \notin \text{pro } \mathbf{y}. \end{aligned}$$

Наконец, аналогично своим классическим предшественникам, все операции полной интервальной арифметики являются *монотонными по включению*, т.е. относительно частичного порядка (2.12):

$$\mathbf{x} \subseteq \mathbf{x}', \mathbf{y} \subseteq \mathbf{y}' \Rightarrow \mathbf{x} \star \mathbf{y} \subseteq \mathbf{x}' \star \mathbf{y}' \quad \text{для любых } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{KR} \text{ и } \star \in \{+, -, \cdot, /\}.$$

Взаимосвязь сложения и умножения в арифметике Каухера выражается следующими соотношениями:

$$\text{если } \mathbf{x} \text{ правильный, то } \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) \subseteq \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} \quad (2.20)$$

— субдистрибутивность,

$$\text{если } \mathbf{x} \text{ неправильный, то } \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) \supseteq \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} \quad (2.21)$$

— супердистрибутивность.

Эти включения обращаются в точные равенства, в частности, в том случае когда \mathbf{x} стягивается в точку, т.е. $\mathbf{x} = x \in \mathbb{R}$:

$$x \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = x \cdot \mathbf{y} + x \cdot \mathbf{z}, \quad (2.22)$$

Другой важный случай дистрибутивности — совпадение знаков интервалов \mathbf{y} и \mathbf{z} :

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}, \quad \text{если } \mathbf{y} \mathbf{z} \geq 0. \quad (2.23)$$

Е. Гарденьесом с соавторами в [151] для полного описания всех случаев дистрибутивности было введено понятие *областей дистрибутивности* определяемых интервалом \mathbf{x} , принадлежность к которым приводит к равенствам вместо (2.20)–(2.21). Наконец, позднее С. Марковым и его сотрудниками, как классификация всевозможных частных вариантов отношения дистрибутивности сложения относительно умножения в \mathbb{KR} , был предложен “обобщённый дистрибутивный закон” [144, 236, 237], охватывающий большое количество самых различных ситуаций. Из всего многообразия рассмотренных в [144, 236, 237] случаев нам далее понадобится следующее соотношение:

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + (\text{dual } \mathbf{x}) \cdot \mathbf{z}, \quad (2.24)$$

если интервалы \mathbf{y} , \mathbf{z} и $\mathbf{y} + \mathbf{z}$ имеют определённые знаки и $\text{sgn } \mathbf{y} = -\text{sgn } \mathbf{z} = \text{sgn } (\mathbf{y} + \mathbf{z})$.

2.2е Интервальные векторы и матрицы

Операции над векторами и матрицами в полной интервальной арифметике \mathbb{KR} определяются аналогично соответствующим операциям классической интервальной арифметики \mathbb{IR} (см. [4, 211, 219]).

Определение 2.2.5 Сумма (разность) двух интервальных матриц одинакового размера есть интервальная матрица того же размера, образованная поэлементными суммами (разностями) операндов. Если $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_{ij}) \in \mathbb{KR}^{m \times l}$ и $\mathbf{Y} = (\mathbf{y}_{ij}) \in \mathbb{KR}^{l \times n}$, то произведение матриц \mathbf{X} и \mathbf{Y} есть матрица $\mathbf{Z} = (\mathbf{z}_{ij}) \in \mathbb{KR}^{m \times n}$, такая что

$$\mathbf{z}_{ij} := \sum_{k=1}^l \mathbf{x}_{ik} \mathbf{y}_{kj}.$$

Известная особенность интервального матричного умножения в классической арифметике — отсутствие ассоциативности. Для полной интервальной арифметики это также верно, хотя в некоторых важных частных ситуациях ассоциативность всё-таки имеет место. В частности, справедливо

Предложение 2.2.2 Если $X \in \mathbb{R}^{m \times l}$, $\mathbf{Y} \in \mathbb{KR}^{l \times k}$, $Z \in \mathbb{R}^{k \times n}$, то

$$(X\mathbf{Y})Z = X(\mathbf{Y}Z).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} ((X\mathbf{Y})Z)_{ij} &= \sum_{\nu} (X\mathbf{Y})_{i\nu} Z_{\nu j} = \sum_{\nu} \left(\sum_{\mu} X_{i\mu} \mathbf{Y}_{\mu\nu} \right) Z_{\nu j} \\ &= \sum_{\nu} \sum_{\mu} (X_{i\mu} \mathbf{Y}_{\mu\nu}) Z_{\nu j} = \sum_{\nu} \sum_{\mu} X_{i\mu} (\mathbf{Y}_{\mu\nu} Z_{\nu j}) \\ &= \sum_{\mu} \sum_{\nu} X_{i\mu} (\mathbf{Y}_{\mu\nu} Z_{\nu j}) \stackrel{(*)}{=} \sum_{\mu} X_{i\mu} \sum_{\nu} (\mathbf{Y}_{\mu\nu} Z_{\nu j}) \\ &= \sum_{\mu} X_{i\mu} (\mathbf{Y}Z)_{\mu j} = (X(\mathbf{Y}Z))_{ij}, \end{aligned}$$

где для вынесения за сумму общего множителя $X_{i\mu}$ в равенстве $(*)$ мы воспользовались дистрибутивным соотношением (2.22). ■

Упорядочение по включению на множестве интервальных векторов и матриц с элементами из \mathbb{KR} есть, по определению, прямое произведение [8, 9] порядков по включению на отдельных компонентах \mathbb{KR} , так что

$$\mathbf{x} \subseteq \mathbf{y} \iff \mathbf{x}_i \subseteq \mathbf{y}_i \quad \text{для всех } i.$$

Операции \vee и \wedge в применении к интервальным векторам, будут, следовательно, пониматься покомпонентно, т.е.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \vee \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{x}_2 \vee \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \vee \mathbf{y}_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \wedge \mathbf{y}_n \end{pmatrix}.$$

Аналогично, в покомпонентном смысле будет пониматься отношение “ \leq ” между интервальными векторами.

Расстояние — $\text{dist}(\cdot, \cdot)$ — между элементами полной интервальной арифметики \mathbb{KR} вводится следующим образом [179]:

$$\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \max\{|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}|, |\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}|\} = |\mathbf{x} \ominus \mathbf{y}|.$$

При этом для любых интервалов $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}', \mathbf{y}' \in \mathbb{KR}$ справедливы, как известно, неравенства (также см. [179])

$$\text{dist}(\mathbf{x}\mathbf{y}, \mathbf{x}\mathbf{y}') \leq |\mathbf{x}| \cdot \text{dist}(\mathbf{y}, \mathbf{y}'), \quad (2.25)$$

$$\text{dist}(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x}' + \mathbf{y}') \leq \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + \text{dist}(\mathbf{y}, \mathbf{y}'). \quad (2.26)$$

Что касается топологии на многомерном интервальном пространстве \mathbb{KR}^n , то она может быть определена двумя способами. Стандартный способ — введение обычной метрики^{2.7}

$$\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \max\{\|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}\|, \|\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}\|\}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{KR}^n, \quad (2.27)$$

где $\|\cdot\|$ — абсолютная векторная норма на \mathbb{R}^n . Но иногда бывает полезно работать с векторнозначным расстоянием — *псевдометрикой* по терминологии Л. Коллатца [50]^{2.8}, — которая вводится на \mathbb{KR}^n как

$$\text{Dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \begin{pmatrix} \text{dist}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) \\ \vdots \\ \text{dist}(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.28)$$

Все интервальные арифметические операции, матрично-векторные операции на \mathbb{KR}^n , а также операции \vee, \wedge , “dual”, “pro” и “opp” являются непрерывными как в метрике (2.27) (см. [179]), так и в псевдометрике (2.28).

Заметим, что оценка (2.25) в неизменном виде переносится и на многомерный случай, если под расстоянием между $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{KR}^n$ понимать псевдометрику Dist , а взятие модуля матрицы понимать поэлементно. Более точно, справедливо

Предложение 2.2.3 *Для любой интервальной матрицы $\mathbf{P} = (\mathbf{p}_{ij}) \in \mathbb{KR}^{n \times n}$ и любых интервальных векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{KR}^n$ имеет место*

$$\text{Dist}(\mathbf{P}\mathbf{x}, \mathbf{P}\mathbf{y}) \leq |\mathbf{P}| \cdot \text{Dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (2.29)$$

Доказательство. Действительно, в силу неравенств (2.25)–(2.26) мы можем заключить, что

$$\begin{aligned} \text{dist}((\mathbf{P}\mathbf{x})_i, (\mathbf{P}\mathbf{y})_i) &= \text{dist}\left(\sum_{j=1}^n \mathbf{p}_{ij}\mathbf{x}_j, \sum_{j=1}^n \mathbf{p}_{ij}\mathbf{y}_j\right) \\ &\leq \sum_{j=1}^n \text{dist}(\mathbf{p}_{ij}\mathbf{x}_j, \mathbf{p}_{ij}\mathbf{y}_j) \\ &\leq \sum_{j=1}^n |\mathbf{p}_{ij}| \cdot \text{dist}(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j) \end{aligned}$$

при всех $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, что и доказывает^{2.9} многомерную оценку (2.29). ■

^{2.7}Для пространства \mathbb{IR}^n эта метрика совпадает с хаусдорфовым расстоянием между интервальными векторами как гипербусами в \mathbb{R}^n .

^{2.8}Псевдометрические пространства в современной литературе называют также *мультиметрическими*.

^{2.9}Для случая классической интервальной арифметики \mathbb{IR} неравенство (2.29) хорошо известно, но для полной интервальной арифметике в многомерном случае оно никем ранее не упоминалось и не использовалось.

Нам понадобятся, кроме того, операции взятия середины интервала, его радиуса и ширины

$$\begin{aligned} \text{mid } \mathbf{x} &:= \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{x}}), \\ \text{rad } \mathbf{x} &:= \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}), \\ \text{wid } \mathbf{x} &:= \bar{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Как обычно, к интервальным векторам и матрицам эти операции, а также операции “dual”, “pro”, “opp” будут применяться покомпонентно и поэлементно.

2.2 f Полная арифметика Каухера — минимаксная интервальная арифметика

С помощью операции взятия максимума (2.11) фундаментальное свойство (2.4), определяющее операции классической интервальной арифметики можно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$\mathbf{x} \star \mathbf{y} = \bigvee_{x \in \mathbf{x}} \bigvee_{y \in \mathbf{y}} (x \star y). \quad (2.30)$$

Наиболее удивительным фактом, касающимся арифметики Каухера является то, что в ней имеет место представление, обобщающее формулы (2.4) и (2.30). Именно, для любой операции $\star \in \{+, -, \cdot, /\}$ справедливо соотношение:

$$\mathbf{x} \star \mathbf{y} = \mathbf{I}^{\mathbf{x}} \mathbf{I}^{\mathbf{y}} (x \star y), \quad (2.31)$$

где

$$\mathbf{I}^{\mathbf{x}} := \begin{cases} \bigvee, & \text{если } \mathbf{x} \text{ правильный,} \\ \bigwedge, & \text{иначе,} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{условная операция} \\ \text{— взятия экстремума} \\ \text{по включению} \end{array}.$$

Это представление выражает связь между результатом интервальной операции $\mathbf{x} \star \mathbf{y}$ и результатами точечных операций $x \star y$ для $x \in \text{pro } \mathbf{x}$ и $y \in \text{pro } \mathbf{y}$. Представление (2.31) можно даже взять за основу для определения арифметических операций в полной интервальной арифметике (см. [151]).

Заметим, что, как следует из (2.31), полная интервальная арифметика как раз и является требуемой минимаксной интервальной арифметикой! Действительно, в $\mathbb{K}\mathbb{R}$ концы результирующих интервалов являются минимаксом и максимумом результатов точечных арифметических операций, если из оперируемых интервалов один правилен, а другой неправилен. Например,

$$[-3, 5] \cdot [2, -1] = 0 = \left[\min_{x \in [-3, 5]} \max_{y \in [-1, 2]} x \cdot y, \max_{x \in [-3, 5]} \min_{y \in [-1, 2]} x \cdot y \right],$$

в соответствии с таблицей умножения. Можно ли использовать это замечательное свойство для вычисления минимаксов от более сложных выражений?

Ответ на этот вопрос, в целом, положителен, но он не является столь простым и исчерпывающим, как в случае классической интервальной арифметики и “чистых” экстремумов функций. Соответствующая (весьма изощренная) теория построена в работах испанских исследователей под руководством Э. Гарденьеса и М. Сайнца и представлена в наиболее

полном и корректном виде в недавних публикациях [149, 307]. Несмотря на то, что для элементарных арифметических операциях — сложения, вычитания, умножения и деления — минимум и максимум коммутируют, хорошо известно, что в общем случае операции взятия минимума и максимума не перестановочны друг с другом. Не помогает даже наложение жесткого условия единственности вхождений переменных. Следующий выразительный пример позаимствован нами из обзора [307].

Рассмотрим функцию от четырёх переменных

$$\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)$$

Для интервалов изменения переменных $x_1 \in [-2, 2]$, $x_2 \in [-1, 1]$, $x_3 \in [-1, 1]$, $x_4 \in [-2, 2]$ имеем

$$\begin{aligned} \bigvee_{x_1 \in [-2, 2], x_3 \in [-1, 1]} \bigwedge_{x_2 \in [-1, 1], x_4 \in [-2, 2]} \phi(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \left[\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right], \\ \bigwedge_{x_2 \in [-1, 1], x_4 \in [-2, 2]} \bigvee_{x_1 \in [-2, 2], x_3 \in [-1, 1]} \phi(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right], \end{aligned}$$

что отличается от результата соответствующего “естественного интервального расширения” выражения ϕ :

$$\phi([-2, 2], [1, -1], [-1, 1], [2, -2]) = 0.$$

Тем не менее, используя индукцию по дереву Канторовича рассматриваемого выражения, нетрудно вывести из (2.31), что если рациональное выражение $f(x, y) = f(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$ имеет не более одного вхождения каждой переменной x_i и y_j в первой степени, то для любых правильных интервальных векторов $\mathbf{x} \in \mathbb{IR}^p$, $\mathbf{y} \in \mathbb{IR}^q$ справедливо

$$\bigvee_{x \in \mathbf{x}} \bigwedge_{y \in \mathbf{y}} f(x, y) \subseteq f(\mathbf{x}, \text{dual } \mathbf{y}) \subseteq \bigwedge_{y \in \mathbf{y}} \bigvee_{x \in \mathbf{x}} f(x, y), \quad (2.32)$$

т.е., в развернутом виде,

$$\begin{aligned} \left[\min_{x \in \mathbf{x}} \max_{y \in \mathbf{y}} f(x, y), \max_{x \in \mathbf{x}} \min_{y \in \mathbf{y}} f(x, y) \right] &\subseteq f(\mathbf{x}, \text{dual } \mathbf{y}), \\ f(\mathbf{x}, \text{dual } \mathbf{y}) &\subseteq \left[\max_{x \in \mathbf{x}} \min_{y \in \mathbf{y}} f(x, y), \min_{x \in \mathbf{x}} \max_{y \in \mathbf{y}} f(x, y) \right]. \end{aligned}$$

Более сложные случаи, которые также доказываются по индукции. Если рациональное выражение $f(x, y) = f(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$ имеет не более одного вхождения каждой из переменных y_i в первой степени, то для любых правильных интервальных векторов $\mathbf{x} \in \mathbb{IR}^p$, $\mathbf{y} \in \mathbb{IR}^q$ имеет место

$$\left[\min_{x \in \mathbf{x}} \max_{y \in \mathbf{y}} f(x, y), \max_{x \in \mathbf{x}} \min_{y \in \mathbf{y}} f(x, y) \right] \subseteq f(\mathbf{x}, \text{dual } \mathbf{y}). \quad (2.33)$$

Если рациональное выражение $f(x, y) = f(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$ имеет не более одного вхождения каждой из переменных x_i в первой степени, то для любых правильных интервальных векторов $\mathbf{x} \in \mathbb{IR}^p$, $\mathbf{y} \in \mathbb{IR}^q$ имеет место

$$\left[\min_{x \in \mathbf{x}} \max_{y \in \mathbf{y}} f(x, y), \max_{x \in \mathbf{x}} \min_{y \in \mathbf{y}} f(x, y) \right] \supseteq f(\mathbf{x}, \text{dual } \mathbf{y}). \quad (2.34)$$

При этом отклонение естественного интервального расширения от точных значений минимакса и максимина тем меньше, чем меньше размеры интервалов аргументов. Подробное доказательство соотношений (2.32), (2.33) и (2.34) было впервые получено Е. Гарденьесом и его сотрудниками и опубликовано в [149, 307] (хотя и в совершенно других терминах).

Довольно забавна история вопроса. В ранних публикациях испанской школы [151, 153] ошибочно утверждалось, что

$$\bigvee_{x \in \mathbf{x}} \bigwedge_{y \in \mathbf{y}} f(x, y) = f(\mathbf{x}, \text{dual } \mathbf{y}) = \bigwedge_{y \in \mathbf{y}} \bigvee_{x \in \mathbf{x}} f(x, y),$$

если каждая из переменных x_i, y_i входит в f не более одного раза в первой степени. Тем самым, фактически, заявлялась новая неизвестная ранее теорема о минимаксе. Ошибка была замечена и исправлена лишь через десятилетие, а статья с корректной формулировкой увидела свет вообще в 1999-м году [307]. Неудивительно, что кое-кто из исследователей даже успел воспользоваться неверным результатом в своих работах.

Закljučая параграф, можно резюмировать, что, хотя полная интервальная арифметика Каухера и не исправляет “до конца” всех недостатков классической интервальной арифметики, она всё же является гораздо более удобной и приспособленной для

- 1) решения задачи нахождения формальных решений интервальных уравнений,
- 2) решения задач, связанных с вычислением минимаксов.

2.3 Множества АЕ-решений интервальных линейных уравнений

2.3 а Кванторный формализм в линейном случае

Оставшуюся часть этой главы мы посвятим более детальному рассмотрению простейших интервальных *линейных* систем алгебраических уравнений (ИСЛАУ)

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b} \tag{5}$$

с интервальной $m \times n$ -матрицей $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$ и интервальным m -вектором $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_i)$. Задачи такого типа естественно возникают, к примеру, в следующей ситуации.

Предположим, что нам дана статическая управляемая система в виде, описанном в параграфе 1.1, относительно которой верны следующие допущения:

- (i) все компоненты $F_i(a, x)$ являются билинейными функциями x и a , т.е.,

$$F_i(a, x) = \sum_{j,k} h_{ijk} a_j x_k$$

с некоторыми известными коэффициентами $h_{ijk} \in \mathbb{R}$,

- (ii) каждый из a_j встречается не более одного раза и не более чем в одном из компонентных выражений $F_i(a, x)$ выписанного выше билинейного вида.

Последнее означает, в частности, что каждый из входов системы a_j , $j = 1, 2, \dots, l$, может влиять лишь на один из выходов F_i , $i = 1, 2, \dots, m$. В этих условиях индекс k становится излишним, но, с другой стороны, для входов a_j имеет смысл ввести другой индекс i , указывающий компоненту F_i , в которой a_j имеет входение. Тем самым a_j превращаются в a_{ij} и без потери общности все масштабирующие коэффициенты h_{ij} можно положить равными единице. В целом мы принимаем

$$F_i(a, x) = \sum_j a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.35)$$

или, что эквивалентно,

$$F(a, x) = Ax \quad (2.36)$$

с некоторой $m \times n$ -матрицей $A = (a_{ij})$. Соответственно, если во входах и/или выходах системы присутствует интервальная неопределённость, мы приходим к интервальной линейной системе вида (5). Практически выражения (2.35)–(2.36) могут возникнуть, к примеру, в линейных моделях принятия решений вида

$$\sum_{k=1}^K w_k a_{ik},$$

где w_k — веса различных критериев, а a_{ik} могут представлять либо частичные полезности в многоатрибутивной теории полезности [184], либо локальные приоритеты альтернатив в аналитическом иерархическом процессе [273], либо что-либо еще.

Упомянем ещё один практически важный пример естественного возникновения множеств АЕ-решений интервальных линейных систем при математическом моделировании в экономике. Рассмотрим линейное уравнение межотраслевого экономического баланса

$$x = Ax + y, \quad (2.37)$$

т.е. классическое уравнение Леонтьева [72], в котором

- $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор объёмов продукции по отраслям,
- $y \in \mathbb{R}^n$ — вектор объёмов конечного потребления по отраслям,
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — матрица коэффициентов прямых производственных затрат.

В реальной жизни определение коэффициентов a_{ij} для отдельно взятого предприятия не составляет труда, но в масштабах всей отрасли найти их весьма трудно. Как правило, вместо точных значений этих коэффициентов оперируют их оценками, полученными по тем или иным методикам. Разумно даже считать, что коэффициенты прямых производственных затрат известны нам лишь с некоторой неопределённостью, которую мы будем предполагать *интервальной*. Иными словами, пусть $a_{ij} \in \mathbf{a}_{ij}$ и $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$.

Аналогичным образом, требование на вектор конечного потребления y также естественно сформулировать в интервальной форме: нас, как правило, устроит ситуация, когда реальное потребление будет выдерживаться в пределах некоторого интервала \mathbf{y} . В вещественном случае решение системы (2.37) относительно x позволяет спрогнозировать объёмы производства по отраслям, необходимые для получения запланированного конечного потребления y . В интервальном случае вместо (2.37) мы имеем уравнение

$$x = \mathbf{A}x + \mathbf{y}$$

и формулировка вопроса должна быть модифицирована следующим образом:

для каких объёмов производства x при любых значениях коэффициентов прямых производственных затрат a_{ij} в пределах \mathbf{a}_{ij} мы всё равно получим конечное потребление из требуемого интервала y ?

Нетрудно понять, что множество всех таких векторов x образует допустимое множество решений интервальной линейной системы

$$(I - \mathbf{A})x = \mathbf{y}.$$

Если же интервалы некоторых коэффициентов прямых производственных затрат представляют пределы их возможного управления, скажем, в результате некоторых изменений технологии производства или административных решений, то задача определения объёмов производства x , которые обеспечивают конечное потребление y , приводит уже к рассмотрению обобщённых АЕ-множеств решений ИСЛАУ.

Переформулируем понятия и обозначения, введённые нами в параграфах 1.1–1.2, на случай интервальных линейных систем выписанного выше вида.

Определение 2.3.1 Множества АЕ-решений — это обобщённые множества решений интервальных линейных систем уравнений, для которых выделяющий предикат имеет АЕ-форму.

Как и в общем случае, рассмотренном в параграфе 1.2, существуют три эквивалентных способа описания соответствия типов неопределённости интервальным элементам системы уравнений:

- 1) указание для системы (5) кванторной матрицы и кванторного вектора правой части,
- 2) разбиения индексных множеств матрицы и вектора правой части системы (5) на подмножества, соответствующие элементам с А- и Е-неопределённостями,
- 3) дизъюнктивные разложения интервальной матрицы и правой части на слагаемые, отвечающие А- и Е-неопределённостям системы (5).

Обратимся теперь к их подробному описанию:

1. Коль скоро порядок кванторов в выделяющем предикате зафиксирован, то простейший способ описания типов неопределённости заключается в прямом указании того, какие логические кванторы соответствуют тем или иным элементам интервальной системы. Именно, если ввести $m \times n$ -матрицу $\alpha = (\alpha_{ij})$ и m -вектор $\beta = (\beta_i)$, составленные из логических кванторов и такие, что

$$\alpha_{ij} := \begin{cases} \forall, & \text{если } \mathbf{a}_{ij} \text{ имеет А-неопределённость,} \\ \exists, & \text{если } \mathbf{a}_{ij} \text{ имеет Е-неопределённость,} \end{cases}$$

$$\beta_i := \begin{cases} \forall, & \text{если } \mathbf{b}_i \text{ имеет А-неопределённость,} \\ \exists, & \text{если } \mathbf{b}_i \text{ имеет Е-неопределённость.} \end{cases}$$

то указание α и β полностью определяет конкретное АЕ-множество решений ИСЛАУ.

2. Другой путь представления типов неопределённости, отвечающих различным элементам линейной системы (5) — задание разбиения индексных множеств элементов матрицы \mathbf{A} и правой части \mathbf{b} . Более точно, пусть множество индексных пар (i, j) элементов матрицы \mathbf{A} , т.е. множество

$$\{ (1, 1), (1, 2), \dots, (1, n), (2, 1), (2, 2), \dots, (2, n), \dots, (m, 1), (m, 2), \dots, (m, n) \},$$

разбито на две непересекающиеся части $\hat{\Gamma} = \{ \hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_p \}$ и $\check{\Gamma} = \{ \check{\gamma}_1, \dots, \check{\gamma}_q \}$, $p + q = mn$, такие что

элемент \mathbf{a}_{ij} имеет А-неопределённость при $(i, j) \in \hat{\Gamma}$, и

элемент \mathbf{a}_{ij} имеет Е-неопределённость при $(i, j) \in \check{\Gamma}$.

Аналогично, пусть $\hat{\Delta} = \{ \hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_r \}$ и $\check{\Delta} = \{ \check{\delta}_1, \dots, \check{\delta}_s \}$, $\hat{\Delta} \cup \check{\Delta} = \{ 1, 2, \dots, n \}$ — непересекающиеся множества натуральных индексов, такие, что в правой части ИСЛАУ

элемент \mathbf{b}_i имеет интервальную А-неопределённость при $i \in \hat{\Delta}$ и

элемент \mathbf{b}_i имеет интервальную Е-неопределённость при $i \in \check{\Delta}$.

При этом допускается естественная возможность того, что некоторые из множеств $\hat{\Gamma}$, $\check{\Gamma}$, $\hat{\Delta}$, $\check{\Delta}$ пусты. Ясно, что

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \forall, & \text{если } (i, j) \in \hat{\Gamma}, \\ \exists, & \text{если } (i, j) \in \check{\Gamma}, \end{cases} \quad \beta_i = \begin{cases} \forall, & \text{если } i \in \hat{\Delta}, \\ \exists, & \text{если } i \in \check{\Delta}, \end{cases}$$

а то или иное конкретное АЕ-множество решений однозначно задаётся указанием разбиений $\hat{\Gamma} \cup \check{\Gamma}$ и $\hat{\Delta} \cup \check{\Delta}$.

3. Наконец, ещё один удобный способ описания распределения типов неопределённости по интервальным элементам системы уравнений (5) состоит в следующем. Определим интервальные матрицы $\mathbf{A}^\forall = (\mathbf{a}_{ij}^\forall)$ и $\mathbf{A}^\exists = (\mathbf{a}_{ij}^\exists)$ и интервальные векторы $\mathbf{b}^\forall = (\mathbf{b}_i^\forall)$ и $\mathbf{b}^\exists = (\mathbf{b}_i^\exists)$, тех же размеров, что \mathbf{A} и \mathbf{b} соответственно, следующим образом

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{ij}^\forall &:= \begin{cases} \mathbf{a}_{ij}, & \text{если } \alpha_{ij} = \forall, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} & \mathbf{a}_{ij}^\exists &:= \begin{cases} \mathbf{a}_{ij}, & \text{если } \alpha_{ij} = \exists, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \\ \mathbf{b}_i^\forall &:= \begin{cases} \mathbf{b}_i, & \text{если } \beta_i = \forall, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} & \mathbf{b}_i^\exists &:= \begin{cases} \mathbf{b}_i, & \text{если } \beta_i = \exists, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.38)$$

При этом

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}^\forall + \mathbf{A}^\exists, & \mathbf{a}_{ij}^\forall \mathbf{a}_{ij}^\exists &= 0 \\ \mathbf{b} &= \mathbf{b}^\forall + \mathbf{b}^\exists, & \mathbf{b}_i^\forall \mathbf{b}_i^\exists &= 0, \end{aligned}$$

т.е. матрицы \mathbf{A}^\forall , \mathbf{A}^\exists и векторы \mathbf{b}^\forall , \mathbf{b}^\exists образуют *дизъюнктивные* (взаимнодополнительные) разложения для \mathbf{A} и \mathbf{b} соответственно. В матрице \mathbf{A}^\forall и векторе \mathbf{b}^\forall сосредоточены все интервальные элементы системы (5), соответствующие А-типу неопределённости, а в матрице \mathbf{A}^\exists и векторе \mathbf{b}^\exists — все интервальные элементы, соответствующие Е-типу неопределённости.

Важно отметить, что между тремя введёнными выше группами объектов, которые порождаются интервальной линейных системой (5) и её АЕ-множеством решений, именно, между

- (1) кванторными матрицей α и вектором β ,
- (2) разбиением индексных множеств матрицы и вектора правой части системы (5) на непересекающиеся подмножества $\hat{\Gamma}, \check{\Gamma}, \hat{\Delta}, \check{\Delta}$,
- (3) дизъюнктивными разложениями интервальной матрицы $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\forall + \mathbf{A}^\exists$ и правой части $\mathbf{b} = \mathbf{b}^\forall + \mathbf{b}^\exists$,

имеется взаимно однозначное соответствие, так что указание любого одного из пунктов этой триады автоматически определяет два других. Ниже мы поэтому будем свободно переходить от одного способа описания к другому без специальных комментариев.

Мы можем дать также следующее

Определение 2.3.2 Пусть для интервальной $m \times n$ -системы линейных алгебраических уравнений $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ заданы кванторные $m \times n$ -матрица α и m -вектор β и ассоциированные с ними разбиения индексных множеств матрицы и вектора тех же размеров на непересекающиеся подмножества $\hat{\Gamma} = \{\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_p\}$ и $\check{\Gamma} = \{\check{\gamma}_1, \dots, \check{\gamma}_q\}$, $p + q = mn$, $\hat{\Delta} = \{\hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_r\}$ и $\check{\Delta} = \{\check{\delta}_1, \dots, \check{\delta}_s\}$, $r + s = m$.

Назовём АЕ-множеством решений типа $\alpha\beta$ интервальной линейной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ множество

$$\begin{aligned} & \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \\ & := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \\ & \quad (\forall a_{\hat{\gamma}_1} \in \mathbf{a}_{\hat{\gamma}_1}) \cdots (\forall a_{\hat{\gamma}_p} \in \mathbf{a}_{\hat{\gamma}_p}) (\forall b_{\hat{\delta}_1} \in \mathbf{b}_{\hat{\delta}_1}) \cdots (\forall b_{\hat{\delta}_r} \in \mathbf{b}_{\hat{\delta}_r}) \\ & \quad (\exists a_{\check{\gamma}_1} \in \mathbf{a}_{\check{\gamma}_1}) \cdots (\exists a_{\check{\gamma}_q} \in \mathbf{a}_{\check{\gamma}_q}) (\exists b_{\check{\delta}_1} \in \mathbf{b}_{\check{\delta}_1}) \cdots (\exists b_{\check{\delta}_s} \in \mathbf{b}_{\check{\delta}_s}) \\ & \quad (Ax = b) \}, \end{aligned} \tag{2.39}$$

или, что эквивалентно, множество

$$\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{A} \in \mathbf{A}^\forall) (\forall \hat{b} \in \mathbf{b}^\forall) (\exists \check{A} \in \mathbf{A}^\exists) (\exists \check{b} \in \mathbf{b}^\exists) ((\hat{A} + \check{A})x = \hat{b} + \check{b}) \},$$

где $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\forall + \mathbf{A}^\exists$ и $\mathbf{b} = \mathbf{b}^\forall + \mathbf{b}^\exists$ — соответствующие дизъюнктивные разбиения матрицы ИСЛАУ и её правой части.

Как и ранее, следующие хорошо известные множества решений интервальных линейных систем —

- ◇ объединённое множество решений (часто называемое просто множеством решений; см., к примеру, [4, 181, 166, 209, 211, 219] и обширную библиографию к этим работам)

$$\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \mathbf{A}) (\exists b \in \mathbf{b}) (Ax = b) \},$$

- ◇ допустимое множество решений (см. [183, 216, 219, 282, 286, 291])

$$\Xi_{tot}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \mathbf{A}) (\exists b \in \mathbf{b}) (Ax = b) \},$$

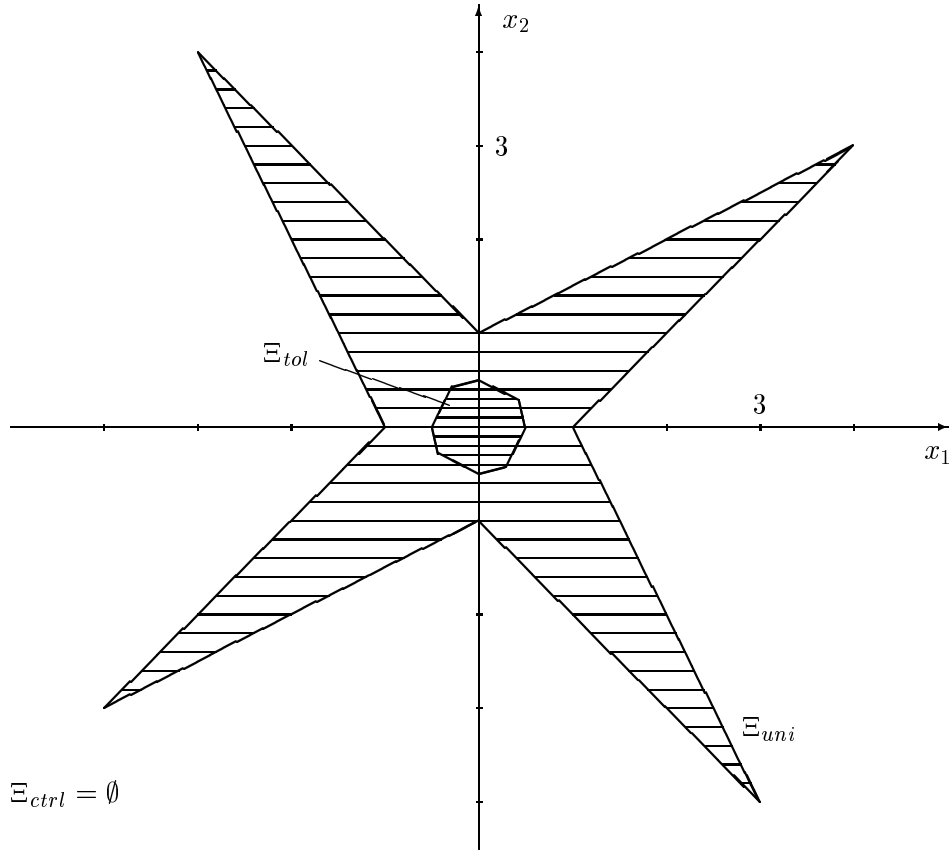


Рис. 2.1: Объединённое множество решений Ξ_{uni} и допустимое множество решений Ξ_{tol} интервальной линейной системы (2.40).

◇ управляемое множество решений (см., к примеру, [281, 299])

$$\Xi_{ctrl}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall b \in \mathbf{b})(\exists A \in \mathbf{A})(Ax = b) \}.$$

— это крайние точки обширного семейства $2^{m(n+1)}$ всевозможных множеств АЕ-решений для интервальных линейных систем вида (5). Четвертой крайней точкой этого семейства является

$$\{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \mathbf{A})(\forall b \in \mathbf{b})(Ax = b) \}.$$

Его рассмотрение небесмысленно, хотя по большей части и бессодержательно, так как для уравнений это множество решений почти всегда пусто.

Вообще, пусть i -ая строка матрицы α целиком состоит из кванторов \forall и соответствующим элементом кванторного вектора β также является \forall . Тогда $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \emptyset$, если среди элементов $\mathbf{a}_{1j}, \dots, \mathbf{a}_{in}, \mathbf{b}_i$ имеется хотя бы один интервал с ненулевой шириной. Из-за этого

$$\binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \dots + \binom{m}{m} = 2^m - 1$$

штук множеств АЕ-решений интервальной линейной $m \times n$ -системы с невырожденными интервальными элементами оказываются *a priori* пустыми. Таким образом, количество

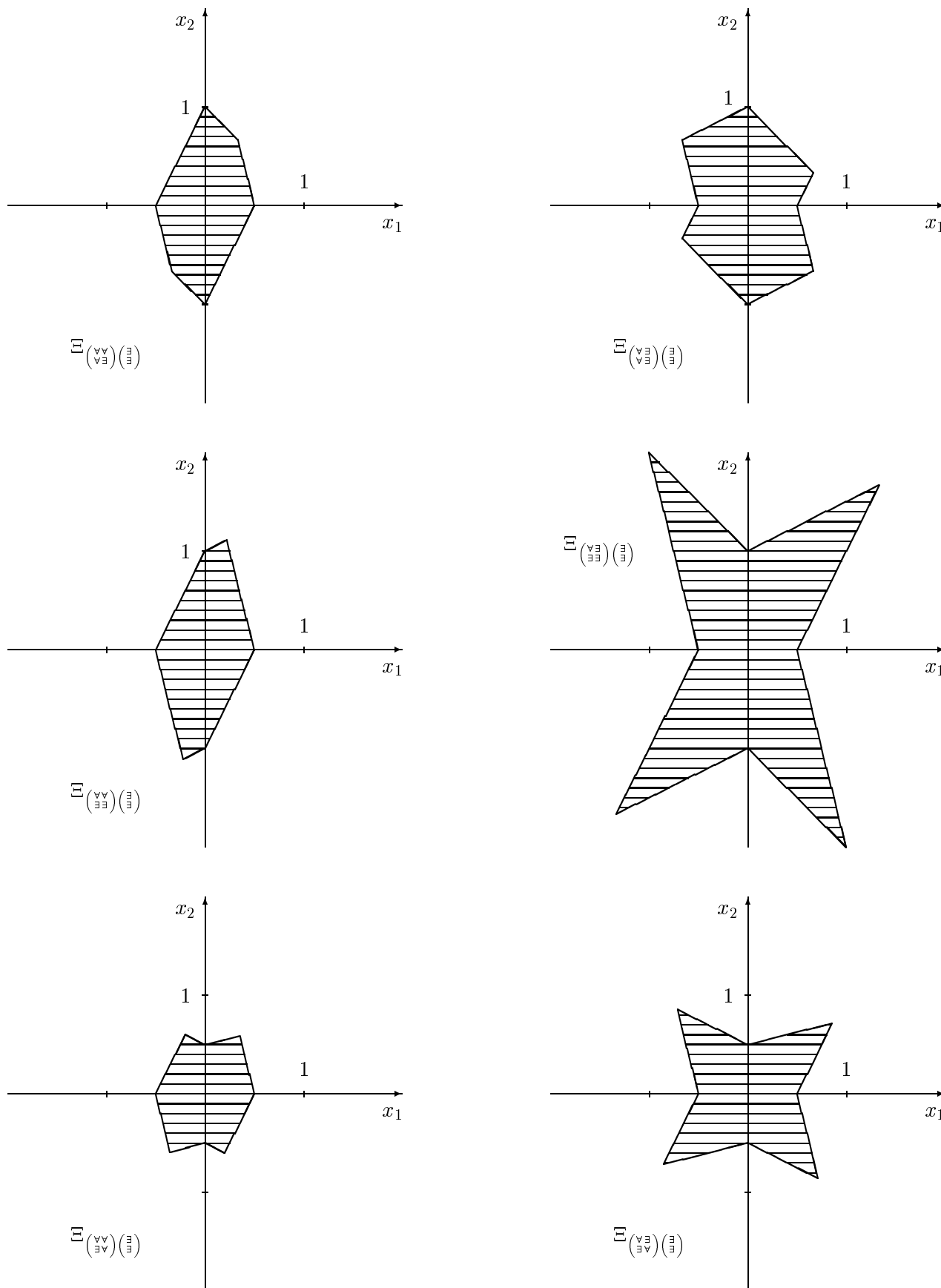


Рис. 2.2: Некоторые из множеств АЕ-решений интервальной линейной системы (2.40).

“нетривиальных” множеств АЕ-решений для таких систем уменьшается до $2^{m(n+1)} - 2^m + 1 = 2^m(2^{mn} - 1) + 1$.

Например, для интервальной линейной 2×2 -системы можно рассматривать $2^2(2^4 - 1) + 1 = 61$ множеств АЕ-решений. Рисунки 2.1 и 2.2 изображают некоторые из множеств решений популярной интервальной линейной системы

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 1] \\ [-1, 2] & [2, 4] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [-2, 2] \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

из [129], неоднократно рассматривавшейся многими авторами.

Заметим, что всегда $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \subseteq \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, т.е. объединённое множество решений является наиболее широким в семействе всех множеств АЕ-решений для интервальных систем уравнений, и это наблюдение может быть обобщено. Именно, если на множестве логических кванторов $\{\forall, \exists\}$ ввести частичный порядок “ \preceq ”, положив

$$\forall \preceq \exists, \quad (2.41)$$

а отношения $\alpha \preceq \alpha'$, $\beta \preceq \beta'$, $\alpha\beta \preceq \alpha'\beta'$ договориться понимать покомпонентно и поэлементно, то для любых \mathbf{A} и \mathbf{b} имеет место импликация

$$\alpha\beta \preceq \alpha'\beta' \Rightarrow \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \subseteq \Xi_{\alpha'\beta'}(\mathbf{A}, \mathbf{b}). \quad (2.42)$$

Наглядной иллюстрацией этого факта служат Рисунки 2.1 и 2.2.

Свойство (2.42) может оказаться очень полезным при исследовании обобщённых множеств решений интервальных систем уравнений. Если мы уже обнаружили, к примеру, что для системы (2.40)

$$\Xi_{(\exists\exists)(\forall)} = \Xi_{(\forall\exists)(\forall)} = \emptyset,$$

то, посредством “ослабления” (в смысле порядка (2.41)) кванторов в выделяющем предикате, можно заключить, что управляемое множество решений Ξ_{ctrl} для (2.40) также пусто, и пустыми являются еще 45 множеств решений системы (2.40), получающиеся из вышеупомянутых трех путем комбинирования кванторов перед элементами матрицы. Рассуждения, использованные нами при выводе свойства (2.42) в равной степени приложимы и к общим нелинейным интервальным системам уравнений, и, по сути, мы еще не раз используем их далее в работе (например, в Предложениях 5.4.1 и 5.4.2).

2.3 б Характеризация и постановки задач

В этом параграфе мы обратимся к различным эквивалентным характеристикам (описаниям) обобщённых АЕ-множеств решений интервальных линейных систем.

Теорема 2.3.1

$$\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \bigcap_{\hat{A} \in \mathbf{A}^\forall} \bigcap_{\hat{b} \in \mathbf{b}^\forall} \bigcup_{\check{A} \in \mathbf{A}^\exists} \bigcup_{\check{b} \in \mathbf{b}^\exists} \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\hat{A} + \check{A})x = \hat{b} + \check{b}\}$$

В частности, если \mathbf{A} — невырожденная интервальная матрица, то

$$\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \bigcap_{\hat{A} \in \mathbf{A}^\forall} \bigcap_{\hat{b} \in \mathbf{b}^\forall} \bigcup_{\check{A} \in \mathbf{A}^\exists} \bigcup_{\check{b} \in \mathbf{b}^\exists} (\hat{A} + \check{A})^{-1}(\hat{b} + \check{b}).$$

Доказательство. По определению операций пересечения и объединения множеств

$$\begin{aligned} \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{A} \in \mathbf{A}^\forall)(\forall \hat{b} \in \mathbf{b}^\forall)(\exists \check{A} \in \mathbf{A}^\exists)(\exists \check{b} \in \mathbf{b}^\exists)((\hat{A} + \check{A})x = \hat{b} + \check{b})\} \\ &= \bigcap_{\hat{A} \in \mathbf{A}^\forall} \bigcap_{\hat{b} \in \mathbf{b}^\forall} \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists \check{A} \in \mathbf{A}^\exists)(\exists \check{b} \in \mathbf{b}^\exists)((\hat{A} + \check{A})x = \hat{b} + \check{b})\} \\ &= \bigcap_{\hat{A} \in \mathbf{A}^\forall} \bigcap_{\hat{b} \in \mathbf{b}^\forall} \bigcup_{\check{A} \in \mathbf{A}^\exists} \bigcup_{\check{b} \in \mathbf{b}^\exists} \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\hat{A} + \check{A})x = \hat{b} + \check{b}\}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Например, для объединённого множества решений ИСЛАУ (5) с невырожденной матрицей \mathbf{A}

$$\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \bigcup_{A \in \mathbf{A}} \bigcup_{b \in \mathbf{b}} A^{-1}b,$$

что и обуславливает его название.

Обратимся теперь к аналитическим характеристикам обобщённых АЕ-множеств решений интервальных линейных систем уравнений вида (5). Фундаментальным результатом нашей теории является

Теорема 2.3.2 *Точка x принадлежит множеству АЕ-решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ тогда и только тогда, когда*

$$\mathbf{A}^\forall \cdot x - \mathbf{b}^\forall \subseteq \mathbf{b}^\exists - \mathbf{A}^\exists \cdot x, \quad (2.43)$$

где “ \cdot ” — интервальное матричное умножение.

Доказательство. Привлекая матрицы \mathbf{A}^\forall , \mathbf{A}^\exists и векторы \mathbf{b}^\forall , \mathbf{b}^\exists , введённые в (2.38), мы можем переписать Определение 2.3.2 множества решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{A} \in \mathbf{A}^\forall)(\forall \hat{b} \in \mathbf{b}^\forall)(\exists \check{A} \in \mathbf{A}^\exists)(\exists \check{b} \in \mathbf{b}^\exists) \\ &\quad ((\hat{A} + \check{A})x = (\hat{b} + \check{b}))\}. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства Предложения преобразуем эквивалентным образом выделяющий предикат множества решений. Имеем

$$\begin{aligned} \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{A} \in \mathbf{A}^\forall)(\forall \hat{b} \in \mathbf{b}^\forall)(\exists \check{A} \in \mathbf{A}^\exists)(\exists \check{b} \in \mathbf{b}^\exists) \\ &\quad (\hat{A}x - \hat{b} = \check{b} - \check{A}x)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{A} \in \mathbf{A}^\forall)(\forall \hat{b} \in \mathbf{b}^\forall)(\hat{A}x - \hat{b} \in \mathbf{b}^\exists - \mathbf{A}^\exists \cdot x)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}^\forall \cdot x - \mathbf{b}^\forall \subseteq \mathbf{b}^\exists - \mathbf{A}^\exists \cdot x\}, \end{aligned}$$

поскольку

$$\mathbf{b}^\exists - \mathbf{A}^\exists \cdot x = \{\check{b} - \check{A}x \mid \check{A} \in \mathbf{A}^\exists, \check{b} \in \mathbf{b}^\exists\} \quad \text{и} \quad \mathbf{A}^\forall \cdot x - \mathbf{b}^\forall = \{\hat{A}x - \hat{b} \mid \hat{A} \in \mathbf{A}^\forall, \hat{b} \in \mathbf{b}^\forall\}$$

на основании свойств интервальных матричных операций [4, 219]. ■

Вышеприведённый результат впервые был получен С. П. Шарым в [287, 292]. Заметим, что Теорема 2.3.2 обобщает все известные ранее характеристики различных множеств решений интервальных линейных систем — для объединённого множества решений (характеризация Бека, см., например, [219]), для допустимого множества решений [216, 219, 286, 291] и управляемого множества решений [59, 60, 281, 299].

Как мы уже отмечали, логические кванторы разного типа в общем случае не перестановочны друг с другом. Не имеем права мы их переставлять и в выделяющем предикате при определении обобщённых множеств решений интервальных систем общего вида. Но оказывается, что в частном случае линейных систем (5) можно переставить кванторы существования и всеобщности, относящиеся к разным частям уравнения. Более точно, справедлива

Теорема 2.3.3

$$\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{A} \in \mathbf{A}^\forall)(\exists \check{A} \in \mathbf{A}^\exists)(\forall \hat{b} \in \mathbf{b}^\forall)(\exists \check{b} \in \mathbf{b}^\exists)((\hat{A} + \check{A})x = \hat{b} + \check{b})\}. \quad (2.44)$$

Доказательство. Преобразуем эквивалентным образом выделяющий предикат множества из правой части доказываемого равенства:

$$\begin{aligned} & \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{A} \in \mathbf{A}^\forall)(\exists \check{A} \in \mathbf{A}^\exists)(\forall \hat{b} \in \mathbf{b}^\forall)(\exists \check{b} \in \mathbf{b}^\exists)((\hat{A} + \check{A})x = \hat{b} + \check{b})\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{A} \in \mathbf{A}^\forall)(\exists \check{A} \in \mathbf{A}^\exists)(\forall \hat{b} \in \mathbf{b}^\forall)(\exists \check{b} \in \mathbf{b}^\exists)(\hat{A}x - \hat{b} = \check{b} - \check{A}x)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{A} \in \mathbf{A}^\forall)(\exists \check{A} \in \mathbf{A}^\exists)(\forall \hat{b} \in \mathbf{b}^\forall)(\hat{A}x - \hat{b} \in \mathbf{b}^\exists - \check{A}x)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{A} \in \mathbf{A}^\forall)(\exists \check{A} \in \mathbf{A}^\exists)(\hat{A}x - \mathbf{b}^\forall \subseteq \mathbf{b}^\exists - \check{A}x)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{A} \in \mathbf{A}^\forall)(\hat{A}x - \mathbf{b}^\forall \subseteq \mathbf{b}^\exists - \mathbf{A}^\exists \cdot x)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}^\forall \cdot x - \mathbf{b}^\forall \subseteq \mathbf{b}^\exists - \mathbf{A}^\exists \cdot x\}, \end{aligned}$$

поскольку для любой правильной интервальной матрицы \mathbf{C} и вещественного вектора x результат интервального умножения $\mathbf{C} \cdot x$ всегда совпадает с множеством $\{Cx \mid C \in \mathbf{C}\}$ [4, 219].

Как видим, характеристика множества из правой части соотношения (2.44) полностью идентична, в силу Теоремы 2.3.1, характеристике множества решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Следовательно, действительно имеет место их равенство. ■

Как следствие Теоремы 2.3.3 получаем ещё одно теоретико-множественное представление для множества АЕ-решений интервальных линейных систем:

Теорема 2.3.4

$$\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \bigcap_{\hat{A} \in \mathbf{A}^\forall} \bigcup_{\check{A} \in \mathbf{A}^\exists} \bigcap_{\hat{b} \in \mathbf{b}^\forall} \bigcup_{\check{b} \in \mathbf{b}^\exists} \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\hat{A} + \check{A})x = \hat{b} + \check{b}\}.$$

В частности, если \mathbf{A} — невырожденная интервальная матрица, то

$$\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \bigcap_{\hat{A} \in \mathbf{A}^\forall} \bigcup_{\check{A} \in \mathbf{A}^\exists} \bigcap_{\hat{b} \in \mathbf{b}^\forall} \bigcup_{\check{b} \in \mathbf{b}^\exists} (\hat{A} + \check{A})^{-1}(\hat{b} + \check{b}).$$

Доказательство аналогично доказательству Теоремы 2.3.1. ■

Введём

Определение 2.3.3 [302, 303, 304] *Интервальные матрицу \mathbf{A}^c и вектор \mathbf{b}^c , определяемые посредством*

$$\mathbf{A}^c := \mathbf{A}^\vee + \text{dual } \mathbf{A}^\exists, \quad \mathbf{b}^c := \text{dual } \mathbf{b}^\vee + \mathbf{b}^\exists,$$

станем называть характеристическими для АЕ-множества решений ИСЛАУ (5), задаваемого дизъюнктным разложением \mathbf{A} на \mathbf{A}^\vee и \mathbf{A}^\exists , \mathbf{b} на \mathbf{b}^\vee и \mathbf{b}^\exists .^{2.10}

Теорема 2.3.5 *Точка $x \in \mathbb{R}^n$ принадлежит множеству решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ тогда и только тогда, когда*

$$\mathbf{A}^c \cdot x \subseteq \mathbf{b}^c \tag{2.45}$$

в полной интервальной арифметике Каухера.

Доказательство. Заметим, что

$$\text{opp}(-\mathbf{v}) = \text{dual } \mathbf{v}$$

для любого интервала $\mathbf{v} \in \mathbb{KR}$. Следовательно, если к обеим частям включения (2.43) прибавить по $(\text{dual } \mathbf{b}^\vee + \text{dual } (\mathbf{A}^\exists \cdot x))$, то придём к эквивалентному включению в полной интервальной арифметике

$$\mathbf{A}^\vee \cdot x + \text{dual } (\mathbf{A}^\exists \cdot x) \subseteq \text{dual } \mathbf{b}^\vee + \mathbf{b}^\exists. \tag{2.46}$$

Но $\text{dual } (\mathbf{A}^\exists \cdot x) = (\text{dual } \mathbf{A}^\exists) \cdot x$, так как x — точечный вектор. Вместо (2.46) мы можем написать поэтому

$$\mathbf{A}^\vee \cdot x + (\text{dual } \mathbf{A}^\exists) \cdot x \subseteq \text{dual } \mathbf{b}^\vee + \mathbf{b}^\exists.$$

Наконец, в левой части можно воспользоваться дистрибутивностью относительно точечной переменной x , получая вместо (2.43) равносильное включение

$$(\mathbf{A}^\vee + \text{dual } \mathbf{A}^\exists) \cdot x \subseteq \text{dual } \mathbf{b}^\vee + \mathbf{b}^\exists,$$

которое совпадает с (2.45). ■

Введённое Определением 2.3.3 понятие настолько важно в развиваемой нами теории, что на его обсуждении стоит остановиться подробнее. Подчеркнём, что указание характеристических матрицы и вектора правой части полностью определяют АЕ-множество решений интервальной системы уравнений, наряду с триадой, описанной в §1.2 с, т.е. кванторными матрицей α и вектором β , разбиением индексных множеств интервальных параметров системы, а также их дизъюнктными разложениями. Но задание характеристических матрицы и правой части даёт даже больше информации, одновременно указывая как тип неопределённости, так и сами интервалы параметров в системе. Поэтому будет совершенно корректным говорить о множестве АЕ-решений (некоторой) интервальной системы линейных уравнений, *соответствующих данным характеристическим матрице и вектору правой части*, и писать $\Xi(F, \mathbf{A}^c, \mathbf{b}^c)$, не указывая явно эту систему и распределение типов неопределённостей в ней. При рассмотрении интервальных линейных систем

^{2.10}Верхний индекс “c” у матрицы \mathbf{A} и вектора \mathbf{b} — это готическая первая буква слова “characteristic”.

уравнений мы получим действительно ощутимую выгоду от введения новых понятий и терминологии.

Следующая замечательная характеристика была предложена чешским исследователем И. Роном [265] и впервые использована А.В. Лакеевым в работе [61]. Она является переформулировкой Теоремы 2.3.2 в виде линейных неравенств с модулями, обобщая, таким образом, известные результаты Оеттли-Прагера для объединённого множества решений [232] и самого Рона для допустимого множества решений [229, 253]. Ниже мы приводим развёрнутое доказательство этого результата.

Теорема 2.3.6 (характеризация Рона) *Точка $x \in \mathbb{R}^n$ принадлежит множеству решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ тогда и только тогда, когда*

$$|(\text{mid } \mathbf{A}) \cdot x - \text{mid } \mathbf{b}| \leq (\text{rad } \mathbf{A}^{\exists} - \text{rad } \mathbf{A}^{\forall}) \cdot |x| + (\text{rad } \mathbf{b}^{\exists} - \text{rad } \mathbf{b}^{\forall}). \quad (2.47)$$

Доказательство. Включение $\mathbf{p} \subseteq \mathbf{q}$ для правильных интервальных векторов \mathbf{p} и \mathbf{q} равносильно, как известно, неравенству

$$|\text{mid } \mathbf{q} - \text{mid } \mathbf{p}| \leq \text{rad } \mathbf{q} - \text{rad } \mathbf{p}$$

(см., например, [219]). Следовательно, характеристика (2.43) может быть переписана в следующем виде:

$$|\text{mid}(\mathbf{b}^{\exists} - \mathbf{A}^{\exists} \cdot x) - \text{mid}(\mathbf{A}^{\forall} \cdot x - \mathbf{b}^{\forall})| \leq \text{rad}(\mathbf{b}^{\exists} - \mathbf{A}^{\exists} \cdot x) - \text{rad}(\mathbf{A}^{\forall} \cdot x - \mathbf{b}^{\forall}). \quad (2.48)$$

Далее,

$$\text{rad}(\mathbf{p} \pm \mathbf{q}) = \text{rad } \mathbf{p} + \text{rad } \mathbf{q},$$

$$\text{mid}(\mathbf{p} \pm \mathbf{q}) = \text{mid } \mathbf{p} \pm \text{mid } \mathbf{q}.$$

Следовательно, (2.48) выполняется в том и лишь в том случае, если

$$|\text{mid } \mathbf{b}^{\exists} - \text{mid}(\mathbf{A}^{\exists} \cdot x) - \text{mid}(\mathbf{A}^{\forall} \cdot x) + \text{mid } \mathbf{b}^{\forall}| \leq \text{rad } \mathbf{b}^{\exists} + \text{rad}(\mathbf{A}^{\exists} \cdot x) - \text{rad}(\mathbf{A}^{\forall} \cdot x) - \text{rad } \mathbf{b}^{\forall},$$

что эквивалентно характеристике (2.47), так как

$$\text{mid}(\mathbf{A}^{\exists} \cdot x) = (\text{mid } \mathbf{A}^{\exists}) \cdot x, \quad \text{mid}(\mathbf{A}^{\forall} \cdot x) = (\text{mid } \mathbf{A}^{\forall}) \cdot x$$

и

$$\text{rad}(\mathbf{A}^{\exists} \cdot x) = (\text{rad } \mathbf{A}^{\exists}) \cdot |x|, \quad \text{rad}(\mathbf{A}^{\forall} \cdot x) = (\text{rad } \mathbf{A}^{\forall}) \cdot |x|.$$

■

Частный случай Теоремы 2.3.6 для объединённого множества решений — утверждение

$$x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \iff |(\text{mid } \mathbf{A}) \cdot x - \text{mid } \mathbf{b}| \leq \text{rad } \mathbf{A} \cdot |x| + \text{rad } \mathbf{b} \quad (2.49)$$

— часто называют *характеристикой Оеттли-Прагера* (см. [219, 229, 232]).

Определение 2.3.4 *Вершинами интервального вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n$ называются точки множества*

$$\text{vert } \mathbf{x} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in \{\underline{x}_i, \bar{x}_i\}, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Аналогичным образом определяются вершины интервальной матрицы.

Теорема 2.3.7 *Для любых кванторных матрицы α и вектора β пересечение множества АЕ-решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ с каждым из ортантов пространства \mathbb{R}^n является выпуклым полиэдральным множеством. Вершины этого полиэдрального множества — решения точечных линейных систем, которые образованы*

1) “крайними” линейными уравнениями вида

$$\tilde{a}_{i1}x_1 + \tilde{a}_{i2}x_2 + \dots + \tilde{a}_{in} = \tilde{b}_i,$$

$$\tilde{a}_{ij} \in \{\underline{\mathbf{a}}_{ij}, \bar{\mathbf{a}}_{ij}\}, \tilde{b}_i \in \{\underline{\mathbf{b}}_i, \bar{\mathbf{b}}_i\}, \text{ для некоторых } i = 1, 2, \dots, m,$$

2) уравнениями вида $x_k = 0$ для некоторых $k = 1, 2, \dots, n$.

Доказательство. Принадлежность вещественного вектора x какому-либо ортанту определяется указанием знаков его компонент. Заметим также, что для любой интервальной $m \times n$ -матрицы \mathbf{C} компоненты произведения $\mathbf{C} \cdot x = ((\mathbf{C} \cdot x)_1, (\mathbf{C} \cdot x)_2, \dots, (\mathbf{C} \cdot x)_m)^\top$ могут быть представлены в следующем виде:

$$(\mathbf{C} \cdot x)_i = \sum_{j=1}^n \mathbf{c}_{ij}x_j = \left[\sum_{j=1}^n \underline{\mathbf{c}}_{ij}x_j, \sum_{j=1}^n \bar{\mathbf{c}}_{ij}x_j \right] = \left[\sum_{j=1}^n c'_{ij}x_j, \sum_{j=1}^n c''_{ij}x_j \right], \quad (2.50)$$

где c'_{ij} и c''_{ij} — некоторые числа (они могут совпадать), которые принадлежат множеству концов $\{\underline{\mathbf{c}}_{ij}, \bar{\mathbf{c}}_{ij}\}$ и фиксированы для каждого отдельного ортанта, содержащего x .

Далее, переписывая включения (2.43) покомпонентным образом и заменяя на основе представления (2.50) каждое из одномерных включений парой неравенств между концами интервалов, мы получим систему $2m + n$ линейных неравенств

$$\begin{cases} A'x \geq b', \\ A''x \leq b'', \\ \text{условие на знаки } x_k, k = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (2.51)$$

где $A', A'' \in \text{vert } \mathbf{A}$ и $b', b'' \in \text{vert } \mathbf{b}$. Система неравенств (2.51) определяет выпуклое полиэдральное множество. ■

Таким образом, в общем случае $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ может быть представлено как объединение не более 2^n (по числу ортантов) выпуклых полиэдральных множеств. Для объединённого множества решений ИСЛАУ этот простой, но очень важный факт был впервые установлен У. Оеттли [231] и впоследствии передоказан в [131, 168].

Как следствие, сложность прямого описания множеств решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ может расти экспоненциально с n несмотря на приведенные выше простые и геометрически наглядные характеристические результаты. Подобное описание делается, таким образом, исключительно трудоёмким и практически бесполезным уже для интервальных линейных систем даже не очень больших размерностей. Это затруднение носит принципиальный характер, так как теоретический результат Лакеева [61] показывает, что даже задача распознавания того, пусто или непусто множество АЕ-решений ИСЛАУ, в общем случае (если не накладывать на \mathbf{A} и \mathbf{b} никаких ограничений) является NP-трудной, т.е. не может быть решена легче, чем за время, которое является экспонентой от длины кодировки задачи [26]. Для объединённого множества решений $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ и управляемого множества решений $\Xi_{ctrl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ этот факт был известен ещё с начала 90-х годов [59, 60, 189].

В силу сказанного на практике не имеет смысла нацеливаться на нахождение и предъявление пользователю полного описания множеств решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Аналогично общему нелинейному случаю, рассмотренному в параграфах 1.1–1.3, вполне достаточно вычислять некоторые просто устроенные приближения (оценки) для $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. В качестве оценочных множеств мы снова будем брать интервальные векторы — прямые произведения интервалов вещественной оси, — т.е. с геометрической точки зрения, брусы со сторонами параллельными координатным осям. Подытоживая, можно сформулировать основные задачи для интервальных линейных систем уравнений, которые предстоит решать в нашей работе:

Для интервальной линейной системы уравнений $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ и кванторных матрицы α и вектора β тех же размеров, что и \mathbf{A} и \mathbf{b} соответственно найти внутреннюю интервальную оценку множества решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ (2.52)

и

Для интервальной линейной системы уравнений $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ и кванторных матрицы α и вектора β тех же размеров, что и \mathbf{A} и \mathbf{b} соответственно найти внешнюю интервальную оценку множества решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. (2.53)

Ясно, что вышеприведённые постановки задач имеет содержательный смысл лишь в случае $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$, и выяснение условий этой непустоты является отдельным важным вопросом.

2.4 Управляемое множество решений интервальных линейных систем

Мы завершаем вторую главу работы отдельным параграфом, посвящённым управляемому множеству решений интервальных линейных систем, т.е. множеству

$$\Xi_{ctrl}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall b \in \mathbf{b})(\exists A \in \mathbf{A})(Ax = b)\}, \quad (2.54)$$

определяемому, в силу теоремы 2.3.2, эквивалентным образом как

$$\Xi_{ctrl}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A} \cdot x \supseteq \mathbf{b}\},$$

где “ \cdot ” — обычное интервальное матричное умножение. Это множество образовано всеми такими векторами $x \in \mathbb{R}^n$, что для любого желаемого $b \in \mathbf{b}$ мы можем подобрать соответствующую матрицу $A \in \mathbf{A}$ удовлетворяющую $Ax = b$. Заметим, что

$$\Xi_{ctrl}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \subseteq \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}),$$

и если \mathbf{A} — невырожденная интервальная матрица, то $\Xi_{ctrl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ограничено одновременно с $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ (а также связно).

Содержательную интерпретацию множества решений (2.54) нетрудно дать, исходя из сведений по системному анализу, которые мы привлекли в параграфе 1.1. Именно, множество (2.54) является множеством решений задачи нахождения внутренних состояний (1.2) для случая, когда все входы системы — управляющие, а все выходы — управляемые, что и оправдывает название для (1.19) и (2.54) — *управляемое множество решений*.

Для общих нелинейных систем управляемое множество решений вместе с его интерпретацией впервые было выделено автором в [281, 299]. Но для простейшего случая интервальных линейных систем управляемое множество решений рассматривалось в неявной форме еще в работе Н. А. Хлебалина и Ю. И. Шокина [91]. В первые явное определение (2.54) было выписано А. В. Лакеевым и С. И. Носковым [59, 60], которые не дали новому множеству решений никакого имени, но исследовали некоторые его свойства. В частности, они указали, что пересечение

$$\begin{aligned} \Xi_{ctrl}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \Xi_{tot}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \\ = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(Ax = b) \& (\forall b \in \mathbf{b})(\exists A \in \mathbf{A})(Ax = b) \} \quad (2.55) \\ = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A} \cdot x = \mathbf{b} \}. \end{aligned}$$

Основным результатом работ [59, 60], касающимся управляемого множества решений (1.19), является следующее

Предложение 2.4.1 [59, 60]

$$\begin{aligned} \Xi_{ctrl}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{ x' - x'' \mid \\ x', x'' \in \mathbb{R}^n, x', x'' \geq 0, \langle x', x'' \rangle = 0, \underline{\mathbf{A}}x' - \overline{\mathbf{A}}x'' \leq \underline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{A}}x' - \underline{\mathbf{A}}x'' \geq \overline{\mathbf{b}} \}, \end{aligned}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — стандартное скалярное произведение в \mathbb{R}^n (т.е. сумма произведений компонент векторов).

Чтобы сделать наши рассуждения более живыми и наглядными обратимся к Рисунку 2.3, на котором изображено управляемое множество решений интервальной линейной системы

$$\begin{pmatrix} [-2, 1] & [-1, 1] \\ [-1, 1] & [-1, 2] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2, 1] \\ [-1, 2] \end{pmatrix}. \quad (2.56)$$

Ξ_{ctrl} представляет из себя целую плоскость \mathbb{R}^2 с вырезанной звездообразной областью вокруг начала координат.

Конфигурация этой картинки является в некотором смысле типичной, поскольку нулевой вектор может принадлежать $\Xi_{ctrl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ лишь в том случае, если $\mathbf{b} \subseteq \mathbf{A} \cdot 0 = 0$, т.е. $\mathbf{b} = 0$. Именно по этой причине управляемое множество решений для ИСЛАУ (2.56) избегает начала координат на Рисунке 2.3. Кроме того, следствием Предложения 2.4.1 является тот факт, что пересечение $\Xi_{ctrl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ с каждым из ортантов \mathbb{R}^n — это полиэдральное множество (пересечение конечного числа полупространств). В частности, управляемое множество решений интервальных линейных систем уравнений всегда замкнуто.

Как и допустимое множество решений, управляемое множество решений может оказаться пустым даже для “хороших” интервальных данных, как это, например, имеет место, для одномерного случая с $\mathbf{A} = [2, 3]$, $\mathbf{b} = [1, 2]$. Рассматривавшаяся нами популярная

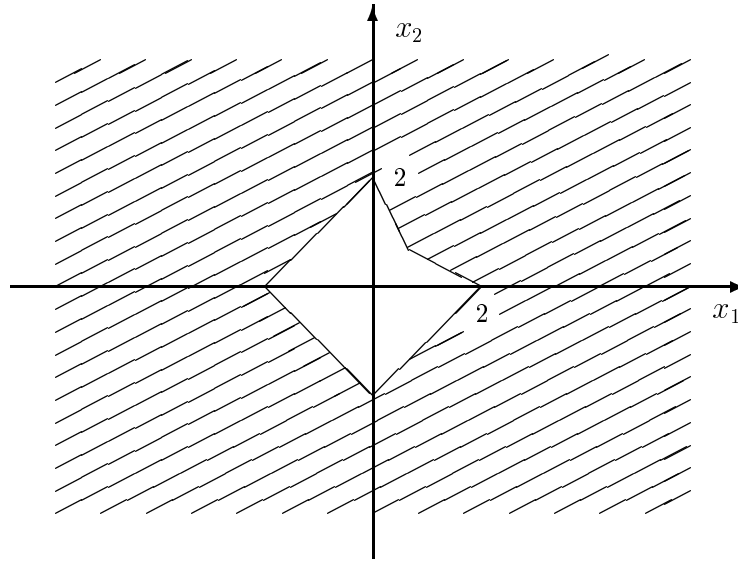


Рис. 2.3: Управляемое множество решений интервальной системы (2.56).

интервальная линейная система

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 1] \\ [-1, 2] & [2, 4] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [-2, 2] \end{pmatrix}$$

из работы Барта и Нудинга [129] дает более сложный пример ИСЛАУ с пустым управляемым множеством решений.

Основным математическим результатом этого параграфа является простой достаточный критерий непустоты управляемого множества решений интервальной линейной алгебраической системы уравнений, а также критерии пустоты пересечения управляемого множества решений с некоторыми ортантами. Результаты такого сорта особенно важны с учетом упоминавшегося замечательного результата А. В. Лакеева и С. И. Носкова [59, 60] о том, что задача распознавания того, пусто или непусто $\Xi_{ctrl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ в общем случае является NP-полной (труднорешаемой). Но прежде чем продолжить исследование, нам необходимо напомнить некоторые вспомогательные факты и понятия из интервального анализа.

Начнем с того, что если i -ая строка \mathbf{A} содержит только нулевые элементы, то необходимым условием непустоты управляемого множества решений является $\mathbf{b}_i = 0$. В этом случае свойство множества $\Xi_{ctrl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ быть пустым или непустым зависит уже только от других, не i -ых строк \mathbf{A} и компонент \mathbf{b} . Таким образом, без ущерба для общности мы можем впредь считать, что матрица \mathbf{A} не имеет нулевых строк.

Определение 2.4.1 *Обозначим*

$$\mathfrak{s}(\mathbf{p}) = \text{sgn}(\bar{\mathbf{p}} + \underline{\mathbf{p}}).$$

Если $\mathfrak{s}(\mathbf{p})\mathfrak{s}(\mathbf{q}) \geq 0$, то будем говорить, что интервалы \mathbf{p} и \mathbf{q} одинаково расположены относительно нуля.

Для того, чтобы охарактеризовать “относительную узость” ненулевого интервала X. Рачек в [239] ввёл функционал

$$\chi(\mathbf{p}) = \begin{cases} \underline{\mathbf{p}}/\bar{\mathbf{p}}, & \text{если } |\underline{\mathbf{p}}| \leq |\bar{\mathbf{p}}|, \\ \bar{\mathbf{p}}/\underline{\mathbf{p}}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ясно, что $-1 \leq \chi(\mathbf{p}) \leq 1$, и $\chi(\mathbf{p}) = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{p} \in \mathbb{R}$. Кроме того, имеют место следующие свойства

1) $\chi(\mathbf{p}) = \chi(\mathbf{q})$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{p} = t\mathbf{q}$, $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$,

2) если \mathbf{p} и \mathbf{q} одинаково расположены относительно нуля, то

$$\chi(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \geq \min\{\chi(\mathbf{p}), \chi(\mathbf{q})\}, \quad (2.57)$$

3) если $\mathbf{p} + \mathbf{q} \neq 0$, то

$$\chi(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \leq \max\{\chi(\mathbf{p}), \chi(\mathbf{q})\}. \quad (2.58)$$

Доказательство этих фактов может быть найдено в [239]. Кроме того, полезным оказывается следующее очевидное свойство:

$$\text{если } \mathbf{p} \supseteq \mathbf{q} \text{ и } \chi(\mathbf{q}) \geq 0, \text{ то } \chi(\mathbf{p}) \leq \chi(\mathbf{q}).$$

Далее нам потребуется в некотором смысле обратное утверждение:

Предложение 2.4.2 *Если $\text{mid } \mathbf{p} = \text{mid } \mathbf{q}$ и $-1 < \chi(\mathbf{p}) \leq \chi(\mathbf{q})$, то $\mathbf{p} \supseteq \mathbf{q}$.*

Доказательство. Обозначим $\mu = \text{mid } \mathbf{p} = \text{mid } \mathbf{q}$. Если $-1 < \chi(\mathbf{p}) \leq \chi(\mathbf{q})$, то $\mu \neq 0$, т.е. $\mu < 0$ или $\mu > 0$. Без ограничения общности мы можем допустить вторую возможность, так как случай отрицательного μ рассматривается совершенно сходным образом. В этих условиях $|\underline{\mathbf{p}}| < |\overline{\mathbf{p}}|$ и $|\underline{\mathbf{q}}| < |\overline{\mathbf{q}}|$, так что $\chi(\mathbf{p}) \leq \chi(\mathbf{q})$ влечёт

$$\underline{\mathbf{p}}/\overline{\mathbf{p}} \leq \underline{\mathbf{q}}/\overline{\mathbf{q}},$$

или

$$\frac{\mu - \text{rad } \mathbf{p}}{\mu + \text{rad } \mathbf{p}} \leq \frac{\mu - \text{rad } \mathbf{q}}{\mu + \text{rad } \mathbf{q}}.$$

После несложных преобразований мы получаем

$$\mu \cdot \text{rad } \mathbf{p} \geq \mu \cdot \text{rad } \mathbf{q},$$

что эквивалентно (с учётом $\mu > 0$) неравенству $\text{rad } \mathbf{p} \geq \text{rad } \mathbf{q}$, т.е. $\mathbf{p} \supseteq \mathbf{q}$. ■

Теперь мы готовы сформулировать и доказать наш основной результат:

Теорема 2.4.1 *Пусть интервальная $m \times n$ -матрица \mathbf{A} и интервальный m -вектор \mathbf{b} таковы, что для всех $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ выполнены условия*

$$(i) \quad \mathbf{b}_i \neq 0,$$

$$(ii) \quad -1 < \max\{\chi(\mathbf{a}_{ij}) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{ij} \neq 0\} \leq \chi(\mathbf{b}_i)$$

Если “средняя система” $(\text{mid } \mathbf{A})x = \text{mid } \mathbf{b}$ совместна, то её решение принадлежит управляемому множеству решений $\Xi_{\text{ctrl}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ интервальной линейной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ (которое, соответственно, непусто).

Доказательство. Если \tilde{x} есть решение “средней” точечной системы, то [219]

$$\text{mid}(\mathbf{A}\tilde{x}) = (\text{mid } \mathbf{A}) \cdot \tilde{x} = \text{mid } \mathbf{b}.$$

Далее, так как $-1 < \chi(\mathbf{b}_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$, мы получаем $\text{mid}(\mathbf{A}\tilde{x})_i \neq 0$. Следовательно, для всякого $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ законны следующие выкладки:

$$\begin{aligned} \chi((\mathbf{A}\tilde{x})_i) &= \chi\left(\sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij}\tilde{x}_j\right) \\ &\leq \max\{\chi(\mathbf{a}_{ij}\tilde{x}_j) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{ij}\tilde{x}_j \neq 0\} \quad \text{в силу (2.58)} \\ &= \max\{\chi(\mathbf{a}_{ij}) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{ij}\tilde{x}_j \neq 0\} \\ &\leq \max\{\chi(\mathbf{a}_{ij}) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{ij} \neq 0\}. \end{aligned}$$

Таким образом, неравенства $-1 < \chi((\mathbf{A}\tilde{x})_i) \leq \chi(\mathbf{b}_i)$ справедливы для $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, и в силу Предложения 2.4.2

$$(\mathbf{A}\tilde{x})_i \supseteq \mathbf{b}_i, \quad i \in \{1, 2, \dots, m\},$$

что и доказывает Теорему 2.4.1. ■

Например, оба условия Теоремы 2.4.1 удовлетворяются для рассмотренной выше интервальной системы (2.56). Решением её “средней системы” служит вектор $(1, 1)^\top$, который, как можно видеть (из Рисунка 2.3, в частности), действительно лежит в управляемом множестве решений для (2.56). И всё таки доказанная Теорема является лишь грубым достаточным признаком. К примеру, условие (ii) Теоремы 2.4.1 не выполнено для интервальной линейной системы

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 2] \\ [-2, 2] & [2, 4] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [1, 5] \\ [1, 5] \end{pmatrix}, \quad (2.59)$$

в то время как соответствующая “средняя система” совместна и её решение $(1, 1)^\top$ принадлежит непустому управляемому множеству решений для (2.59).

На основании утверждения Теоремы 2.4.1 может создаться впечатление, что решение “средней системы” является наиболее вероятным представителем управляемого множества решений интервальных линейных систем. Но следующий контрпример показывает, что и это не так в общем случае. Для системы

$$\begin{pmatrix} 4 & [1, 3] \\ [0, 2] & 4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [5, 7] \\ 4 \end{pmatrix},$$

мы имеем $\Xi_{ctrl} = \{(1, 1)^\top\}$, но решение “средней системы” есть $(8/7, 5/7)^\top$.

Несмотря на кажущуюся тяжеловесность формулировки Теоремы 2.4.1, реализация сформулированного в ней критерия требует всего $O(mn)$ арифметических и логических операций, а вопрос совместности “средней системы” решается просто в случае квадратной невырожденной интервальной матрицы \mathbf{A} . В свою очередь, в настоящее время имеются

развитые численные алгоритмы проверки невырожденности интервальной матрицы [257], но следует отметить, что в самой общей постановке задача проверки того, вырождена или невырождена интервальная матрица является NP-трудной [191]. Суммируя сказанное, можно утверждать, что выведенный нами критерий является вполне практичным, хотя и недостаточно чувствительным. Он предназначен для предварительного грубого исследования управляемого множества решений ИСЛАУ.

При решении практических задач помимо решения как такового часто требуются некоторые характеристики его устойчивости, показывающие границы области разрешимости, либо устойчивость совместности. В данной ситуации для таких целей вполне может подойти величина

$$\mathfrak{M} = \min_{1 \leq i \leq m} \{ \chi(\mathbf{b}_i) - \max\{ \chi(\mathbf{a}_{ij}) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{ij} \neq 0 \} \},$$

будучи грубой количественной мерой “показателя совместности” в случае $\mathfrak{M} > 0$.

Почувствительно сопоставить результат Теоремы 2.4.1 с результатом работ [286, 291], где предложен следующий достаточный критерий пустоты допустимого множества решений (неразрешимости линейной задачи о допусках):

Теорема 2.4.2 Пусть интервальная $m \times n$ -матрица \mathbf{A} и интервальный m -вектор \mathbf{b} таковы, что для некоторого $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ выполнены условия

- (i) $0 \notin \mathbf{b}_k$,
- (ii) $\max\{ \chi(\mathbf{a}_{kj}) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{kj} \neq 0 \} < \chi(\mathbf{b}_k)$.

Тогда у интервальной линейной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ допустимое множество решений $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ пусто.

Как видим, это утверждение находится в красивой двойственности к Теореме 2.4.1, а множества решений $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ и $\Xi_{ctrl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ являются в некотором смысле антагонистами друг к другу.

Наш следующий результат не столь эффектен, как вышеприведённая Теорема, но он также может оказаться полезным в ряде случаев. Прежде чем формулировать его, отметим, что каждый ортант \mathbb{R}^n полностью задаётся указанием знаков компонент его внутренних точек, и по этой причине мы далее будем говорить об ортантах

$$(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n), \tag{2.60}$$

где $\epsilon_j = \pm 1, j = 1, 2, \dots, n$. Если $\epsilon_l = 0$, то условимся считать, что символ (2.60) обозначает любой из ортантов $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{l-1}, -1, \epsilon_{l+1}, \dots, \epsilon_n)$ или $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{l-1}, 1, \epsilon_{l+1}, \dots, \epsilon_n)$.

Теорема 2.4.3 Пусть интервальная $m \times n$ -матрица \mathbf{A} и интервальный m -вектор \mathbf{b} таковы, что

$$\min\{ \chi(\mathbf{a}_{kj}) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{kj} \neq 0 \} > \chi(\mathbf{b}_k) \geq 0$$

для некоторого $k \in \{1, 2, \dots, m\}$. Тогда управляемое множество решений $\Xi_{ctrl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ имеет пустое пересечение с ортантами $(\mathfrak{s}(\mathbf{a}_{k1}), \mathfrak{s}(\mathbf{a}_{k2}), \dots, \mathfrak{s}(\mathbf{a}_{kn}))$ и $(-\mathfrak{s}(\mathbf{a}_{k1}), -\mathfrak{s}(\mathbf{a}_{k2}), \dots, -\mathfrak{s}(\mathbf{a}_{kn}))$.

Доказательство этой Теоремы будет проведено *от противного*.

Предположим, что условие Теоремы выполнено для некоторого индекса k , но существует точка $t \in \Xi_{ctrl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ из органта $(\mathbf{s}(\mathbf{a}_{k1}), \mathbf{s}(\mathbf{a}_{k2}), \dots, \mathbf{s}(\mathbf{a}_{kn}))$. Тогда $\mathbf{A}t \supseteq \mathbf{b}$, и, в частности,

$$(\mathbf{A}t)_k \supseteq \mathbf{b}_k,$$

что эквивалентно

$$\chi((\mathbf{A}t)_k) \leq \chi(\mathbf{b}_k), \quad (2.61)$$

поскольку $\chi(\mathbf{b}_k) \geq 0$.

С другой стороны, все интервалы $\mathbf{a}_{kj}t_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, по самому их построению одинаково расположены относительно нуля, так что

$$\begin{aligned} \chi((\mathbf{A}t)_k) &= \chi\left(\sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{kj}t_j\right) \\ &\geq \min\{\chi(\mathbf{a}_{kj}t_j) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{kj}t_j \neq 0\} \quad \text{в силу (2.57)} \\ &= \min\{\chi(\mathbf{a}_{kj}) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{kj}t_j \neq 0\} \\ &\geq \min\{\chi(\mathbf{a}_{kj}) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{kj} \neq 0\}. \end{aligned}$$

Таким образом, из условия Теоремы следует, что

$$\chi((\mathbf{A}t)_k) > \chi(\mathbf{b}_k)$$

в противоречие с (2.61). Этим завершается доказательство для органта $(\mathbf{s}(\mathbf{a}_{k1}), \mathbf{s}(\mathbf{a}_{k2}), \dots, \mathbf{s}(\mathbf{a}_{kn}))$. Нетрудно видеть, что наши рассуждения в равной степени подходят также и для органта $(-\mathbf{s}(\mathbf{a}_{k1}), -\mathbf{s}(\mathbf{a}_{k2}), \dots, -\mathbf{s}(\mathbf{a}_{kn}))$. \blacksquare

В качестве следствия получаем

Предложение 2.4.3 Пусть интервальная $m \times n$ -матрица \mathbf{A} и интервальный m -вектор \mathbf{b} имеют только неотрицательные элементы и

$$\min\{\chi(\mathbf{a}_{kj}) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{kj} \neq 0\} > \chi(\mathbf{b}_k)$$

для некоторого $k \in \{1, 2, \dots, m\}$. Тогда управляемое множество решений $\Xi_{ctrl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ не может содержать неотрицательных векторов.

В заключение приведём ещё один интересный способ исследования управляемого множества решений ИСЛАУ. Как мы уже упоминали в начале параграфа,

$$\Xi_{ctrl}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A} \cdot x = \mathbf{b}\}, \quad (2.55)$$

т.е. пересечением управляемого множества решений и допустимого множества решений является множество всех точечных формальных решений для (5). Но оно находится очень просто. Действительно, беря середины от обеих частей исходного интервального уравнения (5), получим

$$(\text{mid } \mathbf{A}) \cdot x = \text{mid } \mathbf{b}.$$

Итак, для нахождения пересечения (2.55) нам нужно лишь решить “среднюю” линейную систему и проверить её решения на равенство $\mathbf{A} \cdot x = \mathbf{b}$.

Наконец, задача распознавания того, пусто или не пусто множество $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ является совсем нетрудной. Она может быть эффективно решена за полиномиальное время [108, 286, 291]. Тогда, если, к примеру, $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A} \cdot x = \mathbf{b}\} = \emptyset$, в то время как $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$, то мы можем заключить, что $\Xi_{ctrl}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \emptyset$.

Внешнее оценивание множеств решений

Одной из классических постановок задач для интервальных систем уравнений вида (2) является задача внешнего оценивания их множеств решений, т.е. задача об оценивании покоординатного разброса множеств решений. Среди наиболее важных теоретических результатов касающихся этой задачи (2.53) следует упомянуть недавние открытия по вычислительной сложности её решения и некоторых родственных ей задач (см. [59, 60, 191] и обширную библиографию к этим работам). Оказывается, что даже задача распознавания того, пусто или непусто множество решений, в общем случае NP-трудна (труднорешаема), если среди интервальных параметров системы “достаточно многие” имеют E-неопределённость. Далее, вычисление внешних покоординатных оценок для множества решений с любой заданной абсолютной или относительной точностью также есть NP-трудная задача, как в общем случае, так и во многих практически важных частных ситуациях.

За прошедшие три с лишним десятилетия предложено немало хороших алгоритмов для решения задачи (2.53), так что естественно было бы ожидать угасания теоретического интереса к ней и поворота исследователей к тщательной практической реализации и доводке уже предложенных вычислительных схем. Тем не менее, в нашей работе мы собираемся представить свежий взгляд на предмет: для решения “внешней задачи” мы развиваем новый подход вместе с реализующим его численным алгоритмом, отличительными особенностями которых являются

- высокая вычислительная эффективность,
- универсальность — как общая теоретическая схема подхода, так и основной численный алгоритм с равным успехом применимы к задачам внутреннего и внешнего интервального оценивания различных множеств решений интервальной системы (5).

Развиваемый ниже подход к задаче (2.53) мы называем *формальным подходом*, так как он сводит исходную постановку к задаче нахождения *формального решения* некоторой вспомогательной системы в полной интервальной арифметике Каухера, что, как показывается ниже в Главе 6 нашей работы, может быть сведено к обычной задаче решения одной *точечной* (неинтервальной) системы уравнений в евклидовом пространстве двойной размерности \mathbb{R}^{2n} .

В Главе 6 мы конструируем также специализированный алгоритм (субдифференциальный метод Ньютона), реализующий новый подход, представляем результаты численных экспериментов с ним. Они показывают, что развиваемая нами вычислительная методика

совмещает исключительную вычислительную эффективность с хорошим качеством оценивания множества решений, оказываясь достойным конкурентом таким широко распространённым алгоритмам решения внешней задачи, как интервальный метод Гаусса-Зейделя и процедура Хансена-Блика.

3.1 Основы формального подхода

В этом параграфе мы покажем, как задачи внешнего оценивания АЕ-множеств решений интервальных систем уравнений могут быть успешно решены с помощью *формального подхода*, при котором исходная задача оценивания сводится к задаче нахождения формального решения некоторого вспомогательного уравнения в полной интервальной арифметике \mathbb{KR} .

Ниже, помимо результатов §2.3 b, нам понадобится ещё рекуррентная форма характеристики обобщенных АЕ-множеств решений, в которой переменная выделена в левой части в чистом виде (fixed-point form в англоязычной терминологии). Отправная точка наших рассуждений — результат Теоремы 2.3.5:

$$x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \iff \mathbf{A}^c \cdot x \subseteq \mathbf{b}^c \quad (3.1)$$

Добавляя к обеим частям (3.1) по $(x \ominus \mathbf{A}^c x)$, получим равносильное включение

$$x \subseteq x + \text{орр}(\mathbf{A}^c x) + \mathbf{b}^c.$$

Но $\text{орр}(\mathbf{A}^c x) = \text{орр}(\mathbf{A}^c) x$ для вещественных x . Следовательно, имеем

$$x \subseteq x + (\text{орр} \mathbf{A}^c) x + \mathbf{b}^c,$$

и далее, опять-таки в силу вещественности x , в правой части мы можем воспользоваться дистрибутивностью и вынести переменную за скобки. В целом мы получим

$$x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \iff x \subseteq (I \ominus \mathbf{A}^c) x + \mathbf{b}^c.$$

Заметим, что при $x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$ из проведённых нами рассуждений следует, что $((I \ominus \mathbf{A}^c) x + \mathbf{b}^c)$ — правильный интервальный вектор.

Итак, имеет место

Теорема 3.1.1 *Точка $x \in \mathbb{R}^n$ принадлежит множеству решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ тогда и только тогда, когда*

$$x \subseteq (I \ominus \mathbf{A}^c) x + \mathbf{b}^c$$

в полной интервальной арифметике Каухера.

Теорема 3.1.2 *Пусть интервальная матрица $\mathbf{C} \in \mathbb{KR}^{n \times n}$ такова, что*

$$\rho(|\mathbf{C}|) < 1$$

— спектральный радиус матрицы $|\mathbf{C}|$, составленной из модулей элементов \mathbf{C} , меньше единицы. Тогда формальное решение интервальной линейной системы

$$x = \mathbf{C}x + \mathbf{d} \quad (3.2)$$

существует и единственно для любого интервального вектора $\mathbf{d} \in \mathbb{KR}^n$.

Доказательство. В силу неравенства (2.29) для любых векторов $\mathbf{d}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \text{Dist}(\mathbf{C}\mathbf{u} + \mathbf{d}, \mathbf{C}\mathbf{v} + \mathbf{d}) &= \text{Dist}(\mathbf{C}\mathbf{u}, \mathbf{C}\mathbf{v}) \\ &\leq |\mathbf{C}| \cdot \text{Dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Если спектральный радиус матрицы $|\mathbf{C}|$ меньше единицы, то мы оказываемся в условиях применимости конечномерного варианта теоремы Шрёдера о неподвижной точке (см., например, [4, 50, 76, 219]). Именно, отображение $\mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$, действующее по правилу

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{d},$$

является *сжимающим* относительно псевдометрики Dist и потому имеет единственную неподвижную точку, которая есть не что иное как формальное решение интервальной линейной системы (3.2). ■

Теорема 3.1.3 Пусть для интервальной линейной системы $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ обобщённое АЕ-множество решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ непусто, а \mathbf{A}^c и \mathbf{b}^c — характеристические матрица и правая часть этого множества решений — таковы что

$$\rho(|I \ominus \mathbf{A}^c|) < 1. \quad (3.3)$$

Тогда формальное решение интервальной линейной системы

$$x = (I \ominus \mathbf{A}^c)x + \mathbf{b}^c \quad (3.4)$$

(которое существует и единственно в силу Теоремы 3.1.2) является правильным интервальным вектором, содержащим множество решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Доказательство. Пусть \mathbf{x}^* — формальное решение интервальной линейной системы (3.4). Возьмём какую-нибудь точку $\tilde{x} \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ и покажем, что необходимо $\tilde{x} \in \mathbf{x}^*$.

В силу Теоремы 3.1.1 принадлежность $\tilde{x} \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ равносильна включению

$$\tilde{x} \in (I \ominus \mathbf{A}^c)\tilde{x} + \mathbf{b}^c. \quad (3.5)$$

Организуем в $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ итерационный процесс по следующим формулам

$$\mathbf{x}^{(0)} := \tilde{x}, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} := (I \ominus \mathbf{A}^c)\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}^c. \quad (3.7)$$

Пользуясь математической индукцией, нетрудно показать, что все последовательные приближения этого процесса содержат \tilde{x} . Действительно, для $\mathbf{x}^{(0)}$ это верно по построению. Если же $\tilde{x} \in \mathbf{x}^{(k)}$, то в силу (3.5) и свойства монотонности интервальных арифметических операций в $\mathbb{K}\mathbb{R}$ по включению

$$\tilde{x} \in (I \ominus \mathbf{A}^c)\tilde{x} + \mathbf{b}^c \subseteq (I \ominus \mathbf{A}^c)\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}^c = \mathbf{x}^{(k+1)}. \quad (3.8)$$

Итак, $\tilde{x} \in \mathbf{x}^{(k)}$ для любого натурального номера k . В частности, отсюда следует правильность всех интервальных векторов $\mathbf{x}^{(k)}$.

Далее, из условия

$$\rho(|I \ominus \mathbf{A}^c|) < 1 \quad (3.3)$$

вытекает сходимость итерационного процесса, определяемого в псевдометрическом пространстве $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ формулами (3.6)–(3.7) (см. [50]). Ясно также, что сходится последовательность $\mathbf{x}^{(k)}$ к неподвижной точке отображения

$$\mathbf{x} \mapsto (I \ominus \mathbf{A}^c)\mathbf{x} + \mathbf{b}^c,$$

т.е. к единственному формальному решению \mathbf{x}^* уравнения (3.4). Поскольку принадлежность $x \in \mathbf{x}^{(k)}$ равносильна системе $2n$ нестрогих неравенств, то она должна сохраниться и в пределе:

$$\tilde{x} \in \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^*.$$

Это и требовалось доказать. ■

В заключение параграфа — необходимый комментарий по поводу практической реализации развитого выше формального подхода, т.е. методов нахождения формального решения основного уравнения (3.4). Теоремы 3.1.2–3.1.3, собственно уже дают теоретический фундамент для построения стационарных итерационных алгоритмов, основанных на теореме Шрёдера о сжимающем отображении. Именно, в условиях Теоремы 3.1.3 можно организовать интервальный итерационный процесс по формуле (3.7) (или какой-либо её модификации), который будет сходиться к внешней оценке АЕ-множества решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ из любого начального приближения $\mathbf{x}^{(0)}$. При этом наиболее удобным выбором $\mathbf{x}^{(0)}$ является интервальный вектор, который уже гарантированно содержит множество решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Из включения (3.8) следует тогда, что все последовательные приближения $\mathbf{x}^{(k)}$ процесса (3.7) также содержат оцениваемое АЕ-множество решений. Например, в качестве $\mathbf{x}^{(0)}$ можно взять внешнюю интервальную оценку объединённого множества решений ИСЛАУ, отыскание которой является хорошо изученной задачей [4, 29, 45, 219, 181].

Другая возможность вычисления требуемого формального решения — субдифференциальный метод Ньютона (см., например, [118, 292, 297]) применимость которого к настоящему моменту строго обоснована для интервальных систем (3.4) с матрицами \mathbf{A}^c , в каждой строке которых все элементы либо правильные, либо неправильные. Но экспериментально обнаружено, что этот метод очень хорошо работает и для общих интервальных систем, в которых правильные и неправильные элементы в характеристической матрице \mathbf{A}^c перемешаны произвольно (хотя в этом случае он уже не субдифференциальный, а *квазидифференциальный* метод Ньютона).

Наконец, следует отметить, что спектральное условие применимости развитого нами подхода —

$$\rho(|I \ominus \mathbf{A}^c|) < 1 \quad (3.3)$$

— является очень обременительным для матрицы интервальной линейной системы. Ниже в §3.5 мы обсудим один из способов достижения этого неравенства — так называемое *предбуславливание*.

3.2 Оптимальность внешнего оценивания

Критерий качества интервальных решений в задачах оценивания — степень близости (в том или ином смысле) полученной интервальной оценки к идеальному множеству решений. Общеизвестно, что задачи внутреннего интервального оценивания могут иметь много

максимальных по включению, но несравнимых между собой решений, так что наилучшего в смысле представительности интервального решения среди них выбрать в принципе нельзя. Но для задач внешнего интервального оценивания естественным образом определяется понятие наилучшего по включению решения.

Определение 3.2.1 *Внешняя интервальная оценка множества решений, совпадающая с его интервальной оболочкой, называется оптимальным (или наилучшим) решением задач внешнего интервального оценивания (1.21) и (2.53).*

Получение оптимальных или гарантированно близких к оптимальным решений в задачах внешнего оценивания множеств решений интервальных систем является идеальной целью, относительно которой обычно судят о качестве решения задачи тем или иным методом.

Каково качество внешнего интервального оценивания АЕ-множеств решений ИСЛАУ с помощью формального подхода? Иными словами, насколько близка получаемая интервальная оценка к оптимальному решению внешней задачи? В этой работе мы не будем исследовать этот интересный вопрос в общем случае, так как он требует отдельного кропотливого рассмотрения. Недавние теоретические результаты А.В. Лакеева [61] свидетельствуют о том, что в самом общем случае, когда мы не накладываем на матрицу ИСЛАУ никаких ограничений, задача оценивания АЕ-множеств решений может оказаться труднорешаемой. Более точно, если в интервальной матрице системы \mathbf{A} “достаточно много” элементов имеют Е-неопределённость, то как задача распознавания соответствующего множества решений (т.е. задача выяснения того, пусто оно или нет), так и задача его внешнего оценивания являются NP-полными. Это свойство на нынешнем этапе развития теории сложности вычислений считается равносильным “труднорешаемости” задачи. По этой причине надеяться на качественное внешнее оценивание множеств решений ИСЛАУ с помощью методики §3.1 в общем случае нельзя.

Основным результатом этого параграфа является следующая

Теорема 3.2.1 *Пусть для интервальной линейной системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ множество АЕ-решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ непусто и $\mathbf{A}^c, \mathbf{b}^c$ — соответствующие характеристические матрица и правая часть ИСЛАУ. Если матрица $(I \ominus \mathbf{A}^c)$ неотрицательна,*

$$\rho(|I \ominus \mathbf{A}^c|) < 1 \tag{3.3}$$

и все компоненты вектора \mathbf{b}^c имеют одинаковый определённый знак, то формальное решение интервальной линейной системы

$$x = (I \ominus \mathbf{A}^c)x + \mathbf{b}^c \tag{3.4}$$

(которое существует, единственно и правильно в силу Теорем 3.1.2–3.1.3) является интервальной оболочкой для $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, т.е. оптимальным решением задачи внешнего оценивания множества решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Определение 3.2.2 [18, 132] *Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ называется M-матрицей, если она удовлетворяет любому из следующих эквивалентных условий*

- (i) *внедиагональные элементы матрицы A неположительны и $A^{-1} \geq 0$;*

- (ii) $A = sI - P$, где P — неотрицательная матрица и $s > \rho(P)$;
- (iii) внедиагональные элементы матрицы A неположительны, а её собственные числа имеют положительные вещественные части;
- (iv) внедиагональные элементы матрицы A неположительны, её диагональ $D = (a_{ii})$ положительна и $\rho(I - D^{-1}A) < 1$;
- (v) ... и т.д.^{3.1}

Теорема 3.2.2 ([219], Теорема 3.6.3) Пусть A, B — квадратные точечные матрицы, A — M -матрица и $B \geq 0$. Матрица $A - B$ является M -матрицей тогда и только тогда, когда $\rho(A^{-1}B) < 1$.

Определение 3.2.3 [129] Матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{KR}^{n \times n}$ называется интервальной M -матрицей, если каждая вещественная матрица $A \in \mathbf{A}$ является M -матрицей.

Теорема 3.2.3 Пусть для интервальной линейной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ множество AE -решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ непусто и $\mathbf{A}^c, \mathbf{b}^c$ — соответствующие характеристические матрица и правая часть ИСЛАУ. Если матрица \mathbf{A} является M -матрицей, и все компоненты вектора \mathbf{b}^c имеют одинаковый определённый знак, то формальное решение интервальной линейной системы

$$x = (I \ominus \mathbf{A}^c)x + \mathbf{b}^c \quad (3.4)$$

(которое существует, единственно и правильно в силу Теорем 3.1.2–3.1.3) является интервальной оболочкой для $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, т.е. оптимальным решением задачи внешнего оценивания множества решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Предложение 3.2.1 В условиях Теоремы 3.2.1 во множестве AE -решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ интервальной линейной системы (5) существуют точки \hat{x} и \check{x} , имеющие соответственно наименьшие и наибольшие координаты относительно покомпонентного порядка в \mathbb{R}^n , т.е. такие, что $\hat{x} \leq x \leq \check{x}$ для любого $x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. При этом

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \max_{\hat{A} \in \mathbf{A}^\vee} \min_{\check{A} \in \mathbf{A}^\exists} (\hat{A} + \check{A})^{-1} \underline{\mathbf{b}}^c, \\ \check{x} &= \min_{\hat{A}' \in \mathbf{A}^\vee} \max_{\check{A}'' \in \mathbf{A}^\exists} (\hat{A}' + \check{A}'')^{-1} \overline{\mathbf{b}}^c. \end{aligned}$$

Доказательство. Мы проведём его только для точки \hat{x} с наименьшими координатами, для \check{x} оно выглядит совершенно аналогично.

Воспользуемся теоретико-множественным представлением множества $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, которое даёт Теорема 2.3.4:

$$\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \bigcap_{\hat{A} \in \mathbf{A}^\vee} \bigcup_{\check{A} \in \mathbf{A}^\exists} \bigcap_{\hat{b} \in \mathbf{b}^\vee} \bigcup_{\check{b} \in \mathbf{b}^\exists} (\hat{A} + \check{A})^{-1} (\hat{b} + \check{b}).$$

^{3.1}Список может быть значительно продолжен. К примеру, Берман и Племмонс [132] перечисляют 50 условий, равносильных утверждению “матрица A является M -матрицей”. Большое количество эквивалентных определений M -матрицы можно найти в справочнике [18] и книге Ноймайера [219].

Матрица $(\hat{A} + \check{A})^{-1}$ неотрицательна, поэтому при каждом фиксированном \hat{b} во множестве

$$\bigcup_{\check{b} \in \mathbf{b}^\exists} (\hat{A} + \check{A})^{-1}(\hat{b} + \check{b})$$

точка

$$\begin{aligned} \min_{\check{b} \in \mathbf{b}^\exists} (\hat{A} + \check{A})^{-1}(\hat{b} + \check{b}) \\ = (\hat{A} + \check{A})^{-1}(\hat{b} + \underline{\mathbf{b}}^\exists). \end{aligned}$$

имеет наименьшие координаты относительно покомпонентного порядка. Аналогично, при дальнейшем взятии пересечений по $\hat{b} \in \mathbf{b}^\forall$ точка

$$\begin{aligned} \max_{\hat{b} \in \mathbf{b}^\forall} (\hat{A} + \check{A})^{-1}(\hat{b} + \underline{\mathbf{b}}^\exists) \\ = (\hat{A} + \check{A})^{-1}(\overline{\mathbf{b}}^\forall + \underline{\mathbf{b}}^\exists) \\ = (\hat{A} + \check{A})^{-1}\underline{\mathbf{b}}^c \end{aligned}$$

имеет наименьшие координаты в каждом из непустых множеств

$$\bigcap_{\hat{b} \in \mathbf{b}^\forall} \bigcup_{\check{b} \in \mathbf{b}^\exists} (\hat{A} + \check{A})^{-1}(\hat{b} + \check{b}).$$

Далее, коль скоро во множестве обратных матриц $\{A^{-1} \mid A \in \mathbf{A}\}$ имеются наименьшая и наибольшая матрицы, то при одинаковости всех знаков компонент $\underline{\mathbf{b}}^c$ векторный минимум

$$\min_{\hat{A} \in \mathbf{A}^\exists} (\hat{A} + \check{A})^{-1}\underline{\mathbf{b}}^c \quad (3.9)$$

необходимо существует. Следовательно, объединение

$$\bigcup_{\check{A} \in \mathbf{A}^\exists} (\hat{A} + \check{A})^{-1}\underline{\mathbf{b}}^c$$

также имеет наименьшую точку, равную (3.9).

Наконец, пересечение

$$\bigcap_{\hat{A} \in \mathbf{A}^\forall} \left(\bigcup_{\check{A} \in \mathbf{A}^\exists} (\hat{A} + \check{A})^{-1}\underline{\mathbf{b}}^c \right), \quad (3.10)$$

совпадающее с множеством решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, обязано иметь наименьшую точку, так как достигается

$$\max_{\hat{A} \in \mathbf{A}^\forall} \min_{\check{A} \in \mathbf{A}^\exists} (\hat{A} + \check{A})^{-1}\underline{\mathbf{b}}^c. \quad (3.11)$$

Нетрудно понять, что аналитическое выражение для этой наименьшей точки пересечения (3.10) как-раз таки совпадает с (3.11). \blacksquare

Предложение 3.2.2 Если $\mathbf{a} \geq 0$, то для любого интервала $\mathbf{x} \in \mathbb{K}\mathbb{R}$ имеет место

$$\underline{\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}} = \underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{x}}, \quad (3.12)$$

$$\overline{\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}} = \overline{\mathbf{a}} \cdot \overline{\mathbf{x}}. \quad (3.13)$$

Доказательство. Оно непосредственно следует из из рассмотрения первой строки Таблицы 2.1 — таблицы Кэли для умножения в полной интервальной арифметике. Согласно приведённым в ней формулам

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{x} &= [\underline{\mathbf{a}} \mathbf{x}, \bar{\mathbf{a}} \bar{\mathbf{x}}], & \text{если } \mathbf{x} \geq 0, \\ \underline{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{x} &= [\bar{\mathbf{a}} \underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{a}} \bar{\mathbf{x}}], & \text{если } \mathbf{x} \supseteq 0, \\ \underline{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{x} &= [\bar{\mathbf{a}} \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{a}} \bar{\mathbf{x}}], & \text{если } \mathbf{x} \leq 0, \\ \underline{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{x} &= [\underline{\mathbf{a}} \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{a}} \bar{\mathbf{x}}], & \text{если } \mathbf{x} \subseteq 0. \end{aligned}$$

Это и доказывает равенства (3.12)–(3.13), так как любой интервал из \mathbb{KR} либо неотрицателен, либо неположителен, либо содержит нуль, либо сам содержится в нуле. ■

Доказательство Теоремы 3.2.1. Покажем, что в условиях, налагаемых на ИСЛАУ этой теоремой, для наименьшей \hat{x} и наибольшей \check{x} точек из множества решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ (существование которых обеспечено Предложением 3.2.1) достигаются равенства

$$\underline{\mathbf{A}}^c \hat{x} = \underline{\mathbf{b}}^c \quad \text{и} \quad \overline{\mathbf{A}}^c \check{x} = \overline{\mathbf{b}}^c. \quad (3.14)$$

Мы докажем подробно только первое из этих равенств, и обоснование будем вести “от противного”.

Если первое из равенств не достигается ни для какого x , то

$$\underline{\mathbf{A}}^c x > \underline{\mathbf{b}}^c \quad \text{и} \quad (\underline{\mathbf{A}}^c x)_i > (\underline{\mathbf{b}}^c)_i \quad \text{хотя бы для одного } i.$$

Мы будем условно записывать это соотношение в виде

$$\underline{\mathbf{A}}^c x \not\geq \underline{\mathbf{b}}^c, \quad (3.15)$$

где $x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Расписывая результаты интервальных операций через минимакс, получим

$$\min_{\hat{A} \in \mathbf{A}^\vee} \max_{\check{A} \in \mathbf{A}^\exists} (\hat{A} + \check{A}) x \not\geq \underline{\mathbf{b}}^c,$$

или

$$(\forall \hat{A} \in \mathbf{A}^\vee)(\exists \check{A} \in \mathbf{A}^\exists)((\hat{A} + \check{A}) x \not\geq \underline{\mathbf{b}}^c).$$

Домножение обеих частей неравенства

$$(\hat{A} + \check{A}) x \not\geq \underline{\mathbf{b}}^c$$

на неотрицательную невырожденную матрицу $(\hat{A} + \check{A})^{-1}$, приводит к неравенству-следствию

$$x \not\geq (\hat{A} + \check{A})^{-1} \underline{\mathbf{b}}^c.$$

Таким образом, следствием (3.15) является

$$(\forall \hat{A} \in \mathbf{A}^\vee)(\exists \check{A} \in \mathbf{A}^\exists)(x \not\geq (\hat{A} + \check{A})^{-1} \underline{\mathbf{b}}^c).$$

и, наконец,

$$x \not\geq \max_{\hat{A} \in \mathbf{A}^\vee} \min_{\check{A} \in \mathbf{A}^\exists} (\hat{A} + \check{A})^{-1} \underline{\mathbf{b}}^c$$

для любой точки $x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Но, согласно Предложению 3.2.1, во множестве решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ присутствует точка \hat{x} , точное выражение для которой имеет вид (3.11). Противоречие!

Теперь мы готовы доказать основной результат этого параграфа. Нетрудно понять, что соотношения (3.14) эквивалентны

$$\underline{(\text{opp } \mathbf{A}^c) \hat{x} + \mathbf{b}^c} = 0 \quad \text{и} \quad \overline{(\text{opp } \mathbf{A}^c) \hat{x} + \mathbf{b}^c} = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \underline{(I \ominus \mathbf{A}^c)[\hat{x}, \hat{x}] + \mathbf{b}^c} &= \underline{(I \ominus \mathbf{A}^c)[\hat{x}, \hat{x}] + \mathbf{b}^c} \\ &= \underline{(I \ominus \mathbf{A}^c) \hat{x} + \mathbf{b}^c} \quad \text{в силу соотношения (3.12)} \\ &= \underline{\hat{x} + (\text{opp } \mathbf{A}^c) \hat{x} + \mathbf{b}^c} \quad \begin{array}{l} \text{так как умножение на вещественное} \\ \text{число дистрибутивно по сложению} \end{array} \\ &= \hat{x} + \underline{(\text{opp } \mathbf{A}^c) \hat{x} + \mathbf{b}^c} \\ &= \hat{x}. \end{aligned}$$

Аналогично показывается, что

$$\overline{(I \ominus \mathbf{A}^c)[\hat{x}, \hat{x}] + \mathbf{b}^c} = \hat{x}.$$

Следовательно, в целом

$$(I \ominus \mathbf{A}^c)[\hat{x}, \hat{x}] + \mathbf{b}^c = [\hat{x}, \hat{x}],$$

интервальный вектор $[\hat{x}, \hat{x}]$ является формальным решением уравнения (3.4) и, по Теореме 3.1.3, $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \subseteq [\hat{x}, \hat{x}]$. Но, коль скоро точки \hat{x} и \hat{x} сами лежат во множестве решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, то можем заключить, что $[\hat{x}, \hat{x}]$ — это действительно интервальная оболочка для $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. ■

Как хорошо известно, классический аналог доказанного нами результата формулируется следующим образом (см., например, [4]):

Теорема 3.2.4 *Если \mathbf{A} — неотрицательная правильная интервальная квадратная матрица и $\rho(|I - \mathbf{A}|) < 1$, то формальное решение интервальной линейной системы*

$$x = (I - \mathbf{A})x + \mathbf{b}$$

существует, единственно и является оптимальной внешней интервальной оценкой объединённого множества решений ИСЛАУ (5).

Таким образом, для оптимальности внешней оценки объединённого множества решений требуется неотрицательность только матрицы \mathbf{A}^c , тогда как вектор \mathbf{b}^c может быть любым. В Теореме 3.2.1 мы потребовали ещё знакоопределённости компонент вектора \mathbf{b}^c и существенно использовали это ограничение в своих рассуждениях. Можно ли освободиться от него в общем случае? Это интересный вопрос, ответа на который автор пока не знает.

Отметим, что Теорема 3.2.1 носит вполне практический характер, так как существуют рабочие модели, удовлетворяющие её условиям. Такова, в частности, рассмотренная нами в §2.3 межотраслевая балансовая модель В. Леонтьева. Нетрудно показать (это сделано, к примеру, в работе [175]), что матрица Леонтьева является M -матрицей. Кроме того, компоненты вектора \mathbf{b} — величины конечного потребления по различным отраслям — по самому своему смыслу неотрицательны.

3.3 Интервальный метод Гаусса-Зейделя для обобщённых множеств решений

Одним из наиболее популярных и эффективных алгоритмов нахождения внешних интервальных оценок для объединённого множества решений ИСЛАУ является *интервальный метод Гаусса-Зейделя* (см., например, [129, 181, 219]), применяемый обычно после предварительного преобуславливания интервальной линейной системы. Цель настоящего параграфа — адаптировать этот метод на задачи внешнего интервального оценивания обобщённых АЕ-множеств решений. Ниже мы будем предполагать невырожденность интервальной матрицы \mathbf{A} , т.е. то, что невырождены все точечные матрицы $A \in \mathbf{A}$. Ясно, что тогда путём перестановки уравнений системы (строк матрицы ИСЛАУ) можно добиться того, чтобы в новой матрице \mathbf{A} все диагональные элементы \mathbf{a}_{ii} не содержали нуля. Именно это условие и будет существенно использоваться в наших построениях.

Основой точечного метода Гаусса-Зейделя является, как известно, расписывание системы уравнений $Ax = b$ в явном покомпонентном виде

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

и последующее решение i -го уравнения, $i = 1, 2, \dots, n$, относительно x_i в предположении $a_{ii} \neq 0$. Аналогичным образом мы будем действовать и при построении интервального метода.

Воспользуемся аналитической характеристикой АЕ-множеств решений, которую предоставляет Теорема 2.3.5: точка x принадлежит множеству решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{A}^c \cdot x \subseteq \mathbf{b}^c.$$

Представляя это включение покомпонентно, получим

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij}^c x_j \subseteq \mathbf{b}_i^c, \quad i = 1, \dots, n,$$

что равносильно

$$\mathbf{a}_{ii}^c x_i \subseteq \text{орр} \sum_{j \neq i} \mathbf{a}_{ij}^c x_j + \mathbf{b}_i^c, \quad i = 1, \dots, n.$$

Если же $0 \notin \text{пр} \mathbf{a}_{ii}^c = \mathbf{a}_{ii}$, то обе части этого включения можно домножить на $(\mathbf{a}_{ii}^c)^{-1}$, придя к

$$x_i \in (\mathbf{a}_{ii}^c)^{-1} \left(\text{орр} \sum_{j \neq i} \mathbf{a}_{ij}^c x_j + \mathbf{b}_i^c \right), \quad i = 1, \dots, n.$$

Предположим, что нам уже известен некоторый интервальный вектор \mathbf{x} , содержащий множество решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, т.е. $\mathbf{x} \supseteq \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Тогда, если $x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, то должна быть справедливой следующая цепочка соотношений

$$x_i \in (\mathbf{a}_{ii}^c)^{-1} \left(\text{орр} \sum_{j \neq i} \mathbf{a}_{ij}^c x_j + \mathbf{b}_i^c \right)$$

Таблица 3.1:

Обобщённый интервальный метод Гаусса-Зейделя

<p>Вход</p> <p>Характеристическая матрица $\mathbf{A}^c \in \mathbb{K}\mathbb{R}^{n \times n}$ и вектор правой части $\mathbf{b}^c \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n$, соответствующие оцениваемому АЕ-множеству решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ интервальной линейной системы $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.</p> <p>Интервальный вектор $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)^\top \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n$, ограничивающий желаемую часть множества решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.</p> <p>Некоторая константа $\epsilon > 0$.</p>
<p>Выход</p> <p>Либо информация “множество решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ не пересекает \mathbf{x}”, либо новые внешние границы $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{\mathbf{x}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{x}}_n)^\top \supseteq \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \mathbf{x}$.</p>
<p>Алгоритм</p> <p>$d := +\infty;$</p> <p>DO WHILE ($d \geq \epsilon$)</p> <p> DO FOR $i = 1$ TO n</p> <p> $\tilde{\mathbf{x}}_i := (\mathbf{a}_{ii}^c)^{-1} \left(\sum_{j=1}^{i-1} (\text{opp } \mathbf{a}_{ij}^c) \tilde{\mathbf{x}}_j + \sum_{j=i+1}^n (\text{opp } \mathbf{a}_{ij}^c) \mathbf{x}_j + \mathbf{b}_i^c \right);$</p> <p> IF ($\tilde{\mathbf{x}}_i$ есть неправильный интервал) THEN</p> <p> STOP, сигнализируя “множество решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ не пересекает \mathbf{x}”</p> <p> END IF</p> <p> $\tilde{\mathbf{x}}_i := \mathbf{x}_i \cap \tilde{\mathbf{x}}_i;$</p> <p> IF ($\tilde{\mathbf{x}}_i$ есть пустое множество \emptyset) THEN</p> <p> STOP, сигнализируя “множество решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ не пересекает \mathbf{x}”</p> <p> END IF</p> <p> END DO</p> <p> $d :=$ расстояние между \mathbf{x} и $\tilde{\mathbf{x}};$</p> <p> $\mathbf{x} := \tilde{\mathbf{x}};$</p> <p>END DO</p>

$$\begin{aligned}
&= (\mathbf{a}_{ii}^c)^{-1} \left(\sum_{j \neq i} \text{opp}(\mathbf{a}_{ij}^c x_j) + \mathbf{b}_i^c \right) \\
&= (\mathbf{a}_{ii}^c)^{-1} \left(\sum_{j \neq i} (\text{opp} \mathbf{a}_{ij}^c) x_j + \mathbf{b}_i^c \right) \quad \text{— поскольку все } x_j \text{ суть точечные} \\
&\subseteq (\mathbf{a}_{ii}^c)^{-1} \left(\sum_{j \neq i} (\text{opp} \mathbf{a}_{ij}^c) \mathbf{x}_j + \mathbf{b}_i^c \right) \quad \begin{array}{l} \text{так как } x_j \in \mathbf{x}_j \text{ и интервальные} \\ \text{— арифметические операции} \\ \text{монотонны по включению.} \end{array}
\end{aligned}$$

Таким образом, если определить интервальный вектор $\tilde{\mathbf{x}}$ посредством покомпонентных равенств

$$\tilde{\mathbf{x}}_i := (\mathbf{a}_{ii}^c)^{-1} \left(\sum_{j \neq i} (\text{opp} \mathbf{a}_{ij}^c) \mathbf{x}_j + \mathbf{b}_i^c \right), \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.16)$$

то в рассматриваемых нами условиях он

- является правильным интервалом, несмотря на возможное наличие неправильных интервалов \mathbf{a}_{ij}^c и \mathbf{b}_i^c , взятие противоположных элементов и т.п. в выражении (3.16),
- также даёт внешнюю интервальную оценку множества решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Естественно поэтому взять пересечение

$$\mathbf{x} \cap \tilde{\mathbf{x}} \supseteq \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}),$$

как более точную внешнюю интервальную оценку множества решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Наконец, чтобы наиболее полно воспользоваться получаемой в ходе работы алгоритма информацией, мы организуем, как и в классическом точечном методе Гаусса-Зейделя, немедленное вовлечение полученной новой оценки каждой компоненты (которая заведомо не хуже старой) в вычислительный процесс. Таким образом, i -ая компонента нового приближения $\tilde{\mathbf{x}}$ будет вычисляться по формуле (3.16) на основе уже вычисленных компонент $\tilde{\mathbf{x}}$ с номерами $i = 1, 2, \dots, i-1$, а также $i+1$ -ой, \dots , n -ой компонент старого приближения \mathbf{x} .

В целом, вычислительная схема интервального метода Гаусса-Зейделя для уточнения внешней интервальной оценки АЕ-множеств решений имеет вид, представленный в Таблице 3.1.

Если $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \mathbf{x} \neq \emptyset$, то результатом работы выписанного алгоритма является последовательность $\{\tilde{\mathbf{x}}\}$ вложенных правильных интервалов, которая обязана иметь предел в \mathbb{IR}^n (см. [4, 181, 219]). Критерием остановки итерирования может служить, как обычно, достижение достаточной степени близости (в некоторой метрике, или же псевдометрике Dist (2.28)) между двумя последовательными приближениями. Для начала работы интервального метода Гаусса-Зейделя нужно знать некоторое начальное интервальное приближение $\mathbf{x} \supseteq \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Мы всегда можем получить его как внешнюю интервальную оценку объединённого множества решений $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ для соответствующей интервальной линейной системы (коль скоро оно наиболее широкое), применив какой-либо из большого количества хорошо разработанных для этой цели методов [4, 29, 45, 118, 129, 181, 219, 297].

3.4 Исследование обобщённого метода Гаусса-Зейделя

Глубокое теоретическое исследование классического интервального метода Гаусса-Зейделя для внешнего оценивания объединённого множества решений ИСЛАУ было дано Бартом и Нудингом в [129], а затем Ноймайером в [219]. Развитую Бартом-Нудингом и Ноймайером теорию можно перенести на выведенный нами обобщённый интервальный метод Гаусса-Зейделя. Частично это и делается нами ниже.

В наших построениях, как и у Ноймайера [219], существенную роль играют понятия M -матрицы и H -матрицы. Напомним

Определение 3.4.1 [219] Для правильного интервала \mathbf{a} обозначим через $\langle \mathbf{a} \rangle$ наименьшее расстояние точек \mathbf{a} до нуля, т.е.

$$\langle \mathbf{a} \rangle := \begin{cases} \min\{ |\underline{\mathbf{a}}|, |\bar{\mathbf{a}}| \}, & \text{если } \mathbf{a} \not\equiv 0, \\ 0, & \text{если } \mathbf{a} \equiv 0. \end{cases}$$

Для правильной интервальной матрицы $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij}) \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ матрицей сравнения называется точечная матрица того же размера, обозначаемая $\langle \mathbf{A} \rangle$, такая что

$$ij\text{-й элемент } \langle \mathbf{A} \rangle := \begin{cases} \langle \mathbf{a}_{ij} \rangle, & \text{если } i = j, \\ -|\mathbf{a}_{ij}|, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Определение 3.4.2 [219] Правильная интервальная квадратная матрица \mathbf{A} называется H -матрицей, если её матрица сравнения $\langle \mathbf{A} \rangle$ является M -матрицей.

В частности, H -матрицей является любая интервальная матрица $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$ со строгим диагональным преобладанием, удовлетворяющая

$$\langle \mathbf{a}_{ii} \rangle > \sum_{j \neq i} |\mathbf{a}_{ij}| \quad \text{для всех } i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.17)$$

Менее тривиальный пример интервальных H -матриц — это правильные невырожденные треугольные матрицы, верхние или нижние [219].

Теорема 3.4.1 Если \mathbf{x}^* — предел обобщённого интервального метода Гаусса-Зейделя, применённого для оценивания некоторого AE -множества решений интервальной линейной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$, то

$$\langle \mathbf{A} \rangle |\mathbf{x}^*| \leq |\mathbf{b}|. \quad (3.18)$$

Если же \mathbf{A} является интервальной H -матрицей, то

$$|\mathbf{x}^*| \leq \langle \mathbf{A} \rangle^{-1} |\mathbf{b}|. \quad (3.19)$$

Доказательство. Напомним, что мы рассматриваем только невырожденные интервальные матрицы \mathbf{A} и без ограничения общности считаем $0 \notin \mathbf{a}_{ii}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Переходя к пределу в расчётных формулах, определяющих обобщённый интервальный метод Гаусса-Зейделя, и учитывая, что $\lim \mathbf{x} = \lim \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^*$, получим

$$\mathbf{x}_i^* = \mathbf{x}_i^* \cap \left((\mathbf{a}_{ii}^c)^{-1} \left(\sum_{j \neq i} (\text{орр } \mathbf{a}_{ij}^c) \mathbf{x}_j^* + \mathbf{b}_i^c \right) \right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Следовательно, по крайней мере

$$\mathbf{x}_i^* \subseteq (\mathbf{a}_{ii}^c)^{-1} \left(\sum_{j \neq i} (\text{орр } \mathbf{a}_{ij}^c) \mathbf{x}_j^* + \mathbf{b}_i^c \right), \quad (3.20)$$

и потому

$$|\mathbf{x}_i^*| \leq \left| (\mathbf{a}_{ii}^c)^{-1} \left(\sum_{j \neq i} (\text{орр } \mathbf{a}_{ij}^c) \mathbf{x}_j^* + \mathbf{b}_i^c \right) \right|$$

для всех $i = 1, 2, \dots, n$, так как в обеих частях включения (3.20) стоят правильные интервалы. Оценим сверху правые части полученных неравенств:

$$\begin{aligned} \left| (\mathbf{a}_{ii}^c)^{-1} \left(\sum_{j \neq i} (\text{орр } \mathbf{a}_{ij}^c) \mathbf{x}_j^* + \mathbf{b}_i^c \right) \right| &= |(\mathbf{a}_{ii}^c)^{-1}| \cdot \left| \sum_{j \neq i} (\text{орр } \mathbf{a}_{ij}^c) \mathbf{x}_j^* + \mathbf{b}_i^c \right| \\ &\leq |\mathbf{a}_{ii}^{-1}| \left(\sum_{j \neq i} |(\text{орр } \mathbf{a}_{ij}^c) \mathbf{x}_j^*| + |\mathbf{b}_i^c| \right) \\ &\leq \langle \mathbf{a}_{ii} \rangle^{-1} \left(\sum_{j \neq i} |\mathbf{a}_{ij}| |\mathbf{x}_j^*| + |\mathbf{b}_i| \right) \end{aligned}$$

для всякого $i = 1, 2, \dots, n$. Таким образом, в целом имеем

$$|\mathbf{x}_i^*| \leq \langle \mathbf{a}_{ii} \rangle^{-1} \left(\sum_{j \neq i} |\mathbf{a}_{ij}| |\mathbf{x}_j^*| + |\mathbf{b}_i| \right),$$

что равносильно

$$\langle \mathbf{a}_{ii} \rangle |\mathbf{x}_i^*| - \sum_{j \neq i} |\mathbf{a}_{ij}| |\mathbf{x}_j^*| \leq |\mathbf{b}_i|,$$

или

$$(\langle \mathbf{A} | \mathbf{x}^* |)_i \leq |\mathbf{b}_i|$$

для всех $i = 1, 2, \dots, n$, т.е. совпадает с (3.18).

Если же \mathbf{A} — интервальная H -матрица, то $\langle \mathbf{A} \rangle$ — это M -матрица и, домножая обе части (3.18) на $\langle \mathbf{A} \rangle^{-1} \geq 0$, получим (3.19). ■

Из неравенства (3.19) следует, что если интервальная матрица \mathbf{A} является H -матрицей, то любой достаточно широкий начальный интервальный вектор \mathbf{x} улучшается (т.е. уменьшается в размерах) обобщённым интервальным методом Гаусса-Зейделя. Напротив, если \mathbf{A} не есть H -матрица, то такого вывода сделать уже нельзя. Ноймайер в [219] доказал в этих условиях даже следующий эффектный результат:

Теорема 3.4.2 [219] *Если правильная интервальная $n \times n$ -матрица $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$ не является H -матрицей, то существуют сколь угодно широкие правильные интервальные векторы, которые не улучшаются интервальным методом Гаусса-Зейделя, примененным для внешнего оценивания объединённого множества решений интервальной системы $\mathbf{A}x = 0$.*

Для исследуемого нами обобщённого интервального метода Гаусса-Зейделя доказательство Ноймайера (как и значительная часть его теории вообще) уже не проходит: в нём существенно используется тот факт, что абсолютная величина произведения интервалов равна произведению абсолютных величин сомножителей, а в полной интервальной арифметике Каухера это свойство не имеет места. Тем не менее, гарантировать улучшение начального интервала методом Гаусса-Зейделя в случае, если матрица ИСЛАУ не является H -матрицей, мы всё-таки не можем.

Одним из наиболее замечательных фактов, относящихся к классическим интервальным итерациям Гаусса-Зейделя в применении к объединённому множеству решений ИСЛАУ, является следующее свойство оптимальности, впервые обнаруженное Бартом и Нундингом [129]:

если матрица ИСЛАУ является интервальной M -матрицей, то метод Гаусса-Зейделя сходится к интервальной оболочке объединённого множества решений.

Нам удалось распространить этот классический результат и на обобщённый интервальный метод Гаусса-Зейделя:

Теорема 3.4.3 *Если в интервальной линейной системе $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ матрица \mathbf{A} является интервальной M -матрицей а все компоненты вектора правой части имеют одинаковый определённый знак, то обобщённый интервальный метод Гаусса-Зейделя сходится к оптимальной внешней интервальной оценке AE -множества решений рассматриваемой системы из любого начального приближения, содержащего оцениваемое множество решений.*

Доказательство. Введём следующие обозначения

$\mathbf{E} = (\mathbf{e}_{ij})$ — матрица, полученная из матрицы системы $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$ заменой её диагональных элементов на нули,

$\mathbf{D} = (\mathbf{d}_{ij})$ — диагональная матрица с элементами $\mathbf{d}_{ii} = \mathbf{a}_{ii}$, $i = 1, 2, \dots, n$, по главной диагонали,

$\mathbf{E}^c = (\mathbf{e}_{ij}^c)$ — матрица, полученная из характеристической матрицы $\mathbf{A}^c = (\mathbf{a}_{ij}^c)$ заменой её диагональных элементов на нули,

$\mathbf{D}^c = (\mathbf{d}_{ij}^c)$ — диагональная матрица с элементами $\mathbf{d}_{ii}^c = \mathbf{a}_{ii}^c$, $i = 1, 2, \dots, n$, по главной диагонали.

Тогда

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{E},$$

$$\mathbf{A}^c = \mathbf{D}^c + \mathbf{E}^c,$$

и

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{ij} = \mathbf{d}_{ij}^c &= 0 && \text{для } i \neq j, \\ \mathbf{e}_{ij} = \mathbf{e}_{ij}^c &= 0 && \text{для } i = j. \end{aligned}$$

Если \mathbf{x}^* — предел обобщённого интервального метода Гаусса-Зейделя, применённого к ИСЛАУ $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, то, очевидно,

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^* \cap (\mathbf{D}^c)^{-1}((\text{орр } \mathbf{E}^c) \mathbf{x}^* + \mathbf{b}^c),$$

а потому

$$\mathbf{x}^* \subseteq (\mathbf{D}^c)^{-1}((\text{орр } \mathbf{E}^c) \mathbf{x}^* + \mathbf{b}^c). \quad (3.21)$$

Далее, если \mathbf{A} есть M -матрица, то её диагональ состоит из положительных элементов, $|(\mathbf{D}^c)^{-1}| = \langle \mathbf{D} \rangle^{-1}$, и поэтому

$$|(\mathbf{D}^c)^{-1}| |\text{орр } \mathbf{E}^c| = \langle \mathbf{D} \rangle^{-1} |\mathbf{E}|. \quad (3.22)$$

Кроме того, \mathbf{D} также есть M -матрица.

Но и матрица сравнения $\langle \mathbf{A} \rangle$ является M -матрицей, будучи одной из точечных матриц в пределах \mathbf{A} . Следовательно, поскольку $\langle \mathbf{A} \rangle = \langle \mathbf{D} \rangle - |\mathbf{E}|$, из результата Ноймайера (Теорема 3.2.2) вытекает

$$\rho(\langle \mathbf{D} \rangle^{-1} |\mathbf{E}|) < 1,$$

что вместе с (3.22) приводит к неравенству

$$\rho(|(\mathbf{D}^c)^{-1}| |\text{орр } \mathbf{E}^c|) < 1.$$

Мы можем, таким образом, заключить, что итерационный процесс в $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$, определяемый формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(0)} &:= \mathbf{x}^*, \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &:= (\mathbf{D}^c)^{-1}((\text{орр } \mathbf{E}^c) \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}^c), \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

сходится к единственной неподвижной точке \mathbf{x}^* отображения $\mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$, действующего по правилу

$$\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{D}^c)^{-1}((\text{орр } \mathbf{E}^c) \mathbf{x} + \mathbf{b}^c).$$

При этом \mathbf{x}^* является формальным решением интервальной линейной системы

$$x = (\mathbf{D}^c)^{-1}((\text{орр } \mathbf{E}^c) x + \mathbf{b}^c). \quad (3.23)$$

Далее, из включения (3.21) по индукции можно вывести, что

$$\mathbf{x}^* \subseteq \mathbf{x}^*. \quad (3.24)$$

Действительно, $\mathbf{x}^* \subseteq \mathbf{x}^{(0)}$, и если $\mathbf{x}^* \subseteq \mathbf{x}^{(k)}$, то, принимая во внимание свойство монотонности интервальных арифметических операций в $\mathbb{K}\mathbb{R}$ по включению, нетрудно заключить

$$\mathbf{x}^* \subseteq (\mathbf{D}^c)^{-1}((\text{орр } \mathbf{E}^c) \mathbf{x}^* + \mathbf{b}^c) \subseteq (\mathbf{D}^c)^{-1}((\text{орр } \mathbf{E}^c) \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}^c) = \mathbf{x}^{(k+1)}.$$

Переходя к пределу $k \rightarrow \infty$, получаем (3.24).

Для завершения нашего доказательства следует лишь сослаться на Теорему 3.2.1: коль скоро \mathbf{x}^* есть формальное решение системы (3.23) и \mathbf{A} является M -матрицей, то \mathbf{x}^* — это интервальная оболочка множества решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ и $\mathbf{x}^* \supseteq \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Следовательно, в силу (3.24) вектор \mathbf{x}^* также является интервальной оболочкой $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. ■

3.5 Предобуславливание

Обе развитые нами выше методики для внешнего интервального оценивания АЕ-множеств решений ИСЛАУ, — формальный подход и обобщённый интервальный метод Гаусса-Зейделя — имеют существенные ограничения на сферу своей приложимости. Ключевым моментом применимости формального подхода является приведение исходной интервальной линейной системы (5) к виду (3.4) таким образом, чтобы выполнялось условие $\rho(|I \ominus \mathbf{A}^c|) < 1$. В свою очередь, для хорошей работы обобщённого интервального метода Гаусса-Зейделя, как следует из теории §3.4, желательно, чтобы интервальная линейная система имела H -матрицу. Совершенно очевидно, что оба эти условия довольно обременительны и на практике выполняются далеко не всегда. Как же находить внешние оценки АЕ-множеств решений интервальных линейных систем в общем случае?

Далее, даже если в (3.4) мы имеем $\rho(|I \ominus \mathbf{A}^c|) < 1$ и формальный подход применим, ширина неподвижной точки уравнения (3.4) также решающим образом зависит от величины $\rho(|I \ominus \mathbf{A}^c|)$. Чем меньше $\rho(|I \ominus \mathbf{A}^c|)$, тем лучшую, при прочих равных условиях, внешнюю интервальную оценку множества решений мы получаем.

В классической задаче внешнего интервального оценивания объединённого множества решений поставленные вопросы обычно решаются с помощью так называемого *предобуславливания* — домножения обеих частей системы слева на некоторую вещественную матрицу (часто обратную для середины матрицы ИСЛАУ [4, 181, 219]^{3,2}), так что вместо исходной системы

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b} \tag{5}$$

мы получаем *предобусловленную интервальную систему*

$$(\Lambda \mathbf{A})x = \Lambda \mathbf{b}, \tag{3.25}$$

$\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$, объединённое множество решений которой не хуже, чем для (5). Это следует из того, что

$$\begin{aligned} \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(Ax = b)\} \\ &\subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(\Lambda Ax = \Lambda b)\} \\ &\subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists U \in \Lambda \mathbf{A})(\exists v \in \Lambda \mathbf{b})(Ux = v)\} = \Xi_{uni}(\Lambda \mathbf{A}, \Lambda \mathbf{b}), \end{aligned}$$

так как в общем случае $\Lambda \mathbf{A} \supseteq \{\Lambda A \mid A \in \mathbf{A}\}$ и $G\mathbf{b} \supseteq \{Gb \mid b \in \mathbf{b}\}$. Итак, от подобной трансформации объединённое множество решений расширяется, но зато улучшаются свойства интервальной матрицы предобусловленной системы (см. [219]). К сожалению, этот рецепт, который мы будем далее называть *наивным предобуславливанием*, напрямую не применим при оценивании обобщённых множеств решений.

При простом домножении интервальной матрицы и правой части ИСЛАУ слева на вещественную матрицу обобщённые множества решений не обязательно расширяются, но могут изменяться довольно сложным образом. Чтобы наглядно проиллюстрировать это явление рассмотрим интервальную линейную систему,

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 1] \\ [-1, 2] & [2, 4] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [1, 2] \\ [1, 2] \end{pmatrix}, \tag{3.26}$$

^{3,2}В книге Г. Алефельда и Ю. Херцбергера [4] предобуславливание называется “методом Хансена” (Глава 16).

для которой

$$\text{mid } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}, \quad (\text{mid } \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{12}{37} & \frac{2}{37} \\ -\frac{2}{37} & \frac{12}{37} \end{pmatrix},$$

а интервальная система, “наивно предобусловленная” с помощью обратной средней, есть

$$\frac{2}{37} \begin{pmatrix} [11, 26] & [-10, 10] \\ [-10, 10] & [11, 26] \end{pmatrix} x = \frac{2}{37} \begin{pmatrix} [7, 14] \\ [4, 11] \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

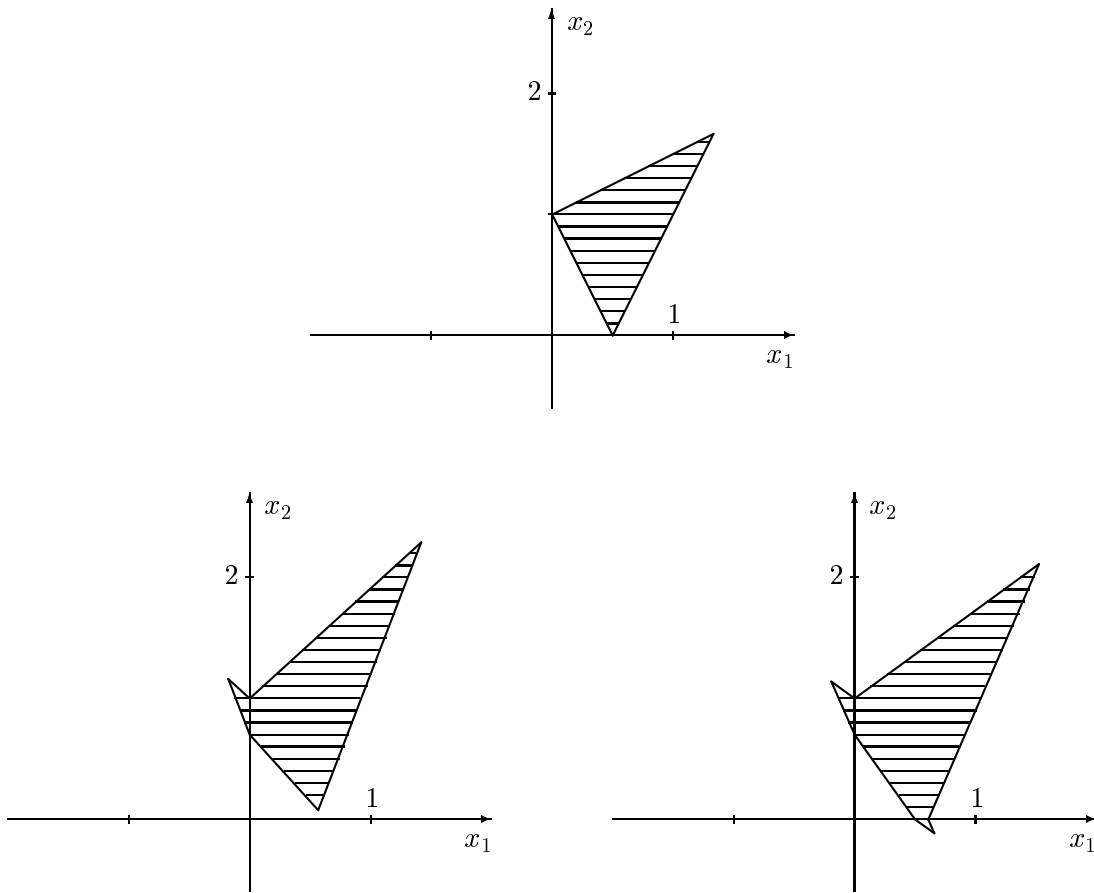


Рис. 3.1: Сверху на рисунке изображено множество $\begin{pmatrix} \forall \exists \\ \exists \exists \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exists \\ \exists \end{pmatrix}$ -решений ИСЛАУ (3.26), слева внизу изображено множество $\begin{pmatrix} \forall \exists \\ \exists \exists \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exists \\ \exists \end{pmatrix}$ -решений интервальной системы (3.27), справа внизу — множество решений, соответствующее характеристическим матрице и правой части (3.28).

Из левого нижнего чертежа Рисунка 3.1 нетрудно увидеть, что множество $\begin{pmatrix} \forall \exists \\ \exists \exists \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exists \\ \exists \end{pmatrix}$ -решений “наивно предобусловленной” системы (3.27) в первом ортанте не содержит вершину $(\frac{4}{3}, \frac{5}{3})$ и прилегающую к ней часть (например, точку $(1, 1)^T$) множества $\begin{pmatrix} \forall \exists \\ \exists \exists \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exists \\ \exists \end{pmatrix}$ -решений для исходной ИСЛАУ (3.26). Более того, нижняя оценка второй координаты точек этого

множества решений, которая для исходной системы равна нулю и достигается на вершине $(\frac{1}{2}, 0)$, при наивном предобуславливании увеличивается!

Итак, множество решений “наивно предобусловленной” ИСЛАУ не обязательно содержит множество решений исходной ИСЛАУ, а внешняя оценка множества решений “наивно предобусловленной” интервальной линейной системы может и не быть внешней оценкой соответствующего множества решений исходной системы. Тем не менее, выход из создавшегося затруднения есть и он состоит в том, что мы должны предобуславливать не исходную интервальную линейную систему вообще, а *характеристическую матрицу и характеристический вектор правой части*, соответствующие конкретному рассматриваемому множеству АЕ-решений.

Вновь обратимся к Теореме 2.3.5 из §2.3 b, дающей удобную аналитическую характеристику множеств АЕ-решений интервальных линейных систем:

$$x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \iff \mathbf{A}^c \cdot x \subseteq \mathbf{b}^c.$$

Если Λ — какая-нибудь квадратная точечная $n \times n$ -матрица, то следствием включения, выписанного в этой эквивалентности справа, является

$$\Lambda(\mathbf{A}^c \cdot x) \subseteq \Lambda \mathbf{b}^c.$$

Известно, что произведение интервальных матриц в общем случае неассоциативно. Тем не менее, для точечных Λ и x в силу Предложения 2.2.2 имеет место равенство

$$\Lambda(\mathbf{A}^c \cdot x) = (\Lambda \mathbf{A}^c) x.$$

Следовательно, в целом приходим к импликации

$$x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \implies (\Lambda \mathbf{A}^c) x \subseteq \Lambda \mathbf{b}^c,$$

содержательный смысл которой может быть выражен следующим образом

Теорема 3.5.1 *Если $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — квадратная точечная матрица, то множество АЕ-решений $\Xi(\mathbf{A}^c, \mathbf{b}^c)$ для интервальной линейной системы (5), соответствующее характеристической матрице \mathbf{A}^c и вектору правой части \mathbf{b}^c , содержится во множестве АЕ-решений ИСЛАУ, соответствующих характеристической матрице $\Lambda \mathbf{A}^c$ и вектору правой части $\Lambda \mathbf{b}^c$, т.е. в $\Xi(\Lambda \mathbf{A}^c, \Lambda \mathbf{b}^c)$.*

Мы будем называть домножение характеристических матрицы и правой части слева на вещественную матрицу *обобщённым предобуславливанием* интервальной линейной системы. Как видим, его результатом может быть лишь расширение множества АЕ-решений, но для новой характеристической матрицы может оказаться выполненным условие

$$\rho(|I \ominus \mathbf{A}^c|) < 1,$$

которое так желательно для применимости наших подходов. Таким образом, исходную задачу внешнего интервального оценивания некоторого множества решений ИСЛАУ действительно можно будет заменить на успешно решаемую задачу внешнего оценивания другого множества решений, которое соответствует предобусловленным характеристической матрице и характеристической правой части ИСЛАУ.

Например, для множества $(\begin{smallmatrix} \forall \\ \exists \end{smallmatrix}) (\begin{smallmatrix} \exists \\ \exists \end{smallmatrix})$ -решений интервальной линейной системы (3.26) характеристические матрица и вектор правой части есть

$$\mathbf{A}^c = \begin{pmatrix} [2, 4] & [1, -2] \\ [2, -1] & [4, 2] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}^c = \begin{pmatrix} [1, 2] \\ [1, 2] \end{pmatrix},$$

а потому

$$(\text{mid } \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^c = \frac{2}{37} \begin{pmatrix} [14, 23] & [10, -10] \\ [8, -8] & [26, 11] \end{pmatrix}, \quad (\text{mid } \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}^c = \frac{2}{37} \begin{pmatrix} [7, 14] \\ [4, 11] \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Множество АЕ-решений ИСЛАУ, соответствующее характеристическим матрице и правой части (3.28), изображено на правом нижнем чертеже Рисунка 3.1 и включает в себя, как легко убедиться из сопоставления с верхним чертежом этого же рисунка, все $(\begin{smallmatrix} \forall \\ \exists \end{smallmatrix}) (\begin{smallmatrix} \exists \\ \exists \end{smallmatrix})$ -решения исходной интервальной линейной системы (3.26).

Далее,

$$|I \ominus (\text{mid } \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^c| = \frac{1}{37} \begin{pmatrix} 9 & 20 \\ 16 & 15 \end{pmatrix},$$

а собственные числа этой матрицы равны $\frac{1}{37}(12 \pm \sqrt{329})$, так что условие (3.3) Теоремы 3.1.3 действительно удовлетворяется. В то же время, для матрицы исходной ИСЛАУ (3.26) это условие не выполнено.

Для удобства читателя переформулируем основные результаты формального подхода параграфа 3.1 в виде, который явно учитывает предобуславливающую матрицу Λ .

Теорема 3.5.2 Пусть Λ — квадратная точечная матрица. Если точка $x \in \mathbb{R}^n$ принадлежит множеству решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, то

$$x \in (I \ominus \Lambda \mathbf{A}^c) x + \Lambda \mathbf{b}^c.$$

Теорема 3.5.3 Пусть для интервальной линейной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ и её множества решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, соответствующего характеристическим матрице \mathbf{A}^c и правой части \mathbf{b}^c , существует такая квадратная точечная матрица Λ , что

$$\rho(|I \ominus \Lambda \mathbf{A}^c|) < 1. \quad (3.29)$$

Тогда формальное решение интервальной системы

$$x = (I \ominus \Lambda \mathbf{A}^c) x + \Lambda \mathbf{b}^c \quad (3.30)$$

существует в \mathbb{KR}^n и единственно. Если же обобщённое множество решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ непусто, то формальное решение интервальной системы (3.30) является правильным интервальным вектором, содержащим $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Доказательства вышеприведённых утверждений совершенно аналогичны доказательствам Теорем 3.1.1–3.1.3 и поэтому мы на них здесь не останавливаемся. ■

Исследование процедуры предобуславливания для случая внешнего оценивания объединённого множества решений ИСЛАУ было выполнено А. Ноймайером в [214, 219]. Вкратце содержание теории Ноймайера сводится к следующему.

Определение 3.5.1 [219] Будем говорить, что интервальная матрица \mathbf{A} сильно невырождена (сильно регулярна), если невырождена интервальная матрица $(\text{mid } \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}$.

Ясно, что если интервальная матрица сильно невырождена, то она и просто невырождена. Но из невырожденности не следует сильная невырожденность. Контрпримером может служить одна из матриц Ноймайера (см. [219])

$$\begin{pmatrix} 3 & [0, 2] & [0, 2] \\ [0, 2] & 3 & [0, 2] \\ [0, 2] & [0, 2] & 3 \end{pmatrix}$$

(такие матрицы ещё встретятся нам в Главах 4 и 5). Вопрос о соотношении сильной невырожденности интервальной матрицы с обычной невырожденностью всех содержащихся в ней точечных матриц является нетривиальным (см. [271]), но сравнительно недавно его исчерпывающее решение было дано А. В. Лакеевым в работе [62].

Класс сильно невырожденных интервальных матриц интересен нам потому, что он является просто описываемым классом матриц, для которых предобуславливание позволяет добиться удовлетворения условиям (3.3) и (3.29).

Теорема 3.5.4 [219] Пусть интервальная матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ и точечная матрица $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ таковы, что их произведение $\Lambda \mathbf{A}$ является H -матрицей. Тогда \mathbf{A} сильно невырождена.

Определение 3.5.2 Для положительного вектора $u \in \mathbb{R}^n$ станем называть u -масштабированной максимум-нормой интервальной матрицы $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij}) \in \mathbb{KR}^{n \times n}$ величину

$$\|\mathbf{A}\|_u := \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{u_i} \sum_{k=1}^n |\mathbf{a}_{ik}| u_k .$$

Нетрудно убедиться, что для вещественных матриц этим определением действительно задаётся матричная норма, подчиненная векторной u -масштабированной максимум-норме

$$\|x\|_u := \max_{1 \leq i \leq n} \frac{|x_i|}{u_i} .$$

Кроме того, u -масштабированная максимум-норма интервальной матрицы является абсолютной нормой. Поэтому в силу известного неравенства между спектральным радиусом и нормой имеем

$$\rho(|\mathbf{A}|) \leq \|\mathbf{A}\|_u$$

для любой $\mathbf{A} \in \mathbb{KR}^{n \times n}$.

Предложение 3.5.1 [219] Пусть интервальная матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ такова, что её средняя матрица $\text{mid } \mathbf{A}$ невырождена. Тогда следующие условия равносильны друг другу:

- (i) матрица \mathbf{A} сильно невырождена,
- (ii) $\rho(|(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \cdot \text{rad } \mathbf{A}) < 1$,

- (iii) $\|I - (\text{mid } \mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}\|_u < 1$ для некоторого вектора $u > 0$,
- (iv) произведение $(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}$ является H -матрицей.

Итак, если в рассматриваемой ИСЛАУ интервальная матрица сильно невырождена, то посредством предобуславливания обратной средней матрицей можно удовлетворить условию (3.3).

Предложение 3.5.2 [219] *Если интервальная матрица \mathbf{A} сильно невырождена, то и любая матрица $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$ также сильно невырождена. В частности всякая сильно невырожденная матрица невырождена.*

Отметим также, что всякая интервальная H -матрица (а значит и всякая M -матрица) являются сильно невырожденными.

Для предложенного выше обобщённого предобуславливания изложенная теория оказывается даже несколько избыточной, так как из-за наличия в \mathbb{KR} правильных и неправильных интервалов ширина интервалов может уменьшаться в результате арифметических операций. Так или иначе, но для сильно невырожденных интервальных матриц процедура обобщённого предобуславливания заведомо приводит к выполнению условий (3.3) и (3.29), а также к хорошей работе обобщённого интервального метода Гаусса-Зейделя.

При внешнем оценивании объединённого множества решений ИСЛАУ наиболее часто в качестве предобуславливающей матрицы берут обратную к “средней” матрице системы, т.е. $\Lambda = (\text{mid } \mathbf{A})^{-1}$. Подобное предобуславливание привлекательно тем, что получающаяся предобусловленная система (3.25) имеет своей средней матрицей единичную матрицу. Соответственно, в матрице $(I - \Lambda\mathbf{A})$ все интервальные элементы уравновешены. Ноймайер [219] доказал ряд теоретических результатов, свидетельствующих о некоторой (правда, довольно специфической) оптимальности предобуславливания с помощью обратной средней матрицы. Кроме того, для таких систем оптимальные внешние оценки множества решений могут быть очень быстро (ценой одного обращения точечной матрицы) получены с помощью процедуры Хансена-Блика [165, 263].

Но улучшение свойств интервальной системы путём предобуславливания не достигается совершенно бесплатно. Неизбежная издержка процедуры предобуславливания — увеличение множества решений предобусловленной системы (3.25) в сравнении с множеством решений исходной ИСЛАУ. И это нежелательное расширение множества решений является, вообще говоря, тем большим, чем больше предобуславливающая матрица отличается от диагональной (конкретные примеры с иллюстрациями читатель может найти в [165, 219]). По этой причине нежелательно брать матрицу Λ “слишком сильно” отличающейся от диагональной.

Замечательность невырожденной диагональной матрицы Λ состоит в том, что, какова бы ни была интервальная матрица или вектор \mathbf{H} подходящего размера, имеет место равенство

$$\Lambda\mathbf{H} = \{ \Lambda H \mid H \in \mathbf{H} \},$$

т.е. результат интервального матричного умножения на такую матрицу Λ совпадает с множеством поэлементных точечных произведений. Следовательно, с невырожденной диагональной матрицей Λ можно осуществлять рассуждения типа

$$H \in \mathbf{H} \text{ эквивалентно } \Lambda H \in \Lambda\mathbf{H}, \quad (3.31)$$

а преобуславливание такой матрицей оставляет множества решений ИСЛАУ неизменными. В общем случае, когда Λ не есть невырожденная диагональная матрица, в логической формуле (3.31) можно осуществлять импликацию только вправо, и, соответственно, множество решений ИСЛАУ, преобусловленной с помощью такой матрицы, уже не будет совпадать с исходным множеством решений.

Определение 3.5.3 Отклонением правильного интервала \mathbf{x} назовём величину

$$\text{dev } \mathbf{x} := \begin{cases} \underline{\mathbf{x}}, & \text{если } |\underline{\mathbf{x}}| \geq |\overline{\mathbf{x}}|, \\ \overline{\mathbf{x}}, & \text{иначе,} \end{cases}$$

т.е. наиболее удалённую от нуля точку интервала \mathbf{x} .

Можно порекомендовать, например, следующий выбор диагональной преобуславливающей матрицы Λ :

$$\Lambda = (\text{dev diag } \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} (\text{dev } \mathbf{a}_{11})^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (\text{dev } \mathbf{a}_{nn})^{-1} \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

т.е. Λ берётся диагональной матрицей, составленной из величин, обратных отклонениям диагональных элементов \mathbf{A} . Ниже мы экспериментально демонстрируем, что даже такой простейший выбор Λ ведёт к неплохим результатам: область применимости нашего подхода действительно расширяется и улучшается качество внешнего оценивания в сравнении с немодифицированной версией (3.4). А. Ноймайер недавно теоретически доказал [220], что при оценивании объединённого множества решений наш формальный подход с “диагональным” преобуславливанием (3.32) применим в точности к интервальным линейным системам с H -матрицами (см. §3.4), т.е. тогда же, когда и интервальный метод Гаусса-Зейделя. При этом полученные результаты будут тем лучше, чем больше у матрицы \mathbf{A} диагональное преобладание, иными словами, чем больше разнятся левая и правая части в неравенстве (3.17). Это и продемонстрировано в приводимых ниже в §3.7 результатах тестовых расчетов.

С другой стороны, располагая более детальной информацией об интервальной матрице системы или об алгоритме, можно строить преобуславливающие матрицы, лучшие чем “обратная средняя”. Например, в популярном интервальном методе Гаусса-Зейделя мы имеем возможность выбирать даже *оптимальные* (в том или ином смысле) преобуславливатели, которые перевычисляются для каждого отдельного шага алгоритма [181]. На наш взгляд, формальный подход также может получить дальнейшее развитие и расширение сферы своей применимости на основе подходящего выбора преобуславливания. Имеет смысл рассмотреть преобуславливающие матрицы, в некотором смысле промежуточные между “обратной средней” и диагональной. Тогда они не будут сильно искажать множество решений, приводя в то же время матрицу к нужному значению спектрального радиуса. Другой многообещающий путь модификации формального подхода — использование *расщепления* интервальной матрицы системы.

3.6 Внешнее оценивание для нелинейных систем

Развиваемый нами в этой главе формальный подход к внешнему оцениванию множеств решений интервальных систем частично применим не только к линейным, но и к нелиней-

ным системам уравнений. В этом параграфе мы кратко наметим соответствующие результаты, касающиеся допустимого, управляемого и объединённого множеств решений, а их дальнейшее развитие и детализация могут стать предметом отдельной большой работы. Следует сказать, что задача внешнего оценивания объединённого множества решений для общих нелинейных интервальных систем уравнений является весьма популярной в приложениях, а её решению посвящено немалое количество публикаций (см., к примеру, [45, 136, 137, 166, 181, 211, 219] и имеющуюся в этих работах библиографию). Тщательное сравнение классических подходов к этой задаче — методов Кравчика, Хансена-Сенгупты и т.п. — с нашим формальным подходом останется пока за рамками исследования.

Предположим, что количество уравнений интервальной системы совпадает с количеством неизвестных, и мы можем эквивалентным образом привести эту систему к рекуррентному виду

$$x = G(\mathbf{a}, x) + \mathbf{b}, \quad (3)$$

(к “fixed-point form”). Подобное приведение, как правило, не является непреодолимо сложным. Если исходная интервальная система уравнений представлена в виде

$$F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b} \quad (2)$$

то мы можем, например, “перенести” все члены, образующие $F(\mathbf{a}, x)$, в одну часть с вектором \mathbf{b} , затем добавить к обеим частям системы по x и, возможно, выполнить упрощающие преобразования с выражением $(x - F(\mathbf{a}, x))$ в соответствии с рекомендациями в конце §1.2а. Другой возможный способ приведения (2) к (3) — последовательно выразить все x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, из различных уравнений системы.

Допуская некоторую вольность, мы будем обозначать в этом параграфе

$$\Xi_{tol}(G, \mathbf{a}, \mathbf{b}) := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall a \in \mathbf{a})(\exists b \in \mathbf{b})(x = G(a, x) + b) \} \quad (3.33)$$

и называть это множество *допустимым множеством решений* интервальной системы уравнений (3). При выполнении вышеупомянутых условий эквивалентности преобразований из §1.2а это множество совпадает с допустимым множеством решений интервальной системы (2), а потому далее мы можем рассматривать задачу внешнего оценивания уже для (3.33).

В качестве примера рассмотрим интервальную систему уравнений

$$\begin{cases} [1.5, 2.5] x_1 + [2.5, 3.5] x_2 + \frac{[0.8, 1.4]}{1 + x_1^2} = [5, 15], \\ [0.9, 1.1] x_1 - [1.8, 2.2] x_2 + [1.6, 2] \cos x_2 = [8, 20]. \end{cases} \quad (3.34)$$

В силу результатов §1.2а она эквивалентна системе

$$\begin{cases} 2x_1 + [-0.5, 0.5] x_1 + [2.5, 3.5] x_2 + \frac{[0.8, 1.4]}{1 + x_1^2} = [5, 15], \\ [0.9, 1.1] x_1 - 2x_2 + [-0.2, 0.2] x_2 + [1.6, 2] \cos x_2 = [8, 20], \end{cases}$$

которая, в свою очередь, после перенесения членов может быть переписана как

$$\begin{cases} 2x_1 = [-0.5, 0.5] x_1 - [2.5, 3.5] x_2 - \frac{[0.8, 1.4]}{1 + x_1^2} + [5, 15], \\ 2x_2 = [0.9, 1.1] x_1 + [-0.2, 0.2] x_2 + [1.6, 2] \cos x_2 - [8, 20]. \end{cases}$$

Наконец, приходим к

$$\begin{cases} x_1 = [-0.25, 0.25] x_1 - [1.25, 1.75] x_2 - \frac{[0.4, 0.7]}{1 + x_1^2} + [2.5, 7.5], \\ x_2 = [0.45, 0.55] x_1 + [-0.1, 0.1] x_2 + [0.8, 1] \cos x_2 - [4, 10]. \end{cases}$$

Возможен и другой способ эквивалентного приведения интервальной системы (3.34) к желаемой рекуррентной форме. От (3.34) мы переходим к

$$\begin{cases} [1.5, 2.5] x_1 + 3x_2 + [-0.5, 0.5] x_2 + \frac{[0.8, 1.4]}{1 + x_1^2} = [5, 15], \\ x_1 + [-0.1, 0.1] x_1 - [1.8, 2.2] x_2 + [1.6, 2] \cos x_2 = [8, 20]. \end{cases}$$

Выражая x_1 из второго уравнения и x_2 из первого уравнения и меняя получающиеся уравнения местами, будем иметь

$$\begin{cases} x_1 = [-0.1, 0.1] x_1 + [1.8, 2.2] x_2 - [1.6, 2] \cos x_2 + [8, 20], \\ x_2 = [-\frac{5}{6}, -\frac{1}{2}] x_1 + [-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}] x_2 - [\frac{8}{30}, \frac{14}{3}] \frac{1}{1 + x_1^2} + [\frac{5}{3}, 5]. \end{cases}$$

Чтобы сформулировать основные результаты этого параграфа, предварительно введём

Определение 3.6.1 *Интервальное отображение $f : \mathbb{KR}^n \rightarrow \mathbb{KR}^n$ назовём P -сжатием (или P -сжимающим), если существует неотрицательная $n \times n$ -матрица P со спектральным радиусом $\rho(P) < 1$, такая что для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{KR}^n$ имеет место*

$$\text{Dist} (f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) \leq P \cdot \text{Dist} (\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Это определение — частный случай общего определения P -сжатия псевдометрического пространства (см., например, [76]), и для случая классической интервальной арифметики оно было рассмотрено, например, в [4]. Следует отметить, что исследователи, к сожалению, не придерживаются здесь единой терминологии. Ряд авторов (см. [219]) за матрицей P закрепляют отдельное понятие “оператора Липшица (матрицы Липшица) отображения f ”, и в условиях Определения 3.6.1 говорят, что “оператор Липшица для f сжимающий”.

В дальнейшем принципиален также тот факт, что для $G(a, x)$ существует естественное интервальное расширение по аргументам a и x , т.е. аналитическое выражение для $G(a, x)$ есть конечная комбинация символов переменных x_i , параметров a_j , четырёх арифметических операций и, возможно, ещё элементарных функций типа \sin , \cos , \exp , \log , возведения в целую степень, взятия корня и т.п.

Теорема 3.6.1 *Пусть в интервальной системе уравнений $x = G(\mathbf{a}, x) + \mathbf{b}$ каждый из параметров a_1, a_2, \dots, a_l , имеющих интервальную неопределённость, входит не более одного раза в первой степени в каждое из компонентных выражений G_1, G_2, \dots, G_n отображения G . Если для некоторого интервального вектора $\mathbf{a} \in \mathbb{IR}^l$ допустимое множество решений $\Xi_{\text{tol}}(G, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ этой системы непусто, и, кроме того, для естественного*

интервального расширения $G(\mathbf{a}, \mathbf{x})$ выражения $G(a, x)$ отображение $G : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$, действующее по правилу

$$\mathbf{x} \mapsto G(\text{dual } \mathbf{a}, \mathbf{x}),$$

есть P -сжатие пространства $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$, то интервальная система уравнений

$$x = G(\text{dual } \mathbf{a}, x) + \mathbf{b} \quad (3.35)$$

имеет единственное правильное формальное решение $\mathbf{x}^* \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n$, которое является внешней интервальной оценкой множества решений $\Xi_{tol}(G, \mathbf{a}, \mathbf{b})$, т.е. $\mathbf{x}^* \supseteq \Xi_{tol}(G, \mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Доказательство. Прежде всего покажем, что для интервальной системы уравнений

$$x = G(\mathbf{a}, x) + \mathbf{b} \quad (3)$$

принадлежность точки x допустимому множеству решений $\Xi_{tol}(G, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ влечёт справедливость следующей системы неравенств

$$\begin{cases} x_i \geq \max_{a \in \mathbf{a}} G_i(a, x) + \underline{\mathbf{b}}_i, \\ x_i \leq \min_{a \in \mathbf{a}} G_i(a, x) + \overline{\mathbf{b}}_i, \\ i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (3.36)$$

Как и при доказательстве Теоремы 2.1.2, мы обоснуем (3.36) путём эквивалентных преобразований с выделяющим предикатом множества решений. Имеем

$$\begin{aligned} & \Xi_{tol}(G, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ &= \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall a \in \mathbf{a})(\exists b \in \mathbf{b})(x = G(a, x) + b) \} \\ &= \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall a \in \mathbf{a})(\exists b \in \mathbf{b}) \\ & \quad (x_1 = G_1(a, x) + b_1 \ \& \ \dots \ \& \ x_n = G_n(a, x) + b_n) \} \\ &= \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall a \in \mathbf{a}) \\ & \quad ((\exists b_1 \in \mathbf{b}_1)(x_1 = G_1(a, x) + b_1) \ \& \\ & \quad \dots \ \& \\ & \quad (\exists b_n \in \mathbf{b}_n)(x_n = G_n(a, x) + b_n)) \}, \end{aligned}$$

где последнее равенство действительно является равенством потому, что для каждого i в выражение $(G_i(a, x) + b_i)$ входит лишь одна из b_i , и эти вхождения в разных выражениях $(G_i(a, x) + b_i)$ не пересекаются друг с другом. Известно, что тогда мы имеем право “проносить” кванторы существования “ \exists ” к отдельным членам конъюнкций [49].

Воспользовавшись эквивалентностями (2.2)–(2.3), мы можем продолжить наши выкладки с выделяющим предикатом следующим образом

$$\Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$$

$$\begin{aligned}
 &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall a \in \mathbf{a}) \right. \\
 &\quad \left((x_1 \geq G_1(a, x) + \underline{\mathbf{b}}_1) \& (x_1 \leq G_1(a, x) + \overline{\mathbf{b}}_1) \& \right. \\
 &\quad \quad \dots \quad \& \\
 &\quad \left. (x_n \geq G_n(a, x) + \underline{\mathbf{b}}_n) \& (x_n \leq G_n(a, x) + \overline{\mathbf{b}}_n) \right. \left. \right\} \\
 &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall a \in \mathbf{a})(x_1 \geq G_1(a, x) + \underline{\mathbf{b}}_1) \& (\forall a \in \mathbf{a})(x_1 \leq G_1(a, x) + \overline{\mathbf{b}}_1) \& \right. \\
 &\quad \quad \dots \quad \& \\
 &\quad \left. (\forall a \in \mathbf{a})(x_n \geq G_n(a, x) + \underline{\mathbf{b}}_n) \& (\forall a \in \mathbf{a})(x_n \leq G_n(a, x) + \overline{\mathbf{b}}_n) \right\} \\
 &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid (x_1 \geq \max_{a \in \mathbf{a}} G_1(a, x) + \underline{\mathbf{b}}_1) \& (x_1 \leq \min_{a \in \mathbf{a}} G_1(a, x) + \overline{\mathbf{b}}_1) \& \right. \\
 &\quad \quad \dots \quad \& \\
 &\quad \left. (x_n \geq \max_{a \in \mathbf{a}} G_n(a, x) + \underline{\mathbf{b}}_n) \& (x_n \leq \min_{a \in \mathbf{a}} G_n(a, x) + \overline{\mathbf{b}}_n) \right\},
 \end{aligned}$$

что совпадает с системой неравенств (2.1).

Если каждый из параметров a_1, a_2, \dots, a_l , имеющих интервальную неопределённость, входит не более одного раза в первой степени в каждое из компонентных выражений G_1, G_2, \dots, G_n , то для всех $i = 1, 2, \dots, n$

$$\max_{a \in \mathbf{a}} G_i(a, x) \quad \text{и} \quad \min_{a \in \mathbf{a}} G_i(a, x)$$

совпадают с

$$\overline{G_i(\mathbf{a}, x)} \quad \text{и} \quad \underline{G_i(\mathbf{a}, x)}$$

— верхними и нижними концами естественных интервальных расширений $G_i(\mathbf{a}, x)$. В свою очередь, основываясь на свойствах арифметики Каухера, мы можем представить эти значения в виде

$$\underline{G_i(\text{dual } \mathbf{a}, x)} \quad \text{и} \quad \overline{G_i(\text{dual } \mathbf{a}, x)}.$$

Итак, если точка \tilde{x} принадлежит допустимому множеству решений $\Xi_{tol}(G, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ интервальной системы уравнений

$$x = G(\mathbf{a}, x) + \mathbf{b} \tag{3}$$

и выполнены условия доказываемой теоремы, касающиеся вхождения в (3) параметров с интервальной неопределённостью, то, в силу (3.36) справедливо включение

$$\tilde{x} \in G(\text{dual } \mathbf{a}, \tilde{x}) + \mathbf{b}.$$

Запустим в $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ итерационный процесс по формулам

$$\mathbf{x}^{(0)} := \tilde{x}, \tag{3.37}$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} := G(\text{dual } \mathbf{a}, \mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{b}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{3.38}$$

Нетрудно показать по индукции, что все порождаемые этим процессом векторы содержат точку \tilde{x} . Действительно, для $\mathbf{x}^{(0)}$ это верно по построению, и если $\tilde{x} \in \mathbf{x}^{(k)}$ для некоторого номера k , то из-за монотонности арифметических операций в $\mathbb{K}\mathbb{R}$ по включению

$$\tilde{x} \in G(\text{dual } \mathbf{a}, \tilde{x}) + \mathbf{b} \subseteq G(\text{dual } \mathbf{a}, \mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{b} = \mathbf{x}^{(k+1)}.$$

Следовательно, \tilde{x} на самом деле принадлежит всем $\mathbf{x}^{(k)}$, которые поэтому должны быть правильными интервальными векторами, невзирая на возможное наличие в выражении $G(\text{dual } \mathbf{a}, x)$ неправильных интервалов.

Наконец, теорема Шрёдера о неподвижной точке (см., например, [4, 50, 76, 219]) приводит нас к выводу о том, что при наложенных на $G(\text{dual } \mathbf{a}, x)$ условиях последовательность $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ сходится к некоторому пределу \mathbf{x}^* — единственному формальному решению системы уравнений (3.35). При этом принадлежность $\tilde{x} \in \mathbf{x}^{(k)}$ влечёт

$$\tilde{x} \in \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^*.$$

Поскольку наше рассуждение справедливо для любой точки \tilde{x} из множества решений $\Xi_{\text{tol}}(G, \mathbf{a}, \mathbf{b})$, то действительно $\Xi_{\text{tol}}(G, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \subseteq \mathbf{x}^*$. ■

Совершенно сходным образом для управляемого множества решений

$$\Xi_{\text{ctrl}}(G, \mathbf{a}, \mathbf{b}) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall b \in \mathbf{b})(\exists a \in \mathbf{a})(x = G(a, x) + b)\},$$

интервальной системы (3) обосновывается

Теорема 3.6.2 Пусть для некоторого интервального вектора параметров $\mathbf{a} \in \mathbb{I}\mathbb{R}^l$ управляемое множество решений $\Xi_{\text{ctrl}}(G, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ интервальной системы уравнений (3) непусто, и, кроме того, для естественного интервального расширения $G(\mathbf{a}, \mathbf{x})$ выражения $G(a, x)$ отображение $G : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$, действующее по правилу

$$\mathbf{x} \mapsto G(\mathbf{a}, \mathbf{x}),$$

есть P -сжатие пространства $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$. Тогда интервальная система уравнений

$$x = G(\mathbf{a}, x) + \text{dual } \mathbf{b}$$

имеет единственное правильное формальное решение $\mathbf{x}^* \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n$, которое является внешней интервальной оценкой множества решений $\Xi_{\text{ctrl}}(G, \mathbf{a}, \mathbf{b})$, т.е. $\mathbf{x}^* \supseteq \Xi_{\text{ctrl}}(G, \mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Отметим, что для объединённого множества решений результат, аналогичный Теоремам 3.6.1 и 3.6.2, известен давно, хотя и формулировался он для классической интервальной арифметики, в совершенно других терминах, и без использования понятия формального решения:

Теорема 3.6.3

(наша переформулировка результатов Теоремы 4 и Следствия 6 из Главы 11 книги [4]) Пусть для естественного интервального расширения $G(\mathbf{a}, \mathbf{x})$ выражения $G(a, x)$ при некотором $\mathbf{a} \in \mathbb{I}\mathbb{R}^l$ отображение $G : \mathbb{I}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{I}\mathbb{R}^n$, действующее по правилу

$$\mathbf{x} \mapsto G(\mathbf{a}, \mathbf{x}),$$

3.7 Обсуждение и численные эксперименты

Несмотря на новизну постановки задачи о внешнем оценивании обобщённых множеств решений ИСЛАУ и представленных выше в этой главе результатов, частный случай задачи, касающийся внешнего оценивания объединённого множества решений, является хорошо исследованным в традиционном интервальном анализе. Более того, наработанные к настоящему моменту итерационные методы внешнего оценивания объединённого множества решений очень близки к тому, что было развито нами в §§3.1–3.2

Напомним следующие широко известные результаты:

Предложение 3.7.1 (интервальный фольклор) *Множество решений интервальной системы*

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b},$$

$\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{IR}^n$, совпадает со множеством решений интервальной системы

$$x = \mathbf{C}x + \mathbf{d}, \quad (3.40)$$

где $\mathbf{C} = I - \mathbf{A}$, $\mathbf{d} = \mathbf{b}$.

Результат Предложения, легко доказываемый на основе рассуждений в конце §1.2а, даёт возможность заменять решение внешней задачи для исходной интервальной линейной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ на решение внешней задачи для системы вида (3.40), в котором переменная выделена в левой части “в чистом виде”.

Теорема 3.7.1 [4, 124, 203] *Итерационный процесс*

$$\mathbf{x}^{(k+1)} := \mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

с $\mathbf{C} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ и $\mathbf{d} \in \mathbb{IR}^n$ для любого начального вектора $\mathbf{x}^{(0)}$ сходится к единственной неподвижной точке $\mathbf{x}^* \in \mathbb{IR}^n$ интервального отображения, задаваемого правилом

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{d}, \quad (3.41)$$

тогда и только тогда, когда спектральный радиус $\rho(|\mathbf{C}|)$ матрицы $|\mathbf{C}|$, составленной из модулей элементов \mathbf{C} , меньше единицы.

Теорема 3.7.2 [4, 124] *Пусть интервальная матрица $\mathbf{C} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ такова, что $\rho(|\mathbf{C}|) < 1$. Тогда для неподвижной точки \mathbf{x}^* интервального отображения, задаваемого правилом*

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{d}$$

(которая существует и единственна в силу Теоремы 3.7.1), выполнено соотношение

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists C \in \mathbf{C})(\exists d \in \mathbf{d})(x = Cx + d)\} \subseteq \mathbf{x}^*,$$

т.е. эта неподвижная точка \mathbf{x}^* является внешней интервальной оценкой множества решений интервальной системы $x = \mathbf{C}x + \mathbf{d}$.

Таким образом, для объединённого множества решений результаты, аналогичные Теоремам 3.1.2 и 3.1.3, были, фактически, давно известны. Но развиваемый нами формальный подход к решению задачи внешнего оценивания множеств решений ИСЛАУ основывается на следующем неожиданном факте, до сих пор остававшемся незамеченным исследователями: *фигурирующая в Теоремах 3.7.1 и 3.7.2 неподвижная точка x^* отображения (3.41) является не чем иным, как формальным решением интервального уравнения (3.40)*! Поэтому мы можем переформулировать приведённые выше классические результаты в следующем модифицированном виде:

Теорема 3.7.3 *Если интервальная $n \times n$ -матрица C такова, что $\rho(|C|) < 1$, то для любого $d \in \mathbb{IR}^n$ формальное решение интервального уравнения*

$$x = Cx + d \tag{3.42}$$

существует, единственно и является внешней интервальной оценкой множества решений этого интервального уравнения.

В чём смысл переформулировки хорошо известных результатов Теорем 3.7.1–3.7.2 в виде Теоремы 3.7.3? Выполненная нами редукция не является “всего лишь” языковым трюком, но имеет глубокие методические следствия. Дело в том, что утверждение Теоремы 3.7.3, организованное как “чистая” неконструктивная теорема существования, помогает лучше осознать следующий принципиальный факт: *способ доказательства теоремы не обязательно должен совпадать с практическим способом нахождения решения основного уравнения (3.42)*. Кроме того, задача нахождения формального решения — это уже не задача оценивания или приближения, а, по существу, традиционная математическая задача решения некоторого уравнения. С подобными задачами имеет дело значительная часть современной математики и естествознания.

Традиционные конструктивные доказательства Теорем 3.7.1–3.7.2, основанные на известной теореме Шрёдера о сжимающих отображениях, породили целый поток работ, посвящённых построению различных стационарных итерационных алгоритмов для нахождения неподвижной точки интервального отображения (3.41). Но, вообще говоря, никто не обязывает нас при конструировании вычислительных подходов к этой задаче ограничиваться лишь стационарными сжатиями, тем более, что получающиеся при этом методы имеют довольно медленную сходимость. При построении конкретных процедур для нахождения формального решения для (3.42) (= неподвижной точки (3.41)) разработчик алгоритмов должен быть свободен в выборе и использовании любых других возможных приёмов и концепций (например, символьных преобразований). Единственным руководящим принципом должно при этом оставаться удовлетворение искомым решением уравнению (3.42) в смысле Определения 1.3.2. Одним из основных результатов нашей работы является развитие в Главе 6 именно такого эффективного нестационарного итерационного алгоритма — субдифференциального метода Ньютона — и техники для его теоретического анализа.

Формальный подход в применении к задаче внешнего оценивания объединённого множества решений ИСЛАУ предоставляет новый взгляд на старый предмет, следствием чего является очень общий и эффективный численный алгоритм решения популярной задачи. Но каково его практическое значение? Иными словами, каково положение развиваемого нами формального подхода среди других методов решения “внешней задачи” (1.21)?

Все разработанные к настоящему моменту численные методы для внешнего оценивания объединённого множества решений интервальных линейных систем можно разделить на три большие группы:

Во-первых, это методы для нахождения *оптимальных решений* внешней задачи, т.е. точных (неулучшаемых) оценок множества решений. Поскольку задача вычисления таких решений NP-трудна, методы этой группы являются очень трудоёмкими и по своей структуре близки переборным алгоритмам дискретной оптимизации (мы рассмотрим такие методы в Главе 4 нашей работы).

Во-вторых, это методы общего назначения для решения внешней задачи, в которых на ответ не накладывается требование оптимальности или достижения гарантированной точности.

Третью группу методов образуют различные специализированные алгоритмы для ИС-ЛАУ частного вида (блочных, ленточных и т.п.).

Формальный подход наследует качество внешнего оценивания множества решений от интервальных итерационных схем. Следующая теорема — это известный результат Д. М. Гея [156], переформулированный в терминах “формального подхода”.

Теорема 3.7.4 Пусть \mathbf{x}^* — формальное решение уравнения

$$x = (I - \mathbf{A})x + \mathbf{b},$$

и $\eta := \|I - \mathbf{A}\| < \frac{1}{3}$. Тогда справедливо следующее неравенство для отклонения внешней интервальной оценки \mathbf{x}^* объединённого множества решений $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ интервальной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ от интервальной оболочки $\square \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ в псевдометрике (2.28):

$$\text{Dist}(\square \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}), \mathbf{x}^*) \leq \left(\frac{4\eta}{1 - 3\eta} \right) \cdot \text{rad}(\square \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})).$$

Но вычислительная сложность субдифференциального метода Ньютона, который мы используем для вычисления формального решения (3.42), почти такая же, как и конечных прямых алгоритмов (см. Главу 6). В целом, как нам представляется, формальный подход, соответствующим образом развитый и модифицированный, может служить эффективным средством для вычисления внешних оценок объединённого и обобщённых множеств решений для достаточно общих интервальных линейных систем. Иначе говоря, мы мыслим его как хороший метод общего назначения.

В настоящее время среди методов общего назначения наиболее популярны

интервальный метод Гаусса-Зейделя с предобуславливанием [181, 219],

интервальный метод Гаусса [4, 45, 219], который часто применяют также с предобуславливанием,

процедура Хансена-Блика [165], строго обоснованная И. Роном [263] и существенно улучшенная Нинг и Кирфоттом в [226].

Для всех эти алгоритмов развиваемый нами формальный подход является естественным конкурентном, превосходящим их по вычислительной эффективности и не уступающим по качеству оценивания, и это заявление мы проиллюстрируем результатами вычислительных экспериментов на персональном компьютере. Мы выполнили их на задачах внешнего оценивания объединённых множеств решений ИСЛАУ с формальным подходом §3.1, в котором формальное решение основного уравнения (3.4)–(3.30) находилось с помощью субдифференциального метода Ньютона (его описание и исследование — в Главе 6). При этом проверка условия (3.3)–(3.29), которое столь существенно для применимости формального подхода, была заменена нами на проверку неравенства $\| |I - \Lambda \mathbf{A}| \| < 1$, более сильного в силу известного соотношения между спектральным радиусом и матричными нормами. Алгоритм был реализован на языке Turbo C в стандартной машинной арифметике двойной разрядности с плавающей точкой.^{3.3} Приводимые ниже результаты округлены до трёх десятичных знаков после запятой.

Каждая из методик внешнего оценивания объединённых множеств решений имеет свою собственную область применимости и для каждой существует некоторый специальный класс (или даже классы) интервальных линейных систем, на которых она даёт лучшие результаты — внешние оценки с меньшей избыточной шириной. Хорошо известно, что для вынесения того или иного определённого заключения о сравнительных качествах метода требуется проведение большого количества рутинной работы. Несколько случайных примеров едва ли смогут убедить в том, что некоторый подход действительно лучше остальных. Ниже мы сравниваем вышеупомянутые методы на ряде тестовых интервальных линейных систем с H -матрицами, а термин “формальный подход” мы используем для обозначения его простейшей версии, в которой решение исходной задачи (1.21) сводится к отысканию формального решения уравнения (3.40) с диагональной предобуславливающей матрицей $\Lambda := (\text{dev diag } \mathbf{A})^{-1}$. Это сделано для того, чтобы продемонстрировать работу формального подхода “в чистом виде”, поскольку при использовании традиционного предобуславливания “обратной средней” процедура Хансена-Блика даёт заведомо лучшие результаты.

Пример 0 из [165].

$$\begin{pmatrix} [0.7, 1.3] & [-0.3, 0.3] & [-0.3, 0.3] \\ [-0.3, 0.3] & [0.7, 1.3] & [-0.3, 0.3] \\ [-0.3, 0.3] & [-0.3, 0.3] & [0.7, 1.3] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-14, -7] \\ [9, 12] \\ [-3, 3] \end{pmatrix}.$$

В применении к этой системе интервальный метод Гаусса даёт

$$\begin{pmatrix} [-101, 71] \\ [-62.25, 99] \\ [-90, 90] \end{pmatrix},$$

а результатом применения подхода Хансена-Блика является

$$\begin{pmatrix} [-101, 17] \\ [-15, 99] \\ [-90, 90] \end{pmatrix},$$

^{3.3}Всё программное обеспечение имеет статус ‘public domain’ и находится на сервере Института вычислительных технологий СО РАН по адресу <http://www.ict.nsc.ru/ftp/ict/interval>.

тогда как при реализации формального подхода субдифференциальный метод Ньютона сходится за две итерации к

$$\begin{pmatrix} [-101, 71] \\ [-69, 99] \\ [-90, 90] \end{pmatrix}.$$

Поскольку средняя матрица системы является единичной, то неудивительно, что подход Хансена-Блика оказывается в этом (довольно искусственном) примере лучшим по качеству оценивания.

Пример 1. Обратимся к интервальной линейной системе из работы [226]

$$\begin{pmatrix} [15, 17] & [-3, 3.01] & [-3, 3.01] & [-3, 3.01] \\ [-3, 3.01] & [15, 17] & [-3, 2.99] & [-3, 2.99] \\ [-3, 2.99] & [-3, 2.99] & [15, 17] & [-3, 3.01] \\ [-3, 3.01] & [-3, 3.01] & [-3, 2.99] & [15, 17] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-6, -2] \\ [4, 5] \\ [-2, 4] \\ [8, 10] \end{pmatrix}.$$

Интервальным методом Гаусса мы получаем внешнюю оценку множества решений системы в виде

$$\begin{pmatrix} [-1.03, 0.495] \\ [-0.347, 0.974] \\ [-0.770, 0.917] \\ [0.150, 1.25] \end{pmatrix},$$

а с помощью методики Хансена-Блика [165]

$$\begin{pmatrix} [-1.03, 0.363] \\ [-0.223, 0.975] \\ [-0.752, 0.919] \\ [0.149, 1.25] \end{pmatrix},$$

Формальный подход сходится за 4 итерации к внешней оценке

$$\begin{pmatrix} [-1.03, 0.495] \\ [-0.372, 0.974] \\ [-0.785, 0.917] \\ [-0.05, 1.25] \end{pmatrix},$$

что совсем неплохо: средняя матрица интервальной системы опять близка к диагональной и это благоприятствует хорошему качеству результатов, получаемых по методике Хансена-Блика.

Пример 2, неизменный пример Хансена (см. [45, 165])

$$\begin{pmatrix} [2, 3] & [0, 1] \\ [1, 2] & [2, 3] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [0, 120] \\ [60, 240] \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

В данном случае формальный подход (с отщеплением матрицы диагонального отклонения) сходится за 2 итерации к точному формальному решению

$$\begin{pmatrix} [-120, 90] \\ [-60, 240] \end{pmatrix}, \quad (3.44)$$

являющемуся внешней интервальной оценкой множества решений. Этот же ответ даёт и интервальный метод Гаусса.

Заметим, что интервал (3.44) — это даже оптимальная (наиболее узкая) интервальная оценка множества решений системы (3.43). Но применение к ней подхода Хансена-Блика [165] приводит к худшему результату

$$\begin{pmatrix} [-120, \frac{1845}{11}] \\ [-60, \frac{2940}{11}] \end{pmatrix},$$

что является следствием огрубляющего преобуславливания, встроенного в процедуру Хансена-Блика.

Следующий интересный ряд Примеров 3–7 с фиксированной интервальной матрицей заимствован нами из работы Нинг и Кирфотта [226], в которой делается попытка дальнейшего развития подхода Хансена-Блика.

Пример 3 [226]. Пусть дана интервальная линейная система $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ с

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [3.7, 4.3] & [-1.5, -0.5] & [0, 0] \\ [-1.5, -0.5] & [3.7, 4.3] & [-1.5, -0.5] \\ [0, 0] & [-1.5, -0.5] & [3.7, 4.3] \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

и $\mathbf{b} = ([-14, 14], [-9, 9], [-3, 3])^\top$.

Тогда, применяя интервальный метод Гаусса, мы получим следующую оценку множества решений

$$\begin{pmatrix} [-6.38, 6.38] \\ [-6.40, 6.40] \\ [-3.40, 3.40] \end{pmatrix}. \quad (3.46)$$

Тот же самый результат даёт использование методики Хансена-Блика [165], а также её усовершенствованные варианты, предложенные Роном [263] и Нинг и Кирфоттом [226]. Интервал (3.46) является интервальной оболочкой множества решений рассматриваемой системы, и к нему же всего за 1 итерацию приводит формальный подход.

Пример 4 [226]. Пусть дана интервальная линейная система $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ с той же матрицей \mathbf{A} , что и в Примере 3 и правой частью $\mathbf{b} = ([-14, 0], [-9, 0], [-3, 0])^\top$.

Применяя интервальный метод Гаусса, мы получим оценку множества решений

$$\begin{pmatrix} [-6.38, 0] \\ [-6.40, 0] \\ [-3.40, 0] \end{pmatrix}. \quad (3.47)$$

Поскольку матрица (3.45) — это интервальная M -матрица и все компоненты вектора правых частей имеют одинаковый знак, этот интервал является оптимальной (наименьшей) оценкой множества решений. Но использование методики Хансена-Блика [165] или модификации Рона [263] приводит к более широкому гипербрусу

$$\begin{pmatrix} [-6.38, 1.12] \\ [-6.40, 1.54] \\ [-3.40, 1.40] \end{pmatrix},$$

а модификация Нинг-Кирфотта даёт ещё более грубый результат

$$\begin{pmatrix} [-6.38, 1.67] \\ [-6.40, 2.77] \\ [-3.40, 2.40] \end{pmatrix}.$$

Напротив, формальный подход позволяет найти точную (с точностью до ошибок округления) интервальную оболочку (3.47) множества решений рассматриваемой системы всего за 1 (одну) итерацию.

Пример 5 [226]. Пусть дана интервальная линейная система $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ с той же матрицей \mathbf{A} , что и в Примере 3 и правой частью $\mathbf{b} = ([0, 14], [0, 9], [0, 3])^\top$.

Интервальный метод Гаусса даёт интервал

$$\begin{pmatrix} [0, 6.38] \\ [0, 6.40] \\ [0, 3.40] \end{pmatrix}, \quad (3.48)$$

который служит оболочкой множества решений рассматриваемой системы. Применяя методику Хансена-Блика [165], мы получим более широкий оценивающий гипербрус

$$\begin{pmatrix} [-1.12, 6.38] \\ [-1.54, 6.40] \\ [-1.40, 3.40] \end{pmatrix},$$

а модификация Нинг-Кирфотта приводит к ещё более грубому результату

$$\begin{pmatrix} [-1.67, 6.38] \\ [-2.77, 6.40] \\ [-2.40, 3.40] \end{pmatrix}.$$

Что же касается формального подхода, то с его помощью мы снова получаем за одну итерацию интервальный вектор оптимального решения (3.48).

Пример 6 [226]. Пусть дана интервальная линейная система $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ с той же матрицей \mathbf{A} , что и в Примере 3 и правой частью $\mathbf{b} = ([2, 14], [-9, -3], [-3, 1])^\top$.

Применение интервального алгоритма Гаусса даёт оценивающий гипербрус

$$\begin{pmatrix} [-1.09, 4.29] \\ [-4.02, 1.24] \\ [-2.44, 0.773] \end{pmatrix}.$$

Используя методику Хансена-Блика, мы получим более широкий ответ

$$\begin{pmatrix} [-0.995, 5.01] \\ [-4.64, 1.52] \\ [-2.69, 1.38] \end{pmatrix},$$

тогда как наименьшей интервальной оценкой множества решений служит

$$\begin{pmatrix} [-0.995, 4.29] \\ [-3.79, 1.24] \\ [-2.35, 0.773] \end{pmatrix}.$$

Приятно отметить, что, как и в предыдущих случаях, формальный подход даёт этот интервальный ответ всего за 1 (одну) итерацию.

Пример 7 [226]. Пусть дана интервальная линейная система $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ с той же матрицей \mathbf{A} , что и в Примере 3 и правой частью $\mathbf{b} = ([2, 14], [3, 9], [-3, 1])^\top$.

Применение интервального метода Гаусса приводит к оценке

$$\begin{pmatrix} [0.517, 6.25] \\ [0.450, 6.07] \\ [-0.881, 2.73] \end{pmatrix}.$$

Использование методики Хансена-Блика из [165] даёт более широкий интервал

$$\begin{pmatrix} [-0.206, 6.25] \\ [-0.386, 6.07] \\ [-2.01, 2.73] \end{pmatrix},$$

в то время как интервальной оболочкой множества решений является

$$\begin{pmatrix} [0.523, 6.25] \\ [0.499, 6.07] \\ [-0.743, 2.73] \end{pmatrix}.$$

И снова формальный подход демонстрирует своё превосходство: он сходится к этому наилучшему интервальному ответу за 2 итерации.

В целом, наш вычислительный опыт свидетельствует о том, что для интервальных линейных систем с H -матрицами, для которых средняя матрица не является близкой к диагональной, формальный подход с диагональным предобуславливанием работает очевидно лучше процедуры Хансена-Блика. Как следует выбирать предобуславливатели для общих интервальных линейных систем? насколько при этом расширится сфера приложимости формального подхода? как он будет работать в сравнении с другими методами решения внешней задачи для ИСЛАУ? Всё это открытые и очень интересные вопросы, которые ещё ждут своего разрешения.

Оптимальное внешнее оценивание множеств решений

4.1 Оптимальные решения и их цена

Выше в Главе 1 мы детально обсудили понятие интервальной задачи оценивания, его естественное возникновение и роль в современном интервальном анализе. Но часто практику может удовлетворить не всякое решение конкретной задачи оценивания, а лишь *оптимальное*, т.е. лучшее в том или ином смысле. Таково, к примеру, оптимальное решение задачи внешнего оценивания множества решений, введённое в §3.2. Требование оптимальности особенно характерно для задач, в которых интервальная неопределённость изначально присутствует во входных данных и которые не являются “интервализациями” каких-то вещественных задач. В настоящее время в интервальном анализе имеется несколько подходов к определению оптимальности решения, но все они, по существу, единообразны: на множестве всех решений задачи оценивания (или на семействе оценочных множеств) вводится некоторый частичный порядок, а минимальные, наименьшие и наибольшие относительно него элементы объявляются, соответственно, оптимальными, наилучшими и наихудшими решениями данной задачи. Конкретные способы упорядочения множества решений могут быть весьма разнообразными (см., например [186]). Применительно к сформулированному нами в Главе 1 общему определению интервальной задачи оценивания можно указать следующие конструкции.

Во-первых, упорядочение в семействе оценочных множеств \mathcal{E} может быть индуцировано способом оценивания \mathcal{M} , принятым в решаемой задаче, причём неединственным способом. Пусть $\mathcal{M}^{-1}(\cdot)$ — операция взятия прообраза при отношении \mathcal{M} . Естественно считать, что решение \mathfrak{S}' “не хуже” решения \mathfrak{S}'' и записывать это как $\mathfrak{S}' \preceq \mathfrak{S}''$, если совокупность оцениваемых посредством \mathfrak{S}'' множеств решений из \mathcal{S} не уже совокупности множеств, оцениваемых посредством \mathfrak{S}' , т.е.

$$\mathfrak{S}' \preceq \mathfrak{S}'' \iff \mathcal{M}^{-1}(\mathfrak{S}') \subseteq \mathcal{M}^{-1}(\mathfrak{S}'').$$

Тривиально проверяется, что введённое таким образом бинарное отношение “ \preceq ” на классе оценочных множеств \mathcal{E} удовлетворяет всем аксиомам порядка. Для многих интервальных задач оценивания это упорядочение оценочных множеств совпадает с естественным ранжированием интервальных решений по качеству. К примеру, для задачи внешнего оценивания множеств решений интервальных уравнений решение \mathbf{V}' “лучше” (качественнее) решения \mathbf{V}'' , если $\mathbf{V}' \subseteq \mathbf{V}''$ в теоретико-множественном смысле. Для задач внутреннего

оценивания множеств решений ситуация обратная: решение U' качественнее решения U'' , если $U' \supseteq U''$.

Далее, при некоторых дополнительных условиях на способ оценивания \mathcal{M} рефлексивное отношение $(\mathcal{M}^{-1} \circ \mathcal{M})$ на семействе оценочных множеств \mathcal{E} (где \circ — знак композиции отношений [9]) может быть ещё антисимметричным и транзитивным, и, следовательно, также служить порядком на \mathcal{E} , индуцированным способом оценивания.

Во-вторых, интервальные решения можно сравнивать по степени их удаленности (в метрике ρ из Определения 1.3.1) от точного множества решений. В-третьих, нередко требуется минимизировать радиус (ширину) или какой-либо другой функционал от решения (безотносительно к точному множеству решений интервальной задачи).

Необходимость и важность разработки алгоритмов, дающих именно оптимальные и наилучшие решения интервальных задач настойчиво пропагандировалась многими авторами (см., к примеру, [227]). Для обозначения подобных алгоритмов был даже введен специальный термин *bound conserving algorithm* (немецкий эквивалент — *schränkentreue Algorithm*, а буквальным русским переводом — “правильно передающий границы алгоритм”), который, учитывая крайнюю смысловую перегруженность эпитета “оптимальный”, следует признать не лишённым смысла.

К. Никель в [222] проводит аналогию между *bound conserving* алгоритмами и устойчивыми алгоритмами классической вычислительной математики, предсказывая, что “в будущем новое свойство ‘правильной передачи границ’ будет играть столь же важную роль в вычислительном интервальном анализе”, как и другие ключевые характеристики алгоритмов. В оптимистичной работе [228] Е. Нудингом приводился уже довольно внушительный список *bound conserving* алгоритмов, призванный, видимо, продемонстрировать существующую в интервальном анализе некую мощную тенденцию по непрерывному возникновению эффективных алгоритмов подобного сорта. При этом всеми упомянутыми авторами как-то обходился вопрос о той цене, которую приходится платить за оптимальность результатов. Иначе говоря, каково неизбежное увеличение трудоёмкости алгоритмов, необходимое для получения оптимальных или хотя бы гарантированно близких к оптимальным решений интервальных задач оценивания?

Вопросы такого сорта сделались предметом интенсивного исследования лишь недавно, уже в 90-е годы и серьёзные продвижения в этом направлении стали одним из наиболее впечатляющих достижений в интервальной математике последнего десятилетия. Большинство из известных к настоящему времени результатов о сложности решения интервальных задач мы обязаны исследованиям А.А. Гаганова [20], В. Крейнвича, А.В. Лакеева и И. Рона [191, 189, 190, 194, 195, 59, 60, 235, 264, 266, 170], Г. Коксона [140, 141], Х. Янссона [174].

Изложим конспективно основные полученные к настоящему моменту результаты по теории сложности интервальных алгебраических задач:

- задача оценивания с заданной абсолютной или относительной точностью области значений полинома от многих переменных является NP-трудной [20];
- задачи распознавания (проверки непустоты) объединённого множества решений ИС-ЛАУ и задачи его внешнего оценивания являются NP-полными [189, 190, 191], причём они остаются NP-полными даже в том случае, если мы накладываем условия на знаки элементов матрицы или ограничимся неплотно заполненными матрицами (в частности, NP-полны задачи распознавания и оценивания объединённого множества

решений ИСЛАУ с трёхдиагональными матрицами и с неотрицательными матрицами);

- задачи распознавания и оценивания множеств АЕ-решений интервальных линейных систем являются NP-полными [61];
- задача нахождения формального решения интервальной линейной системы является NP-полной [194, 195];
- задача распознавания решения нелинейной системы уравнений в заданном бруске является NP-трудной [174, 191].

Напомним, что свойство задачи быть NP-трудной или NP-полной означает на современном этапе развития теории сложности вычислений, что, скорее всего, эта задача не может быть решена легче, чем за время, которое является экспонентой от длины кодировки задачи. Хороший обзор теории сложности и теории NP-полноты читатель может найти в книге [26].

Таким образом, вывод, к которому приводят нас недавние результаты теории сложности, малоутешителен и заключается в том, что принятие требования оптимальности решения или же заданной близости получаемого интервального решения к оптимальному в общем случае делает интервальную задачу оценивания *труднорешаемой*. Тем самым получено теоретическое объяснение того факта, что за последние тридцать-сорок лет (в течение которых интервальный анализ развивался скорее вширь, чем вглубь) достижения в деле создания *bound conserving* алгоритмов были достаточно скромными. Несмотря на многочисленные плодотворные применения интервальных методов в современном естествознании и внутри самой математики алгоритмы для оптимального решения многих интервальных задач либо не найдены, либо по трудоёмкости они оказываются не намного лучшими полного перебора.

В частности, задаче (2.53) внешнего оценивания объединённого множества решений интервальной линейной системы посвящено очень большое количество работ (см., к примеру, [4, 131, 156, 161, 165, 168, 215, 219, 223, 228, 231, 257, 268] и обширную библиографию к этим статьям). Все разработанные на данный момент методики позволяют вычислять интервальный вектор \mathbf{V} , гарантированно содержащий множество решений Ξ_{uni} , но оптимальность \mathbf{V} обеспечивают лишь очень немногие методы переборного типа с большой трудоёмкостью исполнения.

Было бы, очевидно, чересчур категоричным выводить из вышесказанного невозможность или бесполезность решать на практике интервальные задачи оценивания в постановках, которые требуют оптимальных ответов. Но несомненно и другое: специфическая форма интервальных задач оценивания, формализованная нами в параграфе 1.3, должна быть особо учтена и при выборе алгоритмов, решающих эти “оптимальные” постановки и при организации вычислений. Мы еще вернемся к подробному обсуждению этого важного вопроса в §4.10.

Итак, цель настоящей Главы — развитие эффективных численных алгоритмов и общей методологии вычисления именно оптимальных решений “внешней задачи” для интервальных систем уравнений, главным образом, линейных.

4.2 Пассивный переборный алгоритм

Как мы установили в Предложении 2.3.7, для интервальных линейных систем вида (5) пересечение множеств АЕ-решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ с каждым из ортантов \mathcal{O} пространства \mathbb{R}^n является выпуклым полиэдральным множеством (возможно, пустым). Таким образом, вычисление величин

$$\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \mathcal{O}\}, \quad \nu = 1, 2, \dots, n, \quad (4.1)$$

— это задача линейного программирования, которая может быть эффективно решена, например, известным и хорошо разработанным симплекс-методом. Далее нужно перебрать все ортанты и среди полученных величин (4.1) выбрать наименьшую. В общем случае этот подход непрактичен из-за катастрофического роста вычислительной сложности, но при небольших размерностях систем и для некоторых специальных типов ИСЛАУ (например, когда а priori известно в каких ортантах расположено множество решений) его вполне можно применять для практического решения “внешней” задачи (2.53). Для частного случая объединённого множества решений ИСЛАУ методы подобного типа рассматривались, в частности, в [139, 231].

Мы выпишем, аналогично тому, как это сделано в работах [139, 231], каноническую форму задачи линейного программирования, которую необходимо решать для каждого из ортантов \mathbb{R}^n . Воспользуемся характеристикой Рона (Теорема 2.3.6), дающей описание точек множеств АЕ-решений через неравенства с модулями:

принадлежность $x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ равносильна покомпонентному неравенству

$$|(\text{mid } \mathbf{A}) \cdot x - \text{mid } \mathbf{b}| \leq (\text{rad } \mathbf{A}^\exists - \text{rad } \mathbf{A}^\forall) \cdot |x| + (\text{rad } \mathbf{b}^\exists - \text{rad } \mathbf{b}^\forall),$$

или

$$\begin{cases} \text{mid } \mathbf{A} \cdot x - \text{mid } \mathbf{b} \leq (\text{rad } \mathbf{A}^\exists - \text{rad } \mathbf{A}^\forall) \cdot |x| + (\text{rad } \mathbf{b}^\exists - \text{rad } \mathbf{b}^\forall), \\ -\text{mid } \mathbf{A} \cdot x + \text{mid } \mathbf{b} \leq (\text{rad } \mathbf{A}^\exists - \text{rad } \mathbf{A}^\forall) \cdot |x| + (\text{rad } \mathbf{b}^\exists - \text{rad } \mathbf{b}^\forall), \end{cases}$$

что эквивалентно системе

$$\begin{cases} \text{mid } \mathbf{A} \cdot \text{diag}\{\text{sgn } x_1, \dots, \text{sgn } x_n\} \cdot |x| - (\text{rad } \mathbf{A}^\exists - \text{rad } \mathbf{A}^\forall) \cdot |x| \\ \leq \text{mid } \mathbf{b} + (\text{rad } \mathbf{b}^\exists - \text{rad } \mathbf{b}^\forall), \\ -\text{mid } \mathbf{A} \cdot \text{diag}\{\text{sgn } x_1, \dots, \text{sgn } x_n\} \cdot |x| - (\text{rad } \mathbf{A}^\exists - \text{rad } \mathbf{A}^\forall) \cdot |x| \\ \leq -\text{mid } \mathbf{b} + (\text{rad } \mathbf{b}^\exists - \text{rad } \mathbf{b}^\forall), \end{cases}$$

причём правые части полученных неравенств можно упростить и далее, вспомнив определение характеристического вектора \mathbf{b}^c :

$$\text{mid } \mathbf{b} + (\text{rad } \mathbf{b}^\exists - \text{rad } \mathbf{b}^\forall) = \overline{\mathbf{b}^c},$$

$$-\text{mid } \mathbf{b} + (\text{rad } \mathbf{b}^\exists - \text{rad } \mathbf{b}^\forall) = \overline{(-\mathbf{b}^c)}.$$

Таблица 4.1:

Пассивный переборный алгоритм
оптимального решения внешней задачи для ИСЛАУ

Вход

Интервальная линейная система $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.
Натуральный индекс $\nu \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Выход

Оптимальная оценка y снизу по ν -ой координате
для множества решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Алгоритм

```
 $y := +\infty;$   
DO FOR  $i = 0$  TO  $2^n - 1$   
    решить задачу линейного программирования (4.2)–(4.3),  
    вычисляя  $z := \min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta} \cap \mathcal{O}_i\};$   
    IF (  $y > z$  )  $y := z;$   
END DO
```

Пусть y есть вектор абсолютных значений компонент x , т.е. $y_i = |x_i|$, $i = 1, 2, \dots, n$, и

$$S = \text{diag} \{ s_1, s_2, \dots, s_n \}, \quad s_i = \text{sgn } x_i = \pm 1,$$

— диагональная матрица, образованная знаками компонент внутренних точек рассматриваемого ортанта \mathcal{O} , т.е. $x = Sy$ для $x \in \mathcal{O}$. При этом условие

$$x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \mathcal{O}$$

выполнено тогда и только тогда, когда существует $y \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющий неравенствам

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \text{mid } \mathbf{A} \cdot S - (\text{rad } \mathbf{A}^{\exists} - \text{rad } \mathbf{A}^{\forall}) \\ -\text{mid } \mathbf{A} \cdot S - (\text{rad } \mathbf{A}^{\exists} - \text{rad } \mathbf{A}^{\forall}) \end{pmatrix} y \leq \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{b}^c} \\ (-\mathbf{b}^c) \end{pmatrix}, \\ y \geq 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Следовательно, значение $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \mathcal{O}\}$ является решением задачи линейного программирования с ограничениями (4.2) и минимизируемым функционалом

$$c^\top y, \quad c^\top = (0, \dots, 0, s_\nu, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n. \quad (4.3)$$

Каждый ортант пространства \mathbb{R}^n однозначно задаётся последовательностью знаков компонент своих внутренних точек. Нам будет удобно занумеровать все ортанты \mathbb{R}^n целыми числами от 0 до $2^n - 1$, сопоставив каждому из них n -значное двоичное число, которое получается из набора знаков компонент заменой минуса нулем, а плюса единицей. Итак, искомая оптимальная (точная) оценка значения $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$ может быть найдена с помощью алгоритма, псевдокод которого приведён в Таблице 4.1.

Определение 4.2.1 [87, 34] *Алгоритм называется пассивным, если при проведении любого своего информационного вычисления (шага) он не использует информацию, полученную на своих предыдущих вычислениях.*

Алгоритм называется адаптивным, если при выполнении любого своего информационного вычисления он в той или иной форме использует информацию о предшествующих информационных вычислениях (шагах)^{4.1}.

Итак, пассивные алгоритмы — это алгоритмы с жёстко заданной программой вычислений, которая не зависит от индивидуальных особенностей решаемой задачи. Напротив, адаптивные алгоритмы позволяют гибко подстраивать процесс решения под каждую конкретную задачу, а потому, при прочих равных условиях, они, несомненно, более предпочтительны в вычислительной практике.^{4.2} Но, как видим, представленный в этом параграфе простейший метод оптимального внешнего оценивания множеств решений ИСЛАУ является пассивным и в этом заключается один из его главных недостатков.

^{4.1}Иногда адаптивные алгоритмы называют также “последовательными”, но мы не придерживаемся этого словоупотребления потому, что в последнее время термин “последовательные алгоритмы” все более применяется как антитеза параллельным алгоритмам вычислений и обработки информации

^{4.2}В определённом смысле разделение алгоритмов на пассивные/адаптивные соответствует отмеченному в Главе 1 противопоставлению программных и позиционных способов управления динамическим объектом.

4.3 Интервальные методы глобальной оптимизации

Настоящий параграф носит обзорный характер и посвящен изложению общей схемы адаптивных интервальных методов глобальной оптимизации, которые будут существенно использоваться нами в последующем при построении алгоритмов для оптимального внешнего оценивания множеств решений интервальных систем уравнений.

Рассмотрим следующую задачу глобальной оптимизации. Пусть

- $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}^n$ — прямоугольный параллелепипед со сторонами, параллельными координатным осям (далее для краткости называемый *брусом*),
- $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторая функция,
- $f(\mathbf{X}) = \{ f(x) \mid x \in \mathbf{X} \}$ — множество её значений.

Глобальный “минимум” $\inf f(\mathbf{X})$ мы будем обозначать (в случае, если он существует в \mathbb{R}) через f^* . Использование \inf вместо \min существенно потому, что мы не предполагаем, вообще говоря, непрерывности функции f . Требуется найти f^* численно, т.е. мы хотим построить алгоритм, способный вычислить с любой наперед заданной точностью нижнюю границу для f^* . Кроме того, для каждой такой вычисленной нижней границы y мы сможем оценивать и ошибку ($f^* - y$).

Поставленная нами цель будет достигнута чисто интервальными средствами, без использования статистических оценок и моделей, сеточных покрытий области определения, условий Липшица, выпуклости и тому подобных часто применяемых методик (см., к примеру, обстоятельный обзор [34]). Для построения алгоритма с желаемыми свойствами, нам потребуются

Свойства f . В принципе, представляемый ниже алгоритм работает и сходится даже если f не является непрерывной. Непрерывность целевой функции существенно помогает при выборе надежного критерия останова. Количество точек локальных или глобальных минимумов может быть неограниченным, но сама функция f обязана быть ограниченной для существования глобального минимума. Непрерывность по Липшицу, дифференцируемость или гладкость необязательны, но их наличие благоприятствует эффективности алгоритма и может повысить его порядок сходимости.

Внешние оценивающие функции. Это интервальнозначные функции, оценивающие внешним интервалом целый континуум значений функции f (и тем самым f^*) или, если требуется, некоторые его части^{4.3}. Конструирование и использование внешних оценивающих функций не вызывает никаких проблем в случае использования для вычислений на компьютере интервальной арифметики, которая позволяет автоматически выполнять все построения и преобразования, получая при этом гарантированные нижние и верхние границы значений функций. К технике внешних оценивающих функций очень близки методы мажоризации, основанные на знании констант Липшица. Тем не менее, методы внешних оценивающих функций предпочтительней в силу их бóльшей универсальности: подходящую внешнюю оценивающую функцию можно построить *почти всегда*, и даже тогда, когда функция не удовлетворяет условию Липшица или не является непрерывной.

^{4.3}Соответствующие английские термины — inclusion function, enclosing function

Стратегия дробления области \mathbf{X} . Внешняя оценивающая функция осуществляет гарантированное включение f^* . Стратегия дробления отвечает за то, чтобы внешние оценки вычислялись лишь тогда, когда это действительно необходимо, минимизируя тем самым вычислительные затраты. Вычисления могут быть остановлены в случае достижения “достаточной узости” интервала, оценивающего f^* .

Решению поставленной в начале параграфа задачи глобальной оптимизации посвящены многочисленные работы по интервальному анализу. В значительной части из них рассматриваются способы ускорения сходимости алгоритма путем выбора тех или иных внешних оценивающих функций, список соответствующих ссылок можно найти, например, в [242, 243]. Существуют также работы, исследующие саму стратегию дробления и её связь с внешними оценивающими функциями. Это работы Р.Е. Мура [209, 210, 211], С. Скелбоу [308], Э. Хансена [163, 164, 166], Н. Асаитамби, Шен Жуя и Р.Е. Мура [125], Х. Рачека и Дж. Рокне [242, 243]. Идея использования внешней оценивающей функции совместно с измельчением области определения для вычисления глобальных экстремумов впервые была высказана ещё Р.Е. Муром в его классической книге [209]. Следующий шаг в развитии методики сделал С. Скелбоу [308], указавший эффективную стратегию дробления (измельчения области определения), заимствованную из “метода ветвей и границ”. Тем самым качественно повысилась вычислительная эффективность нового подхода. Впоследствии Р.Е. Мур [211], Н. Асаитамби, Шен Жуй и Р.Е. Мур [125], Э. Хансен [163, 164, 166], Х. Янсзон [172] внесли в стратегию дробления дальнейшие усовершенствования. В частности, Э. Хансен расширил методику так, что с её помощью стало возможным находить и сами точки глобальных экстремумов.

Перейдём к строгим определениям. Для любого множества $D \subseteq \mathbb{R}^n$ обозначим через $I(D)$ множество всех брусков (правильных интервальных векторов), содержащихся в D . Пусть X — брус из \mathbb{R}^n и

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}$$

некоторая функция. С f обычно связывается её область значений — многозначная функция, действующая из $I(X)$ во множество всех подмножеств \mathbb{R} , такая что

$$f(\mathbf{Y}) = \{ f(y) \mid y \in \mathbf{Y} \}$$

для всякого $\mathbf{Y} \in I(X)$. Назовём интервальнозначную функцию $F : I(X) \rightarrow \mathbb{I}\mathbb{R}$ *внешней оценивающей функцией* для f , если

$$f(\mathbf{Y}) \subseteq F(\mathbf{Y}) \quad \text{для всех } \mathbf{Y} \in I(X).$$

Представленный ниже в Таблице 4.2 интервальный алгоритм глобальной оптимизации (условно названный нами именем `GlobalOpt`) является незначительной модификацией алгоритмов С. Скелбоу [308] и Р.Е. Мура [211]. Алгоритм инициализирует список \mathcal{L} , первоначально состоящий из одной пары (\mathbf{Y}, y) . Далее каждый шаг алгоритма заключается в обработке и расширении этого списка. На k -ом шаге список \mathcal{L} состоит из k штук записей, т.е.

$$\mathcal{L} = \{ (\mathbf{Z}^{(1k)}, z^{(1k)}), \dots, (\mathbf{Z}^{(kk)}, z^{(kk)}) \},$$

где первый из верхних индексов означает номер записи в пределах данного шага, второй индекс — номер шага, а $z^{(ik)} = \underline{F}(\mathbf{Z}^{(ik)})$. Нас будет, главным образом, интересовать первая запись списка \mathcal{L} , которую мы называем *ведущей записью*.

Теорема 4.3.1 [241] Пусть даны брус $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, некоторая функция $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$ и её интервальное расширение $F : I(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbb{IR}$. Тогда глобальный инфимум $f^* = \inf_{x \in \mathbf{X}} f(x)$ существует и имеет место включение

$$f^* \in F(\mathbf{Y})$$

для всех ведущих брусов \mathbf{Y} алгоритма `GlobalOpt`.

Как видно из Таблицы 4.2, алгоритм `GlobalOpt` останавливается, когда ведущим брусом делается такой брус \mathbf{Y} , что $\text{wid } F(\mathbf{Y}) < \epsilon$. В этом случае результатом y^* работы алгоритма является нижняя граница для f^* , а $\delta = \text{wid } F(\mathbf{Y})$ может служить верхней границей абсолютной ошибки $f^* - y^*$, что следует из вышеприведённой Теоремы.

Теорема 4.3.2 В алгоритме `GlobalOpt` сумма длин компонент ведущих брусов стремится к нулю.

Доказательство. Мы покажем, что последовательность $\{\vartheta^{(k)}\}$ сумм длин компонент ведущих брусов мажорируется некоторой последовательностью $\{\Theta^{(k)}\} \rightarrow 0$. Пусть

$\vartheta(\mathbf{Y})$ — сумма длин компонент бруса \mathbf{Y} ,

$\lambda^{(k)}$ — множество всех брусов \mathbf{Y} , таких что пара $(\mathbf{Y}, \underline{F}(\mathbf{Y}))$ содержится в списке \mathcal{L} с k -го шага алгоритма и затем становится ведущей парой на шаге с некоторым номером $\geq k$.

Нетрудно видеть, что если

$$\Theta^{(k)} = \max\{\vartheta(\mathbf{Y}) \mid \mathbf{Y} \in \lambda^{(k)}\}$$

то $\Theta^{(k)} > 0$, и последовательность $\{\Theta^{(k)}\}$ является невозрастающей. Действительно, множество $\lambda^{(k+1)}$ содержит все брусы из $\lambda^{(k)}$ за исключением бруса \mathbf{Y} , который был ведущим на k -м шаге: вместо \mathbf{Y} множество $\lambda^{(k+1)}$ может содержать или не содержать его потомки \mathbf{Y}' и \mathbf{Y}'' . Поскольку

$$\vartheta(\mathbf{Y}) > \vartheta(\mathbf{Y}') \quad \text{и} \quad \vartheta(\mathbf{Y}) > \vartheta(\mathbf{Y}''),$$

мы можем заключить, что

$$\Theta^{(k)} = \max\{\vartheta(\mathbf{Y}) \mid \mathbf{Y} \in \lambda^{(k)}\} \geq \max\{\vartheta(\mathbf{Y}) \mid \mathbf{Y} \in \lambda^{(k+1)}\} = \Theta^{(k+1)} > 0.$$

Чему же равен $\lim_{k \rightarrow \infty} \Theta^{(k)}$, предел, который должен существовать в силу известной теореме Вейерштрасса?

Если $\lim \Theta^{(k)} = \zeta > 0$, то найдётся положительное целое число μ , такое что

$$\frac{2n}{2n-1} \zeta > \Theta^{(k)} \geq \zeta,$$

при условии $k > \mu$ (n обозначает размерность) и поэтому

$$\frac{2n}{2n-1} \zeta > \vartheta(\mathbf{Y})$$

Таблица 4.2:

Простейший интервальный адаптивный алгоритм
глобальной оптимизации GlobOpt

Вход

Внешняя оценивающая функция $F : I(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbb{IR}$ для функции f .

Заданная точность $\epsilon > 0$.

Выход

Оценка глобального минимума f^* функции f на брус \mathbf{X} .

Алгоритм

$\mathbf{Y} := \mathbf{X}$;

вычисляем $F(\mathbf{Y})$;

$y := \underline{F(\mathbf{Y})}$;

инициализируем список $\mathcal{L} := \{(\mathbf{Y}, y)\}$;

DO WHILE ($\text{wid}(F(\mathbf{Y})) \geq \epsilon$)

 выбираем компоненту l , по которой брус \mathbf{Y} имеет
 наибольшую длину, т.е. $\text{wid } \mathbf{Y}_l = \max_i \text{wid } \mathbf{Y}_i$;

 рассекаем брус \mathbf{Y} по l -ой координате пополам на брусы \mathbf{Y}' и \mathbf{Y}''
 такие что

$$\mathbf{Y}' := (\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_{l-1}, [\underline{\mathbf{Y}}_l, \text{mid } \mathbf{Y}_l], \mathbf{Y}_{l+1}, \dots, \mathbf{Y}_n),$$

$$\mathbf{Y}'' := (\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_{l-1}, [\text{mid } \mathbf{Y}_l, \overline{\mathbf{Y}}_l], \mathbf{Y}_{l+1}, \dots, \mathbf{Y}_n);$$

 вычисляем $F(\mathbf{Y}')$ и $F(\mathbf{Y}'')$;

 присваиваем $v' := \underline{F(\mathbf{Y}')}$ и $v'' := \underline{F(\mathbf{Y}'')}$;

 удаляем запись (\mathbf{Y}, y) из списка \mathcal{L} ;

 помещаем записи (\mathbf{Y}', v') и (\mathbf{Y}'', v'') в список \mathcal{L} в порядке
 возрастания второго поля;

 обозначаем первую запись списка через (\mathbf{Y}, y) ;

END DO

$f^* := y$;

$\delta := \text{wid}(F(\mathbf{Y}))$;

для всех $\mathbf{Y} \in \lambda^{(k)}$, $k > \mu$. Зафиксировав $\gamma > \mu$, мы рассмотрим какой-нибудь брус $\mathbf{Y} \in \lambda^{(\gamma)}$. Предположим, что наибольший член в сумме $\vartheta(\mathbf{Y})$ соответствует j -й компоненте \mathbf{Y} . По самому определению $\lambda^{(\gamma)}$ существует такое положительное целое $\mu_{\mathbf{Y}}$, $\mu_{\mathbf{Y}} > \gamma > \mu$, что \mathbf{Y} сделается ведущим брусом на $\mu_{\mathbf{Y}}$ -м шаге алгоритма `GlobalOpt`. Тогда же он будет рассечён по своей j -й компоненте, а для каждого из потомков \mathbf{Y}' от \mathbf{Y} справедлива оценка

$$\vartheta(\mathbf{Y}') \leq \vartheta(\mathbf{Y}) - \vartheta(\mathbf{Y})/2n = \frac{2n-1}{2n} \vartheta(\mathbf{Y}) < \zeta.$$

Если $M = \max\{\mu_{\mathbf{Y}} \mid \mathbf{Y} \in \lambda^{(\gamma)}\}$, то это неравенство остается верным для всех брусов из множества $\lambda^{(M+1)}$. Но это противоречит допущению о том, что $\Theta^{(k)} \geq \zeta > 0$. Следовательно, $\lim \Theta^{(k)} = 0$, как и требовалось доказать. ■

Аналогичный результат был получен также Х. Рачеком [241], но совершенно другим способом.

Конечно, представленный выше простейший алгоритм глобальной оптимизации едва ли может быть с успехом применён к решению серьёзных практических задач. Фактически, при уменьшении размеров области, подозрительной на глобальный минимум, основной упор в нём делается на бисекцию, эффект от которой при увеличении размерности делается всё менее и менее ощутимым. Обычно в методы подобного типа вводят ряд усовершенствований, значительно ускоряющих их сходимость. Как правило, их перечень (не претендующий на полноту) включает в себя следующие модификации (см., в частности, работы [32, 125, 166, 243]):

1. посредством выявления монотонности целевой функции на брусах из списка \mathfrak{L} по тем или иным переменным добиваются уменьшения размерности этих брусов;
2. строят более качественную внешнюю оценивающую функцию (интервальное расширение) для целевой функции;
3. на основе специфических локальных свойств целевой функции в соответствующих брусах применяют более эффективные, чем бисекция, процедуры минимизации (например, методы градиентного спуска в тех брусах \mathbf{Y} , где f гладкая и выпуклая);
4. наряду с оцениванием целевой функции по целым брусам вычисляют её значения в каких-то точках этих брусов, — они доставляют верхнюю границу искомого глобального минимума, и её знание позволяет чистить список \mathfrak{L} от тех записей, которые заведомо не могут быть ведущими.

Поясним, что имеется в виду в последнем пункте. Обозначим символом $\square \mathbf{Y}$ операцию взятия какой-то фиксированной точки из \mathbf{Y} и предположим, что для брусов \mathbf{Y} , порождаемых алгоритмом `GlobalOpt` наряду с оцениванием $F(\mathbf{Y})$ мы вычисляем ещё и величины $f(\square \mathbf{Y})$. Очевидно, что $f(\square \mathbf{Y}) \leq F(\mathbf{Y})$ и значения $f(\square \mathbf{Y})$ приближают искомым $\inf_{x \in \mathbf{X}} f(x)$ сверху: если для каждого шага алгоритма мы определим величину

$$\omega = \min f(\square \mathbf{Y}), \tag{4.4}$$

где минимум берётся по всем таким брусам \mathbf{Y} , что соответствующая пара когда-либо побывала в списке \mathfrak{L} до текущего шага, то всегда

$$\inf_{x \in \mathbf{X}} f(x) \leq \omega.$$

С другой стороны, если \mathbf{Y} — ведущий брус, то

$$\underline{F(\mathbf{Y})} \leq \inf_{x \in \mathbf{X}} f(x)$$

и теперь мы можем прервать итерации когда разность $(\omega - \underline{F(\mathbf{Y})})$ достаточно мала.

Следовательно, пара $(\mathbf{Y}, \underline{F(\mathbf{Y})})$, которая на некотором шаге алгоритма удовлетворяет неравенству

$$\underline{F(\mathbf{Y})} > \omega \tag{4.5}$$

никогда не станет ведущей и удаление её из списка \mathfrak{L} не окажет никакого влияния на выполнение алгоритма `GlobOpt`. Посредством условия (4.5) мы должны тестировать все вновь порождаемые пары на каждом шаге алгоритма, но полную чистку списка \mathfrak{L} — просмотр всех его записей и удаление записей, удовлетворяющих (4.5) — имеет смысл делать лишь после того как параметр ω изменился (т.е. уменьшился).

Идеальным выбором для $\square\mathbf{Y}$ было бы, конечно,

$$\square\mathbf{Y} \in \text{Arg min} \{ f(x) \mid x \in \mathbf{Y} \}.$$

Но в общем случае такое удачное нахождение $\square\mathbf{Y}$ является не менее простым чем решение исходной задачи, и потому мы будем брать $\square\mathbf{Y} = \text{mid } \mathbf{Y}$ для того, чтобы минимизировать возможные отклонения $\square\mathbf{Y}$ от точек множества $\text{Arg min} \{ f(x) \mid x \in \mathbf{Y} \}$.

4.4 Методы дробления решений

В этом параграфе мы представляем класс *методов дробления решений* (называемых также *PSS-методами*) для вычисления оптимальных внешних оценок множеств решений интервальных линейных систем уравнений вида

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b}, \tag{5}$$

доказываем их сходимость, демонстрируем результаты численных экспериментов, а также обсуждаем их сильные стороны и недостатки.

Мы будем считать уже известным некоторое начальное внешнее приближение — интервальный вектор $\mathbf{V} \supseteq \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Он может быть найден каким-либо из алгоритмов для внешнего оценивания объединённого множества решений, представленных, к примеру, в [4, 156, 216, 219, 268, 272], и его размеры не играют в дальнейшем существенной роли, хотя выбор более “узкого” начального приближения способствует более быстрой сходимости развиваемого нами алгоритма.

В интервальном анализе матрица \mathbf{A} обычно предполагается квадратной и невырожденной, т.е. содержащей только невырожденные квадратные матрицы. Обычно таким образом неявно требуют ограниченности множества решений. Мы не будем стеснять наши рассуждения этим условием и допустим возможность вырожденной или прямоугольной матрицы \mathbf{A} , но в случае неограниченного множества решений постановка задачи будет слегка изменена. Именно, удобно считать, что множество, по координатным оценкам которого мы ищем, является пересечением истинного множества решений ИСЛАУ с некоторым заранее заданным интервальным вектором. Естественно, что при этом без потери общности можно полагать его равным интервальному вектору начального приближения \mathbf{V} .

4.4 а Решение одномерных включений

Цель этого пункта — решение одномерных интервальных включений вида

$$\mathbf{a}t \subseteq \mathbf{b}, \quad (4.6)$$

где $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{KR}$, т.е. нахождение всех $t \in \mathbb{R}$, которые обращают (4.6) в верное включение.

Если $0 \notin \mathbf{a}$, то для \mathbf{a} в полной арифметике Каухера существует алгебраически обратный элемент

$$\mathbf{a}^{-1} = [1/\bar{\mathbf{a}}, 1/\underline{\mathbf{a}}],$$

и потому решением включения (4.6) является в точности $\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}$. Далее нам осталось поэтому рассмотреть лишь случай, когда $\underline{\mathbf{a}}\bar{\mathbf{a}} < 0$, т.е. когда в правильной проекции интервала \mathbf{a} содержится нуль.

Если $t \geq 0$, то $\mathbf{a}t = [\underline{\mathbf{a}}t, \bar{\mathbf{a}}t]$, а если $t \leq 0$, то $\mathbf{a}t = [\bar{\mathbf{a}}t, \underline{\mathbf{a}}t]$, и потому решением включения (4.6) является объединение решений двух систем неравенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\mathbf{a}}t \geq \underline{\mathbf{b}}, \\ \bar{\mathbf{a}}t \leq \bar{\mathbf{b}}, \\ t \geq 0 \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\mathbf{a}}t \geq \underline{\mathbf{b}}, \\ \underline{\mathbf{a}}t \leq \bar{\mathbf{b}}, \\ t \leq 0 \end{array} \right. \quad (4.7)$$

Далее, решение выписанных систем неравенств также не представляет трудностей и легко может быть алгоритмизовано для реализации на компьютере. Фактически, решение каждой из простейших систем неравенств (4.7) сводится к последовательному рассмотрению следующих случаев:

$$\underline{\mathbf{a}} < 0 < \bar{\mathbf{a}},$$

$$\bar{\mathbf{a}} < 0 < \underline{\mathbf{a}},$$

$$0 = \underline{\mathbf{a}} < \bar{\mathbf{a}},$$

$$0 = \bar{\mathbf{a}} < \underline{\mathbf{a}},$$

$$\underline{\mathbf{a}} < \bar{\mathbf{a}} = 0,$$

$$\bar{\mathbf{a}} < \underline{\mathbf{a}} = 0,$$

$$\underline{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{a}} = 0,$$

Наконец, после отдельного решения каждой из систем (4.7) полный ответ получается объединением результатов.

В заключение отметим следующий принципиальный факт: если у интервала \mathbf{a} концы — не нули, то точки \underline{t} и \bar{t} , определяющие решение включения (4.6), являются непрерывными (локально) функциями от интервалов \mathbf{a} и \mathbf{b} . То же верно и при более ограничительном условии, когда концом \mathbf{a} зафиксирован нуль, но у интервала \mathbf{b} концы ненулевые.

4.4 b Основной алгоритм

Обозначим через l прямую линию, имеющую в пространстве \mathbb{R}^n параметрическое уравнение

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = r_1, \\ \vdots \\ x_{\nu-1} = r_{\nu-1}, \\ x_\nu = t, \\ x_{\nu+1} = r_{\nu+1}, \\ \vdots \\ x_n = r_n \end{array} \right. \quad (t \in \mathbb{R} - \text{параметр}), \quad (4.8)$$

и параллельную ν -ой координатной оси, где $\nu \in \{1, 2, \dots, n\}$ — фиксированный индекс. Каждая такая прямая полностью определяется $(n-1)$ -мерным вещественным вектором $r = (r_1, \dots, r_{\nu-1}, r_{\nu+1}, \dots, r_n)^\top$, и, чтобы явно указать её параметры, мы иногда будем обозначать эту прямую через $l(r)$. Пусть также

$$\Omega(r) = \min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap l(r)\}$$

— наименьшее значение ν -ой координаты точек из пересечения $l(r)$ с множеством решений ИСЛАУ (5) (если $\Xi_{\alpha\beta} \cap l(r) = \emptyset$, то полагаем $\Omega(r) = +\infty$). Каким образом можно эффективно вычислять значения $\Omega(r)$?

Чтобы ответить на этот вопрос “подставим” параметрическое уравнение прямой (4.8) в интервальное включение

$$\mathbf{A}^c \cdot x \subseteq \mathbf{b}^c \quad (2.45),$$

характеризующее в силу Теоремы 2.3.5 точки множества $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. При этом (2.45) превратится в систему m линейных включений с одной единственной переменной t и интервальными коэффициентами:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_{1\nu}^c t + \sum_{j=1, j \neq \nu}^n \mathbf{a}_{1j}^c r_j \subseteq \mathbf{b}_1^c, \\ \dots \quad \dots \\ \mathbf{a}_{m\nu}^c t + \sum_{j=1, j \neq \nu}^n \mathbf{a}_{mj}^c r_j \subseteq \mathbf{b}_m^c, \end{array} \right. \quad (4.9)$$

или, в матричной форме,

$$\mathbf{A}_\nu^c t + \tilde{\mathbf{A}}^c r \subseteq \mathbf{b}^c, \quad (4.10)$$

где \mathbf{A}_ν^c — ν -ый столбец матрицы \mathbf{A}^c ,

$\tilde{\mathbf{A}}^c$ — интервальная $m \times (n-1)$ -матрица,
полученная из \mathbf{A}^c удалением ν -ого столбца.

Содержательный смысл этой процедуры состоит в следующем. При подстановке параметрического уравнения (4.8) в точечную систему $Ax = b$ мы получаем некоторую систему из m одномерных уравнений, которая совпадает по структуре с (4.9), но имеет вещественные коэффициенты. Далее варьируем элементы a_{ij} матрицы и элементы b_i вектора правой части в пределах заданных для них границ \mathbf{a}_{ij} и \mathbf{b}_i соответственно. Ясно, что множество всех полученных таким образом точечных систем уравнений образует в точности (4.9)–(4.10).

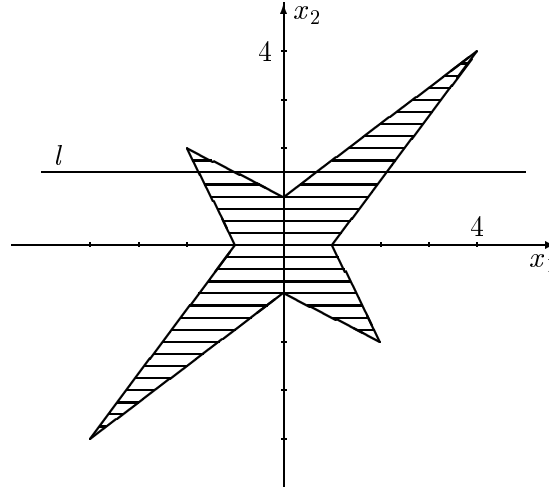


Рис. 4.1: Объединённое множество решений системы (4.12).

Множество решений каждого отдельно взятого включения из этой системы мы научились находить в предыдущем пункте. Следовательно, решив порознь все одномерные включения, образующие систему (4.9), и взяв пересечение их множеств решений друг с другом и с \mathbf{V}_ν , мы получим в точности значения ν -ой координаты точек из $\Xi_{\alpha\beta} \cap l$. Это следует из того, что в пределах всех интервалов, входящих в систему (4.9), соответствующие коэффициенты варьируются независимо друг от друга (как и в исходной ИСЛАУ). Заметим, что полученное множество может оказаться пустым, если система (4.9) несовместна, или несвязным (как показано на Рисунке 4.1), если некоторые уравнения из (4.9) имеют своими множествами решений $(-\infty, p] \cup [q, +\infty)$, $p < q$.

Для понимания принципа работы методов дробления решений фактом фундаментальной значимости является переформулировка “внешней задачи” для ИСЛАУ как некоторой задачи глобальной оптимизации. Именно,

$$\begin{aligned}
 & \min\{ x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta} \} \\
 &= \min\left\{ x_\nu \mid x \in \bigcup_{l \cap \mathbf{V} \neq \emptyset} (\Xi_{\alpha\beta} \cap l) \right\} \\
 &= \min\left\{ \min\{ x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta} \cap l(r) \} \mid r \in (\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{\nu-1}, \mathbf{V}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{V}_n) \right\} \\
 &= \min\{ \Omega(r) \mid r \in (\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{\nu-1}, \mathbf{V}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{V}_n) \},
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

т.е. нахождение ν -ой координатной оценки точек множества решений сводится к задаче минимизации целевой функции $\Omega(r)$ на некотором конечномерном компакте. Мы уже видели, как вычисляются значения $\Omega(r)$, так что может сложиться впечатление, будто далее внешняя задача успешно решается применением какого-либо из хорошо разработанных методов глобальной оптимизации. Но рассматриваемая нами целевая функция $\Omega(r)$ обладает неприятной особенностью: в общем случае она не является даже непрерывной. Например,

для интервальной линейной системы

$$\begin{pmatrix} [1, 2] & [-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}] \\ [-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}] & [1, 2] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 1] \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

(её объединённое множество решений изображено на Рисунке 4.1), при оценивании $\min x_1$ мы имеем $r = x_2$ и

$$\lim_{r \rightarrow 2-0} \Omega(r) = -2 \neq \frac{4}{3} = \lim_{r \rightarrow 2+0} \Omega(r)$$

Более того, $\Omega(r)$ в общем случае претерпевает ещё и разрывы второго рода (в $+\infty$).

Эти обстоятельства решающим образом суживают набор алгоритмов глобальной оптимизации, применимых к задаче (4.11). Например, популярные методы неравномерных покрытий из [31, 81] очевидным образом неприменимы для решения (4.11), так как они существенно основываются на липшицевой непрерывности целевой функции.

Тем не менее, мы продемонстрируем, что оптимальное решение задачи внешнего оценивания множеств решений может быть вычислено адаптивным детерминированным алгоритмом, основанным на технике “ветвей и границ” и описанном нами в предыдущем параграфе. Нам нужно лишь предъявить конструктивный способ вычисления миноранты по области для функции $\Omega(r)$ (т.е. нижний конец её интервального расширения).

Иными словами, для любого $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{\nu-1}, \mathbf{r}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{r}_n)^\top \in \mathbb{R}^{n-1}$ мы должны уметь оценивать

$$\min\{\Omega(r) \mid r \in \mathbf{r}\} = \min\left\{\bigcup_{r \in \mathbf{r}}\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta} \cap l(r)\}\right\} \quad (4.13)$$

снизу. Простейший способ сделать это состоит в следующем. Мы поступаем с исходной интервальной системой (5) в точности так же, как в случае определения $\Xi_{\alpha\beta} \cap l$, но теперь вместо переменных $x_1, \dots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \dots, x_n$ в систему (5) подставляются интервалы $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{\nu-1}, \mathbf{r}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{r}_n$, а не вещественные числа $r_1, \dots, r_{\nu-1}, r_{\nu+1}, \dots, r_n$. Далее, как и раньше, мы вычисляем пересечение \mathcal{S} всех множеств решений m штук одномерных интервальных включений, образующих систему

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{1\nu}^c t + \sum_{j=1, j \neq \nu}^n \mathbf{a}_{1j}^c \mathbf{r}_j \subseteq \mathbf{b}_1^c, \\ \dots & \dots \\ \mathbf{a}_{m\nu}^c t + \sum_{j=1, j \neq \nu}^n \mathbf{a}_{mj}^c \mathbf{r}_j \subseteq \mathbf{b}_m^c, \end{cases} \quad (4.14)$$

или

$$\mathbf{A}_\nu^c t + \tilde{\mathbf{A}}^c \mathbf{r} \subseteq \mathbf{b}^c$$

в обозначениях (4.10). Нетрудно понять, что

$$\mathcal{S} \supseteq \bigcup_{r \in \mathbf{r}} \{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta} \cap l(r)\},$$

поскольку

$$\left(\begin{array}{c} \text{множество решений} \\ \text{включения } \mathbf{A}_\nu^c t + \tilde{\mathbf{A}}^c r \subseteq \mathbf{b}^c \end{array} \right) \subseteq \left(\begin{array}{c} \text{множество решений} \\ \text{включения } \mathbf{A}_\nu^c t + \tilde{\mathbf{A}}^c \mathbf{r} \subseteq \mathbf{b}^c \end{array} \right)$$

для всех $r \in \mathbf{r}$. Следовательно,

$$\Omega(\mathbf{r}) = \min\{\mathcal{S} \cap \mathbf{V}_\nu\} \quad (4.15)$$

даёт требуемую нижнюю оценку для (4.13). Если же система (4.14) несовместна для некоторого \mathbf{r} (это соответствует ситуации $\Xi_{\alpha\beta} \cap l(r) = \emptyset$ для всех $r \in \mathbf{r}$), то полагаем $\Omega(\mathbf{r}) = +\infty$.

Мы используем обозначение $\Omega(\mathbf{r})$ чтобы подчеркнуть, что реализованная нами процедура является, в действительности, *естественным интервальным расширением* точечной функции $\Omega(r)$ [211]. Мы даже введём в рассмотрение функцию $\Omega : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ с областью значений в полурасширенной числовой оси $\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ и областью определения

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \mathbf{r} \subseteq (\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{\nu-1}, \mathbf{V}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{V}_n)\}. \quad (4.16)$$

Следует отметить, что

$$\Omega(\mathbf{r}') \geq \Omega(\mathbf{r}'') \quad \text{для } \mathbf{r}' \subseteq \mathbf{r}'',$$

и оценивание величины (4.13) посредством $\Omega(\mathbf{r})$ становится все более точным при уменьшении ширины вектора \mathbf{r} , т.е. при уменьшении $\|\text{rad } \mathbf{r}\|$, если некоторые естественные ограничения наложены на $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{V}, \mathbf{r}$. Это утверждение будет детально обсуждаться в §4.4 с.

Теперь все готово для конструирования алгоритма, вычисляющего $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}\}$. Это итерационная процедура для последовательного улучшения оценки этого минимума снизу, оформленная в соответствии с широко известной стратегией “метода ветвей и границ”, аналогично тому, как это сделано для оптимизационных задач в работах [32, 81, 125, 166, 172, 241, 243, 308] и других. В данном случае “ветви” образуются в результате бисекции исходного $(n-1)$ -мерного бруса $(\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{\nu-1}, \mathbf{V}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{V}_n)$ (он содержит все точечные векторы r , соответствующие которым прямые $l(r)$ имеют непустое пересечение с $\Xi_{\alpha\beta}$) на более узкие брусы \mathbf{P} , а вычисление значений $\Omega(\mathbf{P})$ — ν -ой координатной оценки точек из $\{\Xi_{\alpha\beta} \cap l(r) \mid r \in \mathbf{P}\}$ — это нахождение “границ”.

Алгоритм порождает список \mathcal{L} , состоящий из пар $(\mathbf{P}, \Omega(\mathbf{P}))$, таких что

$$\mathbf{P} \subseteq (\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{\nu-1}, \mathbf{V}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{V}_n),$$

и упорядоченный по возрастанию второго поля. Первая пара $(\mathbf{Q}, \Omega(\mathbf{Q}))$ списка \mathcal{L} играет особую роль в наших рассуждениях. Мы будем называть её, а также соответствующие брус \mathbf{Q} и оценку $\Omega(\mathbf{Q})$, *ведущими*. Перед началом работы алгоритма список \mathcal{L} содержит единственную пару $((\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{\nu-1}, \mathbf{V}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{V}_n), \underline{\mathbf{V}}_\nu)$, а далее выполняется последовательность шагов, описанных в Таблице 4.3.

Таким образом, выполнение алгоритма имеет результатом неубывающую (начиная со второго шага) последовательность ведущих оценок, которые, как показано в [241], приближают искомым $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}\}$ снизу. В следующем параграфе мы докажем, что эта последовательность сходится к точному значению $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}\}$. Методы решения “внешней задачи” для интервальных систем уравнений, аналогичные только что построенному и основанные на адаптивном дроблении множества решений мы будем называть *методами дробления решений* или *PSS-методами* (от английской фразы *Partitioning Solution Set*).

Таблица 4.3:

Простейший метод дробления решений
для оптимального решения ИСЛАУ

Вход

Интервальная линейная система $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$.

Интервальный вектор начального приближения $\mathbf{V} \supseteq \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Заданная точность $\epsilon > 0$.

Выход

Оценка m^* с точностью ϵ для $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$.

Алгоритм

присваиваем $\mathbf{Q} := (\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{\nu-1}, \mathbf{V}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{V}_n)$ и $q := \underline{\mathbf{V}}_\nu$;

инициализируем список $\mathcal{L} := \{(\mathbf{Q}, q)\}$;

DO WHILE ($\text{wid}(\Omega(\mathbf{Q})) \geq \epsilon$)

выбираем компоненту k , по которой брус \mathbf{Q} имеет
наибольшую длину, т.е. $\text{wid } \mathbf{Q}_k = \max_i \text{wid } \mathbf{Q}_i$;

рассекаем брус \mathbf{Q} по k -ой координате пополам на брусы
 \mathbf{Q}' и \mathbf{Q}'' , такие что

$$\mathbf{Q}' := (\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_{k-1}, [\underline{\mathbf{Q}}_k, \text{mid } \mathbf{Q}_k], \mathbf{Q}_{k+1}, \dots, \mathbf{Q}_n),$$

$$\mathbf{Q}'' := (\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_{k-1}, [\text{mid } \mathbf{Q}_k, \overline{\mathbf{Q}}_k], \mathbf{Q}_{k+1}, \dots, \mathbf{Q}_n);$$

вычисляем $\Omega(\mathbf{Q}')$ и $\Omega(\mathbf{Q}'')$;

присваиваем $q' := \underline{\Omega(\mathbf{Q}')}$ и $q'' := \underline{\Omega(\mathbf{Q}'')}$;

удаляем запись (\mathbf{Q}, q) из списка \mathcal{L} ;

помещаем записи (\mathbf{Q}', q') и (\mathbf{Q}'', q'') в список \mathcal{L} в порядке
возрастания второго поля;

обозначаем первую запись списка через (\mathbf{Q}, q) ;

END DO

$m^* := q$;

4.4 с Доказательство сходимости

Доказательство сходимости простейшего метода дробления решений в отличие от [125, 166, 308] является нетривиальным, поскольку целевая функция $\Omega(r)$, как мы уже упоминали, в общем случае разрывна. Для разрывных целевых функций методы глобальной оптимизации рассматриваемого нами типа уже исследовались Ю.Г. Евтушенко и В.А. Раткиным [32] и Х. Рачеком [241], но полученные ими критерии сходимости напрямую не применимы к нашей ситуации.

Пусть E — топологическое пространство. Напомним, что функция $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ называется *полунепрерывной снизу* в точке $y \in E$, если $f(y) = \underline{\lim}_{x \rightarrow y} f(x)$. Функция называется *полунепрерывной снизу на E* , если она полунепрерывна в любой точке E . Эквивалентным определением этого свойства является, в частности, следующее [35]: функция $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ полунепрерывна снизу на E тогда и только тогда, когда для любого $c \in \mathbb{R}$ лебеговское множество $\{f(x) \leq c\}$ замкнуто в E .

Предложение 4.4.1 Пусть интервальная линейная алгебраическая система $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ и интервальный вектор $\mathbf{V} \supseteq \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ таковы, что

$$(NZ) \left\{ \begin{array}{l} \text{для каждого } i = 1, 2, \dots, m \text{ выполнено свойство:} \\ \text{нуль не является концом } \mathbf{a}_{i\nu} \\ \text{или} \\ \text{для каждого } \mathbf{r} \subseteq (\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{\nu-1}, \mathbf{V}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{V}_n) \\ \text{нуль не является концом интервала} \\ \left(\mathbf{b}_i - \sum_{j=1, j \neq \nu}^n \mathbf{a}_{ij} \mathbf{r}_j \right). \end{array} \right.$$

Тогда функция $\Omega : \mathbb{IR}^{n-1} \supseteq \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$, определённая посредством (4.15)–(4.16), полунепрерывна снизу.

Доказательство. Пусть \mathcal{B} обозначает множество всех целых индексов $i \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$ для которых $0 \notin \mathbf{a}_{i\nu}$, так что множества решений соответствующих уравнений из (4.14) являются *ограниченными* интервалами $[\underline{t}_i, \bar{t}_i]$. При этом мы полагаем для удобства $\underline{t}_0 = \underline{\mathbf{V}}_\nu$ и $\bar{t}_0 = \bar{\mathbf{V}}_\nu$, так что \mathcal{B} всегда непусто. Обозначим также $\mathcal{U} = \{0, 1, 2, \dots, m\} \setminus \mathcal{B}$, и пусть множества $(-\infty, \underline{t}_i] \cup [\bar{t}_i, +\infty)$ для $i \in \mathcal{U}$ представляют *неограниченные* множества решений уравнений из (4.14) с $0 \in \mathbf{a}_{i\nu}$. При этом мы предполагаем, что $\underline{t}_i = -\infty$ или $\bar{t}_i = +\infty$, когда соответствующее множество решений есть луч в \mathbb{R} , и $\underline{t}_i = \bar{t}_i = 0$ когда множество решений совпадает со всей числовой осью \mathbb{R} .

На интервальных пространствах стандартная топология задается хаусдорфовой метрикой, относительно которой все интервальные арифметические операции непрерывны [4, 211, 219]. Следовательно, \underline{t}_i и \bar{t}_i , $i \in \mathcal{B}$, являются непрерывными функциями вектора $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{\nu-1}, \mathbf{r}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{r}_n)^\top$ из (4.14). Но и в случае $0 \in \mathbf{a}_{i\nu}$ вещественные числа \underline{t}_i и \bar{t}_i определяющие множество решений одномерного уравнения

$$\mathbf{a}_{i\nu} t + \sum_{j=1, j \neq \nu}^n \mathbf{a}_{ij} \mathbf{r}_j = \mathbf{b}_i,$$

зависят от интервального вектора $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{\nu-1}, \mathbf{r}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{r}_n)^\top$ также непрерывным образом, если

$$\underline{\mathbf{a}}_{i\nu} < 0 < \bar{\mathbf{a}}_{i\nu},$$

либо если интервал

$$\left(\mathbf{b}_i - \sum_{j \neq \nu}^n \mathbf{a}_{ij} \mathbf{r}_j \right)$$

не имеет одним из своих концов нуль. Это следует из формул §4.4 а и обеспечивается условием (NZ) Предложения 4.4.1. Следовательно, мы далее можем считать, что значения $\max_{i \in \mathcal{B}} \underline{t}_i$, $\min_{i \in \mathcal{B}} \bar{t}_i$, $\max_{i \in \mathcal{U}} \bar{t}_i$, $\min_{i \in \mathcal{U}} \underline{t}_i$ являются непрерывными функциями вектора \mathbf{r} из (4.14) (как обычно, полагаем $\min \emptyset = +\infty$, $\max \emptyset = -\infty$).

Покажем далее, что эффективная область определения функции $\Omega(\mathbf{r})$, т.е. множество

$$\text{dom } \Omega = \{ \mathbf{r} \in \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^{n-1} \mid \Omega(\mathbf{r}) < +\infty \},$$

является компактом. Принадлежность вектора \mathbf{r} множеству $\text{dom } \Omega$ означает совместность соответствующей системы (4.14). Тогда, во-первых, непусто пересечение $\bigcap_{i \in \mathcal{B}} [\underline{t}_i, \bar{t}_i]$ всех ограниченных решений уравнений из (4.14). Это эквивалентно тому, что

$$\min_{i \in \mathcal{B}} \bar{t}_i \geq \max_{i \in \mathcal{B}} \underline{t}_i.$$

Во-вторых, $\bigcap_{i \in \mathcal{B}} [\underline{t}_i, \bar{t}_i]$ имеет непустое пересечение с неограниченными решениями одномерных уравнений системы (4.14), т.е. с $(-\infty, \underline{t}_i] \cup [\bar{t}_i, +\infty)$, $i \in \mathcal{U}$. Последнее эквивалентно условию

$$\left(\min_{i \in \mathcal{U}} \underline{t}_i \geq \max_{i \in \mathcal{B}} \underline{t}_i \right) \vee \left(\max_{i \in \mathcal{U}} \bar{t}_i \leq \min_{i \in \mathcal{B}} \bar{t}_i \right),$$

где \vee — логическая дизъюнкция. В целом множество $\text{dom } \Omega$ описывается условиями

$$\min \left\{ \min_{i \in \mathcal{B}} \bar{t}_i - \max_{i \in \mathcal{B}} \underline{t}_i, \max \left\{ \min_{i \in \mathcal{U}} \underline{t}_i - \max_{i \in \mathcal{B}} \underline{t}_i, \min_{i \in \mathcal{B}} \bar{t}_i - \max_{i \in \mathcal{U}} \bar{t}_i \right\} \right\} \geq 0.$$

Поскольку функция в левой части этого неравенства непрерывна по \mathbf{r} , мы тем самым доказали замкнутость множества $\text{dom } \Omega$. Кроме того, $\text{dom } \Omega$ очевидно ограничено, а потому компактно.

Как мы уже отмечали, в общем случае функция $\Omega(\mathbf{r})$ не является даже непрерывной на своей эффективной области определения. Если $\mathbf{r} \in \text{dom } \Omega$, то

$$\begin{aligned} \Omega(\mathbf{r}) &= \max_{i \in \mathcal{B}} \underline{t}_i, & \text{если } \min_{i \in \mathcal{U}} \underline{t}_i \geq \max_{i \in \mathcal{B}} \underline{t}_i, \\ \text{и } \Omega(\mathbf{r}) &= \max \left\{ \max_{i \in \mathcal{B}} \underline{t}_i, \max_{i \in \mathcal{U}} \bar{t}_i \right\}, & \text{если } \min_{i \in \mathcal{U}} \underline{t}_i < \max_{i \in \mathcal{B}} \underline{t}_i \end{aligned}$$

(Рисунок 4.2 изображает различные возможные ситуации). Пусть $\text{dom } \Omega = \mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1$, где

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0 &= \left\{ \mathbf{r} \in \text{dom } \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \mid \min_{i \in \mathcal{U}} \underline{t}_i \geq \max_{i \in \mathcal{B}} \underline{t}_i \right\}, \\ \mathcal{D}_1 &= \left\{ \mathbf{r} \in \text{dom } \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \mid \min_{i \in \mathcal{U}} \underline{t}_i < \max_{i \in \mathcal{B}} \underline{t}_i \right\}. \end{aligned}$$

Тогда функция $\Omega(\mathbf{r})$ может быть определена следующим образом:

$$\Omega(\mathbf{r}) = \begin{cases} \max_{i \in \mathcal{B}} \underline{t}_i, & \text{если } \mathbf{r} \in \mathcal{D}_0, \\ \max \left\{ \max_{i \in \mathcal{B}} \underline{t}_i, \max_{i \in \mathcal{U}} \bar{t}_i \right\}, & \text{если } \mathbf{r} \in \mathcal{D}_1, \\ +\infty, & \text{если } \mathbf{r} \in \mathcal{V} \setminus (\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1), \end{cases}$$

и $\Omega(\mathbf{r}') < \Omega(\mathbf{r}'') < +\infty$ для любых $\mathbf{r}' \in \mathcal{D}_0, \mathbf{r}'' \in \mathcal{D}_1$.

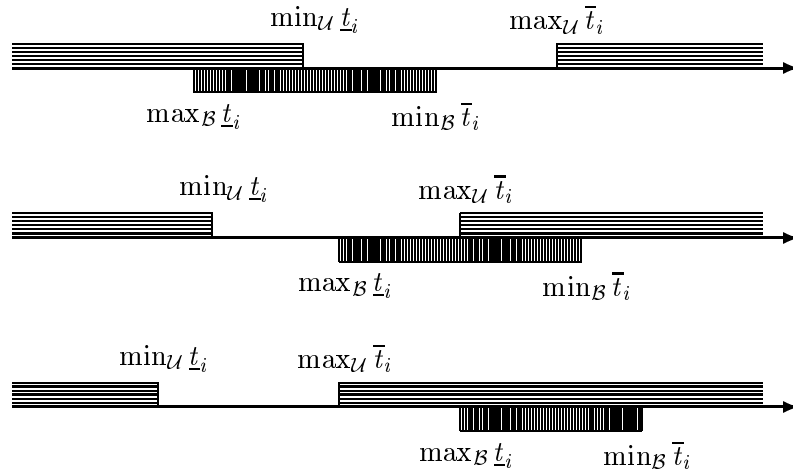


Рис. 4.2: Различные ситуации при определении функции $\Omega(\mathbf{r})$.

Будучи заданным нестрогими неравенствами между непрерывными функциями, множество \mathcal{D}_0 замкнуто, а $\Omega(\mathbf{r})$ непрерывна как на \mathcal{D}_0 , так и на \mathcal{D}_1 . По этой причине лебегово множество $\{\Omega \leq c\}$ замкнуто для любого $c \leq \sup\{\Omega(\mathbf{r}) \mid \mathbf{r} \in \mathcal{D}_0\}$. Предположим теперь, что $c > \sup\{\Omega(\mathbf{r}) \mid \mathbf{r} \in \mathcal{D}_0\}$. Тогда все предельные точки $\{\Omega \leq c\}$ могут принадлежать лишь $\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1$ в силу открытости дополнения $\mathcal{V} \setminus (\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1)$. Но множество $\{\Omega \leq c\} \cap \mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_0$ замкнуто в \mathbb{R}^{n-1} , а множество $\{\Omega \leq c\} \cap \mathcal{D}_1$ замкнуто в \mathcal{D}_1 . Следовательно, $\{\Omega \leq c\} \cap \mathcal{D}_0$ содержит все предельные точки $\{\Omega \leq c\}$, принадлежащие \mathcal{D}_0 , в то время как $\{\Omega \leq c\} \cap \mathcal{D}_1$ содержит все предельные точки $\{\Omega \leq c\}$, принадлежащие \mathcal{D}_1 . Поскольку

$$\{\Omega \leq c\} = (\{\Omega \leq c\} \cap \mathcal{D}_0) \cup (\{\Omega \leq c\} \cap \mathcal{D}_1),$$

то мы тем самым получаем замкнутость лебеговых множеств $\{\Omega \leq c\}$ также и для $c > \sup\{\Omega(\mathbf{r}) \mid \mathbf{r} \in \mathcal{D}_0\}$. Это завершает доказательство полунепрерывности снизу функции $\Omega(\mathbf{r})$.

■

Теорема 4.4.1 Пусть интервальная система линейных алгебраических уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ и интервальный вектор $\mathbf{V} \supseteq \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ таковы, что выполнено условие (NZ). Тогда в методе дробления решений из Таблицы 4.3 с начальным приближением \mathbf{V} последовательность ведущих оценок сходится к $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$ снизу.

Доказательство. Как мы уже упоминали, в интервальных алгоритмах глобальной оптимизации, основанных на адаптивном дроблении и стратегии “ветвей и границ”, оценка

$$\Omega(\mathbf{Q}) \leq \min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}\} \quad (4.17)$$

для ведущих брусов \mathbf{Q} была получена Рачеком в [241], а потому нам остается доказать собственно сходимость метода.

Обозначим через \mathcal{W} множество всех точечных векторов \mathcal{V} , т.е.

$$\mathcal{W} := \mathcal{V} \cap \mathbb{R}^{n-1}.$$

Пусть также множества \mathcal{D}_0 и \mathcal{D}_1 имеют тот же смысл, как они были определены в Лемме 1. Наши дальнейшие рассуждения существенно зависят от того, имеем ли место $\mathcal{W} \cap \mathcal{D}_0 \neq \emptyset$ или $\mathcal{W} \cap \mathcal{D}_0 = \emptyset$,

Если $\mathcal{W} \cap \mathcal{D}_0 \neq \emptyset$, то все ведущие брусы \mathbf{Q} принадлежат \mathcal{D}_0 . Действительно, для любого $p \in \mathcal{W} \cap \mathcal{D}_0$ справедливо неравенство $\Omega(p) \geq \min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}\}$. В случае $\mathbf{Q} \in \mathcal{D}_1$ мы имели бы $\Omega(\mathbf{Q}) > \Omega(p)$, а потому

$$\Omega(\mathbf{Q}) > \min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}\},$$

что противоречит (4.17).

Каким бы ни было $\mathbf{r} \in \mathcal{D}_0$,

$$\min\{\Omega(r) \mid (r \in \mathbb{R}^{n-1}) \& (r \in \mathbf{r})\} = \Omega(\check{r}) \quad (4.18)$$

для некоторого точечного $\check{r} \in \mathbf{r}$, $\check{r} \in \mathbb{R}^{n-1}$, так как полунепрерывная снизу функция $\Omega(\mathbf{r})$ достигает своего наименьшего значения на компактном множестве $\{r \in \mathbb{R}^{n-1} \mid r \in \mathbf{r}\}$ [35]. Но

$$\|\check{r} - \mathbf{r}\| \leq 2 \|\text{rad } \mathbf{r}\|.$$

Следовательно, в силу равномерной непрерывности $\Omega(\mathbf{r})$ на \mathcal{D}_0 для любого $\epsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что

$$0 \leq \min\{\Omega(r) \mid r \in \mathbf{r}\} - \Omega(\mathbf{r}) \leq \epsilon \quad (4.19)$$

при $\|\text{rad } \mathbf{r}\| \leq \delta$. Тем самым при условии (NZ) мы строго обосновали утверждение §4.4 b о том, что точность оценивания (4.13) посредством $\Omega(\mathbf{r})$ тем выше, чем уже (тоньше) интервальный вектор \mathbf{r} .

Теперь мы легко можем доказать сходимость простейшего метода дробления решений из §4.4 b. Если $\{\mathbf{Q}^{(k)}\}$ — последовательность ведущих брусов (как и прежде, k обозначает номер шага алгоритма), то $\|\text{rad } \mathbf{Q}^{(k)}\| \rightarrow 0$ по Лемме 2. Поэтому для любого $\epsilon > 0$ существует положительное целое K_ϵ , такое что аналогично неравенству (4.19), для $k \geq K_\epsilon$ имеет место

$$0 \leq \min\{\Omega(r) \mid r \in \mathbf{Q}^{(k)}\} - \Omega(\mathbf{Q}^{(k)}) \leq \epsilon.$$

Используя также неравенства

$$\begin{aligned} \Omega(\mathbf{Q}^{(k)}) &\leq \min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}\} \\ &= \min\{\Omega(r) \mid r \in (\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{\nu-1}, \mathbf{V}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{V}_n)\} \\ &\leq \min\{\Omega(r) \mid r \in \mathbf{Q}^{(k)}\}, \end{aligned}$$

мы можем заключить, что

$$0 \leq \min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}\} - \Omega(\mathbf{Q}^{(k)}) \leq \epsilon \quad \text{для } k \geq K_\epsilon.$$

Это и означает сходимость простейшего метода дробления решений.

Ясно также, что наш вывод останется справедливыми и в случае $\mathcal{D}_0 = \emptyset$ (при этом $\text{dom } \Omega = \mathcal{D}_1$). Для доказательства этого достаточно лишь заменить \mathcal{D}_0 на \mathcal{D}_1 во всех предшествующих рассуждениях, начиная с (4.18).

Рассмотрим теперь случай $\mathcal{D}_0 \neq \emptyset$ и $\mathcal{W} \cap \mathcal{D}_0 = \emptyset$. Пусть

$$\min\{\|\mathbf{r} - r\| \mid (\mathbf{r} \in \mathcal{D}_0) \& (r \in \mathcal{W})\} = 2\tau.$$

Нетрудно понять, что $\tau > 0$, так как \mathcal{W} и \mathcal{D}_0 являются непересекающимися компактными. Тогда множество

$$\left\{ \mathbf{r} \in \text{dom } \Omega \mid \min_{r \in \mathcal{W}} \|\mathbf{r} - r\| \leq \tau \right\} \quad (4.20)$$

также не пересекает \mathcal{D}_0 , т.е. оно целиком содержится в \mathcal{D}_1 . Для любых \mathbf{r} и r , очевидно, $\|\mathbf{r} - r\| \geq \|\text{rad } \mathbf{r}\|$, а потому

$$\min_r \|\mathbf{r} - r\| \geq \|\text{rad } \mathbf{r}\|.$$

Таким образом, множество (4.20) как и множество \mathcal{D}_1 , содержит подмножество

$$\mathcal{D}_\tau = \{ \mathbf{r} \in \text{dom } \Omega \mid \|\text{rad } \mathbf{r}\| \leq \tau \},$$

которому принадлежат, начиная с некоторой итерации, все ведущие брусы. Дальнейшие рассуждения совершенно аналогичны тем, что мы проводили в ранее рассмотренном случае: так как функция $\Omega(\mathbf{r})$ равномерно непрерывна на компакте \mathcal{D}_τ , то выполняется неравенство (4.19), и т.д.

Тем самым теорема оказывается полностью доказанной. ■

Второй член дизъюнкции в условии (NZ) является практически труднопроверяемым в своей исходной форме, но, используя интервальную арифметику, мы можем дать простое достаточное условие выполнения (NZ):

для каждого $i = 1, 2, \dots, m$,
 нуль не является концом $\mathbf{a}_{i\nu}$
 или $0 \notin \left(\mathbf{b}_i - \sum_{j=1, j \neq \nu}^n \mathbf{a}_{ij} \mathbf{V}_j \right)$.

Вместе с тем подчеркнём, что не следует переоценивать практическую значимость простейшего метода дробления решений. Основная идея базового алгоритма, представленного в Таблице 4.3, должна быть существенно развита и дополнена техническими модификациями прежде чем приведёт к эффективным вычислительным процедурам.

4.5 Модификации методов дробления решений

Несмотря на доказанную нами выше сходимостью простейшего метода дробления решений, было бы неразумным пытаться применить его непосредственно для решению серьёзных практических задач. Исходный алгоритм может быть значительно улучшен несколькими возможными способами, ряд из которых мы перечисляли в §4.3.

В этом параграфе мы подробно обсудим возможности модификации методов дробления решений для ИСЛАУ с помощью каждого из приёмов, перечисленных на стр. 131, за исключением самого первого. Дело в том, что разрывность целевой функции $\Omega(r)$ чрезвычайно осложняет обнаружение её монотонности по тем или иным переменным на брусах $\mathbf{P} \subseteq (\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{\nu-1}, \mathbf{V}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{V}_n)$. Применяемый обычно для этого стандартный способ — исследование знака области значений на \mathbf{P} производных $\frac{\partial \Omega(r)}{\partial r_k}$, $k = 1, \dots, \nu-1, \nu+1, \dots, n$, — в общем случае теперь уже не проходит. Так же непросто определить, является ли $\Omega(r)$ непрерывной на данном брусе \mathbf{P} . В связи с этим автор берёт на себя смелость утверждать, что введение в методы дробления решений для ИСЛАУ процедуры проверки целевой функции на монотонность не приведёт к существенному повышению их эффективности, но, скорее, сделает эти алгоритмы более тяжеловесными и труднореализуемыми. Поэтому мы не будем далее развивать этот путь.

4.5 а Оценивание по знакоопределённым брусам

Наиболее радикальным усовершенствованием метода дробления решений в применении к интервальным линейным системам является “встраивание” в них эффективных локальных оптимизационных процедур, эксплуатирующих факт локальной полиэдральности целевой функции $\Omega(r)$.

Действительно, пересечение множества АЕ-решений ИСЛАУ с каждым ортантом в \mathbb{R}^n (а в некоторых частных случаях даже и с несколькими объединениями ортантов) — многогранное выпуклое множество. Пусть $(n-1)$ -мерный брусок \mathbf{P} , $\mathbf{P} \subseteq (\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{\nu-1}, \mathbf{V}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{V}_n)$, имеет своими компонентами интервалы, не содержащие внутри себя нуля. Мы будем называть такие брусы *знакоопределёнными*. Тогда множество прямых $\{l(r) \mid r \in \mathbf{P}\}$ пересекает всего лишь два ортанта \mathcal{O}' и \mathcal{O}'' в \mathbb{R}^n , образованные точками, у которых знаки 1-ой, ..., $(\nu-1)$ -ой, $(\nu+1)$ -ой, ..., n -ой компонент те же, что и у \mathbf{P} , а ν -ая компонента, соответственно, неположительна или неотрицательна. Следовательно,

$$\begin{aligned} \min\{\Omega(r) \mid r \in \mathbf{P}\} &= \min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \ \& \ (x_1, \dots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \dots, x_n) \in \mathbf{P}\} \\ &= \min\{\ell', \ell''\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \ell' &= \min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta} \cap \mathcal{O}' \ \& \ (x_1, \dots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \dots, x_n) \in \mathbf{P}\}, \\ \ell'' &= \min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta} \cap \mathcal{O}'' \ \& \ (x_1, \dots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \dots, x_n) \in \mathbf{P}\}. \end{aligned}$$

Но $\Xi_{\alpha\beta} \cap \mathcal{O}'$ и $\Xi_{\alpha\beta} \cap \mathcal{O}''$ — выпуклые многогранные множества, которые определяются несложно выписываемыми системами линейных неравенств, и потому значения ℓ' и ℓ'' могут быть эффективно найдены путём решения задач линейного программирования. Укажем их каноническую форму аналогично тому, как это было сделано в §4.2.

Пусть $S' = \text{diag} \{s'_1, s'_2, \dots, s'_n\}$ — диагональная матрица знаков внутренних точек ортанта \mathcal{O}' , т.е. $x = S'|x|$ для $x \in \mathcal{O}'$, а вектор $p' \in \mathbb{R}^{2n}$ определяется как

$$p' = \begin{pmatrix} -\underline{\mathbf{P}}_1 \\ \vdots \\ -\underline{\mathbf{P}}_{\nu-1} \\ +\infty \\ -\underline{\mathbf{P}}_{\nu+1} \\ \vdots \\ -\underline{\mathbf{P}}_n \\ \overline{\mathbf{P}}_1 \\ \vdots \\ \overline{\mathbf{P}}_{\nu-1} \\ +\infty \\ \overline{\mathbf{P}}_{\nu+1} \\ \vdots \\ \overline{\mathbf{P}}_n \end{pmatrix}.$$

Тогда оценка ℓ' является решением задачи линейного программирования

$$c^\top y \rightarrow \min, \quad c = (0, \dots, 0, s'_\nu, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n, \quad (4.21)$$

с ограничениями

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \text{mid } \mathbf{A} \cdot S' - (\text{rad } \mathbf{A}^\exists - \text{rad } \mathbf{A}^\forall) \\ -\text{mid } \mathbf{A} \cdot S' - (\text{rad } \mathbf{A}^\exists - \text{rad } \mathbf{A}^\forall) \end{pmatrix} y \leq \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{b}}^c \\ (-\mathbf{b}^c) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} -S' \\ S' \end{pmatrix} y \leq p', \\ y \geq 0. \end{array} \right. \quad (4.22)$$

Аналогичным образом выписывается и задача линейного программирования, определяющая оценку ℓ'' .

Отметим, что при $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \mathcal{O}' \neq \emptyset$ справедливо неравенство

$$\ell' < \ell'',$$

а потому практическое нахождение $\min\{\Omega(r) \mid r \in \mathbf{P}\}$ для знакоопределённых брусков \mathbf{P} целесообразно начинать с вычисления оценки ℓ' . Если определяемое неравенствами (4.22) множество непусто, то

$$\min\{\Omega(r) \mid r \in \mathbf{P}\} = \ell'$$

и можно даже не приступать к решению задачи линейного программирования для нахождения ℓ'' . В противном случае, когда система ограничений (4.22) несовместна,

$$\min\{\Omega(r) \mid r \in \mathbf{P}\} = \ell''.$$

4.5 b Использование локальных решателей

В §4.4 при построении миноранты по области для целевой функции $\Omega(r)$ мы применили процедуру её естественного интервального расширения. Другой, более совершенный способ приближённого оценивания величины

$$\min\{\Omega(r) \mid r \in \mathbf{P}\} \quad (4.13)$$

снизу может быть основан на использовании понятия *локального решателя* (local solver) интервальной линейной алгебраической системы. Так мы будем называть любую процедуру для локального оценивания множества решений ИСЛАУ, т.е. не всего множества решений целиком, а лишь той его части, которая лежит в некотором заданном интервальном векторе. Строгое определение формулируется следующим образом:

Определение 4.5.1 *Интервальнозначное отображение*

$$\text{LocSol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z}) : \mathbb{IR}^{m \times n} \times \mathbb{IR}^n \times \mathbb{IR}^n \rightarrow \mathbb{IR}^n \quad (4.23)$$

будем называть локальным решателем интервальной системы линейных алгебраических уравнений, если для любых матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{m \times n}$ и векторов $\mathbf{b} \in \mathbb{IR}^n$, $\mathbf{z}, \mathbf{z}' \in \mathbb{IR}^n$

$$(i) \quad \text{LocSol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z}) \supseteq \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \mathbf{z}, \quad (4.24)$$

$$(ii) \quad \text{LocSol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z}') \supseteq \text{LocSol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z}) \quad \text{при } \mathbf{z} \supseteq \mathbf{z}', \quad (4.25)$$

т.е. когда $\text{LocSol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z})$ включает в себя подмножество рассматриваемого множества решений ИСЛАУ $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$, содержащееся в \mathbf{z} , и монотонно относительно включения по аргументу \mathbf{z} .

Впервые локальные решатели рассматривались А.Ноймайером для объединённого множества решений в работе [214], но полученные им результаты почему-то не вошли в итоговую книгу [219]. Мы даём определение локального решателя в максимальной общности для всех множеств решений ИСЛАУ.

Если мы располагаем каким-либо локальным решателем LocSol , то, очевидно, требуемой оценкой снизу для $\min\{\Omega(r) \mid r \in \mathbf{P}\}$, $\mathbf{P} \in \mathbb{IR}^{n-1}$, может быть взята

$$\text{LocSol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, (\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_{\nu-1}, \mathbf{V}_\nu, \mathbf{P}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{P}_n)),$$

а если в методе дробления решений брус \mathbf{P} является потомком бруса $\mathbf{Q} \supseteq \mathbf{P}$, то и более точная величина

$$\text{LocSol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, (\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_{\nu-1}, [\Omega(\mathbf{Q}), \bar{\mathbf{V}}_\nu], \mathbf{P}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{P}_n)). \quad (4.26)$$

Но не все локальные решатели одинаково пригодны для использования посредством этой конструкции в методах дробления решений. Анализ доказательства сходимости простейшего метода дробления решений показывает, что для оптимальности даваемых им результатов необходимо и достаточно выполнение следующего условия:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{разность } (\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \mathbf{z}\} - (\text{LocSol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z}))_\nu) \\ \text{стремится к нулю при } \text{wid}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{\nu-1}, \mathbf{z}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{z}_n) \rightarrow 0 \end{array}}. \quad (4.27)$$

Это довольно сильное требование, тем более, что, в конечном счёте, нам важно не асимптотическое поведение оценки, а, по-возможности, наиболее точное оценивание по брусам конечной ширины. Кроме того, теперь мы располагаем для оценивания $\min\{\Omega(r) \mid r \in \mathbf{P}\}$ по знакоопределённым брусам \mathbf{P} мощной методикой §4.5 а. Рекомендуем поэтому ограничиться для решения вопроса о пригодности тех или иных локальных решателей в методах дробления решений более слабыми условиями:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{разность } (\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \mathbf{z}\} - (\underline{LocSol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z}))_\nu) \\ \text{монотонно уменьшается с уменьшением вектора} \\ (\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{\nu-1}, \mathbf{z}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{z}_n) \text{ относительно порядка по включению} \end{array}},$$

или даже совсем грубым

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{величина } (\underline{LocSol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z}))_\nu \text{ монотонно возрастает при уменьшении} \\ (\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{\nu-1}, \mathbf{z}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{z}_n) \text{ относительно порядка по включению} \end{array}}. \quad (4.28)$$

Для случая объединённого множества решений некоторые простые локальные решатели и их теоретический анализ содержатся в работе А. Ноймайера [214], но в полном объёме вопрос конструирования локальных решателей никем не исследовался. Ниже мы отчасти восполним этот пробел, рассмотрев два простых, но достаточно общих способа построения локальных решателей на основе известных методов глобального решения ИСЛАУ.

Пусть $Encl$ — какой-нибудь конечный метод решения “внешней задачи” для ИСЛАУ $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$, а $Encl(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ — даваемый им интервальный вектор внешней оценки^{4.4}, так что $Encl(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \supseteq \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. По-видимому, простейшим локальным решателем является

$$LocSol(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z}) = Encl(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \mathbf{z}.$$

Выполнение условий (i) и (ii) Определения 4.5.1 проверяется тривиально, но вот (4.28) (а тем более и (4.27)) для этого простейшего локального решателя в общем случае неверно. Модифицируем эту конструкцию.

Алгоритм $Encl$ представляется в виде последовательности инструкций, предписывающих, какие действия следует произвести с входными данными — \mathbf{A} и \mathbf{b} — для получения ответа $Encl(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Как правило, значения компонент ответа $Encl(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ вычисляются не все одновременно, и, кроме того, будучи уже найдены, значения тех компонент, которые вычисляются раньше, используются и далее для определения окончательных значений остальных компонент. Выделим в последовательности инструкций, порождающей $Encl(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, вхождения компонент $Encl_i(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, $i = 1, 2, \dots, n$, интервального вектора-ответа $Encl(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ и заменим все их пересечениями $(Encl \cap \mathbf{z})$. Получившийся в результате выполненной подстановки список инструкций задаёт, очевидно, некоторое отображение

$$LocSol(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z}) : \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

которое имеет хорошие предпосылки к тому, чтобы являться локальным решателем. Например, нетрудно показать, что $LocSol(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z})$ — локальный решатель для оценивания

^{4.4}От английского термина enclosure, означающего “объемлющее множество” или “внешняя оценка”.

объединённого множества решений, если $Encl$ — это известный интервальный метод Гаусса или какая-нибудь из его многочисленных модификаций.

Но для использования в (4.26) нужны значения не всех компонент интервала локального решения ИСЛАУ, а одной лишь ν -ой компоненты. Если в алгоритме $LocSol(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z})$ значение ν -ой компоненты вычисляется не последней по порядку, то может возникнуть малоприятная ситуация, когда её величина окажется не зависящей от некоторых из \mathbf{z}_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Вследствие этого на оценку (4.26), получаемую с помощью локального решателя $LocSol(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z})$ никак не будут влиять значения некоторых компонент бруса \mathbf{P} , и, следовательно, нарушенными окажутся условия (4.27)–(4.28). Поэтому мы рекомендуем предварительно перенумеровывать неизвестные в ИСЛАУ так, чтобы в алгоритмах $Encl$ и $LocSol$ значение ν -ой компоненты ответа вычислялась бы самой последней. Эта мера достигает цели, если $Encl$ удовлетворяет “принципу Гаусса-Зейделя” [76], — *вновь полученная информация сразу же используется*, — т.е. если переменные в $Encl$ “достаточно тесно” завязаны друг с другом, хотя в общем случае и она может не спасти положения.

Если в $Encl$ все компоненты интервального вектора-решения $Encl(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ получаются из найденных ранее компонент посредством некоторых функций, образованных суперпозициями действий интервальной арифметики (2.5)–(2.8) и операций пересечения и объединения, то очевидна монотонность $LocSol(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z})$ относительно включения по аргументу \mathbf{z} . Но для полной проверки справедливости для $LocSol(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z})$ определения локального решателя и условий (4.27)–(4.28) необходимо, конечно, отталкиваться от свойств конкретного алгоритма $Encl$.

Обратимся теперь к построению локальных решателей на основе итерационных методов внешнего оценивания множеств решений ИСЛАУ. Как следует из результатов §3.1 и §3.5, внешняя оценка для множеств решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ может быть найдена в виде формального решения уравнения

$$x = (I \ominus \Lambda \mathbf{A}^c) x + \Lambda \mathbf{b}^c \quad (3.30)$$

при условии $\rho(|I \ominus \Lambda \mathbf{A}^c|) < 1$, а её вычисление можно организовать в виде итерационного процесса

$$\mathbf{x}^{(k+1)} := (I \ominus \Lambda \mathbf{A}^c) \mathbf{x}^{(k)} + \Lambda \mathbf{b}^c. \quad (4.29)$$

Предложение 4.5.1 Пусть для интервальной линейной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ и её множества решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, соответствующего характеристическим матрице \mathbf{A}^c и правой части \mathbf{b}^c существует такая квадратная точечная матрица Λ , что

$$\rho(|I \ominus \Lambda \mathbf{A}^c|) < 1. \quad (3.29)$$

Тогда итерационный процесс в \mathbb{IR}^n

$$\mathbf{x}^{(0)} := \mathbf{z}, \quad (4.30)$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} := \begin{cases} ((I \ominus \Lambda \mathbf{A}^c) \mathbf{x}^{(k)} + \Lambda \mathbf{b}^c) \cap \mathbf{z}, & \text{если } \mathbf{x}^{(k)} \neq \emptyset \text{ и интервал} \\ & (I \ominus \Lambda \mathbf{A}^c) \mathbf{x}^{(k)} + \Lambda \mathbf{b}^c \text{ правилен,} \\ \emptyset, & \text{иначе} \end{cases} \quad (4.31)$$

сходится (либо к правильному интервальному вектору, либо к \emptyset). Им порождается локальный решатель

$$LocSol(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)}$$

для оценивания множества решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ интервальной линейной системы.

Доказательство. Предположим, что все члены последовательности (4.30)–(4.31) непусты. Поскольку для любых интервальных векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{IR}^n$ с непустыми пересечениями $\mathbf{x} \cap \mathbf{z}$ и $\mathbf{y} \cap \mathbf{z}$ имеет место неравенство

$$\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq \text{dist}(\mathbf{x} \cap \mathbf{z}, \mathbf{y} \cap \mathbf{z}),$$

то последовательность (4.30)–(4.31) фундаментальна (т.е. является последовательностью Коши) в полном метрическом пространстве всех правильных интервальных векторов из \mathbf{z} по тем же самым причинам, по которым, при определённых условиях, в \mathbb{IR}^n фундаментальна любая последовательность вида (4.29). Если же какой-нибудь член последовательности (4.30)–(4.31) является пустым множеством, то таковы и все последующие её члены. Следовательно, $\lim \mathbf{x}^{(k)}$ существует, и значения $\text{LocSol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z})$ определены корректно.

Очевидна также монотонность отображения $\text{LocSol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{z})$ относительно включения по аргументу \mathbf{z} .

Свойство (i) из Определения локального решателя доказывается с помощью традиционных для подобных случаев рассуждений, которые мы проводили, к примеру, при доказательстве Теорем 3.1.3 и 3.6.1 и поэтому мы на них здесь не останавливаемся подробно. ■

Как и прежде, вопрос о дальнейшем использовании полученного локального решателя в методах дробления решений, т.е. выполнение условий (4.27)–(4.28), должны решаться отдельно в каждом конкретном случае.

Суммируя итоги параграфов §§4.4 и 4.5 а–4.5 б, условимся обозначать через $\Omega(\mathbf{P})$ оценку для величины $\min\{\Omega(r) \mid r \in \mathbf{P}\}$, получаемую

способом, изложенным в §4.5 а, т.е. посредством решения задач линейного программирования вида (4.21), если брус \mathbf{P} знакоопределённый;

с помощью техники §§4.4 или 4.5 б, — либо как естественное интервальное расширение $\Omega(r)$ на \mathbf{P} , либо в виде (4.26) с привлечением какого-нибудь из локальных решателей, — если брус \mathbf{P} не знакоопределённый.

4.5 с Новая стратегия дробления

Изменение в методах дробления решений способа вычисления оценок для $\min\{\Omega(r) \mid r \in \mathbf{P}\}$ естественно приводит к необходимости модификации и самого способа дробления ведущих брусков. Рассмотрим простой пример. Если при существующей стратегии дробления при решении “внешней задачи” для двумерной ИСЛАУ ведущим бруском \mathbf{Q} сделался отрезок $[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, то одним из его потомков от дальнейшего дробления “ровно пополам” всегда будут нульсодержащие интервалы

$$[-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}], [-\frac{1}{12}, \frac{1}{6}], \dots,$$

общими формулами для которых являются

$$[-\frac{1}{3 \cdot 2^{k+1}}, \frac{1}{3 \cdot 2^k}] \quad \text{и} \quad [-\frac{1}{3 \cdot 2^k}, \frac{1}{3 \cdot 2^{k+1}}], \quad k = 1, 2, \dots$$

Точная оценка величины (4.13) по таким брусам может быть получена лишь в результате бесконечного уточняющего итерационного процесса, при котором придется оценивать столько же измельчающихся знакоопределённых брусов. С учётом построений §4.5 а неразумность подобных действий очевидна: гораздо проще и экономнее, разбив \mathbf{Q} на два неравных, но знакоопределённых интервала $[\mathbf{Q}, 0]$ и $[0, \mathbf{Q}]$, решить в каждом из них задачу линейного программирования вида (4.21), и взять затем $\min\{x \mid x \in \mathbf{X}\}$ как минимум получившихся результатов.

Более того, порождение знакоопределённых брусов может быть сделано одной из конечных целей процедуры дробления и в многомерной ситуации (наряду с измельчением ведущих брусов). При этом, правда, следует учесть, что для многомерного вектора \mathbf{Q} рассечение какой-либо одной нульсодержащей компоненты \mathbf{Q}_i на $[\underline{\mathbf{Q}}_i, 0]$ и $[0, \overline{\mathbf{Q}}_i]$ в общем случае ещё не делает знакоопределёнными брусы-потомки

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}' &= (\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_{i-1}, [\underline{\mathbf{Q}}_i, 0], \mathbf{Q}_{i+1}, \dots, \mathbf{Q}_n) \\ \text{и } \mathbf{Q}'' &= (\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_{i-1}, [0, \overline{\mathbf{Q}}_i], \mathbf{Q}_{i+1}, \dots, \mathbf{Q}_n),\end{aligned}$$

и потому мы вынуждены будем прибегнуть для оценивания величин $\min\{\Omega(r) \mid r \in \mathbf{Q}'\}$ и $\min\{\Omega(r) \mid r \in \mathbf{Q}''\}$ к приближенным методам из §§4.4 и 4.5 b. Но слишком большое различие размеров потомков \mathbf{Q}' и \mathbf{Q}'' нежелательно потому, что оно ставит их в “неравное” положение перед процедурами приближённого оценивания, точность которых, как правило, тем выше, чем меньше ширина брусов. Следовательно, стратегия дробления должна обеспечивать компромисс между двумя противоположными требованиями —

- нульсодержащие интервалы должны быть в конце концов рассечены на знакоопределённые потомки,
- при каждом дроблении потомки не должны слишком сильно различаться своими размерами.

Мы формализуем эти эвристические рекомендации в следующем правиле дробления:

Пусть \mathbf{Q}_i — самая длинная компонента бруса $\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_n)$.

Если $-2 < \overline{\mathbf{Q}}_i / \underline{\mathbf{Q}}_i < -1/2$, то рассекаем \mathbf{Q} на потомки \mathbf{Q}' и \mathbf{Q}'' , такие что

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}'_k &= \mathbf{Q}''_k = \mathbf{Q}_k \text{ для } k \neq i \\ \text{и } \mathbf{Q}'_i &= [\underline{\mathbf{Q}}_i, 0], \mathbf{Q}''_i = [0, \overline{\mathbf{Q}}_i],\end{aligned} \tag{4.32}$$

иначе рассекаем \mathbf{Q} на потомки \mathbf{Q}' и \mathbf{Q}'' , такие что

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}'_k &= \mathbf{Q}''_k = \mathbf{Q}_k \text{ для } k \neq i \\ \text{и } \mathbf{Q}'_i &= [\mathbf{Q}_i, \text{mid } \mathbf{Q}_i], \mathbf{Q}''_i = [\text{mid } \mathbf{Q}_i, \mathbf{Q}_i].\end{aligned}$$

При небольшом общем количестве компонент \mathbf{V} , содержащих внутри себя нуль лишь их можно и дробить в ведущих брусах, ограничив, таким образом, цели дробления только

порождением знакоопределённых потомков:

<p>Пусть \mathbf{Q}_i — самая длинная компонента бруса $\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_n)$, содержащая нуль в своей внутренности.</p> <p>Если $-2 < \overline{\mathbf{Q}}_i / \underline{\mathbf{Q}}_i < -1/2$, то рассекаем \mathbf{Q} на потомки \mathbf{Q}' и \mathbf{Q}'', такие что</p> $\mathbf{Q}'_k = \mathbf{Q}''_k = \mathbf{Q}_k \text{ для } k \neq i$ <p>и $\mathbf{Q}'_i = [\underline{\mathbf{Q}}_i, 0]$, $\mathbf{Q}''_i = [0, \overline{\mathbf{Q}}_i]$,</p> <p>иначе рассекаем \mathbf{Q} на потомки \mathbf{Q}' и \mathbf{Q}'', такие что</p> $\mathbf{Q}'_k = \mathbf{Q}''_k = \mathbf{Q}_k \text{ для } k \neq i$ <p>и $\mathbf{Q}'_i = [\mathbf{Q}_i, \text{mid } \mathbf{Q}_i]$, $\mathbf{Q}''_i = [\text{mid } \mathbf{Q}_i, \mathbf{Q}_i]$.</p>	(4.33)
--	--------

Фактически, следствием правила (4.33) является перебор всех знакоопределённых потомков \mathbf{V} .

Принятие стратегий дробления (4.32) и (4.33) в сочетании с новым уточнённым способом вычисления оценок для $\min\{\Omega(r) \mid r \in \mathbf{P}\}$, использующим алгоритмы линейного программирования, коренным образом меняет сам характер исходного метода дробления решений из §4.4. Он становится конечным (т.е. даёт точное решение за конечное число шагов), и теперь уже дробление брусов играет в нём не столь важную роль. С другой стороны, при этом возрастает значимость выбора качественного (достаточно узкого) начального приближения $\mathbf{V} \supseteq \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

4.5 d Итоговая схема

Наконец, дополняя метод дробления решений наиболее очевидной модификацией из списка стр. 131, которая предусматривает “отслеживание средних значений” целевой функции по брусам, мы приходим к наиболее совершенной версии алгоритма для вычисления $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$. Его основа — адаптивное дробление множества решений ИСЛАУ — несмотря на значительные модификации осталась неизменной. Он также оперирует со списком \mathcal{L} , но состоящим из записей двух видов —

$$(\mathbf{P}, p) \quad \text{и} \quad (p),$$

где $p = \Omega(\mathbf{P})$, $\mathbf{P} \subseteq (\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{\nu-1}, \mathbf{V}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{V}_n)$. Записи второго типа, состоящие из одного числа, мы будем называть *короткими записями*. Они предназначены для хранения информации о тех брусах \mathbf{P} , для которых

$$\Omega(\mathbf{P}) = \min\{\Omega(r) \mid r \in \mathbf{P}\},$$

т.е. оценка $\Omega(\mathbf{P})$ — точная. Дробить далее такие брусы, очевидно, уже не имеет смысла, а потому мы можем не хранить и сами координаты \mathbf{P} . Список \mathcal{L} поддерживается упорядоченным по возрастанию значений оценки $\Omega(\mathbf{P})$, и, кроме того, с алгоритмом связывается определённый в (4.4) параметр ω . Перед началом работы алгоритма $\omega = \overline{\mathbf{V}}_\nu$, список \mathcal{L} состоит из единственной пары

$$((\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{\nu-1}, \mathbf{V}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{V}_n), \underline{\mathbf{V}}_\nu),$$

Таблица 4.4:

Гибридный метод дробления решений
для внешней задачи для ИСЛАУ

```

присваиваем  $\mathbf{Q} := (\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{\nu-1}, \mathbf{V}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{V}_n)$ ,  $q := \underline{\mathbf{V}}_\nu$ ,  $\omega := \overline{\mathbf{V}}_\nu$ ;
инициализируем список  $\mathcal{L} := \{(\mathbf{Q}, q)\}$ ;
DO WHILE ( ( ведущая запись не короткая ) AND (  $\omega - q > \epsilon$  ) )
    пересекаем ведущий брус  $\mathbf{Q}$  на потомки  $\mathbf{Q}'$  и  $\mathbf{Q}''$  в соответствии
        с правилом (4.32) (или (4.33));
    удаляем бывшую ведущую пару  $(\mathbf{Q}, q)$  из списка  $\mathcal{L}$ ;
    вычисляем  $q' := \Omega(\mathbf{Q}')$  и  $q'' := \Omega(\mathbf{Q}'')$ ;
    IF (  $q' < \omega$  ) THEN
        IF ( оценка  $\Omega(\mathbf{Q}')$  точна ) THEN
            заносим в список  $\mathcal{L}$  в нужном порядке (по возрастанию
                второго поля) короткую запись  $(q')$ ;
             $\eta' := q'$ ;
        ELSE
            заносим в список  $\mathcal{L}$  в нужном порядке запись  $(\mathbf{Q}', q')$ ;
             $\eta' := \Omega(\text{mid } \mathbf{Q}')$ ;
        END IF
    ELSE
         $\eta' := +\infty$ ;
    END IF
    IF (  $q'' < \omega$  ) THEN
        IF ( оценка  $\Omega(\mathbf{Q}'')$  точна ) THEN
            заносим в  $\mathcal{L}$  в нужном порядке короткую запись  $(q'')$ ;
             $\eta'' := q''$ ;
        ELSE
            заносим в список  $\mathcal{L}$  в нужном порядке запись  $(\mathbf{Q}'', q'')$ ;
             $\eta'' := \Omega(\text{mid } \mathbf{Q}'')$ ;
        END IF
    ELSE
         $\eta'' := +\infty$ ;
    END IF
    полагаем  $\eta := \min\{\eta', \eta''\}$ ;
    IF (  $\omega > \eta$  ) THEN
        полагаем  $\omega := \eta$ ;
        удаляем из  $\mathcal{L}$  все такие записи  $(\mathbf{P}, p)$  или  $(p)$ , что  $p > \omega$ ;
    END IF
    обозначаем первую запись списка  $\mathcal{L}$  через  $(\mathbf{Q}, q)$ ;
END DO

```


а псевдокод нового модифицированного алгоритма имеет вид, представленный в Таблице 4.4.

Как и прежде, результатом работы Алгоритма 4.4 является (конечная) последовательность ведущих оценок $\{ \Omega(\mathbf{Q}) \}$, приближающая $\min\{ x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \}$ снизу. При этом ϵ — заданная абсолютная точность. В том случае, когда требуется обеспечить относительную точность ϵ , условием остановки внешнего цикла DO WHILE в алгоритме следует взять

$$(\omega - \Omega(\mathbf{Q})) / \Omega(\mathbf{Q}) \leq \epsilon$$

или

$$(\omega - \Omega(\mathbf{Q})) / \text{wid } \mathbf{V}_\nu \leq \epsilon.$$

Методы, аналогичные представленному в Таблице 4.4, которые используют

- 1) нестандартную схему дробления ведущих брусков из §4.5 с и
- 2) разнотипные специализированные процедуры для оценки целевой функции (основанные на аккуратном учёте её свойств в соответствующих брусках),

мы будем называть *гибридными методами дробления решений*.

Теперь — несколько практических советов по реализации вышеописанного алгоритма.

После нахождения значений $\Omega(\mathbf{Q}')$ и $\Omega(\mathbf{Q}'')$ целесообразно первой заносить в список \mathcal{L} запись с меньшей оценкой (пусть, для определённости, это будет $\Omega(\mathbf{Q}')$). Тогда для занесения в \mathcal{L} второго потомка, соответствующего \mathbf{Q}'' , просмотр списка можно начинать не с самого начала, а с записи, непосредственно следующей за (\mathbf{Q}'', q'') (или (q'')). Реализуя это соображение практически, можно специально ввести в Алгоритм 4.4 операцию переобозначения, при необходимости, \mathbf{Q}' на \mathbf{Q}'' , а \mathbf{Q}'' на \mathbf{Q}' .

Аналогичным образом модифицируется и последняя инструкция цикла DO WHILE алгоритма. Если к началу её исполнения запись, соответствующая брусу \mathbf{Q}'' , была занесена нами в список \mathcal{L} , то это уже свидетельствует о неравенстве $\Omega(\mathbf{Q}'') < \omega$. Опять таки, чтобы сэкономить машинное время, при $\Omega(\mathbf{Q}') < \Omega(\mathbf{Q}'')$ просмотр \mathcal{L} для его последующей чистки можно начинать сразу со следующей за (\mathbf{Q}'', q'') (или (q'')) записи. Если же в этой ситуации $Z'' \notin \mathcal{L}$, то просмотр-чистку \mathcal{L} следует начинать с записи, стоящей за Z' .

Отметим также, что выбранная нами форма последней инструкции цикла DO WHILE с дорогостоящей чисткой списка нацелена, прежде всего, на экономию оперативной памяти ЭВМ. Если размер выделяемой алгоритму памяти не критичен, а более важно его быстродействие, то чистку списка \mathcal{L} от бесперспективных записей следует проводить не после каждого очередного уменьшения параметра ω , а лишь через некоторое количество последовательных уменьшений ω .

Псевдокод алгоритма из Таблицы 4.4 представляет собой, скорее, общую схему целого класса однотипных алгоритмов для решения “внешней задачи” для ИСЛАУ, поскольку содержит несколько подлежащих конкретизации “свободных параметров” —

- способ получения оценки $\Omega(\mathbf{P})$,
- стратегию дробления ведущих брусков,
- способ чистки списка \mathcal{L}

• и пр.

В алгоритмах Таблиц 4.3 и 4.4 мы упорядочивали список \mathcal{L} по возрастанию оценки $\Omega(\mathbf{P})$, так что первая запись списка являлась одновременно и ведущей. Мы следовали в этом С. Скелбоу [308], Р.Е. Муру с соавторами [125], Х. Рачеку [241] и некоторым другим исследователям. Но существует и конкурирующий подход: в работах Е. Хансена [163, 164, 166] и П.С. Панкова [77, 78, 79], также посвящённых интервальным алгоритмам глобальной оптимизации на основе “принципе ветвей и границ”, список \mathcal{L} вообще никак не структурируется, т.е. он, по существу, реализуется в виде *кучи* [6]. Сравнить два этих возможных способа организации списка \mathcal{L} весьма сложно. С одной стороны, совсем нетрудно добавить дополнительную запись к неупорядоченному списку, но зато, чтобы найти в нём ведущую запись, требуется просмотреть весь список целиком. В то же время, простота обращения к ведущей записи упорядоченного списка достигается ценой определённых затрат на каждом шаге алгоритма на поддержание этой упорядоченности, также выражающихся в необходимости частичного просмотра \mathcal{L} . Кроме того, дополнив алгоритм процедурой чистки списка \mathcal{L} от бесперспективных записей, мы вновь сталкиваемся с необходимостью просмотра всего \mathcal{L} (хотя и не на каждом шаге).

Тем не менее, просматривать весь неупорядоченный список \mathcal{L} приходится на всех без исключения шагах алгоритма вне зависимости от хода его выполнения. Если же список \mathcal{L} упорядочен, то при занесении в него записей-потомков в худшем случае его нужно просмотреть целиком, в лучшем он вообще не нуждается в просмотре, а в среднем на каждом шаге мы должны будем просматривать список \mathcal{L} всё-таки не весь, т.е. в меньшей мере, чем для неупорядоченного варианта. Этим и объясняется наш выбор упорядоченного \mathcal{L} .

Некоторое ускорение обработки списка \mathcal{L} может быть достигнуто с помощью следующего оригинального приёма, предложенного П.С. Панковым [78]. В его основе — задание и корректировка по текущим нижней и верхней оценкам глобального минимума, $\Omega(\mathbf{Q})$ и ω , соответственно, вспомогательной “пороговой константы” γ , такой что

$$\Omega(\mathbf{Q}) < \gamma < \omega,$$

и “подсписка активных записей”

$$\mathcal{L}_\gamma = \{ (\mathbf{P}, \Omega(\mathbf{P})) \in \mathcal{L} \mid \Omega(\mathbf{P}) < \gamma \} \subseteq \mathcal{L}.$$

В случае неупорядоченного \mathcal{L} (кучи записей) ясно, что именно в \mathcal{L}_γ (при $\mathcal{L}_\gamma \neq \emptyset$) находится ведущая запись всего \mathcal{L} , и потому при её поиске нам достаточно, сэкономяв машинное время, ограничиться лишь просмотром \mathcal{L}_γ . Если же мы придерживаемся варианта упорядоченного \mathcal{L}_γ , то по аналогичным причинам эту упорядоченность достаточно поддерживать только в \mathcal{L}_γ , организовав дополнение $\mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_\gamma$ в виде кучи. В процессе работы алгоритма подмножество \mathcal{L}_γ не возрастает, и если на некотором шаге оно сделается пустым, то тогда же перевычисляется пороговая константа γ , и из \mathcal{L} заново выделяется \mathcal{L}_γ .

Совершенно строгих рецептов по выбору γ дать, по-видимому, невозможно. С одной стороны, с уменьшением γ уменьшается и \mathcal{L}_γ , и тем большим должен быть наш выигрыш в трудоёмкости на каждом отдельном шаге алгоритма. С другой стороны, если γ слишком мало, то подсписок \mathcal{L}_γ быстро исчерпывается, и мы вынуждены часто перевычислять γ и перестраивать \mathcal{L} . Руководствуясь отчасти эмпирическими, а отчасти эвристическими соображениями мы рекомендуем

$$\gamma = \frac{1}{3}(\omega + 2\Omega(\mathbf{Q})).$$

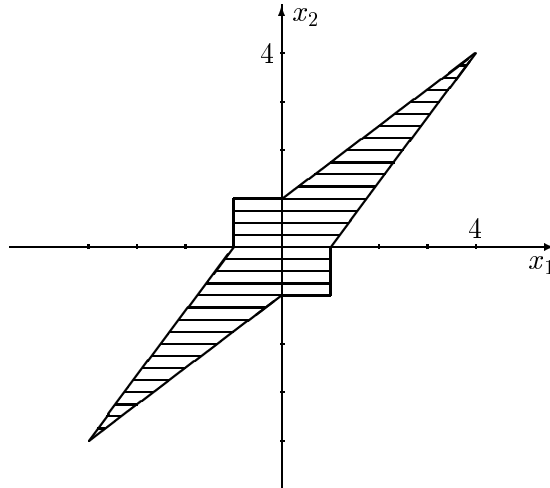


Рис. 4.3: Объединённое множество решений системы (4.35).

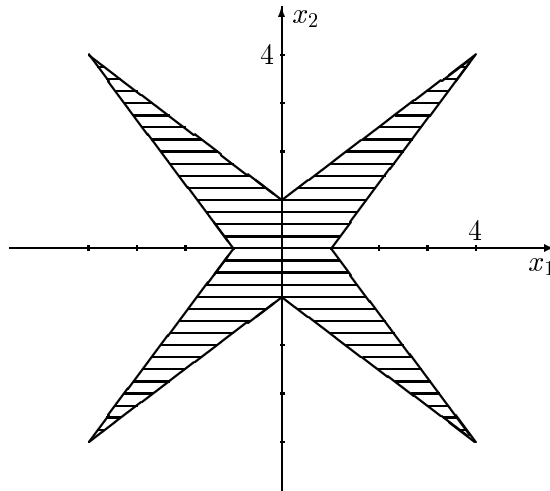


Рис. 4.4: Объединённое множество решений для системы (4.36).

Варьируя значения α , β , n и N , из (4.34) нетрудно получить широкий набор интервальных линейных систем для тестирования алгоритмов решения “внешней задачи”. Когда β уменьшается, приближаясь к нулю, матрица системы (4.34) становится все более близкой к вырожденной (особенной), а множество решений неограниченно увеличивается в размерах. Изменяя отношение α и β , мы можем модифицировать форму множества решений и т.п.

Структуру множества решений $\tilde{\Xi}$ для (4.34) легко выявить из соображений симметрии. Начнем с того, что рассматриваемая интервальная линейная система инвариантна относительно изменения знаков всех компонент решения на противоположный, так как вектор правой части уравновешен. Следовательно, множество решений $\tilde{\Xi}$ является центрально симметричным относительно начала координат, и, в частности,

$$\min\{x_i \mid x \in \tilde{\Xi}\} = -\max\{x_i \mid x \in \tilde{\Xi}\}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.37)$$

Далее, для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ после замены x_i на x_j и наоборот интервальная

система (4.34) также остается неизменной. Из этого можно заключить, что множество $\tilde{\Xi}$ симметрично относительно биссектрисы положительного и отрицательного ортантов пространства \mathbb{R}^n , так что

$$\begin{aligned} \min\{x_i \mid x \in \tilde{\Xi}\} &= \min\{x_j \mid x \in \tilde{\Xi}\}, \\ \max\{x_i \mid x \in \tilde{\Xi}\} &= \max\{x_j \mid x \in \tilde{\Xi}\} \end{aligned}$$

для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Сопоставляя эти соотношения с (4.37), можно, наконец, прийти к выводу, что интервальная оболочка множества решений $\tilde{\Xi}$, т.е. оптимальное интервальное решение задачи внешнего оценивания объединённого множества решений системы (4.34), является гиперкубом с центром в начале координат. Для определения его размеров положим $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ в (4.34), в результате чего все уравнения системы сольются в одно

$$[n - 1, N] \cdot x_1 + (n - 1)[\alpha - 1, 1 - \beta] \cdot x_1 = [1 - n, n - 1],$$

или

$$\left[1, \frac{N}{n - 1}\right] \cdot x_1 + [\alpha - 1, 1 - \beta] \cdot x_1 = [-1, 1].$$

При решении для этого уравнения “внешней задачи” переменная x_1 должна рассматриваться как *вещественное число*, и потому в силу дистрибутивности [4, 211, 219] мы приходим к

$$\left[\alpha, 1 - \beta + \frac{N}{n - 1}\right] \cdot x_1 = [-1, 1].$$

Объединённое множество решений этого одномерного интервального уравнения есть

$$x_1 = [-1/\alpha, 1/\alpha],$$

и потому оптимальными (точными) покомпонентными оценками объединённого множества решений системы (4.34) являются

$$\begin{aligned} \min\{x_i \mid x \in \tilde{\Xi}\} &= -1/\alpha, \\ \max\{x_i \mid x \in \tilde{\Xi}\} &= 1/\alpha, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

причём они не зависят от конкретного значения N .

Теперь рассмотрим и прокомментируем результаты численных экспериментов с простейшими методами дробления решений §4.4, применёнными к модельной ИСЛАУ (4.34) с увеличивающейся размерностью для $\alpha = \frac{1}{4}$, $\beta = 1$ (Таблица 4.5) и для $\alpha = \beta = \frac{1}{4}$ (Таблица 4.6). Из вышесказанного следует, что интервальные оболочки объединённых множеств решений этих систем суть интервальные векторы

$$\begin{pmatrix} [-4, 4] \\ [-4, 4] \\ \vdots \\ [-4, 4] \end{pmatrix},$$

но в качестве вектора начального приближения мы намеренно брали неуравновешенные интервалы $([-5, 6], \dots, [-5, 6])^\top$ и $([-7, 10], \dots, [-7, 10])^\top$. Принимая во внимание вычислительную схему методов дробления решений и особенности модельной задачи, в приведённых ниже Таблицах мы отразили затраты на вычисление лишь одной координатной оценки $\min\{x_1 \mid x \in \tilde{\Xi}\}$, так как в силу соображений симметрии для других компонент они такие же. Критерием остановки мы использовали $(\omega - \Omega(\mathbf{Q})) \leq 0.1$, т.е. условие достижения абсолютной точности оценки не менее чем 0.1. Как обобщающая мера трудозатрат (хотя и весьма субъективная) в Таблицы включено время счёта алгоритмов. Наконец, отметим, что от величины N результаты счёта совершенно не зависели.

Как можно видеть из этих Таблиц, трудозатраты простейшего метода дробления решений растут экспоненциально с размерностью задачи. Этот тезис может быть также обоснован посредством рациональных рассуждений.

Сложность выполнения методов дробления решений в применении к каждой конкретной ИСЛАУ зависит, конечно же, от структуры её множества решений, но худший случай обеспечивается как раз таки тестовой системой (4.34) при $\alpha = \beta$. Действительно, смоделируем процесс исполнения алгоритма Таблицы 4.3 как процедуру глобальной оптимизации функции $\Omega(r)$ из представления (4.11). На начальном этапе исполнения алгоритма ведущие брусы концентрируются вокруг локальных минимумов целевой функции $\Omega(r)$ на $(\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{\nu-1}, \mathbf{V}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{V}_n)$. Далее, по мере того, как достигается достаточное уточнение этих локальных минимумов (т.е. вместе с измельчением ведущих брусков), алгоритм постепенно отсеивает те из них, которые не являются глобальными минимумами. Более точно, всякий неглобальный локальный минимум имеет такую окрестность, что в неё, начиная с некоторого шага алгоритма, ведущие брусы уже не попадают. Раньше или позже, но все ведущие брусы будут сконцентрированы лишь вокруг глобальных минимумов (их может быть несколько), после чего алгоритм выполняет окончательное уточнение результата, т.е. значения этих глобальных минимумов. Естественно, в приведенной выше схеме некоторые этапы могут отсутствовать для тех или иных конкретных ИСЛАУ.

Если $0 < \alpha = \beta < 1$, то множество решений системы (4.34) является совершенно симметричным, а его пересечения с ортантами пространства \mathbb{R}^n конгруэнтны друг другу. Соответственно, в каждом из пересечений вектора области определения $(\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{\nu-1}, \mathbf{V}_{\nu+1}, \dots, \mathbf{V}_n)$ с ортантами \mathbb{R}^{n-1} имеется лишь один локальный минимум целевой функции $\Omega(r)$ из представления (4.11) (так что всего их 2^{n-1} штук), причём величины всех этих локальных минимумов одинаковы и равны $-1/\alpha$. Выполнение алгоритма Таблицы 4.3 в применении системе (4.34) с $\alpha = \beta$ происходит в соответствии с описанным выше стандартным сценарием: после некоторого количества шагов список \mathcal{L} разбивается на непересекающиеся подмножества $\mathcal{L}', \mathcal{L}'', \dots$ записей, принадлежащие каждому из которых записи сгущаются в окрестности некоторого локального минимума целевой функции $\Omega(r)$. Но теперь, поскольку все локальные минимумы равны друг другу, их уточнение, сколь бы тщательным оно ни было, не может выделить из них ни наименьших (т.е. наилучших), ни бесперспективных, а каждое из подмножеств $\mathcal{L}', \mathcal{L}'', \dots$ никогда не станет пустым.

Но, как мы уже отмечали, у целевой функции $\Omega(r)$, соответствующей ИСЛАУ (4.34) с $\alpha = \beta$, количество локальных минимумов растёт экспоненциально с размерностью n , и каждый из них требует от алгоритма отдельного уточнения, на которое затрачивается как минимум линейное по n время и память. Следовательно, сложность выполнения методов дробления решений, которая необходима для достижения заданной относительной или абсолютной погрешности, по крайней мере пропорциональна 2^n в худшем случае. Этот же вывод справедлив и для гибридных методов дробления решений, введённых в §4.5.

Таблица 4.5: Решение тестовой системы (4.34) с $\alpha = 1/4$, $\beta = 1$.

Размерность	Количество итераций	Время	Максимальная длина списка
начальное приближение $([-5, 6], \dots)^\top$			
2	11	< 1 сек	3
3	36	< 1 сек	7
4	96	< 1 сек	25
5	369	< 1 сек	100
6	1203	< 1 сек	319
7	3483	1 сек	696
8	13460	7 сек	2771
9	33307	26 сек	7066
начальное приближение $([-7, 10], \dots)^\top$			
2	12	< 1 сек	3
3	43	< 1 сек	8
4	177	< 1 сек	24
5	573	< 1 сек	105
6	2073	< 1 сек	334
7	6748	2 сек	1424
8	25736	14 сек	3418
9	78674	69 сек	12504

Таблица 4.6: Решение тестовой системы (4.34) с $\alpha = \beta = 1/4$.

Размерность	Количество итераций	Время	Максимальная длина списка
начальное приближение $([-5, 6], \dots)^\top$			
2	22	< 1 сек	4
3	162	< 1 сек	25
4	928	< 1 сек	146
5	5985	1 сек	1108
6	30986	17 сек	6810
7	206131	733 сек	47238
начальное приближение $([-7, 10], \dots)^\top$			
2	25	< 1 сек	4
3	189	< 1 сек	23
4	1269	< 1 сек	151
5	7581	1 сек	1077
6	45831	27 сек	6778
7	271556	785 сек	40121

<p>Для $\nu \in \{1, 2, \dots, n\}$ найти $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})\}$ либо как можно более точную оценку для этой величины снизу.</p>	(4.38)
---	--------

Что касается верхних покомпонентных оценок множеств решений, то алгоритмы для их нахождения конструируются из алгоритмов решения задачи (4.38) путём несложной модификации. Альтернативный способ вычисления верхних оценок — замена переменных $y = -x$ в исходной системе, в результате чего верхние оценки множества решений переходят в нижние с противоположным знаком.

Ясно, далее, что задача (4.38) эквивалентна задаче глобальной минимизации величины

$$\min\{x_\nu \mid F(a, x) = b\} \tag{4.39}$$

как функции параметров $a \in \mathbf{a}$ и $b \in \mathbf{b}$. Как могут быть вычислены значения (4.39) или хотя бы оценки для них снизу? Это можно сделать любым известным интервальным методом решения нелинейных систем уравнений, к примеру, интервальным методом Ньютона, методами Кравчика или Хансена-Сенгупты (см. [45, 166, 188, 219, 181]), которые позволяют находить внешнюю интервальную оценку для множества всех решений нелинейной системы, лежащих в заданном бруске. Далее с помощью этих же методов мы сможем находить интервальные расширения величины (4.39) по параметрам a и b .

Зафиксируем какой-нибудь метод $Encl$ внешнего оценивания объединённого множества решений для интервальной системы уравнений $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$, мы будем называть этот метод *базовым*. Пусть $Encl(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ — получаемый с его помощью интервальный вектор внешней оценки для множества решений системы $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$, т.е. такой что $Encl(F, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{IR}^n$ и

$$Encl(F, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \supseteq \Xi_{uni}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Тогда величины

$$\underline{(Encl(F, \mathbf{a}, \mathbf{b}))}_\nu$$

являются нижними концами интервальных расширений целевой функции (4.39). В этих условиях для решения задачи глобальной минимизации (4.39) применим соответствующим образом адаптированный алгоритм `GlobalOpt`. Псевдокод получающегося нового алгоритма приведён в Таблице 4.7.

При достаточно общих условиях на систему $F(x, \mathbf{a}) = 0$ и метод $Encl$ порождаемая алгоритмом последовательность ведущих оценок сходится, как можно показать, к оптимальным (точным) покоординатным оценкам объединённого множества решений $\Xi_{uni}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$. Этот алгоритм и другие, ему подобные, предназначенные для решения “внешней задачи” для интервальных систем алгебраических уравнений, и имеющие в своей основе адаптивное дробление множества параметров, мы будем называть *методами дробления параметров* или PPS-методами (от английской фразы *Partitioning Parameter Set*).

Таблица 4.7:

Простейший метод дробления параметров
для интервальных систем уравнений

Вход

Интервальная алгебраическая система $F(x, \mathbf{a}) = \mathbf{b}$.

Заданная точность $\epsilon > 0$.

Выход

Оценка M^* с точностью ϵ для $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})\}$.

Алгоритм

присваиваем $\mathbf{q} := \mathbf{a}$ и $\mathbf{r} := \mathbf{b}$;

инициализируем список $\mathcal{L} := \{(\mathbf{q}, \mathbf{r}, -\infty)\}$;

DO WHILE ($\text{wid}(Encl(F, \mathbf{q}, \mathbf{r})) \geq \epsilon$)

 в агрегированном интервальном векторе параметров (\mathbf{q}, \mathbf{r})

 выбираем элемент \mathbf{s} , который имеет наибольшую ширину;

 порождаем интервальные системы $F(\mathbf{q}', x) = \mathbf{r}'$ и $F(\mathbf{q}'', x) = \mathbf{r}''$:

 если $\mathbf{s} = \mathbf{q}_k$ для некоторого $k \in \{1, 2, \dots, l\}$, то полагаем

$$\mathbf{q}'_i := \mathbf{q}''_i := \mathbf{q}_i \text{ для } i \neq k, \mathbf{q}'_k := [\underline{\mathbf{q}}_k, \text{mid } \mathbf{q}_k], \mathbf{q}''_k := [\text{mid } \mathbf{q}_k, \bar{\mathbf{q}}_k], \\ \mathbf{r}' := \mathbf{r}'' := \mathbf{r};$$

 если $\mathbf{s} = \mathbf{r}_k$ для некоторого $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, то полагаем

$$\mathbf{q}' := \mathbf{q}'' := \mathbf{q}, \\ \mathbf{r}'_k := [\underline{\mathbf{r}}_k, \text{mid } \mathbf{r}_k], \mathbf{r}''_k := [\text{mid } \mathbf{r}_k, \bar{\mathbf{r}}_k], \mathbf{r}'_i := \mathbf{r}''_i := \mathbf{r}_i \text{ для } i \neq k;$$

 вычисляем внешние оценки $Encl(F, \mathbf{q}', \mathbf{r}')$ и $Encl(F, \mathbf{q}'', \mathbf{r}'')$;

 присваиваем $v' := (\underline{Encl(F, \mathbf{q}', \mathbf{r}')})_\nu$ и $v'' := (\underline{Encl(F, \mathbf{q}'', \mathbf{r}'')})_\nu$;

 удаляем запись $(\mathbf{q}, \mathbf{r}, v)$ из списка \mathcal{L} ;

 помещаем записи $(\mathbf{q}', \mathbf{r}', v')$ и $(\mathbf{q}'', \mathbf{r}'', v'')$ в список \mathcal{L} в порядке
 возрастания третьего поля;

 обозначаем первую запись списка \mathcal{L} через $(\mathbf{q}, \mathbf{r}, v)$;

END DO

$M^* := v$;

4.7 b Решение линейных систем

Пусть \mathbf{A} — интервальная $n \times n$ -матрица, содержащая лишь неособенные вещественные матрицы, \mathbf{b} — интервальный n -вектор. Цель этого пункта — построение на основе сформулированной в §4.7 а идеи эффективного метода нахождения оптимальных внешних покоординатных оценок объединённых множеств решений интервальных линейных систем, т.е. вычисление величин $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$ и $\max\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$, $\nu = 1, 2, \dots, n$, — оптимального решения “внешней задачи для ИСЛАУ”. Как и ранее в этой главе, мы сосредоточимся на вычислении $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$, поскольку

$$\max\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\} = -\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, -\mathbf{b})\}.$$

Основа алгоритма предыдущего пункта — адаптивное дробление области параметров интервальной системы. В случае решения ИСЛАУ (4)–(5) непосредственное применение этого принципа означало бы необходимость измельчения элементов матрицы \mathbf{A} и вектора правых частей \mathbf{b} . Оказывается, что, учтя специфику линейного случая, мы можем фактически до предела упростить этот процесс.

По-видимому, К. Никелем в [223] впервые был указан тот замечательный факт, что точные значения $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$ и $\max\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$, $\nu = 1, 2, \dots, n$, достигаются в крайних значениях матрицы $A \in \mathbf{A}$ и вектора $b \in \mathbf{b}$. На основе этого результата в той же работе был предложен метод внешнего оценивания объединённого множества решений ИСЛАУ, использующий полный перебор всех возможных комбинаций концов элементов из \mathbf{A} и \mathbf{b} и последующее решение получающихся при этом вещественных систем $Ax = b$. Алгоритм Никеля является *пассивным* (неадаптивным), а потому его практическая значимость невелика из-за катастрофического роста вычислительной сложности в зависимости от размерности ИСЛАУ. Так, уже для системы с интервальной 5×5 -матрицей в общем случае требуется решить $2^{5^2+5} = 2^{30} \approx 10^9$ штук вещественных линейных систем того же размера. Кроме того, алгоритм Никеля имеет и другой не менее серьёзный недостаток, который нам предстоит подробно обсудить в заключительном параграфе главы: он является лишь *финально гарантирующим*. Тем не менее, ниже будет показано, как, скрестив основу подхода Никеля с развиваемыми нами идеями, можно получить практичную вычислительную процедуру.

Как и ранее в этой Главе, пусть $Encl$ — какой-нибудь фиксированный метод внешнего оценивания множеств решений ИСЛАУ (мы будем называть его *базовым*). Пусть $Encl(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$ — получаемый с его помощью интервальный вектор внешней оценки для множества решений $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ системы $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$, т.е. $Encl(\mathbf{Q}, \mathbf{r}) \in \mathbb{IR}^n$ и

$$Encl(\mathbf{Q}, \mathbf{r}) \supseteq \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}).$$

Зафиксируем также номер $\nu \in \{1, 2, \dots, n\}$ оцениваемой компоненты множества решений и обозначим

$$\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}) := \underline{(Encl(\mathbf{Q}, \mathbf{r}))}_\nu$$

— нижний конец ν -ой компоненты внешней интервальной оценки множества решений,

получаемой методом *Encl*. Потребуем также от базового метода удовлетворения условию

$$\begin{aligned} &\text{оценка } \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}) \text{ монотонна по включению} \\ &\text{относительно матрицы } \mathbf{Q} \text{ и вектора } \mathbf{r}, \\ &\text{т.е. для всех } \mathbf{Q}', \mathbf{Q}'' \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ и } \mathbf{r}', \mathbf{r}'' \in \mathbb{R}^n \\ &\text{при } \mathbf{Q}' \subseteq \mathbf{Q}'' \text{ и } \mathbf{r}' \subseteq \mathbf{r}'' \text{ верно неравенство} \\ &\Upsilon(\mathbf{Q}', \mathbf{r}') \geq \Upsilon(\mathbf{Q}'', \mathbf{r}''). \end{aligned} \tag{C1}$$

Если базовый метод *Encl* является естественным интервальным расширением какого-нибудь вещественного метода (как, например, интервальный метод Гаусса), или, более общо, дерево Канторовича базового метода *Encl* своими узлами имеет только интервальные арифметические операции, то свойство (C1) очевидным образом выполняется в силу свойства монотонности интервальных арифметик \mathbb{R} и \mathbb{KR} по включению. Иначе, если в алгоритме базового метода встречаются неинтервальные операции, то свойство (C1) может и нарушаться. Например, частью многих методик внешнего оценивания множеств решений ИСЛАУ является процедура предобуславливания с помощью некоторой вещественной матрицы, чаще всего с помощью обратной к средней. Таковы методы Гея [156], метод Кравчика [219] и ряд других. На цифровых ЭВМ с конечной разрядной сеткой как взятие середины интервальной матрицы, так и её последующее обращение выполняются приближенно, поэтому использующие их “в чистом виде” реальные вычислительные алгоритмы могут не обладать свойством (C1). Проверке того, что данный конкретный базовый метод обладает свойством (C1), мы возлагаем на разработчиков программ.

В силу вышеупомянутого результата К. Никеля

$$\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\} = (\tilde{A}^{-1}\tilde{\mathbf{b}})_\nu$$

для некоторых точечных матрицы $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и вектора $\tilde{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^n$, составленных из концов элементов матрицы \mathbf{A} и вектора \mathbf{b} , причём по самому определению оценки Υ

$$\Upsilon(\tilde{A}, \tilde{\mathbf{b}}) \leq (\tilde{A}^{-1}\tilde{\mathbf{b}})_\nu.$$

Предположив, что в матрице \mathbf{A} элемент \mathbf{a}_{ij} имеет ненулевую ширину, обозначим

\mathbf{A}' и \mathbf{A}'' — матрицы, полученные из \mathbf{A} заменой элемента \mathbf{a}_{ij}
на $\underline{\mathbf{a}}_{ij}$ и $\bar{\mathbf{a}}_{ij}$, соответственно,

A' и A'' — матрицы, полученные из \tilde{A} заменой элемента \tilde{a}_{ij}
на $\underline{\tilde{a}}_{ij}$ и $\bar{\tilde{a}}_{ij}$, соответственно.

Далее, так как

$$\mathbf{A}' \subseteq \mathbf{A}, \quad \mathbf{A}'' \subseteq \mathbf{A},$$

и $\tilde{\mathbf{b}} \subseteq \mathbf{b}$, то условие (C1) имеет своим следствием неравенства

$$\Upsilon(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \leq \Upsilon(\mathbf{A}', \mathbf{b}) \leq \Upsilon(\mathbf{A}', \tilde{\mathbf{b}})$$

и

$$\Upsilon(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \leq \Upsilon(\mathbf{A}'', \mathbf{b}) \leq \Upsilon(\mathbf{A}'', \tilde{\mathbf{b}}).$$

Следовательно, беря почленный минимум от соответствующих частей неравенств, мы получим

$$\begin{aligned} \Upsilon(\mathbf{A}, \mathbf{b}) &\leq \min\{\Upsilon(\mathbf{A}', \mathbf{b}), \Upsilon(\mathbf{A}'', \mathbf{b})\} \\ &\leq \min\{\Upsilon(A', \mathbf{b}), \Upsilon(A'', \mathbf{b})\} \\ &\leq \min\{\Upsilon(A', \tilde{\mathbf{b}}), \Upsilon(A'', \tilde{\mathbf{b}})\}. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\min\{\Upsilon(A', \tilde{\mathbf{b}}), \Upsilon(A'', \tilde{\mathbf{b}})\} \leq (\tilde{A}^{-1}\tilde{\mathbf{b}})_\nu = \min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}.$$

Сопоставление полученных неравенств приводит к следующему практическому выводу: решив две интервальных “системы-потомка” $\mathbf{A}'x = \mathbf{b}$ и $\mathbf{A}''x = \mathbf{b}$, мы можем прийти, вообще говоря, к более точной оценке снизу для искомого $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$ в виде

$$\min\{\Upsilon(\mathbf{A}', \mathbf{b}), \Upsilon(\mathbf{A}'', \mathbf{b})\}.$$

Совершенно аналогичный эффект имеет и распадение в векторе правых частей \mathbf{b} какого-нибудь интервального элемента \mathbf{b}_i на концы $\underline{\mathbf{b}}_i$ и $\overline{\mathbf{b}}_i$. Поэтому впредь для единообразия договоримся обозначать ИСЛАУ-потомки, получающиеся из $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ расщеплением на концы одного интервального элемента либо в матрице \mathbf{A} , либо в векторе \mathbf{b} , через $\mathbf{A}'x = \mathbf{b}'$ и $\mathbf{A}''x = \mathbf{b}''$.

Процедуру улучшения оценки для $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$ посредством дробления исходной системы (5) можно повторить по отношению к системам-потомкам $\mathbf{A}'x = \mathbf{b}'$ и $\mathbf{A}''x = \mathbf{b}''$, затем снова разбить потомков от $\mathbf{A}'x = \mathbf{b}'$ и $\mathbf{A}''x = \mathbf{b}''$ и снова улучшить оценку и т.д. Мы оформим этот процесс последовательного улучшения оценки снизу для $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$ совершенно аналогично тому, как это делается в широко известном в комбинаторной оптимизации “методе ветвей и границ” [80]:

во-первых, организуем все возникающие в процессе дробления исходной ИСЛАУ системы $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$ вместе с их оценками $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$ в некоторый список \mathcal{L} , и,

во-вторых, дроблению каждый раз будем подвергать лишь ту из ИСЛАУ-потомков $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$, которая обеспечивает рекордную (наименьшую) на данный момент оценку $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$.

Итак, в процессе выполнения алгоритма мы будем поддерживать список \mathcal{L} , состоящий из записей-троек

$$(\mathbf{Q}, \mathbf{r}, \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})), \tag{4.40}$$

где \mathbf{Q} — интервальная $n \times n$ -матрица, $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{A}$, \mathbf{r} — интервальный n -вектор, $\mathbf{r} \subseteq \mathbf{b}$. Кроме того, образующие \mathcal{L} записи упорядочены по возрастанию значений оценки $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$, а первую запись списка, так же как и соответствующие ИСЛАУ $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$ и оценку $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$ (наименьшую в списке), мы будем называть ведущими (на данном шаге). Полный псевдокод получающегося нового алгоритма, который мы назовём аббревиатурой GLinPPS, представлен в Таблице 4.8.

Если T — общее количество интервальных (с ненулевой шириной) элементов в матрице \mathbf{A} и векторе \mathbf{b} исходной ИСЛАУ (в общем случае $T \leq (n + 1)n$), то алгоритм GLinPPS

Таблица 4.8:

Алгоритм GLinPPS

простейший метод дробления параметров для интервальных линейных систем

Вход

Интервальная линейная система $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$.

Выход

Значение $M^* = \min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$.

Алгоритм

присваиваем $\mathbf{Q} := \mathbf{A}$ и $\mathbf{r} := \mathbf{b}$;

вычисляем оценку $v := \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$;

инициализируем список $\mathcal{L} := \{(\mathbf{Q}, \mathbf{r}, v)\}$;

DO WHILE (система $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$ интервальная)

в матрице $\mathbf{Q} = (\mathbf{q}_{ij})$ и векторе $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_i)$ выбираем интервальный элемент \mathbf{s} , имеющий наибольшую ширину;

порождаем интервальные системы-потомки $\mathbf{Q}'x = \mathbf{r}'$ и $\mathbf{Q}''x = \mathbf{r}''$:

если $\mathbf{s} = \mathbf{q}_{kl}$ для некоторых $k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$, то полагаем

$$\begin{aligned} \mathbf{q}'_{ij} &:= \mathbf{q}''_{ij} := \mathbf{q}_{ij} \text{ для } (i, j) \neq (k, l), \\ \mathbf{q}'_{kl} &:= [\underline{\mathbf{q}}_{kl}, \underline{\mathbf{q}}_{kl}], \mathbf{q}''_{kl} := [\bar{\mathbf{q}}_{kl}, \bar{\mathbf{q}}_{kl}], \mathbf{r}' := \mathbf{r}'' := \mathbf{r}; \end{aligned}$$

если $\mathbf{s} = \mathbf{r}_k$ для некоторого $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, то полагаем

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}' &:= \mathbf{Q}'' := \mathbf{Q}, \mathbf{r}'_k := [\underline{\mathbf{r}}_k, \underline{\mathbf{r}}_k], \mathbf{r}''_k := [\bar{\mathbf{r}}_k, \bar{\mathbf{r}}_k], \\ \mathbf{r}'_i &:= \mathbf{r}''_i := \mathbf{r}_i \text{ для } i \neq k; \end{aligned}$$

вычисляем оценки $v' := \Upsilon(\mathbf{Q}', \mathbf{r}')$ и $v'' := \Upsilon(\mathbf{Q}'', \mathbf{r}'')$;

удаляем из \mathcal{L} бывшую ведущей запись $(\mathbf{Q}, \mathbf{r}, v)$;

вносим записи $(\mathbf{Q}', \mathbf{r}', v')$ и $(\mathbf{Q}'', \mathbf{r}'', v')$ в список \mathcal{L} ,

сохраняя его упорядоченность по возрастанию третьего поля;

обозначаем первую запись списка через $(\mathbf{Q}, \mathbf{r}, v)$;

END DO

$M^* := v$;

остановится не более чем через 2^T шагов, и его результатом явится оценка снизу для $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$. То, насколько близкими окажутся результат работы алгоритма и $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}\}$, зависит, прежде всего, от способа получения оценки $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$, т.е. от выбранного нами базового метода для решения промежуточных ИСЛАУ. В частности, для оптимальности вычисленного значения (т.е. для того, чтобы оно было в точности равно $\Upsilon = \min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}\}$) необходимым и достаточным является выполнение следующего условия:

оценка $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$ является точной на вещественных линейных алгебраических системах, т.е. $\Upsilon(Q, r) = (Q^{-1}r)_\nu$ для всех $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $r \in \mathbb{R}^n$.	(C2)
---	------

Этому условию удовлетворяют далеко не все из известных методов решения “внешней задачи для ИСЛАУ”. Таков, например, широко известный метод Румпа [268, 269, 270, 272].

Впрочем, если задача имеет сколько-нибудь значительные размеры и общее количество интервальных элементов ИСЛАУ превосходит пару-тройку десятков, то на современных ЭВМ среднего класса алгоритм **GLinPPS**, как правило, никогда не будет прорабатывать до конца, и потому целесообразней рассматривать его как итерационный.

Весьма популярными в практической оптимизации являются релаксационные методы, обеспечивающие улучшение целевой функции на каждом шаге. Мы, со своей стороны, дословно перенесём это определение и на решатели ИСЛАУ. Особенно привлекательно использование подобных методов в условиях ограниченности вычислительных ресурсов или когда а priori известно, что количество шагов алгоритма, которое мы сможем выполнить, невелико, но, тем не менее, требуется получить от использования этого алгоритма некий ощутимый эффект. Нетрудно видеть, что для релаксационности метода **GLinPPS** уже достаточным является выполнение (C1).

4.8 Модификации методов дробления параметров

Приступим теперь к построению более совершенных методов дробления параметров для решения задачи внешнего оценивания множеств решений ИСЛАУ. При этом алгоритм **GLinPPS** будет играть роль основы, которую мы будем развивать и дополнять посредством ряда уже стандартных усовершенствований в соответствии со списком §4.3. Необходимость решительной модификации алгоритма **GLinPPS** диктуется, в частности, его большой информационной сложностью: фактически, каждый шаг алгоритма сопровождается ростом рабочего списка, так что начиная с некоторого момента оперативная память ЭВМ может стать дефицитным ресурсом, а обмен с внешними носителями может стать фактором, который замедляет на порядки производительность процессора.

4.8 а Тест на монотонность

Пусть дана интервальная система линейных алгебраических уравнений $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$, и нам известны

$$\frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial q_{ij}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial r_i}$$

— интервальные расширения соответствующих производных

$$\frac{\partial x_\nu(Q, r)}{\partial q_{ij}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial x_\nu(Q, r)}{\partial r_i}$$

от ν -ой компоненты вектора решения системы уравнений $Qx = r$ по ij -ому элементу матрицы Q и i -ому элементу вектора r . Если интервальные $n \times n$ -матрица \tilde{Q} и n -вектор \tilde{r} образованы из элементов

$$\tilde{q}_{ij} = \begin{cases} [\underline{q}_{ij}, \overline{q}_{ij}], & \text{при} \quad \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial q_{ij}} \geq 0, \\ [\overline{q}_{ij}, \underline{q}_{ij}], & \text{при} \quad \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial q_{ij}} \leq 0, \\ \mathbf{q}_{ij}, & \text{при} \quad \text{int} \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial q_{ij}} \ni 0, \end{cases} \quad (4.41)$$

$$\tilde{r}_i = \begin{cases} [\underline{r}_i, \overline{r}_i], & \text{при} \quad \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial r_i} \geq 0, \\ [\overline{r}_i, \underline{r}_i], & \text{при} \quad \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial r_i} \leq 0, \\ \mathbf{r}_i, & \text{при} \quad \text{int} \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial r_i} \ni 0, \end{cases} \quad (4.42)$$

то, очевидно,

$$\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\tilde{Q}, \tilde{r})\} = \min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\mathbf{Q}, \mathbf{r})\}.$$

А поскольку количество существенно интервальных (с ненулевой шириной) элементов в \tilde{Q} и \tilde{r} может быть, вообще говоря, существенно меньшим, чем в \mathbf{Q} и \mathbf{r} , то, переходя от исходной ИСЛАУ $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$ к решению системы $\tilde{Q}x = \tilde{r}$, мы, тем самым, добъёмся упрощения задачи вычисления $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\mathbf{Q}, \mathbf{r})\}$.

Как найти фигурирующие в (4.41)–(4.42) интервальные расширения производных? Традиционно это делается следующим образом. Из курса математического анализа известно, что если $Z = (z_{ij})$ — обратная матрица для $Q = (q_{ij})$, то производные решения вещественной линейной системы $Qx = r$ по её коэффициентам даются формулами

$$\frac{\partial x_\nu}{\partial q_{ij}} = -z_{\nu i} x_j, \quad \frac{\partial x_\nu}{\partial r_i} = z_{\nu i}$$

(см., например, [37]). Следовательно, в случае, когда $\mathbf{Z} = (\mathbf{z}_{ij})$ — “обратная интервальная матрица” для \mathbf{Q} , т.е.

$$\mathbf{Z} \supseteq \{Q^{-1} \mid Q \in \mathbf{Q}\},$$

а \mathbf{x}_j — j -ая компонента некоторого интервального вектора $\mathbf{x} \supseteq \Xi_{uni}(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$, то мы можем принять следующие интервальные оценки производных

$$\frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial q_{ij}} = -\mathbf{z}_{\nu i} \mathbf{x}_j, \quad \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial r_i} = \mathbf{z}_{\nu i}. \quad (4.43)$$

Обычно для вычисления \mathbf{Z} и \mathbf{x} используют какие-нибудь дешёвые приближенные алгоритмы (вроде метода Хансена [209] для локализации “обратной интервальной матрицы”). Тем не менее, в целом процедура интервального оценивания производных из (4.41)–(4.42) всё равно остается весьма дорогостоящей. Поэтому с точки зрения эффективности было бы неразумным выполнять это оценивание на каждом шаге алгоритма. Мы будем “замораживать” обратную интервальную матрицу на некоторое фиксированное число шагов (подобно тому, как это делается в отношении якобиана в ряде квазиньютоновских методов для решения алгебраических систем [28]). При этом, правда, несколько усложнится доступ к обратным интервальным матрицам и их обработка, поскольку PPS-алгоритм является, по существу, ветвящимся процессом.

Целесообразно, хранить обратные интервальные матрицы в виде *кучи* \mathfrak{H} , обращаясь к ним с помощью *указателей*, или *ссылок* (см., например, [6]). Соответственно, в образующие список \mathcal{L} записи-тройки $(\mathbf{Q}, \mathbf{r}, \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}))$ добавится ещё одно поле p , — указатель на интервальную матрицу \mathbf{Z} из \mathfrak{H} , объемлющую $\{Q^{-1} \mid Q \in \mathbf{Q}\}$. В такой ситуации мы станем говорить, что запись $(\mathbf{Q}, \mathbf{r}, \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}), p)$ *обслуживается* матрицей \mathbf{Z} . С каждой обратной интервальной матрицей \mathbf{Z} будут связаны ещё два натуральных параметра τ и ς , так что, фактически, куча \mathfrak{H} оказывается состоящей из записей $(\mathbf{Z}, \tau, \varsigma)$. Параметр τ — счетчик шагов алгоритма, на которых происходило обращение к \mathbf{Z} , а ς учитывает количество записей списка \mathcal{L} , обслуживаемых посредством \mathbf{Z} . Если τ велико, — превосходит некоторый эмпирически устанавливаемый порог, — то это свидетельствует о предыдущем длительном использовании матрицы \mathbf{Z} в алгоритме, т.е. о необходимости её перевычисления и замены на новую, возможно более узкую. Напротив, если $\varsigma = 0$, то соответствующая обратная матрица не обслуживает ни одной записи списка \mathcal{L} , и потому тройка $(\mathbf{Z}, \tau, \varsigma)$ может быть удалена из \mathfrak{H} без какого-либо влияния на работу алгоритма.

Закон изменения для τ очевиден. Параметр ς полагается равным 2 в момент занесения записи $(\mathbf{Z}, \tau, \varsigma)$ в \mathfrak{H} , а далее, как нетрудно понять, порядок его перевычисления должен быть таким:

- если запись, обслуживаемая \mathbf{Z} , дробится на потомки без перевычисления обратной матрицы, то увеличиваем ς на единицу;
- если запись, обслуживаемая \mathbf{Z} , дробится на потомки с перевычислением обратной матрицы, то уменьшаем ς на единицу;
- если обслуживаемая \mathbf{Z} запись удаляется из рабочего списка \mathcal{L} , то уменьшаем ς на единицу.

4.8 b Стратегия дробления

Способ дробления ведущих брусков параметров должен, прежде всего, обеспечивать сходимость алгоритма, т.е. стремление к нулю диаметров ведущих брусков. Это особенно важно, когда результатом разбиения интервала являются два подинтервала ненулевой длины (а не два его конца, как в рассматриваемых нами алгоритмах). Известно, например, что при циклической бисекции компонент сходимости в общем случае может и не быть [125].

Традиционно в методах подобного типа (см. [32, 78, 79, 125, 147, 166, 172, 181, 241, 243, 288, 278]) ведущие бруски параметров на каждом шаге дробятся по самой длинной грани. Этот способ дробления гарантирует, как известно (см. §4.3 и работы [79, 241, 288]),

сходимость использующих его методов, и мы тоже применили его в алгоритме GLinPPS, хотя для него подобные проблемы и не возникают (из-за его конечности).

После того, как собственно сходимость достигнута, на первый план выходит требование наиболее значительного улучшения целевой функции на начальном этапе работы алгоритма, т.е. обеспечение наиболее быстрой сходимости алгоритма на его первых шагах. Строгая и точная оптимизация алгоритма в указанном смысле трудна и вряд ли целесообразна в полном объёме. Мы будем решать этот вопрос, руководствуясь разумными эвристическими соображениями, на основе знания оценок производных целевой функции.

Целесообразно выполнять дробление ведущей ИСЛАУ уже после исследования её на монотонность и выполнения овеществления (“сжатия”) соответствующих интервальных элементов. Следовательно, теперь в дробимой ИСЛАУ $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$ ненулевую ширину будут иметь лишь те элементы, производные по которым оцениваются интервалами, содержащими внутри себя нуль. Если $\check{\mathbf{Q}} = (\check{\mathbf{q}}_{ij})$ и $\hat{\mathbf{Q}} = (\hat{\mathbf{q}}_{ij})$ — интервальные матрицы, отличающиеся друг от друга лишь (i, j) -м элементом, такие что

$$\check{\mathbf{q}}_{ij} = [\bar{\mathbf{q}}_{ij}, \bar{\mathbf{q}}_{ij}], \quad \hat{\mathbf{q}}_{ij} = [\underline{\mathbf{q}}_{ij}, \underline{\mathbf{q}}_{ij}]$$

то в силу известной теоремы Лагранжа о среднем

$$\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\check{\mathbf{Q}}, \mathbf{r})\} - \min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\hat{\mathbf{Q}}, \mathbf{r})\} = \frac{\partial x_\nu(\check{\mathbf{Q}}, \check{r})}{\partial q_{ij}} \cdot \text{wid } \mathbf{q}_{ij}$$

для некоторых матрицы $\check{\mathbf{Q}} \in \mathbf{Q}$ и вектора $\check{r} \in \mathbf{r}$. Аналогично, если $\check{\mathbf{r}} = (\check{r}_i)$ и $\hat{\mathbf{r}} = (\hat{r}_i)$ отличаются только i -ым элементом и

$$\check{r}_i = [\bar{\mathbf{r}}_i, \bar{\mathbf{r}}_i], \quad \hat{r}_i = [\underline{\mathbf{r}}_i, \underline{\mathbf{r}}_i],$$

то

$$\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\mathbf{Q}, \check{\mathbf{r}})\} - \min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\mathbf{Q}, \hat{\mathbf{r}})\} = \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \check{r})}{\partial r_i} \cdot \text{wid } \mathbf{r}_i$$

для некоторых матрицы $\check{\mathbf{Q}} \in \mathbf{Q}$ и вектора $\check{r} \in \mathbf{r}$. Поэтому, в известном смысле мерой того, как влияет рассечение какого-либо элемента в \mathbf{Q} или \mathbf{r} на точное значение $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\mathbf{Q}, \mathbf{r})\}$ может служить величина произведения модуля интервальной оценки производной на ширину соответствующего интервала.

Далее, получаемые по большинству существующих методов решения ИСЛАУ оценки множеств решений являются тем более точными, чем меньше размеры этого объединённого множества решений. Д. Гей, например, в [156] доказал для своих методов квадратичную сходимость.

С подобными базовыми методами требование наиболее быстрого улучшения целевой функции за один шаг метода дробления параметров становится, по существу, эквивалентным условию наиболее быстрого уменьшения размеров множества решений при дроблении ведущей ИСЛАУ. Учитывая сделанный выше вывод, мы рекомендуем поэтому рассекать ведущие ИСЛАУ по элементам, на которых достигается максимум величин

$$\left| \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial q_{ij}} \right| \cdot \text{wid } \mathbf{q}_{ij}, \quad \left| \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial r_i} \right| \cdot \text{wid } \mathbf{r}_i, \quad (4.44)$$

$i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, т.е. по элементам, на которых достигается максимум произведения оценки производной решения на ширину интервала, а не просто по самым широким элементам ИСЛАУ.^{4.6}

4.8с Модификация Рона

Результат Следствия 2 из Теоремы 3.3, который мы использовали в §6 для вывода метода дробления параметров, для объединённых множеств решений ИСЛАУ был значительно усилен в 80-е годы И. Роном, уточнившим множество вершин матрицы \mathbf{A} и вектора правой части \mathbf{b} , на которых достигаются минимальное и максимальное значения компонент точек из $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ [257].

Чтобы дать математически строгую формулировку результата И. Рона, нам потребуются некоторые дополнительные обозначения. Пусть

$$\mathcal{E} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| = 1 \text{ для всех } i = 1, 2, \dots, n\}$$

— множество n -векторов с компонентами ± 1 . Для данной интервальной матрицы \mathbf{A} и фиксированных $\sigma, \tau \in \mathcal{E}$ обозначим через $A^{\sigma\tau} = (a_{ij}^{\sigma\tau})$ матрицу размера $n \times n$, образованную элементами

$$a_{ij}^{\sigma\tau} := \begin{cases} \bar{\mathbf{a}}_{ij}, & \text{если } \sigma_i \tau_j = -1, \\ \underline{\mathbf{a}}_{ij}, & \text{если } \sigma_i \tau_j = 1. \end{cases}$$

Кроме того, через $b^\sigma = (b_i^\sigma)$ мы будем обозначать n -вектор, составленный из элементов

$$b_i^\sigma := \begin{cases} \bar{\mathbf{b}}_i, & \text{если } \sigma_i = 1, \\ \underline{\mathbf{b}}_i, & \text{если } \sigma_i = -1. \end{cases}$$

Матрица $A^{\sigma\tau}$ и вектор b^σ образованы, таким образом, наборами концов элементов \mathbf{A} и \mathbf{b} соответственно, и всего имеется $2^n \cdot 2^n = 4^n$ различных матрично-векторных пар вида $(A^{\sigma\tau}, b^\sigma)$ для σ и τ , независимо пробегающих множество \mathcal{E} .

Оказывается [257], что для невырожденной матрицы \mathbf{A} как минимальное так и максимальное значения компонент точек множества решений $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ могут достигаться лишь на множестве 4^n матриц $A^{\sigma\tau}$ и ассоциированных с ними векторов b^σ , т.е.

$$\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\} = \min_{\sigma, \tau \in \mathcal{E}} \left((A^{\sigma\tau})^{-1} b^\sigma \right)_\nu, \quad (4.45)$$

$$\max\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\} = \max_{\sigma, \tau \in \mathcal{E}} \left((A^{\sigma\tau})^{-1} b^\sigma \right)_\nu \quad (4.46)$$

для каждого индекса $\nu = 1, 2, \dots, n$. Как можно использовать этот факт в наших методах дробления параметров?

Важно осознавать, что приведённый выше результат не накладывает никаких ограничений на концы отдельно взятого интервального элемента матрицы \mathbf{A} либо правой части

^{4.6}За рубежом имеется тенденция связывать такой способ выбора рассекаемой компоненты в интервальных методах глобальной оптимизации, типа описанных в 4.3, с именем Д. Ратца, рассматривавшего его в своих работах [245, 246]. Мы не следуем этой моде потому, что независимо от Д. Ратца и даже раньше его стратегия дробления, требующая максимизации величин (4.44), была предложена автором в статье [280].

\mathbf{b} , если в рассмотрение не привлечена информация о концах других элементов. Ограничение на ту или иную комбинацию концов интервалов, следующее из (4.45)–(4.46), является существенно коллективным, и, чтобы принять его во внимание, мы должны отслеживать концы задействованных интервальных элементов по всей матрице \mathbf{A} и всему вектору \mathbf{b} . Для практической реализации этих идей мы связываем с каждой интервальной линейной системой $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$, $\mathbf{Q} = (\mathbf{q}_{ij})$, $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_i)$, порождённой в процессе дробления исходной ИСЛАУ (4)–(5),

вспомогательную $n \times n$ -матрицу $W = (w_{ij})$, элементы которой равны ± 1 или 0 , такую что

$$w_{ij} := \begin{cases} -1, & \text{если } \mathbf{q}_{ij} = \bar{\mathbf{a}}_{ij}, \\ 0, & \text{если } \mathbf{q}_{ij} = \mathbf{a}_{ij}, \\ 1, & \text{если } \mathbf{q}_{ij} = \underline{\mathbf{a}}_{ij}; \end{cases}$$

- вспомогательные n -векторы $s = (s_i)$ и $t = (t_j)$ с компонентами ± 1 или 0 , такие что

$$w_{ij} = s_i t_j \quad (4.47)$$

для всех $i, j = 1, 2, \dots, n$, и

$$s_i := \begin{cases} -1, & \text{если } \mathbf{r}_i = \underline{\mathbf{b}}_i, \\ 0, & \text{если } \mathbf{r}_i = \mathbf{b}_i, \\ 1, & \text{если } \mathbf{r}_i = \bar{\mathbf{b}}_i. \end{cases}$$

Кроме того, рабочий список \mathcal{L} будет состоять теперь из расширенных записей

$$\left(\mathbf{Q}, \mathbf{r}, \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}), W, s, t \right), \quad (4.48)$$

имеющих *шесть* полей за счёт добавления трех полей для хранения W , s и t , которые получаются с предыдущих шагов алгоритма.

Векторам s и t предстоит быть “приближениями” соответственно к σ и τ , входящим в равенства (4.45)–(4.46), в то время как $W = s t^\top$ — это “приближение” к матрице $(\sigma \tau^\top)$. В начале работы алгоритма мы инициализируем все элементы W , s и t нулями, а затем перевычисляем их с целью заменить нулевые элементы (соответствующие неопределённости) на ненулевые (соответствующие тому или иному концу интервала). Матрица W и векторы s, t , взаимно влияя друг на друга и перевычисляясь в процессе работы алгоритма, предназначены, следовательно, для наблюдения над процессом дробления исходной интервальной линейной системы и его корректировки таким образом, чтобы породить лишь варианты, допускаемые равенствами (4.45)–(4.46). Это реализуется следующим образом.

На каждом шаге алгоритма при разбиении интервального элемента \mathbf{h} ведущей ИСЛАУ $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$, мы смотрим на соответствующее значение

- матрицы $W = (w_{ij})$, если элемент \mathbf{h} есть \mathbf{q}_{kl} из матрицы \mathbf{Q} ,
- вектора $s = (s_i)$, если элемент \mathbf{h} есть \mathbf{r}_k из вектора правой части \mathbf{r} .

В случае $w_{kl} = 0$ ($s_k = 0$ соответственно), мы порождаем, согласно обычной процедуре бисекции из простейшего метода дробления параметров Таблицы 4.8, две интервальных системы-потомка $\mathbf{Q}'x = \mathbf{r}'$ и $\mathbf{Q}''x = \mathbf{r}''$, которые отвечают обоим концам рассекаемого интервала \mathbf{h} . Но если $w_{kl} \neq 0$ ($s_k \neq 0$ соответственно), то после бисекции ведущей ИСЛАУ мы можем оставить в рабочем списке только *одного* потомка от $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$. Какого именно, зависит от знака элемента w_{kl} (s_k соответственно). Более точно, мы выполняем процедуру, представленную в Таблице 4.9.

Почему в принципе возможно её применение? Другими словами, не может ли отбрасывание второй интервальной системы-потомка в вышеописанной процедуре нарушить то свойство ведущих оценок $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$, что они приближают искомый $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$ снизу?

Для ответа на этот вопрос заметим, что в новой процедуре дробления из Таблицы 4.9 мы отбрасываем лишь те интервальные системы, которые

- не принадлежат множеству точечных систем $\{A^{\sigma\tau}x = b^\sigma \mid \sigma, \tau \in \mathcal{E}\}$,
- не содержат такие точечные системы.

Следовательно, в силу свойства (C1) базисного оценивающего метода и, принимая во внимание равенство (4.45), мы получаем

$$\begin{aligned} \min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\} &= \min_{\sigma, \tau \in \mathcal{E}} \left((A^{\sigma\tau})^{-1}b^\sigma \right)_\nu \geq \min_{\sigma, \tau \in \mathcal{E}} \Upsilon(A^{\sigma\tau}, b^\sigma) \\ &\geq \min\{\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}) \mid \mathbf{Q} \ni A^{\sigma\tau} \text{ и } \mathbf{r} \ni b^\sigma \text{ для некоторых } \sigma, \tau \in \mathcal{E}\} \\ &\geq \min\{\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}) \mid \text{система } \mathbf{Q}x = \mathbf{r} \text{ присутствует в списке } \mathcal{L}\} \\ &= \text{ведущая оценка } \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}). \end{aligned}$$

Таким образом, с новой процедурой дробления Таблицы 4.9 ведущая оценка действительно приближает $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$ снизу.

Приступая к описанию формальной вычислительной схемы “модификации Рона”, мы начнём с установления правил перевычисления W , s и t в процессе работы алгоритма. Существует взаимно-однозначное соответствие между вектором s и правой частью интервальной системы $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$, в то время как дробление интервальной матрицы \mathbf{Q} рассматриваемой ИСЛАУ влияет на векторы s и t лишь неявно, посредством матрицы W и условий (4.47). Последнее, тем не менее, позволяет организовать перевычисление W , s и t на каждом таком шаге алгоритма, который завершается дроблением интервального элемента ведущей системы *на два конца*. В противном случае, если ведущая интервальная система порождает только одного потомка $\mathbf{Q}'x = \mathbf{r}'$ в соответствии с Таблицей 4.9, векторы s , t и матрица W остаются неизменными, так что

$$s' := s, \quad t' := t, \quad W' := W.$$

Итак, пусть ведущая интервальная система $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$ рассечена на два ИСЛАУ-потомка $\mathbf{Q}'x = \mathbf{r}'$ и $\mathbf{Q}''x = \mathbf{r}''$, определённые в Таблице 4.9. Каким должен быть закон, в соответствии с которым формируются матрицы W' , W'' и векторы s' , s'' , t' , t'' соответствующие системам-потомкам? Сначала мы можем положить

$$W'' := W' := W, \quad s'' := s' := s, \quad t'' := t' := t,$$

Таблица 4.9: Порождение систем-потомков

```

IF ( пересекается  $\mathbf{q}_{kl}$  ) THEN
  IF (  $w_{kl} = 0$  ) THEN
    порождаем системы  $\mathbf{Q}'x = \mathbf{r}'$  и  $\mathbf{Q}''x = \mathbf{r}''$  так, что
       $\mathbf{q}'_{ij} := \mathbf{q}''_{ij} := \mathbf{q}_{ij}$  для  $(i, j) \neq (k, l)$ ,
       $\mathbf{q}'_{kl} := \underline{\mathbf{q}}_{kl}$ ,  $\mathbf{q}''_{kl} := \bar{\mathbf{q}}_{kl}$ ,  $\mathbf{r}' := \mathbf{r}'' := \mathbf{r}$ ;
  ELSE
    порождаем систему  $\mathbf{Q}'x = \mathbf{r}'$  так, что
       $\mathbf{r}' := \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{q}'_{ij} := \mathbf{q}_{ij}$  для  $(i, j) \neq (k, l)$ ,
       $\mathbf{q}'_{kl} := \begin{cases} \underline{\mathbf{q}}_{kl}, & \text{для } w_{kl} = 1, \\ \bar{\mathbf{q}}_{kl}, & \text{для } w_{kl} = -1; \end{cases}$ 
  END IF
END IF

IF ( пересекается  $\mathbf{r}_k$  ) THEN
  IF (  $s_k = 0$  ) THEN
    порождаем системы  $\mathbf{Q}'x = \mathbf{r}'$  и  $\mathbf{Q}''x = \mathbf{r}''$  так, что
       $\mathbf{Q}' := \mathbf{Q}'' := \mathbf{Q}$ ,
       $\mathbf{r}'_i := \mathbf{r}_i$  для  $i \neq k$ ,  $\mathbf{r}'_k := \underline{\mathbf{r}}_k$ ,  $\mathbf{r}''_k := \bar{\mathbf{r}}_k$ ,
  ELSE
    порождаем систему  $\mathbf{Q}'x = \mathbf{r}'$  так, что
       $\mathbf{Q}' := \mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{r}'_i := \mathbf{r}_i$  для  $i \neq k$ ,
       $\mathbf{r}'_k := \begin{cases} \underline{\mathbf{r}}_k, & \text{для } s_k = -1, \\ \bar{\mathbf{r}}_k, & \text{для } s_k = 1; \end{cases}$ 
  END IF
END IF

```

Таблица 4.10: Перевычисление W' , W'' , s' , s'' , t' , t'' .

```

W'Change := false;   s'Change := false;   t'Change := false;
W''Change := false;  s''Change := false;  t''Change := false;
IF ( ( пересекается  $\mathbf{q}_{kl}$  из  $\mathbf{Q}$  ) AND (  $\mathbf{q}_{kl}$  пересекается на два конца ) ) THEN
     $m'_{kl} := 1$ ;  $m''_{kl} := -1$ ;  $W'Change := true$ ;  $W''Change := true$ ;
END IF
IF ( ( пересекается  $\mathbf{r}_k$  из  $\mathbf{r}$  ) AND (  $\mathbf{r}_k$  пересекается на два конца ) ) THEN
     $s'_k := -1$ ;  $s''_k := 1$ ;  $s'Change := true$ ;  $s''Change := true$ ;
END IF
DO WHILE ( W'Change OR s'Change OR t'Change )
    IF ( s'Change OR t'Change ) THEN
        пытаемся перевычислить матрицу  $W'$ ;
        IF (  $W'$  изменилась ) THEN  $W'C := true$ 
        ELSE  $W'C := false$  END IF
    END IF
    IF ( W'Change OR t'Change ) THEN
        пытаемся перевычислить вектор  $s'$ ;
        IF (  $s'$  изменился ) THEN  $s'C := true$ 
        ELSE  $s'C := false$  END IF
    END IF
    IF ( W'Change OR s'Change ) THEN
        пытаемся перевычислить вектор  $t'$ ;
        IF (  $t'$  изменился ) THEN  $t'C := true$ 
        ELSE  $t'C := false$  END IF
    END IF
    W'Change := W'C; s'Change := s'C; t'Change := t'C;
END DO
DO WHILE ( W''Change OR s''Change OR t''Change )
    IF ( s''Change OR t''Change ) THEN
        пытаемся перевычислить матрицу  $W''$ ;
        IF (  $W''$  изменилась ) THEN  $W''C := true$ 
        ELSE  $W''C := false$  END IF
    END IF
    IF ( W''Change OR t''Change ) THEN
        пытаемся перевычислить вектор  $s''$ ;
        IF (  $s''$  изменился ) THEN  $s''C := true$ 
        ELSE  $s''C := false$  END IF
    END IF
    IF ( W''Change OR s''Change ) THEN
        пытаемся перевычислить вектор  $t''$ ;
        IF (  $t''$  изменился ) THEN  $t''C := true$ 
        ELSE  $t''C := false$  END IF
    END IF
    W''Change := W''C; s''Change := s''C; t''Change := t''C;
END DO

```

а затем выполнить следующую двухэтапную процедуру перевычисления:

Во-первых, модифицируем W' , W'' и s' , s'' на основе информации о только что выполненной бисекции ведущей ИСЛАУ. Именно,

- (I) если рассечённым элементом был \mathbf{q}_{kl} из матрицы \mathbf{Q} , то в матрицах $W' = (w'_{ij})$ и $W'' = (w''_{ij})$ мы полагаем

$$w'_{kl} := 1 \quad \text{и} \quad w''_{kl} := -1;$$

- (II) если рассечённым элементом был \mathbf{r}_k из вектора правой части \mathbf{r} , то в векторах $s' = (s'_i)$ и $s'' = (s''_i)$ мы полагаем

$$s'_k := -1 \quad \text{и} \quad s''_k := 1.$$

Во-вторых, перевычисляем каждое из двух семейств взаимосвязанных объектов, — W' , s' , t' и W'' , s'' , t'' соответственно, — используя соотношения (4.47). Именно,

- (I) если s' или t' изменился, пытаемся перевычислить матрицу W' ;
 (II) если W' или t' изменился, пытаемся перевычислить вектор s' ;
 (III) если W' или s' изменился, пытаемся перевычислить вектор t' .

Инструкции (I)–(III) повторяются последовательно одна за другой в цикле до тех пор, пока изменения в W' , s' и t' не прекратятся. Та же самая процедура применяется затем к W'' , s'' , t'' .

Полная алгоритмическая схема приведённой выше процедуры оказывается довольно сложной, так что имеет смысл снабдить читателя более строгим и детальным её описанием. Таблица 4.10 представляет соответствующий псевдокод и ниже мы даём объяснения к нему. Булевские переменные

$$W'Change, \quad s'Change, \quad t'Change, \quad W'C, \quad s'C, \quad t'C$$

и

$$W''Change, \quad s''Change, \quad t''Change, \quad W''C, \quad s''C, \quad t''C$$

— это “флаги”, введённые с целью отображения текущего статуса изменений в W' , s' , t' и W'' , s'' , t'' соответственно. Значения **true** означают, что объект, с которым связан флаг, был изменен на текущей итерации процесса перевычисления, тогда как значение **false** означает “без изменений”.

Для того, чтобы завершить формальное описание модификации Рона, нам нужно лишь определить, что имеется в виду под “пытаемся перевычислить матрицу W' ”, “пытаемся перевычислить вектор s' ” и тому подобные инструкции из Таблицы 4.10.

Обозначим прописными греческими буквами K' , Λ' и Ω' подмножества индексов элементов вектора s' , вектора t' и матрицы W' соответственно, которые изменили свои значения (с 0 на ± 1) на текущем шаге процедуры перевычисления Таблицы 4.10. K' и Λ' — это, следовательно, подмножества множества первых n натуральных чисел

$$\{1, 2, \dots, n\},$$

тогда как Ω есть подмножество множества всех пар, составленных из первых n натуральных чисел, т.е. подмножество множества

$$\{(1, 1), (1, 2), \dots, (1, n), (2, 1), \dots, (n, n)\}.$$

Каждое из множеств K' , Λ' , Ω' может быть пустым, но может содержать и более чем один элемент. Тогда наша “попытка перевычислить вектор s' ” может быть организована следующим образом:

Таблица 4.11: Перевычисление s'

```

IF (  $W'Change$  ) THEN
  DO FOR  $(k, l) \in \Omega'$ 
    IF (  $t'_l \neq 0$  )  $s'_k := w'_{kl}/t'_l$ 
  END DO
END IF
IF (  $t'Change$  ) THEN
  DO FOR  $l \in \Lambda'$ 
    DO FOR  $k = 1$  TO  $n$ 
      IF (  $s_k = 0$  AND  $w'_{kl} \neq 0$  )  $s'_k := w'_{kl}/t'_l$ 
    END DO
  END DO
END IF

```

“Попытка перевычислить вектор t' ” может быть выполнена аналогично приведённому выше с тем единственным отличием, что цикл “DO FOR $l \in \Lambda'$ ” во втором IF-операторе должен быть заменен на “DO FOR $k \in K'$ ”.

Далее в Таблице 4.12 приводится процедура перевычисления W' . То же самое следует организовать для перевычисления s'' , t'' и W'' . При этом нам необходимо организовать индексные подмножества K'' , Λ'' и Ω'' для представления индексов компонент вектора s'' , вектора t'' и матрицы W'' соответственно, которые изменились на текущем шаге перевычислительного процесса.

Таблица 4.12: Перевычисление W'

```

IF ( s'Change ) THEN
  DO FOR  $k \in K'$ 
    DO FOR  $l = 1$  TO  $n$ 
      IF (  $t'_l \neq 0$  )  $w'_{kl} := s'_k t'_l$ 
    END DO
  END DO
END IF
IF ( t'Change ) THEN
  DO FOR  $l \in \Lambda'$ 
    DO FOR  $k = 1$  TO  $n$ 
      IF (  $s'_k \neq 0$  )  $w'_{kl} := s'_k t'_l$ 
    END DO
  END DO
END IF

```

Наконец, мы должны упомянуть следующее замечательное свойство матрицы W : в каждой её 2×2 -подматрице любой элемент равен произведению остальных трех элементов. Чтобы убедиться в этом, обозначим через i_1, i_2 номера строк и через j_1, j_2 — номера столбцов, образующих рассматриваемую подматрицу. Тогда в соответствии с определением (4.47)

$$\begin{aligned}
 w_{i_1 j_1} &= \sigma_{i_1} \tau_{j_1}, \\
 w_{i_1 j_2} &= \sigma_{i_1} \tau_{j_2}, \\
 w_{i_2 j_1} &= \sigma_{i_2} \tau_{j_1}, \\
 w_{i_2 j_2} &= \sigma_{i_2} \tau_{j_2}.
 \end{aligned}$$

Перемножая любые три из вышеприведённых равенств, к примеру, первое, второе и четвертое, получим

$$w_{i_1 j_1} w_{i_1 j_2} w_{i_2 j_2} = \sigma_{i_1} \tau_{j_1} \sigma_{i_1} \tau_{j_2} \sigma_{i_2} \tau_{j_2}.$$

Квадрат любой компоненты векторов σ и τ есть 1, так что

$$w_{i_1 j_1} w_{i_1 j_2} w_{i_2 j_2} = \tau_{j_1} \sigma_{i_2} = w_{i_2 j_1}. \quad (4.49)$$

То же самое с остальными элементами подматрицы:

$$w_{i_1 j_1} w_{i_1 j_2} w_{i_2 j_1} = w_{i_2 j_2}, \quad (4.50)$$

$$w_{i_1 j_2} w_{i_2 j_1} w_{i_2 j_2} = w_{i_1 j_1}, \quad (4.51)$$

$$w_{i_1 j_1} w_{i_2 j_1} w_{i_2 j_2} = w_{i_1 j_2}. \quad (4.52)$$

Иногда соотношения (4.49)–(4.52) могут оказаться полезными для дальнейшего уточнения матрицы W . Например, пусть мы намереваемся рассечь ведущую интервальную систему $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$ по элементу \mathbf{q}_{kl} , в то время как соответствующий элемент w_{kl} матрицы W равен нулю. При этом согласно обычному правилу дробления мы должны были бы

породить две системы-потомка вместо ИСЛАУ $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$. Но разумно сделать попытку определить w_{kl} , поискав 2×2 -подматрицы в W , имеющие ненулевыми все элементы за исключением w_{kl} . Если такая подматрица в W найдётся, то мы присваиваем элементу w_{kl} значение произведения остальных трёх элементов. Сказанное может быть реализовано в виде следующего алгоритма

Таблица 4.13: Уточнение W посредством поиска 2×2 -подматриц

```

DO FOR i = 1 TO n
  DO FOR j = 1 TO n
    IF ( i ≠ k AND j ≠ l ) THEN
      IF ( wij ≠ 0 AND wil ≠ 0 AND wkj ≠ 0 ) THEN
        wkl := wijwilwkj;
        EXIT
      END IF
    END IF
  END DO
END DO
    
```

где оператор EXIT означает выход из всех блоков и циклов выписанного псевдокода.

4.8 d Влияние базового алгоритма

Обсудим теперь очень важный вопрос о влиянии базового метода *Encl* и, следовательно, способа получения оценки $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$ на вычислительную схему конкретных реализаций методов дробления параметров.

Для работы многих методов внешнего оценивания объединённого множества решений ИСЛАУ требуются некоторые начальные приближения, содержащие оцениваемое множество решений. Таковы, например, интервальный метод Гаусса-Зейделя, методы Кравчика, Гея и др. Нетрудно понять, что интервальный вектор внешней оценки объединённого множества решений ИСЛАУ $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$ может служить начальным приближением для процедуры внешнего оценивания объединённых множеств решений систем-потомков $\mathbf{Q}'x = \mathbf{r}'$ с $\mathbf{Q}' \subseteq \mathbf{Q}$ и $\mathbf{r}' \subseteq \mathbf{r}$. То же самое относится и к вычислению “обратной интервальной матрицы”, которая нужна в тесте на монотонность из §4.8 a и при выборе рассекаемого интервального элемента из §4.8 b.

Имеет смысл поэтому при выборе соответствующих базовых методов хранить интервальные векторы внешней оценки множеств решений и “обратную интервальную матрицу” с предыдущих шагов алгоритма. Для этого потребуется расширить образующие рабочий список \mathcal{L} записи ещё на два поля, так что теперь мы будем оперировать не тройками (4.40) или шестёрками (4.48), а восьмерками

$$(\mathbf{Q}, \mathbf{r}, \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}), W, s, t, \mathbf{Y}, \mathbf{x}), \tag{4.53}$$

т. е. записями, состоящими из восьми членов, где

\mathbf{Q} — интервальная $n \times n$ -матрица, $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{A}$,

\mathbf{r} — интервальный n -вектор, $\mathbf{r} \subseteq \mathbf{b}$,

$\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$ — нижний конец ν -ой компоненты (для заданного фиксированного номера ν) внешней интервальной оценки множества решений $\Xi_{uni}(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$,

W, s, t — вспомогательные величины, необходимые для реализации модификации Рона и определенные в §2.3,

\mathbf{Y} — интервальная $n \times n$ -матрица, такая что $\mathbf{Y} \supseteq \{Q^{-1} \mid Q \in \mathbf{Q}\}$,

\mathbf{x} — интервальный n -вектор, такой что $\mathbf{x} \supseteq \Xi_{uni}(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$.

Другое соображение. Как правило, любая из методик решения внешней задачи для ИСЛАУ, удовлетворяющая условию (С2), дает точную оценку $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$ не только тогда, когда \mathbf{Q} и \mathbf{r} — точечные (неинтервальные), но и на некотором более широком множестве начальных данных, когда часть элементов в \mathbf{Q} и \mathbf{r} могут быть интервалами. Например, интервальный метод Гаусса-Зейделя [181, 219], методы Гея [156] и другие итерационные методы, основанные на теореме о сжимающем отображении [4], обеспечивают точную оценку $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$ в случае вещественной матрицы \mathbf{Q} , а вектор правых частей \mathbf{r} может быть при этом любым. Получаемая по интервальному методу Гаусса оценка $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$, очевидно, точна для верхних треугольных матриц \mathbf{Q} , и т.д. Возможны и более хитроумные условия на взаимное расположение элементов интервальной матрицы \mathbf{Q} , их знак, ширину и т.п. Как правило, выявление всех практически наиболее значимых подобных ситуаций нетрудно алгоритмизовать.

Таким образом, для естественной остановки метода дробления параметров совсем не обязательно дожидаться полного “овеществления” ведущей ИСЛАУ $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$ (условие завершение цикла “DO WHILE” в Таблице 4.8). Достаточно уже и того, чтобы ведущая оценка $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$ являлась точной.

Можно пойти ещё дальше и предусмотреть возможность динамической смены в алгоритме базового метода *Encl*. Первоначально это может быть какой-нибудь метод с широкой сферой применимости, но и с большой погрешностью внешнего оценивания. Затем, по мере достижения в процессе дробления заданной узости интервальных систем-потомков, он заменяется на более точный специализированный алгоритм.

Мораль, вытекающая из вышеизложенного, прежняя: для достижения наибольшей эффективности методов дробления параметров все составляющие реального алгоритма, применяемого к той или иной конкретной задаче, как то

структура данных (т.е. записей в рабочем списке \mathcal{L}),

способ их обработки,

способ дробления ведущих ИСЛАУ,

другие характеристики алгоритма

должны быть тщательно увязаны с особенностями решаемой задачи. Общая схема методов дробления параметров предоставляет большую свободу разработчику, но нужно уметь ей пользоваться.

4.8 е Отсев бесперспективных записей

Рассмотрим, наконец, модификацию простейшего алгоритма GLinPPS, связанную с вычислением оценок $\Upsilon(\text{mid } \mathbf{Q}, \text{mid } \mathbf{r})$ для “середин” ведущих систем. Она позволит отчасти контролировать точность вычисления $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$, а также удалять из списка \mathcal{L} бесперспективные записи, т.е. такие, которые никогда не сделаются ведущими. Благодаря последнему обстоятельству несколько ограничивается рост длины списка \mathcal{L} .

Действительно, пусть наряду с оценкой $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$ для интервальных систем $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$, порождаемых алгоритмом, вычисляются ещё и величины $\Upsilon(\square\mathbf{Q}, \square\mathbf{r})$, где, как и ранее, символом \square обозначена операция взятия какой-то фиксированной точки из интервала. Очевидно, что

$$\Upsilon(\square\mathbf{Q}, \square\mathbf{r}) \geq \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}),$$

и значения $\Upsilon(\square\mathbf{Q}, \square\mathbf{r})$ приближают $\min\{x \mid x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$ сверху: если для каждого шага алгоритма определять

$$\omega = \min \Upsilon(\square\mathbf{Q}, \square\mathbf{r}) \tag{4.54}$$

по всем интервальным линейным системам $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$, когда-либо побывавшим в списке \mathcal{L} до этого шага, то

$$\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\} \leq \omega.$$

С другой стороны, если $\mathbf{Q}x = \mathbf{r}$ — ведущая ИСЛАУ, то

$$\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}) \leq \min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\},$$

и потому ещё одним критерием естественной остановки алгоритма может служить достижение требуемой малости величины $(\omega - \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}))$.

Далее, запись $(\mathbf{Q}, \mathbf{r}, \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}), p) \in \mathcal{L}$, удовлетворяющая на некотором шаге условию

$$\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}) > \omega, \tag{4.55}$$

при дальнейшем выполнении алгоритма уже никогда не станет ведущей, и её удаление из списка \mathcal{L} не окажет никакого влияния на результат работы алгоритма. Вообще, тестироваться неравенством (12) должны на каждом шаге алгоритма все вновь заносимые в список \mathcal{L} записи, тогда как “чистки” списка, — его просмотр и удаление всех удовлетворяющих (12) записей, — имеет смысл проводить лишь после изменений (т.е. уменьшений) параметра ω .

Конечно, было бы идеальным выбирать $(\square\mathbf{Q}, \square\mathbf{r}) \in \text{Arg } \min\{\Upsilon(Q, r) \mid Q \in \mathbf{Q}, r \in \mathbf{r}\}$. Фактически, мы так и будем поступать, если оценка $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$ — точная, полагая

$$\Upsilon(\square\mathbf{Q}, \square\mathbf{r}) = \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}).$$

Но в общем случае подобный “удачный” выбор не менее труден, чем решение исходной задачи, и потому в целях минимизации возможных отклонений $(\square\mathbf{Q}, \square\mathbf{r})$ от множества $\text{Arg } \min\{\Upsilon(Q, r) \mid Q \in \mathbf{Q}, r \in \mathbf{r}\}$ целесообразней всего брать тогда в качестве $\square\mathbf{Q}$ и $\square\mathbf{r}$ середины матрицы \mathbf{Q} и вектора \mathbf{r} , т.е. $\text{mid } \mathbf{Q}$ и $\text{mid } \mathbf{r}$, соответственно.

Таблица 4.14: Алгоритм LinPPS1

DO WHILE ((ведущая оценка $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$ неточна) ИЛИ ($\omega - \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}) > \epsilon$))

по формулам (4.43) вычисляем интервальные расширения для производных

$$\frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial q_{ij}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial r_i},$$

соответствующие элементам \mathbf{q}_{ij} и \mathbf{r}_i с ненулевой шириной;

“сжимаем” в соответствии с (4.41)–(4.42) интервальные элементы в \mathbf{Q} и \mathbf{r} , на которых была выявлена монотонная зависимость x_ν от q_{ij} и r_i , и полученные в результате этой процедуры интервальную матрицу и интервальный вектор также обозначаем через \mathbf{Q} и \mathbf{r} ;

ищем среди элементов ведущей ИСЛАУ $\mathbf{Q}\mathbf{x} = \mathbf{r}$ интервальный элемент \mathbf{s} , которому соответствует наибольшее из произведений

$$\left| \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial q_{ij}} \right| \cdot \text{wid } \mathbf{q}_{ij}, \quad \left| \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial r_i} \right| \cdot \text{wid } \mathbf{r}_i, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\};$$

порождаем интервальные системы-потомки $\mathbf{Q}'\mathbf{x} = \mathbf{r}'$ и $\mathbf{Q}''\mathbf{x} = \mathbf{r}''$:

если $\mathbf{s} = \mathbf{q}_{kl}$ для некоторых $k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$, то полагаем

$$\mathbf{q}'_{ij} := \mathbf{q}''_{ij} := \mathbf{q}_{ij} \text{ для } (i, j) \neq (k, l), \quad \mathbf{q}'_{kl} := \underline{\mathbf{q}}_{kl}, \quad \mathbf{q}''_{kl} := \bar{\mathbf{q}}_{kl},$$

$$\mathbf{r}' := \mathbf{r}'' := \mathbf{r};$$

если $\mathbf{s} = \mathbf{r}_k$ для некоторого $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, то полагаем

$$\mathbf{r}'_i := \mathbf{r}''_i := \mathbf{r}_i \text{ для } i \neq k, \quad \mathbf{r}'_k := \underline{\mathbf{r}}_k, \quad \mathbf{r}''_k := \bar{\mathbf{r}}_k,$$

$$\mathbf{Q}' := \mathbf{Q}'' := \mathbf{Q};$$

вычисляем интервальные векторы $\mathbf{x}' := \text{Encl}(\mathbf{Q}', \mathbf{r}')$ и $\mathbf{x}'' := \text{Encl}(\mathbf{Q}'', \mathbf{r}'')$;

вычисляем оценки $\Upsilon(\mathbf{Q}', \mathbf{r}')$ и $\Upsilon(\mathbf{Q}'', \mathbf{r}'')$;

вычисляем внешние оценки для “обратных интервальных матриц”

$$\mathbf{Y}' \supseteq (\mathbf{Q}')^{-1} \text{ и } \mathbf{Y}'' \supseteq (\mathbf{Q}'')^{-1};$$

вычисляем оценки $\Upsilon(\text{mid } \mathbf{Q}', \text{mid } \mathbf{r}')$ и $\Upsilon(\text{mid } \mathbf{Q}'', \text{mid } \mathbf{r}'')$, и полагаем

$$\mu := \min\{ \Upsilon(\text{mid } \mathbf{Q}', \text{mid } \mathbf{r}'), \Upsilon(\text{mid } \mathbf{Q}'', \text{mid } \mathbf{r}'') \};$$

удаляем из \mathcal{L} бывшую ведущей запись $(\mathbf{Q}, \mathbf{r}, \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}), p)$;

если $\Upsilon(\mathbf{Q}', \mathbf{r}') \leq \omega$, то заносим запись $(\mathbf{Q}', \mathbf{r}', \Upsilon(\mathbf{Q}', \mathbf{r}'), \mathbf{Y}', \mathbf{x}')$ в список \mathcal{L} в порядке возрастания значений третьего поля;

если $\Upsilon(\mathbf{Q}'', \mathbf{r}'') \leq \omega$, то заносим запись $(\mathbf{Q}'', \mathbf{r}'', \Upsilon(\mathbf{Q}'', \mathbf{r}''), \mathbf{Y}'', \mathbf{x}'')$ в список \mathcal{L} в порядке возрастания значений третьего поля;

если $\omega > \mu$, то полагаем $\omega := \mu$ и чистим список \mathcal{L} :

удаляем из него все такие записи $(\mathbf{Q}, \mathbf{r}, \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}), \mathbf{Y}, \mathbf{x})$, что $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}) > \omega$;

END DO

4.8f Итоговая схема алгоритма

Приводимые ниже псевдокоды Таблиц 4.14 и 4.15 суммируют развитые в предшествующих пунктах модификации методов дробления параметров (PPS-методов) для внешнего оценивания объединённого множеств решений ИСЛАУ.

Теоретически модификация Рона позволяет нам уменьшить экспоненциальный множитель в верхней оценке трудоёмкости PPS-методов с 2^{n^2+n} до 4^n , но

- это сделано ценой существенного утяжеления алгоритма, так что его программная сложность становится весьма высокой,
- при решении больших практических задач размерности, превосходящей несколько десятков, как 2^{n^2+n} , так и 4^n делаются недостижимыми величинами, а методы дробления параметров следует рассматривать, скорее, как итерационную уточняющую процедуру, которая никогда не выполняется до своего естественного завершения.

На наш взгляд, в каждом конкретном случае пользователь, основываясь на информации о размере задачи, её структуре, наличных вычислительных ресурсах и т.п., самостоятельно должен решать вопрос о целесообразности включения модификации Рона в ту или иную реализацию метода дробления параметров. По этой причине мы приводим ниже две итоговые вычислительные схемы методов дробления параметров, с модификацией Рона и без неё.

В Таблицах 4.14 и 4.15 предполагается, что в качестве базового метода внешнего оценивания *Encl* взят интервальный метод Гаусса-Зейделя, но это сделано лишь для определённости. Подчеркнем, что методы дробления параметров — это общая схема, а Таблицы 4.14 и 4.15 представляют лишь две её возможные конкретизации. Развитые нами выше конструкции содержат ряд “свободных переменных”, которые должны быть настраиваемы под конкретную задачу, так что мы можем, следовательно, говорить о целом *классе методов*, основанных на общей идее дробления интервальных параметров системы.

Алгоритм Таблицы 4.14 описывает метод дробления параметров без модификации Рона. Его рабочий список \mathcal{L} образуется шестичленными записями вида (4.48), а для начала работы этого алгоритма, который мы называем **LinPPS1**, нам нужно

- найти грубые внешние оценки для объединённого множества решений исходной интервальной системы и “обратной интервальной матрицы”, т.е. вычислить интервальные вектор $\mathbf{x} \supseteq \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ и матрицу $\mathbf{Y} \supseteq \mathbf{A}^{-1}$.
- назначить точность $\epsilon > 0$,
- положить $\Upsilon(\mathbf{A}, \mathbf{b}) := \underline{\mathbf{x}}$ и $\omega := +\infty$,
- инициализировать рабочий список \mathcal{L} записью $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \underline{\mathbf{x}}, \mathbf{Y}, \mathbf{x})$.

Алгоритм Таблицы 4.15, названный нами **LinPPS2**, представляет метод дробления параметров с модификацией Рона, который оперирует с восьмичленными записями вида (4.53). Для начала его работы необходимо выполнить первые три пункта, как для алгоритма **LinPPS1**, далее положить

$$W := 0, \quad s := 0, \quad t := 0$$

Таблица 4.15: Алгоритм LinPPS2

DO WHILE ((ведущая оценка $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$ неточна) OR ($\omega - \Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r}) > \epsilon$))

используя формулы (4.43), вычисляем интервальные расширения производных

$$\frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial q_{ij}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial r_i},$$

которые соответствуют интервальным элементам \mathbf{q}_{ij} и \mathbf{r}_i с ненулевой шириной;

“сжимаем” в соответствии с (4.41)–(4.42) в \mathbf{Q} и \mathbf{r} интервальные элементы, для которых выделена монотонность зависимости x_ν от q_{ij} и r_i , и обозначаем полученные при этом интервальную матрицу и вектор снова через \mathbf{Q} и \mathbf{r} ;

находим среди элементов системы $\mathbf{Q}\mathbf{x} = \mathbf{r}$ интервал \mathbf{h} , который соответствует наибольшему из произведений

$$\left| \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial q_{ij}} \right| \cdot \text{wid } \mathbf{q}_{ij}, \quad \left| \frac{\partial x_\nu(\mathbf{Q}, \mathbf{r})}{\partial r_i} \right| \cdot \text{wid } \mathbf{r}_i, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\};$$

пытаемся уточнить матрицу W в соответствии с процедурой Таблицы 7;

“дробим” элемент \mathbf{h} и порождаем одну или две интервальные “системы-потомки” $\mathbf{Q}'\mathbf{x} = \mathbf{r}'$ и $\mathbf{Q}''\mathbf{x} = \mathbf{r}''$ в соответствии с процедурой Таблицы 3;

если были порождены две системы-потомка, вычисляем новые матрицы W' , W'' и векторы s' , s'' , t' , t'' в соответствии с процедурами Таблицы 4 и Таблиц 5–6; иначе полагаем $W' := W$, $s' := s$, $t' := t$;

вычисляем интервальный вектор $\mathbf{x}' := \text{Encl}(\mathbf{Q}', \mathbf{r}')$ и, возможно, $\mathbf{x}'' := \text{Encl}(\mathbf{Q}'', \mathbf{r}'')$, беря \mathbf{x} в качестве начального приближения;

присваиваем оценку $v' := \Upsilon(\mathbf{Q}', \mathbf{r}')$ и, возможно, $v'' := \Upsilon(\mathbf{Q}'', \mathbf{r}'')$;

уточняем внешнюю оценку для “обратной интервальной матрицы” $\mathbf{Y}' \supseteq (\mathbf{Q}')^{-1}$ и, возможно, для $\mathbf{Y}'' \supseteq (\mathbf{Q}'')^{-1}$, беря \mathbf{Y} в качестве начального приближения;

вычисляем оценку $\Upsilon(\text{mid } \mathbf{Q}', \text{mid } \mathbf{r}')$ и, возможно, $\Upsilon(\text{mid } \mathbf{Q}'', \text{mid } \mathbf{r}'')$, и полагаем $\mu := \min\{ \Upsilon(\text{mid } \mathbf{Q}', \text{mid } \mathbf{r}'), \Upsilon(\text{mid } \mathbf{Q}'', \text{mid } \mathbf{r}'') \}$;

удаляем бывшую ведущую запись $(\mathbf{Q}, \mathbf{r}, v, \mathbf{Y}, W, s, t, \mathbf{x})$ из списка \mathcal{L} ;

если $v' \leq \omega$, то помещаем запись $(\mathbf{Q}', \mathbf{r}', v', W', s', t', \mathbf{Y}', \mathbf{x}')$ в список \mathcal{L} в порядке возрастания третьего поля;

если из ведущей ИСЛАУ были порождены две системы-потомка и $v'' \leq \omega$, то помещаем запись $(\mathbf{Q}'', \mathbf{r}'', v'', W'', s'', t'', \mathbf{Y}'', \mathbf{x}'')$ в список \mathcal{L} в порядке возрастания третьего поля;

если $\omega > \mu$, то полагаем $\omega := \mu$ и чистим список \mathcal{L} , т.е. удаляем из него все такие записи $(\mathbf{Q}, \mathbf{r}, v, W, s, t, \mathbf{Y}, \mathbf{x})$, что $v > \omega$;

END DO

для матрицы W и векторов s и t , введённых в §3.3, и инициализировать рабочий список \mathcal{L} записью $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{x}, W, s, t, \mathbf{Y}, \mathbf{x})$.

В заключение полезно проследить, в каком отношении построенные нами алгоритмы находятся к другим методам решения ИСЛАУ. Прежде всего, отметим, что имеется глубокая связь (фактически, являющаяся двойственностью) между развиваемыми в настоящей работе методами дробления параметров и предложенными автором ранее классом методов дробления решений [278, 288]. Но к идее построения методов дробления параметров для интервальных линейных систем можно прийти и несколько иным путём, доводя до логического завершения некоторые из давно и широко известных в интервальном анализе подходов к решению ИСЛАУ.

Одним из прародителей алгоритма LinPPS1 можно, по-видимому, считать процедуру Купермана-Хансена (см. [4]), в которой внешние интервальные оценки для объединенного множества решений ИСЛАУ ищутся на основе пассивного однократного использования информации о производных компонент решения по элементам матрицы и правой части системы, подобно тому как это делается в §4.8 а. Но в реальных интервальных системах не всегда удается выявить определенный знак этих производных, а потому какие-то интервальные элементы всё равно останутся интервальными и после применения теста на монотонность. И Куперман и Хансен в этом месте останавливались и завершали процесс решения “внешней задачи”. Дальнейшее уточнение искомой оценки на этом пути возможно лишь при добавлении активной процедуры измельчения элементов матрицы ИСЛАУ, хотя рассматривать при этом будет нужно все получающиеся при таком измельчении-дроблении интервальные системы.

Фактически, это и реализуется в алгоритмах GlinPPS, LinPPS1 b LinPPS2. Их рабочий список \mathcal{L} хранит все возникшие в процессе работы варианты (за исключением тех заведомо бесперспективных, которые выявляются посредством теста из (8.30)), а обрабатывается на каждом шаге алгоритма “самый перспективный” вариант, если мерой этой перспективности считать значение оценки $\Upsilon(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$.

4.9 Численные эксперименты с методами дробления параметров

Сказанное в предыдущих параграфах мы проиллюстрируем результатами вычислительных экспериментов на рабочей станции Sun ULTRA-10, проведённых с несколькими версиями методов дробления параметров, которые были реализованы на языке FORTE Fortran / НРС 6 фирмы Sun Microsystems.

Для того, чтобы продемонстрировать влияние различных факторов на поведение PPS-алгоритмов для решения ИСЛАУ, мы приводим результаты тестовых расчётов с четырьмя методами:

- A** — простейший метод дробления параметров (т.е. алгоритм GlinPPS) дополненный процедурой удаления из списка \mathcal{L} бесперспективных записей;
- B** — тот же алгоритм, что и **A**, но дополненный процедурой сжатия элементов матрицы ИСЛАУ на основе информации о монотонности оценки (см. §4.8 а);
- C** — тот же алгоритм, что и **B**, но дополненный процедурой сжатия компонент правой части ИСЛАУ на основе информации о монотонности оценки (см. §4.8 а);

D — алгоритм LinPPS1. Он отличается от алгоритма C тем, что рассекаемый элемент в нём выбирается из условия максимизации произведения оценки производной на ширину интервала (как это описано в §4.8 b).

Модификация Рона из §4.8 с нами в этих алгоритмах не использовалась. Фактически на основании приводимых ниже результатов можно сравнивать даже пять алгоритмов, включая самый простейший алгоритм GLinPPS поскольку он отличается от алгоритма A лишь длиной списка.

В качестве базового метода мы использовали интервальный метод Гаусса-Зейделя со стандартным предобуславливанием обратной средней матрицей, и этот же метод использовался для внешнего оценивания “обратной интервальной матрицы” ИСЛАУ. Модельной задачей нам служила интервальная линейная система

$$\begin{pmatrix} t & [0, 2] & \cdots & [0, 2] \\ [0, 2] & t & \cdots & [0, 2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0, 2] & [0, 2] & \cdots & t \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 1] \\ \vdots \\ [-1, 1] \end{pmatrix}, \quad (4.56)$$

которая была предложена А. Ноймайером в книге [219]. Оказывается, что матрицы системы (4.56) чётного порядка n невырождены при $t > n$, а матрицы нечётного порядка n невырождены при $t > \sqrt{n^2 - 1}$.

Как и для рассмотренной ранее тестовой системы (4.34), некоторую информацию о строении объединённого множества решений интервальной линейной системы (4.56) можно получить из соображений симметрии. Из-за уравновешенности вектора правой части рассматриваемая ИСЛАУ инвариантна относительно изменения знаков всех компонент решения на противоположный, так что её множество решений Ξ' является центрально симметричным относительно начала координат, и, в частности,

$$\min\{x_i \mid x \in \Xi'\} = -\max\{x_i \mid x \in \Xi'\}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.57)$$

Так как для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ после замены x_i на x_j и наоборот интервальная система (4.56) остается неизменной, то множество Ξ' симметрично относительно биссектрисы положительного и отрицательного ортантов пространства \mathbb{R}^n , так что

$$\begin{aligned} \min\{x_i \mid x \in \Xi'\} &= \min\{x_j \mid x \in \Xi'\}, \\ \max\{x_i \mid x \in \Xi'\} &= \max\{x_j \mid x \in \Xi'\} \end{aligned}$$

для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Сопоставляя эти соотношения с (4.57), можно заключить, что интервальная оболочка множества решений Ξ' системы (4.56) является гиперкубом с центром в начале координат.

При приближении значения t к границам невырожденности (n для чётных размерностей и $\sqrt{n^2 - 1}$ для нечётных) размеры объединённого множества решений ИСЛАУ (4.56) неограниченно возрастают. Варьируя t легко получить набор тестов для проверки развитых нами алгоритмов оптимального решения “внешней задачи” для ИСЛАУ.

Таблица 4.16 представляет результаты тестовых расчётов с интервальными линейными системами Ноймайера размера 4×4 , 5×5 и 6×6 . С одной стороны, подобные задачи

Таблица 4.16:

4 × 4-система Ноймайера с диагональю 5.5

Алгоритм	A	B	C	D
Количество итераций	51	51	39	15
Максимальная длина списка	45	45	21	9
Время счёта	< 1 сек	< 1 сек	< 1 сек	< 1 сек

5 × 5 система Ноймайера с диагональю 7

Алгоритм	A	B	C	D
Количество итераций	506	506	421	59
Максимальная длина списка	503	503	285	48
Время счёта	< 1 сек	2 сек	2 сек	< 1 сек

6 × 6-система Ноймайера с диагональю 8.5

Алгоритм	A	B	C	D
Количество итераций	15760	15760	10655	441
Максимальная длина списка	15744	15744	4644	302
Время счёта	110 сек	190 сек	103 сек	6 сек

являются всё-таки не слишком тяжёлыми и просчитываются рассматриваемыми нами алгоритмами “до конца”, т.е. до того момента, когда ведущая оценка станет точной. А с другой стороны, комбинаторная сложность этих задач при решении “лобовым перебором” — количество крайних точечных систем уравнений, равное соответственно 2^{20} , 2^{30} и 2^{42} — достаточно велика и позволяет предметно судить о сравнительной эффективности тех или иных вычислительных схем.

Наконец, для интервальной 7×7 -системы Ноймайера с диагональю 10 алгоритмы А, В и С вообще не просчитывают оптимальную оценку объединённого множества решений до конца даже за время порядка часов. Дело в том, что примерно после 50000 итераций алгоритма “быстрая” оперативная память ЭВМ оказывается исчерпанной списком \mathcal{L} и начинающийся обмен с “медленной” памятью на жёстком магнитном диске практически сводит на нет производительность процессора, так что вычисления делаются чрезвычайно медленными. Но наиболее продвинутый алгоритм D всё же позволяет успешно решить задачу до конца за 112 секунд процессорного времени, сделав 5246 итераций-бисекций при максимальной длине списка 4050.

Из анализа Таблицы 4.16 можно сделать выводы об эффективности тех или иных модификаций методов дробления параметров. Довольно неожиданными являются данные о процессорном времени решения задач, согласно которым алгоритм В оказывается наименее эффективным. То есть, затраты на исследование монотонности только по элементам матрицы оборачиваются (по крайней мере, для систем Ноймайера) лишь утяжелением алгоритма.

Интересно и поучительно сравнить на “существенно интервальных” линейных системах (т.е. системах с достаточно широкими интервалами в матрице и правой части) поведение методов дробления параметров и так называемых “sign accord” методов Рона, которые были предложены в 80-е годы [257] и в настоящее время наиболее популярны среди зарубежных исследователей и пользователей интервального анализа [219, 187]. Методы Рона были реализованы и тщательно оттестированы К. Мадсенем и О. Тофтом [200, 312], которые использовали в качестве модельных задач разнообразные интервальные линейные системы размерности от 2 до 30. Для нас особенную ценность имеют их результаты на ИСЛАУ предельной размерности 30 с тремя матрицами, являющимися интервализацией известных тестовых матриц вычислительной линейной алгебры из справочника [159]:

матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}, \quad (4.58)$$

матрицы конечно-разностной аппроксимации второй производной на симметричном шаблоне^{4.7}

^{4.7} Она является M-матрицей. См., например, [219].

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & & & & 0 \\ & -1 & 2 & \ddots & & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & & \ddots & 2 & -1 & & & & \\ 0 & & & & -1 & 2 & -1 & & & \\ & & & & & -1 & 2 & & & \\ & & & & & & -1 & 2 & & \end{pmatrix}, \quad (4.59)$$

и матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-1 & n-1 & \cdots & n-1 & n \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{pmatrix}. \quad (4.60)$$

Интервальный вектор правой части для всех трех случаев брался одинаковым и равным

$$([0.999, 1.001], [0.999, 1.001], \dots, [0.999, 1.001])^T.$$

Интересно, что ещё в начале 90-х годов на персональном компьютере с процессором Intel 80486DX и математическим сопроцессором К. Мадсен и О. Тофт не смогли успешно просчитать до конца интервальные линейные 30×30 -системы

- 1) с матрицей (4.58), все элементы которой равномерно уширены на интервал $[-0.002, 0.002]$;
- 2) с матрицей (4.59), все элементы которой уширены на $[-0.0003, 0.0003]$;
- 3) с матрицей (4.60), все элементы которой уширены на $[-0.00001, 0.00001]$.

Вскоре задача 2 из этого списка всё-таки была успешно решена, но для этого К. Мадсену и О. Тофту потребовалось привлечение транспьютера Meiko Transputer System и распараллеливание вычислений на 32-х процессорах. Общее последовательное время работы всех процессоров составило при этом 2471.27 секунд (более 40 минут). О решении же задач 1 и 3 даже на транспьютере в работах [200, 312] ничего не сообщается.

Что касается методов дробления параметров, то алгоритм, фигурирующий в Таблице 4.16 под литерой D (наиболее продвинутый), успешно справился со всеми тремя упомянутыми задачами на однопроцессорной рабочей станции SUN Ultra-10 (тактовая частота процессора 300 МГц, шины — 100 МГц, ёмкость ОЗУ — 128 Мбайт). При этом

Задача 1 была решена всего за 2 итерации-бисекции и время порядка одной секунды по каждой отдельной оцениваемой компоненте множества решений,

Задача 2 была решена всего за 2 итерации-бисекции и время порядка одной секунды по каждой из отдельных оцениваемых компонент множества решений,

Задача 3 даже с более широкой матрицей радиуса 0.0001 успешно решалась для отдельной оцениваемой компоненты множества решений за время, не превосходящее 14 минут и не более чем за 1646 итераций-бисекций. Этот худший результат был достигнут для 10-й компоненты множества решений, а для других компонент трудоёмкость исполнения варьировалась в широких пределах от 50–60 итераций-бисекций до нескольких сотен и тысячи с лишним.

Наконец, рекордный результат, полученный с помощью методов дробления параметров. Алгоритм D позволил успешно вычислять оптимальную по координатной оценке множества решений ИСЛАУ размера 300 на 300 с матрицей (4.58), уширенной на $[-0.002, 0.002]$ всего за 2 (две) итерации-бисекции и время порядка 20 минут (по любой из компонент). Такие размеры решаемых систем в задаче оптимального внешнего оценивания множеств решений ИСЛАУ не рассматривал ещё никто в мире!

Завершая параграф, можно резюмировать, что приведенные данные тестовых прогонов, а также свойство последовательной гарантии методов дробления параметров (см. §4.10), убедительно свидетельствуют в пользу их решительного предпочтения перед методами Рона.

4.10 Последовательно гарантирующие и финально гарантирующие алгоритмы

Предположим, что нам предъявлена труднорешаемая интервальная задача (можно даже отвлечься от требования оптимальности её решения). При сколько-нибудь значительных её размерах типична ситуация, когда

количество заведомо необходимых для решения задачи машинных операций значительно превосходит наличные ресурсы вычислительной системы.

Это условие столь важно для наших последующих рассуждений, что достойно выделения специальной аббревиатурой

CPA — от английского “*Complexity Predominance Assumption*”

— Допущение о Преобладании Сложности [задачи над возможностями ЭВМ]. В подобной ситуации мы, скорей всего, столкнемся с необходимостью насильственной остановки вычислений (например, из-за истечения срока аренды ЭВМ, либо в силу необходимости получения хоть каких-то результатов в установленный срок и т.п.) и довольствоваться тем, что уже насчитано к моменту остановки. Главная неприятность при таком развитии событий состоит в том, что поспешно выдаваемый интервальный ответ может даже не удовлетворять нужному способу оценивания, и, следовательно, не является решением поставленной интервальной задачи оценивания (т.к. используемый нами алгоритм “до

конца” не доработал). В этом случае затраченное нами машинное время и другие ресурсы фактически пропадут впустую.^{4.8}

Целесообразно поэтому разделить все интервальные алгоритмы на “хорошие” и “плохие” в зависимости от того, обеспечивают ли они требуемый задачей способ оценивания интервального ответа лишь в момент своей естественной остановки, когда прорабатывают “до конца”, или же этот способ оценивания достигается для последовательного ряда эффективно вычисляемых промежуточных результатов, каждый из которых, следовательно, может быть выдан в качестве правильного ответа задачи при прерывании алгоритма в любой момент. При сделанном нами допущении *CPA*, когда сложность решаемой задачи значительно превосходит возможности ЭВМ именно алгоритмы второго класса более предпочтительны с точки зрения обеспечения гарантированности (удовлетворения заданному способу оценивания) результата вычислений. Далее будем называть такие алгоритмы *последовательно гарантирующими* или же *алгоритмами с последовательной гарантией* (*sequentially guaranteeing* или *with sequential guarantee*), в отличие от *финально гарантирующих*, или *алгоритмов с финальной гарантией* (*finally guaranteeing* или *with final guarantee*), которые обеспечивают нужный способ оценивания результата лишь по завершении их работы. В известном смысле проведенное нами разделение “интервальных” алгоритмов является аналогом существующего в традиционной вычислительной математике противопоставления “итерационные методы — прямые методы”.

При строгом определении понятий последовательно гарантирующего и финально гарантирующего алгоритмов можно исходить из того, что по современным представлениям эффективно вычислимыми считаются алгоритмы с полиномиальной верхней оценкой сложности. Таким образом, мы принимаем следующее

Определение 4.10.1 *Алгоритм, решающий интервальную задачу оценивания, назовём последовательно гарантирующим, если при своём выполнении он порождает последовательность (конечную или бесконечную) полиномиально вычисляемых ответов решаемой задачи (т.е. приближённых оценок в смысле требуемого способа оценивания).*

Алгоритм, решающий интервальную задачу оценивания, назовём финально гарантирующим, если он выдаёт ответ к решаемой задаче лишь при естественном завершении своей работы.

В частности, алгоритм *a priori* является последовательно гарантирующим, если он сам имеет полиномиальную сложность выполнения. Итоговый результат последовательно гарантирующего алгоритма может быть пределом бесконечной последовательности промежуточных ответов, или последним членом некоторой конечной последовательности, или же ещё чем то иным.

Естественно, что сфера действия введённой нами классификации интервальных алгоритмов не является строго очерченной, поскольку не вполне строг смысл самого понятия труднорешаемости. Несомненную пользу она способна принести и при рассмотрении, например, полиномиально сложных алгоритмов, не являющихся “трудными” в традиционном понимании, но которые имеется в виду использовать в ситуации, когда выполнено допущение *CPA*. Поэтому будет более правильным, хотя и менее строгим, определить

^{4.8}Возможный выход из этого положения — не дожидаясь полного исчерпания ресурсов ЭВМ, остановить трудоёмкий алгоритм и попытаться за оставшееся время получить хоть какое-то решение задачи другим, “быстрым” методом. Но мы не будем рассматривать таких вычислительных процессов. Следуя терминологии А.Г. Сухарева [87], можно сказать, что в наших рассуждениях итоговая операция алгоритма остается неизменной.

последовательно гарантирующие алгоритмы, как противоположность к финально гарантирующим, т.е. к таким, которые обеспечивают правильный ответ задачи лишь при своём естественном завершении.

Впервые понятие последовательно гарантирующего алгоритма было введено С. П. Шарым в работе [288] применительно к алгоритмам для нахождения оптимальных решений “внешней задачи” для интервальных алгебраических систем, но, основные его положения и выводы, как нетрудно понять, в равной мере применимы к алгоритмам для любых трудно-решаемых интервальных задач оценивания. Мы, в свою очередь, имея общее понимание того, что является интервальной задачей смогли корректно распространить концепцию последовательной гарантии на все алгоритмы для решения подобных задач.

Для иллюстрации вышесказанного вновь обратимся, следуя работе [288], к “внешней задаче” для интервальной линейной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$, т.е. к задаче нахождения оценок для $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}\}$ снизу и для $\max\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}\}$ сверху, $\nu = 1, 2, \dots, n$, по отношению к объединённому множеству решений

$$\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \Xi_{uni} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(Ax = b)\}.$$

На сегодняшний день существуют четыре принципиально различных подхода к вычислению оптимальных (точных) оценок объединённого множества решений для общих интервальных линейных систем. Первый из них восходит к работе У. Оеттли [231], который обнаружил, что пересечение объединённого множества решений с ортантами пространства \mathbb{R}^n является выпуклым полиэдром. Таким образом, точное значение $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}\}$ может быть найдено путём решения в каждом из ортантов некоторой задачи линейного программирования и последующим взятием минимума из результатов. Но этот алгоритм, как нетрудно понять, основывается на пассивной переборной стратегии, а трудоёмкость его экспоненциально растёт в зависимости от размерности n . Поэтому практическая значимость его невелика.

Следующие два вычислительных подхода к оптимальному решению “внешней задачи” для квадратных интервальных линейных систем — это методы дробления решений и методы дробления параметров (PSS-методы и PPS-методы), предложенные С.П. Шарым в работах [102, 105, 107, 108, 278, 279, 280, 288]. Оба подхода имеют в своей основе стратегию метода “ветвей и границ”. Хотя в худшем случае сложность выполнения методов дробления решений пропорциональна 2^n , а верхняя оценка сложности выполнения методов дробления параметров равна даже 2^{n^2} , эти методы являются *адаптивными* в отличие от подхода Оеттли. Иными словами, при исполнении каждого последующего шага как в методах дробления решений, так и в методах дробления параметров мы полностью используем информацию о ходе и результатах исполнения предыдущих шагов. Алгоритмы подобного типа являются более предпочтительными в практических вычислениях, поскольку имеют более гибкую вычислительную схему, позволяющую им подстраиваться под конкретную решаемую задачу. Уже первые реализации методов дробления решений и параметров продемонстрировали их высокую вычислительную эффективность, практичность (см. §4.6 и §4.9) и открытость для дальнейших усовершенствований и модификаций.

Наконец, четвёртый и в настоящий момент наиболее популярный в литературе подход к оптимальному решению “внешней задачи” предложен И. Роном [257] (см. также [219]). Отталкиваясь от характеристики Оеттли-Прагера (2.49) для объединённого множества решений, он показывает, что для случая квадратной невырожденной матрицы \mathbf{A} искомые значения $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}\}$ и $\max\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}\}$, $\nu = 1, 2, \dots, n$, достигаются на

множестве не более чем 2^n решений так называемого “уравнения Оеттли-Прагера”

$$|\text{mid } \mathbf{A} \cdot x - \text{mid } \mathbf{b}| = \text{rad } \mathbf{A} \cdot |x| + \text{rad } \mathbf{b}. \quad (4.61)$$

Вычисляя все возможные решения этого уравнения и сравнивая их между собой, мы получим оптимальные оценки множества решений за конечное число шагов. Поскольку процесс определения каждого последующего решения для (4.61) никак не зависит от решений, уже найденных раньше, алгоритм Рона в целом не является адаптивным (т.е. подобен переборным методикам), в то время как его трудоёмкость пропорциональна 4^n в худшем случае.

Таким образом, все подходы, разработанные к настоящему моменту для вычисления оптимальных решений “внешней задачи” для общих интервальных линейных систем имеют экспоненциальную в наихудшем случае трудоёмкость. Но этот факт не является следствием “плохости” самих алгоритмов, а отражает глубокие свойства самого объединённого множества решений интервальных линейных систем. Сравнительно недавно было установлено, что даже задача распознавания того, пусто или нет множество Ξ_{uni} , является NP-полной [59, 60]. Далее, задача вычисления оптимальных по координатным оценкам объединённого множества решений оказалась также NP-трудной [189, 190]. Следовательно, экспоненциальная сложность всех перечисленных выше алгоритмов является существенной и не может быть устранена (при повсеместно принимаемом условии “ $P \neq NP$ ”) [26].

Каковы же преимущества и недостатки методов дробления решений и методов дробления параметров в сравнении с другими подходами для нахождения оптимальных решений “внешней задачи”? Наиболее важная особенность методов дробления решений и параметров состоит в том, что они порождают последовательности приближённых оценок искомым величин “с нужной стороны”, т.е. для $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}\}$ снизу, а для $\max\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}\}$ сверху. Именно такие оценки и требуются в соответствии со смыслом “внешней задачи”. Процесс выполнения метода дробления параметров, например, разбивается на ряд эффективно вычисляемых этапов-шагов, в результате каждого из которых мы получаем некоторое решение “внешней задачи”. После того, как в таком алгоритме проработал хотя бы один из этих этапов, его прерывание в любой момент приведёт к тому, что мы всё равно будем иметь в своём распоряжении некоторое решение “внешней задачи”. Иными словами, если у нас имеются достаточные вычислительные мощности, то, реализуя методы дробления параметров (равно как и методы дробления решений) мы можем быть вполне уверены, что некоторый ответ к задаче будет наверняка получен, хотя, возможно, и не оптимальный. Следовательно, как методы дробления решений, так и методы дробления параметров являются *последовательно гарантирующими*. С учётом труднорешаемости “внешней задачи” для интервальных линейных систем, это свойство радикальным образом выделяет методы дробления решений и методы дробления параметров из всех других подходов для вычисления оптимального решения.

Напротив, два других рассмотренных подхода к нахождению оптимальных решений “внешней задачи”, — Оеттли и Рона, — имея экспоненциальную в худшем случае трудоёмкость, дают желаемые “внешние” оценки объединённого множества решений лишь в финале, при естественном завершении своей работы, поскольку раньше мы не можем гарантировать то, что вычисленная оценка в действительности не превосходит $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}\}$ (соответственно, не меньше $\max\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}\}$). Следовательно, эти алгоритмы являются *финально гарантирующими*. Если размерность интервальной линейной системы достаточно велика (всего несколько десятков), то, в силу труднорешаемости “внешней задачи”, количество арифметических и логических операций, необходимое для того, чтобы задача была наверняка решена, начинает превосходить количество операций, выполнимое

на сколь угодно мощном компьютере за любое разумное время (час, день, год или даже столетие). В этих условиях совершенно нельзя быть уверенным, что финально гарантирующий алгоритм, будучи применённым к задаче, вообще завершит свою работу и, таким образом, что будет получено решение поставленной задачи. Иначе говоря, применяя финально гарантирующий алгоритм, мы рискуем совершенно попусту растратить время и деньги без того, чтобы получить хоть какой-то ответ к нашей задаче.

Этот пессимистичный прогноз особенно справедлив для пассивных переборных алгоритмов, какими являются подходы Оеттли-Прагера и Рона к оптимальному решению “внешней задачи” для интервальных линейных систем. Ситуация была бы более благоприятной, если бы эти алгоритмы являлись адаптивными: в этом случае их экспоненциальная трудоёмкость достигалась бы лишь на наихудших вариантах, а в среднем, для “не очень плохих задач”, алгоритмы работали бы с приемлемыми трудозатратами. Но, к сожалению, это не так.

Итак, финально гарантирующие алгоритмы оказываются малоприспособными для практического решения больших труднорешаемых задач, ответ на которые должен удовлетворять некоторым качественным требованиям. Естественный выход из создавшегося затруднения состоит в переконструировании алгоритма таким образом, чтобы он выдавал в процессе своего выполнения, до своего полного естественного завершения, некоторые несложно вычислимые промежуточные результаты, которые могут быть служить более или менее точными ответами к решаемой задаче. Именно это подразумевается определением последовательно гарантирующего алгоритма.

Отметим, что алгоритмы из [231, 223, 257] для нахождения оптимальных решений “внешней задачи” — всё-таки последовательно гарантирующие, но относительно “слабого внутреннего” оценивания, описанного в примере (С) из §1.3 в. Фактически, эти алгоритмы решают не “внешнюю”, а некоторую другую задачу для интервальной линейной системы, требующую оценивания $\min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}\}$ сверху и $\max\{x_\nu \mid x \in \Xi_{uni}\}$ снизу, иными словами, когда оценивание должно проводиться *слабым внутренним* образом.

Другой пример. З. Румпом в цикле работ [268, 269, 270, 272] и др. развит оригинальный подход к решению “внешней задачи” для систем алгебраических уравнений (как линейных, так и нелинейных), в основе которого — базирующийся на теореме Брауэра тест существования объединённого множества решений системы внутри заданного интервального вектора. Отправляясь от какого-нибудь приближенного точечного решения системы строится расширяющаяся последовательность интервальных векторов, для каждого из них проверяется тест существования. Итерирование прекращается, если последующий результат оказывается включенным в предыдущий. Поскольку требуемая внешняя интервальная оценка множества решений получается лишь после того, как выполнено условие остановки алгоритма, а до этого момента ничего определённого о промежуточных результатах сказать нельзя, то подход Румпа следует отнести к финально гарантирующим.

Наконец, для интервальной системы линейных уравнений $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ рассмотрим задачу о допусках [29, 216, 219, 183, 286, 291], т.е. задачу о внутреннем интервальном оценивании “допустимого множества решений”

$$\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \mathbf{A})(Ax \in \mathbf{b})\}.$$

Изложенный в [286, 291] “центровой подход” к её решению является, очевидно, последовательно гарантирующим: отыскание центра интервального решения сводится к максимизации вогнутого функционала и, следовательно, эффективно осуществляется за полиномиальное время, а дальнейшее “раздувание” центра до интервального решения задачи о

допусках хотя и выполняется экспоненциально сложными алгоритмами, но все его промежуточные результаты содержатся в $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Естественно, что признание какого-либо алгоритма последовательно гарантирующим или же финально гарантирующим не должно восприниматься как “окончательный приговор” для него. Лучше рассматривать наличие последовательной гарантии или её отсутствие лишь как ещё одну, дополнительную характеристику этого алгоритма, которая в некоторых случаях позволит более компетентно решить вопрос о его практической применимости. Несомненно, что ценность обладания этим качеством различна для различных алгоритмов и наивысшей она является для наиболее трудоёмких алгоритмов.

Например, значительная часть настоящей работы посвящена развитию “формального подхода” к решению различных задач внутреннего и внешнего оценивания множеств АЕ-решений интервальных систем уравнений. Формальный подход является по самой своей идее всего лишь финально гарантирующим: искомая интервальная оценка находится лишь по завершении процесса решения вспомогательного операторного уравнения, а это, как недавно было показано А.В. Лакеевым [194, 195], в большинстве случаев NP-трудная (труднорешаемая) задача. Тем не менее, при практическом решении с помощью “формального подхода” различных постановок для интервальных линейных систем $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ с “не слишком широкими” интервальными матрицами субдифференциальный метод Ньютона демонстрирует столь высокую вычислительную эффективность, что даже не вполне ясно, нужно ли в данной ситуации что-либо лучшее.

За время, прошедшее после введения в работе [288] в научный обиход понятий последовательно гарантирующего и финально гарантирующего алгоритмов выяснилось, что моделируемая ими ситуация не является столь уж экзотичной для современной практической информатики. Эффект преобладания сложности задач над возможностями вычислительных устройств характерен не только для интервального анализа, и совершенно независимо с ним столкнулись специалисты по искусственному интеллекту. В 1988 году, исследуя большие задач теории расписаний и планирования, Т. Дин и М. Бодди [142] предложили термин *anytime algorithm* для обозначения алгоритмов, в которых

- ответ доступен в любой момент выполнения алгоритма,
- по мере продолжения выполнения алгоритма качество ответа улучшается.

Как видим, понятие *anytime algorithms* (что можно вольно перевести как *в любое время (готовые предъявить ответ) алгоритмы*) соответствует понятию последовательно гарантирующих алгоритмов интервального анализа. Но термин *anytime algorithm* представляется неудачным в интервальном контексте (и не только), поэтому заменять им термины “последовательно/финально гарантирующий”, на наш взгляд, нецелесообразно.

Внутреннее оценивание множеств решений

Предмет этой главы диссертации — задачи внутреннего оценивания множеств решений интервальных систем уравнений. Несмотря на большую практическую важность таких задач, к примеру, в технической кибернетике и многих областях естествознания, успехи исследователей при их решении были достаточно скромными.

Ниже мы представляем два подхода к внутреннему оцениванию множеств решений, ориентированные на различные классы задач. С одной стороны, это весьма общий *формальный подход*, аналогичный развивавшемуся нами в Главе 3, а с другой — методика, основанная на тонких геометрических свойствах множеств решений интервальных линейных систем уравнений с неотрицательными матрицами.

5.1 Формальный подход

Первыми мы рассмотрим задачи внутреннего оценивания объединённого, допустимого и управляемого множеств решений интервальных систем общих нелинейных уравнений вида

$$F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}. \quad (2)$$

Далее, как и в §3.6, принципиален тот факт, что для $F(a, x)$ существует естественное интервальное расширение, т.е.

- 1) аналитическое выражение для $F(a, x)$ есть конечная комбинация символов переменных x_i , параметров a_j , четырёх арифметических операций и, возможно, ещё элементарных функций;
- 2) для рассматриваемых интервалов значений параметров все интервальные арифметические операции, интервальные расширения функций и т.п. определены.

Основой предлагаемого нами формального подхода к решению задачи внутреннего оценивания (1.20) являются следующие результаты:

Теорема 5.1.1 Пусть отображение $F : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ таково, что каждый из интервальных параметров a_1, a_2, \dots, a_l входит не более одного раза в первой степени в единственное из компонентных выражений F_1, F_2, \dots, F_m .

Если правильный интервальный вектор \mathbf{x} является формальным решением уравнения

$$F(\text{dual } \mathbf{a}, x) = \mathbf{b}, \quad (5.1)$$

то $\mathbf{x} \subseteq \Xi_{uni}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$, т.е. \mathbf{x} есть внутренняя интервальная оценка объединённого множества решений системы $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$.

Если правильный интервальный вектор \mathbf{x} является формальным решением уравнения

$$F(\text{dual } \mathbf{a}, x) = \text{dual } \mathbf{b}, \quad (5.2)$$

то $\mathbf{x} \subseteq \Xi_{ctrl}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$, т.е. \mathbf{x} есть внутренняя интервальная оценка управляемого множества решений системы $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$.

Доказательство. Первая часть условий, накладываемых Теоремой на вхождение в отображение F интервальных параметров (все из которых имеют E-неопределённость) в точности совпадает с теми, которые требуются Теоремой 2.1.2. Следовательно, в условиях доказываемой Теоремы точка \tilde{x} принадлежит объединённому множеству решений $\Xi_{uni}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \max_{a \in \mathbf{a}} F_i(a, x) \geq \underline{\mathbf{b}}_i, \\ \min_{a \in \mathbf{a}} F_i(a, x) \leq \overline{\mathbf{b}}_i, \\ i = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

Далее, если каждый из параметров системы a_1, a_2, \dots, a_l , имеющих интервальную неопределённость, входит не более одного раза в первой степени в компонентные выражения F_1, F_2, \dots, F_m , то для всех $i = 1, 2, \dots, m$

$$\max_{a \in \mathbf{a}} F_i(a, x) \quad \text{и} \quad \min_{a \in \mathbf{a}} F_i(a, x)$$

совпадают с

$$\overline{F_i(\mathbf{a}, x)} \quad \text{и} \quad \underline{F_i(\mathbf{a}, x)}$$

— верхними и нижними концами естественных интервальных расширений $F_i(\mathbf{a}, x)$. В свою очередь, в силу свойств арифметики Каухера эти значения совпадают с

$$\underline{F_i(\text{dual } \mathbf{a}, x)} \quad \text{и} \quad \overline{F_i(\text{dual } \mathbf{a}, x)}.$$

Итак, если выполнены условия доказываемой теоремы, касающиеся вхождений в F параметров с интервальной неопределённостью, то точка \tilde{x} принадлежит объединённому множеству решений $\Xi_{uni}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ интервальной системы уравнений (2) тогда и только тогда, когда справедлива система неравенств

$$\begin{cases} \underline{F_i(\text{dual } \mathbf{a}, x)} \geq \underline{\mathbf{b}}_i, \\ \overline{F_i(\text{dual } \mathbf{a}, x)} \leq \overline{\mathbf{b}}_i, \\ i = 1, 2, \dots, n, \end{cases}$$

равносильная включению

$$F(\text{dual } \mathbf{a}, \tilde{x}) \subseteq \mathbf{b}. \quad (5.3)$$

Наконец, мы способны завершить доказательство Теоремы. Пусть правильный интервальный вектор \mathbf{x} является решением уравнения (5.1) и $\tilde{x} \in \mathbf{x}$. Принимая во внимание свойство монотонности по включению интервальных арифметических операций в $\mathbb{K}\mathbb{R}$, имеем

$$F(\text{dual } \mathbf{a}, \tilde{x}) \subseteq F(\text{dual } \mathbf{a}, \mathbf{x}) = \mathbf{b}.$$

Таким образом, $\tilde{x} \in \Xi_{uni}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$, а поскольку это верно для любого $\tilde{x} \in \mathbf{x}$, то $\mathbf{x} \subseteq \Xi_{uni}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$, что и требовалось. ■

Теорема 5.1.2 *Если правильный интервальный вектор \mathbf{x} является формальным решением системы уравнений*

$$F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}, \tag{5.4}$$

то $\mathbf{x} \subseteq \Xi_{tol}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$, т.е. \mathbf{x} есть внутренняя интервальная оценка допустимого множества решений интервальной системы $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$.^{5.1}

Доказательство этого утверждения можно провести совершенно аналогично доказательству Теоремы 5.1.1, но мы воспользуемся другим путём, более поучительным в идейном отношении.

Отметим, прежде всего, следующую полезную характеристику допустимого множества решений:

$$\begin{aligned} \Xi_{tol}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall a \in \mathbf{a})(\exists b \in \mathbf{b})(F(a, x) = b)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall a \in \mathbf{a})(F(a, x) \in \mathbf{b})\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \{F(a, x) \mid a \in \mathbf{a}\} \subseteq \mathbf{b}\}. \end{aligned}$$

Далее, если \mathbf{x} — правильное формальное решение системы уравнений (5.4) и $\tilde{x} \in \mathbf{x}$, то для каждой компоненты $F_i(a, x)$ отображения F имеем в силу монотонности интервальных арифметических операций

$$\{F_i(a, \tilde{x}) \mid a \in \mathbf{a}\} \subseteq F_i(\mathbf{a}, \tilde{x}) \subseteq F(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = \mathbf{b}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Таким образом, в целом

$$\begin{aligned} \{F(a, \tilde{x}) \mid a \in \mathbf{a}\} &= \left\{ \left(\begin{array}{c} F_1(a, \tilde{x}) \\ \vdots \\ F_m(a, \tilde{x}) \end{array} \right) \mid a \in \mathbf{a} \right\} \subseteq \left(\begin{array}{c} \{F_1(a, \tilde{x}) \mid a \in \mathbf{a}\} \\ \vdots \\ \{F_m(a, \tilde{x}) \mid a \in \mathbf{a}\} \end{array} \right) \\ &\subseteq \left(\begin{array}{c} F_1(\mathbf{a}, \mathbf{x}) \\ \vdots \\ F_m(\mathbf{a}, \mathbf{x}) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m \end{array} \right) = \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Итак, $\{F(a, \tilde{x}) \mid a \in \mathbf{a}\} \subseteq \mathbf{b}$. Поскольку эта принадлежность верна для любого $\tilde{x} \in \mathbf{x}$, то $\mathbf{x} \subseteq \Xi_{tol}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$, что и требовалось. ■

^{5.1}Иными словами, по терминологии, принятой в работах [216, 219, 286, 291], вектор \mathbf{x} есть решение соответствующей задачи о допусках.

Определение 5.1.1 Для интервальной системы

$$F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$$

мы будем называть системы уравнений (5.1)–(5.4) уравнениями в дуализациях, соответствующим её объединённому, управляемому и допустимому множеству решений.

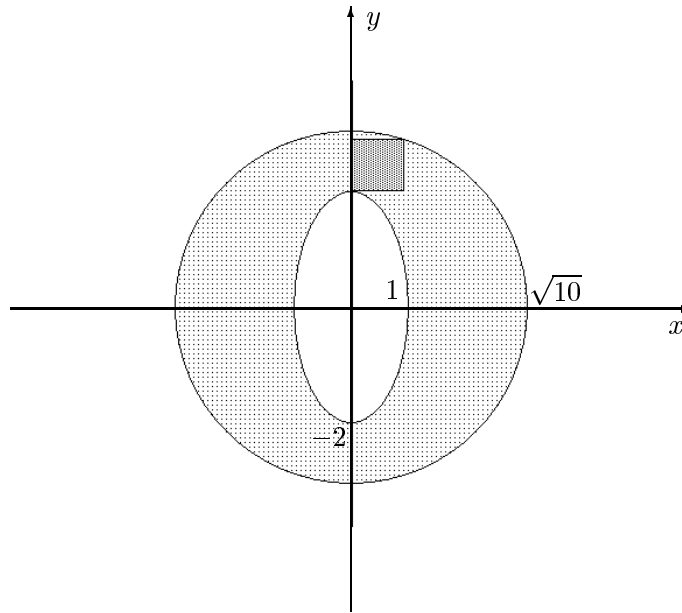


Рис. 5.1: Внутреннее оценивание объединённого множества решений интервального уравнения (5.5).

В качестве простейшего иллюстративного примера рассмотрим интервальное уравнение от двух неизвестных

$$[1, 2] x^2 + y^2 = [4, 10]. \quad (5.5)$$

Его объединённым множеством решений является, как нетрудно проверить, изображенный на Рисунке 5.1 круг радиуса $\sqrt{10}$ с центром в начале координат с высеченным из него эллипсом. Значения $x = [0, 1]$ и $y = [2, 3]$ образуют формальное решение уравнения в дуализациях

$$[2, 1] x^2 + y^2 = [4, 10],$$

и из Рисунка 5.1 видно что, интервальный вектор $([0, 1], [2, 3])^T$ (заштрихованный более тёмным тоном) действительно является внутренней оценкой объединённого множества решений, даже максимальной по включению.

Итак, предложенный выше “формальный подход” позволяет свести задачу внутреннего интервального оценивания обобщённых множеств решений к задаче решения *одной* формально интервальной, а фактически неинтервальной системы уравнений — уравнения в дуализациях, — то есть к традиционной задаче численного анализа. Естественно было бы желать, чтобы эта редукция могла быть осуществлена для возможно более широкого класса функций F , а не только для тех, которые имеют простые вхождения управляемых переменных и очерчены в Теореме 5.1.1. Расширение запаса отображений F , для которых

основные задачи (1.20) и (1.21) могут быть решены формальным подходом либо его модификациями, а также распространение формального подхода на более общие множества решений являются интересными открытыми задачами.

Практичность и эффективность формального подхода решающим образом зависят от эффективности алгоритмов для решения уравнений в дуализациях (5.1)–(5.4). Уместно отметить, что для этой цели мы в большинстве случаев едва ли сможем воспользоваться какими-либо методами исключения, символьными преобразованиями и т.п. Препятствием являются недостаточные алгебраические свойства \mathbb{KR} . И хотя они значительно лучше, чем у классической интервальной арифметики, отсутствие полноценной дистрибутивности в \mathbb{KR} делает невозможной даже такую простейшую операцию, как например, приведение подобных членов. По этой причине все алгоритмы, реализующие формальный подход, являются (по крайней мере на данный момент) существенно *численными*.

Для общих нелинейных систем конструирование численных методов для решения уравнения в дуализациях — также большая открытая проблема. При развитии тех или иных подходов к ней главную роль должны, по-видимому, играть конкретные потребности практики, хотя и в общем случае ситуация здесь отнюдь не безнадёжная. Несмотря на то, что мы оказываемся лишёнными таких эффективных в линейном случае инструментов, как субдифференциальный метод Ньютона и его обобщения (см. Главу 6), всегда имеется возможность попытаться использовать универсальную схему стационарных итерационных процессов и её многочисленные модификации. Именно, пусть исходное уравнение в дуализациях (5.1)–(5.4) может быть эквивалентно преобразовано к виду, в котором переменная выделена в одной из частей “в чистом виде”, т.е.

$$x = T(\mathbf{a}, \mathbf{b}, x), \quad (5.6)$$

где $T : \mathbb{KR}^n \rightarrow \mathbb{KR}^n$ является оператором сжатия. Тогда для любого начального приближения $\mathbf{x}^{(0)}$ последовательность итераций

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = T(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x}^{(k)})$$

сходится к требуемому формальному решению для (5.6), а также для (5.1)–(5.4) (см. например, [50, 47, 76]).

Другая привлекательная возможность решения уравнений в дуализациях состоит в том, чтобы прибегнуть к помощи какого-либо из пакетов-решателей нелинейных систем, основанных на технике “распространения ограничений” (“constraint propagation”), интенсивно развивающейся в последние годы. Конкретно мы рекомендуем очень мощный решатель UniCalc [128], разработанный в Новосибирском филиале РосНИИ Искусственного Интеллекта и в настоящее время доступный на рынке программных продуктов.^{5.2}

5.2 Внутреннее оценивание для интервальных линейных систем

Краеугольным камнем формального подхода к внутреннему оцениванию множеств решений интервальных линейных систем является следующая

^{5.2}Информация о решателе UniCalc находится, например, в Интернете на сайте РосНИИ Искусственного Интеллекта <http://www.artint.ru/projects/unicalc.asp>.

Теорема 5.2.1 Пусть \mathbf{A}^c и \mathbf{b}^c — характеристические матрица и правая часть ИСЛАУ $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$, соответствующие множеству АЕ-решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Если правильный интервальный вектор \mathbf{x} является формальным решением уравнения

$$\mathbf{A}^c x = \mathbf{b}^c, \quad (5.7)$$

то $\mathbf{x} \subseteq \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, т.е. интервальный вектор \mathbf{x} является решением задачи внутреннего интервального оценивания (2.52).

Как и ранее, мы называем интервальную систему уравнений (5.7) в $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ уравнением в дуализациях соответствующим рассматриваемому множеству АЕ-решений интервальной линейной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$.

Доказательство. Предположим, что правильный интервальный вектор \mathbf{x} является формальным решением системы (5.7) и $\tilde{x} \in \mathbf{x}$. Тогда в силу монотонности интервальных арифметических операций по включению

$$\mathbf{A}^c \tilde{x} \subseteq \mathbf{A}^c \mathbf{x} = \mathbf{b}^c,$$

т.е. $\tilde{x} \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ в силу Теоремы 2.3.2. ■

Перечислим отдельно наиболее важные частные случаи вышедоказанного общего результата:

- Если правильный интервальный вектор \mathbf{x} есть формальное решение уравнения

$$(\text{dual } \mathbf{A}) x = \mathbf{b},$$

то $\mathbf{x} \subseteq \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, т.е. \mathbf{x} является внутренней интервальной оценкой объединённого множества решений системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$.^{5.3}

- Если правильный интервальный вектор \mathbf{x} есть формальное решение уравнения

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b},$$

то $\mathbf{x} \subseteq \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, т.е. \mathbf{x} является внутренней интервальной оценкой допустимого множества решений системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ (или, другими словами, решением задачи о допусках для системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$).^{5.4}

- Если правильный интервальный вектор \mathbf{x} есть формальное решение уравнения

$$(\text{dual } \mathbf{A}) x = \text{dual } \mathbf{b},$$

то $\mathbf{x} \subseteq \Xi_{ctrl}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, т.е. \mathbf{x} является внутренней интервальной оценкой управляемого множества решений для системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$.

^{5.3}Этот элегантный и практичный результат был одновременно и независимо получен автором и Л. В. Куприяновой в 1993 году и впервые доложен на международной конференции INTERVAL'94, Санкт-Петербург, 7–10 марта 1994 года.

^{5.4}На возможность такой методики оценивания, по-видимому, впервые указывал В.С. Зюзин [39], хотя очень кратко (одним предложением) и в косвенной форме.

К примеру, непосредственными вычислениями нетрудно убедиться, что формальным решением модельной системы (2.40) является правильный интервальный вектор $([-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}], [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}])^\top$. Рисунок 2.1 показывает, что он действительно является хорошей внутренней интервальной оценкой допустимого множества решений Ξ_{tol} этой системы. С другой стороны, если формальное решение уравнения в дуализациях (5.7) не существует, или существует, но не все его компоненты правильные, то, как было отмечено выше, это не обязательно свидетельствует о том, что соответствующее множество решений пусто и задача внутреннего оценивания (2.52) несовместна.

Отметим, что для интервальной системы линейных уравнений А. В. Лакеев недавно доказал NP-трудность задачи нахождения формального решения в полной арифметике Каухера [194, 195]. Тем не менее, несмотря на этот неблагоприятный факт, для интервальных линейных систем с “не очень широкими” интервалами имеется ряд эффективных численных методов, быстро вычисляющих формальное решение [292, 114]. Таковыми являются *субдифференциальный метод Ньютона* [292] (превращающийся для некоторых случаев в квазидифференциальный метод Ньютона) и различные модификации одношаговых стационарных итерационных методов [48, 114]. В целом можно считать, что для интервальных линейных систем вида

$$Cx = d$$

проблема нахождения формального решения интервальных уравнений решается более или менее успешно.

5.3 Максимальность внутренних оценок

Рассмотрим вопрос о качестве интервального решения задачи (1.20), которое может быть получено с использованием формального подхода, или, иначе, вопрос о размерах интервальной оценки множеств решений $\Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$. Замечательное свойство формального подхода в применении к интервальным линейным системам состоит в том, что он практически всегда даёт внутреннюю интервальную оценку множества решений, которая *максимальна по включению*. Для объединённого множества решений ИСЛАУ с невырожденными матрицами этот факт впервые был обнаружен Л. В. Куприяновой [193]. Впоследствии С. П. Шарый нашел другую формулировку этого результата и доказал максимальность внутренних оценок, получаемых с помощью формального подхода для допустимого и управляемого множеств решений [292]. Следующее более общее утверждение впервые было доказано С. П. Шарым в [115, 293]:

Теорема 5.3.1 *Если правильный интервальный вектор является максимальным по включению формальным решением уравнения в дуализациях (5.7), то он также является максимальным по включению интервальным вектором содержащимся во множестве $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, т.е. предоставляет максимальное решение задачи внутреннего оценивания (2.52).*

В частности, если правильное формальное решение уравнения в дуализациях единственно (см. §6.3 нашей работы и статью А.В. Лакеева [63]), то оно является максимальным по включению решением задачи (2.52).

Доказательство. Ниже нам потребуется следующее вспомогательное представление: если \mathbf{v} — это правильный интервальный n -вектор и $\mathbf{C} = (\mathbf{c}_{ij})$ — (произвольная) интервальная $m \times n$ -матрица, то

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{v} = \bigvee_{v \in \mathbf{v}} \mathbf{C} \cdot v. \quad (5.8)$$

Действительно, если $\mathbf{C} \cdot \mathbf{v} = ((\mathbf{C} \cdot \mathbf{v})_1, (\mathbf{C} \cdot \mathbf{v})_2, \dots, (\mathbf{C} \cdot \mathbf{v})_m)^\top$, то, используя (2.31) и дистрибутивность (2.17) сложения относительно операции “ \bigvee ”, мы получим

$$\begin{aligned} (\mathbf{C} \cdot \mathbf{v})_i &= \sum_{j=1}^n \mathbf{c}_{ij} v_j = \sum_{j=1}^n \bigvee_{v_j \in \mathbf{v}_j} \mathbf{c}_{ij} v_j \\ &= \bigvee_{v_1 \in \mathbf{v}_1} \bigvee_{v_2 \in \mathbf{v}_2} \cdots \bigvee_{v_n \in \mathbf{v}_n} \sum_{j=1}^n \mathbf{c}_{ij} v_j \\ &= \bigvee_{v \in \mathbf{v}} \sum_{j=1}^n \mathbf{c}_{ij} v_j = \bigvee_{v \in \mathbf{v}} (\mathbf{C} \cdot v)_i. \end{aligned}$$

Обратимся теперь к доказательству Теоремы, которое мы поведем *от противного*. Обозначим правильное формальное решение уравнения (5.7) через \mathbf{x} и предположим, что в противоречие с формулировкой Теоремы найдется такой правильный интервальный вектор \mathbf{y} , что

$$\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \supseteq \mathbf{y} \supset \mathbf{x}.$$

Используя монотонность интервальных арифметических операций в \mathbb{KR} по включению, нетрудно получить

$$\mathbf{A}^c \cdot \mathbf{y} \supset \mathbf{A}^c \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}^c,$$

причём точное равенство на месте включения здесь невозможно в силу предположенной максимальнойности \mathbf{x} . Далее, представление (5.8) приводит к

$$\bigvee_{y \in \mathbf{y}} \mathbf{A}^c \cdot y \supset \mathbf{b}^c, \quad (5.9)$$

и мы можем заключить, что

$$\mathbf{A}^c \cdot \tilde{y} \not\subseteq \mathbf{b}^c \quad (5.10)$$

для некоторого (по крайней мере, одного) $\tilde{y} \in \mathbf{y}$. В противном случае, если бы для всех $y \in \mathbf{y}$ имело место $\mathbf{A}^c \cdot y \subseteq \mathbf{b}^c$, то было бы справедливым включение, обратное к (5.9). Но в силу Теоремы 2.3.2 отношение (5.10) эквивалентно $\tilde{y} \notin \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Следовательно, $\mathbf{y} \not\subseteq \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. ■

Исчерпывающее исследование условий, при которых формальный подход приводит к максимальным внутренним интервальным оценкам множеств решений ИСЛАУ было принято И. А. Шарой в [99, 277]. Основной результат этих работ — следующая важная

Теорема 5.3.2 (теорема Ирины) *Если интервальная матрица \mathbf{A} в каждом столбце имеет по крайней мере один элемент, не содержащий нуля, то всякое правильное формальное решение уравнения в дуализациях является максимальной по включению внутренней оценкой соответствующего множества АЕ-решений.*

Если же $\mathbf{A}^\exists = \mathbf{A}$, то это условие является даже необходимым для максимальной внутренней интервальной оценки.

Доказательство этого утверждения является непростым, как идейно, так и технически, и требует более глубокого проникновения в свойство монотонности по включению интервальных арифметик. В частности, оказывается, что при некоторых естественных ограничениях на операнды интервальные арифметические операции являются даже *строго монотонными по включению*. Введение и исследование этого усиленного свойства монотонности — интересный побочный результат работ [99, 277].

В качестве примера рассмотрим формальное решение интервальных систем

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 1] \\ [-1, 2] & [4, 2] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [-2, 2] \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 1] \\ [2, -1] & [4, 2] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [-2, 2] \end{pmatrix}, \quad (5.11)$$

которое является правильным интервальным вектором $(0, [-1, 1])^\top$. В соответствии с Теоремой 5.3.2 он является максимальной по включению внутренней оценкой для множества $(\forall\exists)(\exists)$ -решений и для множества $(\forall\exists)(\exists)$ -решений модельной системы (2.40). То, что это действительно так, можно убедиться из Рисунка 2.2. Заметим, что “сплюснутость” полученной оценки по первой координате может оказаться весьма нежелательной на практике. Для остальных множеств АЕ-решений, изображенных на Рисунке 2.1 и 2.2, оценки изнутри, вычисляемые как формальные решения уравнений в дуализациях, являются телесными интервалами, не вырожденными ни по какой из компонент. Например, для интервальных линейных систем

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [1, -2] \\ [-1, 2] & [4, 2] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [-2, 2] \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} [2, 4] & [1, -2] \\ [2, -1] & [2, 4] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [-2, 2] \end{pmatrix}$$

внутренняя интервальная оценка для множеств $(\forall\exists)(\exists)$ -решений и $(\forall\exists)(\exists)$ -решений, получаемая по нашей методике, — вектор

$$\begin{pmatrix} [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \end{pmatrix},$$

— действительно покрывает значительные части соответствующих множеств.

В связи со сказанным возникает следующий важный практический вопрос. Каким образом можно влиять на размеры и/или расположение интервального решения внутренней задачи (1.20), получаемого посредством формального подхода? Решению этой проблемы посвящён следующий параграф работы.

5.4 Коррекция внутренних оценок

Наиболее серьёзным недостатком формального подхода в применении к задаче внутреннего оценивания множеств решений является то, что он не позволяет провести её исчерпывающее исследование. Если решение уравнения в дуализациях существует и является правильным, то всё в порядке, и мы получаем требуемый ответ. Напротив, если уравнение в дуализациях не имеет решений, или решения есть, но они не являются правильными, мы ничего не можем заключить о пустоте или непустоте множества решений $\Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$. Например, одномерные уравнения

$$[-1, 1] x = [1, 2]$$

и

$$[-1, 1]x = [-1, 2]$$

вообще не имеют формальных решений. Это следует из того, что в их левых частях для любого интервала \mathbf{x} произведение $[-1, 1]\mathbf{x}$ всегда является уравновешенным интервалом, равным $[-|\mathbf{x}|, |\mathbf{x}|]$ при правильном \mathbf{x} и $[-\langle \text{pro } \mathbf{x} \rangle, \langle \text{pro } \mathbf{x} \rangle]$ при неправильном \mathbf{x} , тогда как правая часть обоих уравнений неуравновешена. Но у первого из рассматриваемых интервальных уравнений допустимое множество решений пусто, а у второго непусто: $\Xi_{tot} = [-1, 1]$.

Нередко пользователя также могут не удовлетворить получаемые с помощью формального подхода расположение или размеры интервального решения рассматриваемой задачи внутреннего оценивания. Эффективным инструментом коррекции подобных ситуаций может служить следующая

Теорема 5.4.1 (лемма “о сжатии и раздутии интервальных параметров”)

Пусть интервальный вектор \mathbf{x} является решением задачи (1.20) внутреннего оценивания множества решений интервального уравнения $F(\mathbf{a}, x) = \mathbf{b}$ с распределением неопределённостей, задаваемым дизъюнктными разложениями $\mathbf{a} = \mathbf{a}^\vee + \mathbf{a}^\exists$ и $\mathbf{b} = \mathbf{b}^\vee + \mathbf{b}^\exists$, т.е. $\mathbf{x} \subseteq \Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$. Если интервальные векторы $\tilde{\mathbf{a}}$ и $\tilde{\mathbf{b}}$ и их дизъюнктные разложения

$$\tilde{\mathbf{a}} = \tilde{\mathbf{a}}^\vee + \tilde{\mathbf{a}}^\exists \quad \text{и} \quad \tilde{\mathbf{b}} = \tilde{\mathbf{b}}^\vee + \tilde{\mathbf{b}}^\exists$$

таковы, что

$$\tilde{\mathbf{a}}^\vee \subseteq \mathbf{a}^\vee, \quad \tilde{\mathbf{a}}^\exists \supseteq \mathbf{a}^\exists, \quad (5.12)$$

$$\tilde{\mathbf{b}}^\vee \subseteq \mathbf{b}^\vee, \quad \tilde{\mathbf{b}}^\exists \supseteq \mathbf{b}^\exists, \quad (5.13)$$

то интервальный вектор \mathbf{x} также является решением задачи внутреннего оценивания множества решений интервального уравнения $F(\tilde{\mathbf{a}}, x) = \tilde{\mathbf{b}}$ с тем же самым распределением неопределённостей, т.е. $\mathbf{x} \subseteq \Xi_{\alpha\beta}(F, \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}})$.

Доказательство. Если предикат

$$(\forall \hat{a} \in \mathbf{a}^\vee)(\forall \hat{b} \in \mathbf{b}^\vee)(\exists \check{a} \in \mathbf{a}^\exists)(\exists \check{b} \in \mathbf{b}^\exists)(F(\hat{a} + \check{a}, x) = \hat{b} + \check{b})$$

выполнен для некоторого вектора $x \in \mathbb{R}^n$, то предикат

$$(\forall \hat{a} \in \tilde{\mathbf{a}}^\vee)(\forall \hat{b} \in \tilde{\mathbf{b}}^\vee)(\exists \check{a} \in \tilde{\mathbf{a}}^\exists)(\exists \check{b} \in \tilde{\mathbf{b}}^\exists)(F(\hat{a} + \check{a}, x) = \hat{b} + \check{b})$$

тем более выполнен для такого x при допущениях (5.12)–(5.13). Следовательно,

$$\begin{aligned} \Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{a} \in \mathbf{a}^\vee)(\forall \hat{b} \in \mathbf{b}^\vee)(\exists \check{a} \in \mathbf{a}^\exists)(\exists \check{b} \in \mathbf{b}^\exists)(F(\hat{a} + \check{a}, x) = \hat{b} + \check{a})\} \\ &\subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \hat{a} \in \tilde{\mathbf{a}}^\vee)(\forall \hat{b} \in \tilde{\mathbf{b}}^\vee)(\exists \check{a} \in \tilde{\mathbf{a}}^\exists)(\exists \check{b} \in \tilde{\mathbf{b}}^\exists)(F(\hat{a} + \check{a}, x) = \hat{b} + \check{a})\} \\ &= \Xi_{\alpha\beta}(F, \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}}), \end{aligned}$$

и поэтому $\mathbf{x} \subseteq \Xi_{\alpha\beta}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ влечет $\mathbf{x} \subseteq \Xi_{\alpha\beta}(F, \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}})$. ■

Обратимся к рассмотренному выше примеру интервальной системы $[-1, 1]x = [-1, 2]$ и её допустимого множества решений. Если сжать правую часть этого уравнения до $[-1, 1]$, то получившееся уравнение $[-1, 1]x = [-1, 1]$ становится разрешимым и его формальное решение $[-1, 1]$ совпадает с допустимым множеством решений исходного уравнения.

Дадим теперь переформулировку основного результата этого параграфа в применении к интервальным линейным системам вида (5).

Теорема 5.4.2 *Если интервальный вектор \mathbf{x} является внутренней оценкой множества АЕ-решений $\Xi(\mathbf{A}^c, \mathbf{b}^c)$ интервальной линейной системы, соответствующего характеристической матрице \mathbf{A}^c и вектору \mathbf{b}^c , то он также является внутренней интервальной оценкой множества АЕ-решений $\Xi(\tilde{\mathbf{A}}^c, \tilde{\mathbf{b}}^c)$ интервальной линейной системы, соответствующего характеристической матрице $\tilde{\mathbf{A}}^c$ и вектору $\tilde{\mathbf{b}}^c$ такими, что*

$$\tilde{\mathbf{A}}^c \subseteq \mathbf{A}^c \quad \text{и} \quad \mathbf{b}^c \subseteq \tilde{\mathbf{b}}^c.$$

Доказательство. Для любой точки x принадлежность $x \in \Xi(\mathbf{A}^c, \mathbf{b}^c)$ равносильна включению

$$\mathbf{A}^c \cdot x \subseteq \mathbf{b}^c$$

в полной интервальной арифметике. Пользуясь далее условиями теоремы и свойством монотонности по включению, получим

$$\tilde{\mathbf{A}}^c \cdot x \subseteq \mathbf{A}^c \cdot x \subseteq \mathbf{b}^c \subseteq \tilde{\mathbf{b}}^c,$$

т.е.

$$\tilde{\mathbf{A}}^c \cdot x \subseteq \tilde{\mathbf{b}}^c,$$

что означает принадлежность точки x также и множеству решений $\Xi(\tilde{\mathbf{A}}^c, \tilde{\mathbf{b}}^c)$. Следовательно $\Xi(\mathbf{A}^c, \mathbf{b}^c) \subseteq \Xi(\tilde{\mathbf{A}}^c, \tilde{\mathbf{b}}^c)$, откуда и следует доказываемое утверждение. ■

Несмотря на тривиальность доказательств Теорем 5.4.1–5.4.2, следствия этих результатов являются чрезвычайно важными для вычислительной практики. Именно, если пользователь не удовлетворен результатами “лобового” применения формального подхода к задаче внутреннего оценивания множества решений, то ему имеет смысл попробовать решить тем же методом ту же задачу для вспомогательной интервальной системы, у которой параметры, соответствующие \exists -неопределённости, “сжаты”, а параметры, соответствующие \forall -неопределённости, “раздуты”. Применение формального подхода к такой модифицированной интервальной системе очень часто позволяет получать интервальные решения, которые действительно лучше по форме и/или расположению, более телесные, в частности. Иногда с помощью этой несложной методики можно находить внутренние оценки множеств решений даже для тех случаев, когда уравнение в дуализациях, выписанное по исходной системе уравнений, не имеет правильных решений.

Рассмотрим конкретные примеры. Для интервальной линейной системы

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [-1, 1] \\ [-1, 1] & [2, 4] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-3, 3] \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

из [216, 219], объединённое множество решений и множество $(\exists \forall)_{\exists \exists}(\exists)$ -решений имеют “бабочкообразные” конфигурации, изображенные на Рисунке 5.2. Если для их внутреннего

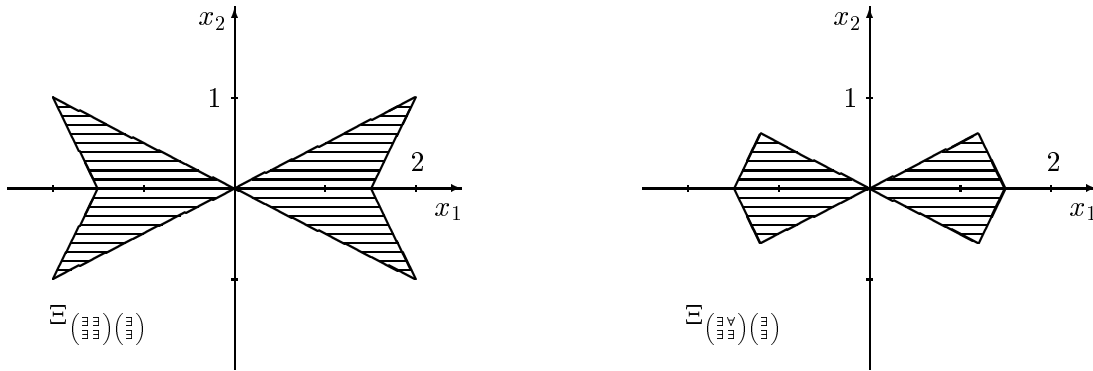


Рис. 5.2: “Почти несвязные” множества решений интервальной линейной системы (5.14).

оценивания напрямую воспользоваться формальным подходом, то для обеих множеств мы получим оценки $([-1.5, 1.5], 0)^T$, сплюсненные по второй координате. Заменим в векторе правой части первую компоненту на интервал $[1, 3]$ и вновь применим для внутреннего оценивания множества решений получившейся ИСЛАУ формальный подход. Теперь решением соответствующих уравнений в дуализациях будут интервальные векторы

$$\begin{pmatrix} [0.25, 1.5] \\ [-0.125, 0.125] \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} [\frac{2}{7}, \frac{10}{7}] \\ [-\frac{1}{7}, \frac{1}{7}] \end{pmatrix},$$

покрывающие более значительные части множеств решений, что может оказаться более предпочтительным для заказчика.

Ещё пример. Предположим, что для интервальной линейной системы

$$\begin{pmatrix} [2, 3] & 1 \\ 1 & [2, 3] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-5, 5] \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

требуется найти внутреннюю интервальную оценку объединённого множества решений, изображенного на Рисунке 5.4. Прямое применение Теоремы 5.2.1 и вычисление формального решения уравнения в дуализациях для (5.15) приводит к интервальному вектору $([-3, 3], [1, -1])^T$, который имеет неправильную вторую компоненту и, следовательно, не может быть проинтерпретирован как внутренняя интервальная оценка. Но ведь ясно, что объединённое множество решений рассматриваемой системы непусто и даже внутренность его тоже непуста!

Причина неудачи формального подхода заключается в специфическом строении множеств решений системы (5.15). Как известно, в общем случае множества АЕ-решений могут быть довольно сложно устроенными невыпуклыми (хотя и связными) телами. Но в той ситуации, с которой мы имеем дело, множества решений оказываются почти несвязными. Более точно, они состоят из нескольких компонент, которые касаются друг друга в единственной точке — начале координат. В подобных ситуациях не следует ожидать получения решения одним “кавалерийским наскоком”, так как внутренняя оценка множества решений таких систем в принципе не может быть адекватно представлена единственным интервалом, покрывающим все разрозненные и слабо связанные части множества решений (принадлежащие разным ортантам пространства \mathbb{R}^n). Формальный подход “пытается”

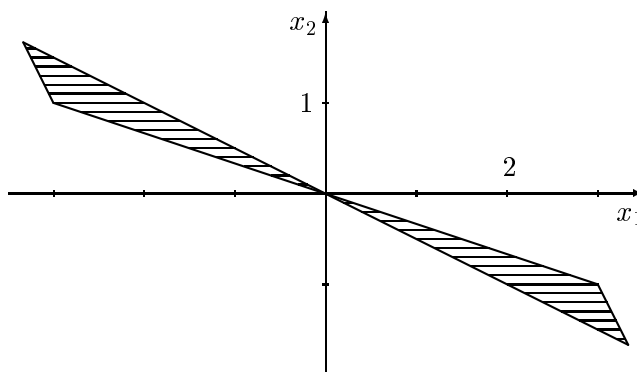


Рис. 5.3: “Почти несвязное” объединённое множество решений интервальной линейной системы (5.15).

найти один интервальный вектор, который бы принадлежал всем этим слабо связанным областям и, конечно, терпит неудачу.

Как мы можем преодолеть это затруднение? Естественный выход состоит в том, чтобы искать решение задачи внутреннего оценивания не как единственный интервальный вектор, а в виде объединения нескольких, возможно непересекающихся, интервалов, покрывающих множество решений с желаемой степенью полноты. Точное их число может зависеть от конкретной системы, её размерности и желаний заказчика

Главными причинами, вызывающими плохую “почти несвязную” конфигурацию множества решений и, как следствие, плохие результаты лобового применения формального подхода, являются

- 1) наличие в интервальном векторе правых частей одновременно как нулевых компонент, так и компонент, содержащих нуль в своей внутренности;
- 2) нульсодержащие интервалы в матрице ИСЛАУ.

Таким образом, правильная тактика решения задачи внутреннего оценивания множеств решений интервальных линейных систем уравнений должна включать

- порождение согласно теореме “о сжатии и раздутии коэффициентов” вспомогательных систем, у которых в правой части не присутствуют одновременно нулевые и нульсодержащие компоненты;
- отдельное решение для полученных вспомогательных ИСЛАУ задачи внутреннего оценивания множеств решений.

Полный ответ задачи внутреннего оценивания получается далее путем объединения этих отдельных ответов для подзадач.

Например, для системы (5.15) заменим характеристический вектор правой части на $([5, 4], 0)^T$, такой что $([5, 4], 0)^T \subseteq ([-5, 5], 0)^T$, оставляя характеристическую матрицу ИСЛАУ неизменной. Находя формальное решение уравнения в дуализациях

$$\begin{pmatrix} [3, 2] & 1 \\ 1 & [3, 2] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [5, 4] \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5.16}$$

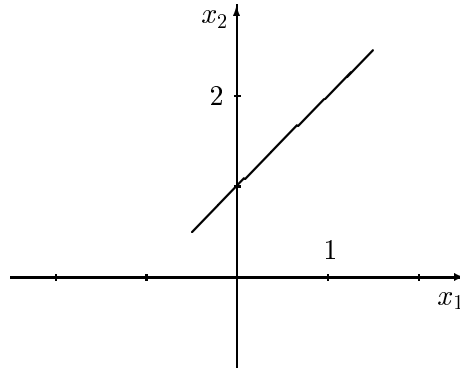


Рис. 5.4: Нетелесное объединённое множество решений интервальной линейной системы (5.17).

мы получим в качестве искомой внутренней оценки объединённого множества решений для (5.15) телесный интервальный вектор $([2, 2.4], [-1, -0.8])^\top$. Заметим, что для получения такой хорошей оценки нам пришлось сменить во вспомогательной ИСЛАУ (5.16) тип неопределённости второй компоненты правой части: он стал другим, отличным от того, что присутствовал в исходной ИСЛАУ.

Конечно, возможны ситуации, когда внутренность множества решений пуста и оно в принципе не может иметь “хорошей” внутренней оценки. Рассмотрим, например, ИСЛАУ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [0, 4] \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5.17)$$

Его объединённое множество решений — отрезок прямой, изображенный на Рисунке 5.4, для которого телесной внутренней оценки не существует в принципе. Мы должны уметь различать такие ситуации на практике.

5.5 Интервальные линейные системы с неотрицательными матрицами

Если матрица интервальной линейной системы является неотрицательной, то оказывается, что её множества решений имеют очень интересное и тонкое геометрическое свойство, которое можно охарактеризовать как *монотонность конфигурации*. Основываясь на этом свойстве, впервые отмеченном в [282, 283, 284], мы развиваем ещё одну методику внутреннего интервального оценивания множеств решений ИСЛАУ с неотрицательными не обязательно квадратными матрицами, которая в ряде случаев может оказаться разумной альтернативой формальному подходу.

Итак, кроме неотрицательности мы не накладываем никаких ограничений (квадратность, невырожденность и т.п.) на интервальную матрицу системы, но при этом постановка задачи должна быть скорректирована на случай неограниченного множества решений. В этой ситуации мы, как и в §4.4, будем искать внутреннюю оценку для пересечения множества решений с некоторым заранее заданным интервальным вектором \mathbf{U} , т.е. решать не (2.52), а задачу

Для интервальной линейной системы уравнений $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ и кванторных матрицы α и вектора β тех же размеров, что и \mathbf{A} и \mathbf{b} соответственно найти внутреннюю интервальную оценку для пересечения множества АЕ-решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ с некоторым интервальным вектором \mathbf{U} .

(5.18)

5.5 а Теоретическая основа

Зафиксируем натуральный индекс $\nu \in \{1, 2, \dots, n\}$ и, аналогично тому, как это сделано в §4.4, рассмотрим в пространстве \mathbb{R}^n прямую l с параметрическим уравнением

$$\begin{cases} x_1 = r_1, \\ \dots \\ x_{\nu-1} = r_{\nu-1}, \\ x_\nu = t, \\ x_{\nu+1} = r_{\nu+1}, \\ \dots \\ x_n = r_n \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R} \text{ — параметр}),$$

параллельную ν -ой координатной оси. Каждая такая прямая полностью задается указанием $(n - 1)$ -мерного вещественного вектора $r = (r_1, \dots, r_{\nu-1}, r_{\nu+1}, \dots, r_n)^\top$, и для явного указания параметров этой прямой мы, как и ранее, используем обозначение $l(r)$. Пусть также

$$\underline{\Omega}_\nu(r) = \min\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta} \cap l(r)\},$$

$$\overline{\Omega}_\nu(r) = \max\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta} \cap l(r)\}$$

— соответственно наименьшее и наибольшее значения ν -ой координаты точек из пересечения $l(r)$ с множеством решений интервальной линейной системы (5) (в случае $\Xi_{\alpha\beta} \cap l(r) = \emptyset$ мы полагаем $\underline{\Omega}_\nu(r) = +\infty$ и $\overline{\Omega}_\nu(r) = -\infty$).

Наша ближайшая цель — вывод явных выражений для функций $\underline{\Omega}_\nu(r)$ и $\overline{\Omega}_\nu(r)$. Пусть $\mathbf{A}^c = (\mathbf{a}_{ij}^c)$ и $\mathbf{b}^c = (\mathbf{b}_i^c)$ — характеристические матрица и правая часть рассматриваемой ИСЛАУ, соответствующие множеству решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. “Подставим” параметрическое уравнение (4.8) в интервальное включение

$$\mathbf{A}^c \cdot x \subseteq \mathbf{b}^c,$$

равносильное принадлежности точки x множеству $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, которое превратится при этом в “распавшуюся” систему m одномерных линейных включений от одной переменной t и имеющую интервальные коэффициенты:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{1\nu}^c t + \sum_{j=1, j \neq \nu}^n \mathbf{a}_{1j}^c r_j \subseteq \mathbf{b}_1^c, \\ \dots \quad \dots \\ \mathbf{a}_{m\nu}^c t + \sum_{j=1, j \neq \nu}^n \mathbf{a}_{mj}^c r_j \subseteq \mathbf{b}_m^c. \end{cases} \quad (5.19)$$

При сделанных нами предположениях о неотрицательности элементов матрицы ИСЛАУ все интервалы $\mathbf{a}_{i\nu}^c$, $i = 1, 2, \dots, m$, также неотрицательны и потому решением i -ого включения этой системы является, как нетрудно видеть, множество

$$\left(\mathbf{b}_i^c \ominus \sum_{j=1, j \neq \nu}^n \mathbf{a}_{ij}^c r_j \right) \oslash \mathbf{a}_{i\nu}^c \quad (5.20)$$

где “ \oslash ” — операция внутреннего деления (обратная к умножению) в интервальной арифметике Каухера. Каждое из одномерных включений, образующих систему (5.19), мы можем решить отдельно от других, а затем пересечь все получившиеся при этом множества решений друг с другом (и, если необходимо, с \mathbf{U}_ν). В пределах всех интервалов, входящих в систему (5.19) соответствующие коэффициенты изменяются независимо друг от друга, как и в исходной ИСЛАУ, так что замкнутое множество \mathcal{S} , полученное в результате описанного выше раздельного решения и пересечения, является в точности множеством значений ν -ой координаты точек из $\Xi_{\alpha\beta} \cap l(r)$. Оно может оказаться пустым, если система (5.19) несовместна, но в любом случае

$$\underline{\Omega}_\nu(r) = \min \mathcal{S} \quad \text{и} \quad \overline{\Omega}_\nu(r) = \max \mathcal{S}.$$

Далее, если интервалы $\mathbf{a}_{i\nu}^c$, $i = 1, 2, \dots, m$, не содержат нуля в своей внутренности, то все множества (5.20) — *связные* интервалы вида $[p, q]$ или $(-\infty, p]$ или $[q, +\infty)$ или $(-\infty, +\infty)$. Это следует из формул для арифметических операций в полной интервальной арифметике Каухера, расширенной бесконечными интервалами. Таким образом, в точках эффективной области определения $\underline{\Omega}_\nu(r)$ (т.е. когда пересечение множеств (5.20) не пусто) мы имеем

$$\underline{\Omega}_\nu(r) = \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \left(\mathbf{b}_i^c \ominus \sum_{j=1, j \neq \nu}^n \mathbf{a}_{ij}^c r_j \right) \oslash \mathbf{a}_{i\nu}^c \right\}, \quad (5.21)$$

если множество решений ограничено, и

$$\underline{\Omega}_\nu(r) = \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \left(\mathbf{b}_i^c \ominus \sum_{j=1, j \neq \nu}^n \mathbf{a}_{ij}^c r_j \right) \oslash \mathbf{a}_{i\nu}^c \right\}, \mathbf{U}_\nu \right\}, \quad (5.22)$$

если множество решений неограничено (тогда подчёркивание означает взятие инфимума). Аналогично, в точках эффективной области определения $\overline{\Omega}_\nu(r)$ имеет место

$$\overline{\Omega}_\nu(r) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \overline{\left(\mathbf{b}_i^c \ominus \sum_{j=1, j \neq \nu}^n \mathbf{a}_{ij}^c r_j \right) \oslash \mathbf{a}_{i\nu}^c} \right\}, \quad (5.23)$$

если множество решений ограничено, и

$$\overline{\Omega}_\nu(r) = \min \left\{ \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \overline{\left(\mathbf{b}_i^c \ominus \sum_{j=1, j \neq \nu}^n \mathbf{a}_{ij}^c r_j \right) \oslash \mathbf{a}_{i\nu}^c} \right\}, \overline{\mathbf{U}}_\nu \right\}, \quad (5.24)$$

если множество решений неограничено (тогда надчёркивание означает взятие супремума).

Предложение 5.5.1 Если матрица \mathbf{A} интервальной линейной системы (5) неотрицательна, то все функции $\underline{\Omega}_\nu(r)$ и $\bar{\Omega}_\nu(r)$, $\nu = 1, 2, \dots, n$, являются монотонно невозрастающими по любой переменной на эффективных областях своего определения.

Доказательство основывается на следующем простом факте: как нижняя, так и верхняя огибающие любого семейства монотонно невозрастающих функций также являются невозрастающими функциями.

Заметим, что если $\mathbf{a}_{ij} \geq 0$ и $\mathbf{a}_{i\nu} \geq 0$, то для всех i, j и ν выражения

$$\frac{(\text{конец интервала } \mathbf{b}_i^c) - \sum_{j=1, j \neq \nu}^n (\text{конец интервала } \mathbf{a}_{ij}^c) r_j}{\text{конец интервала } \mathbf{a}_{i\nu}^c} \quad (5.25)$$

являются монотонно невозрастающими по любому из аргументов r_j , $j = 1, \dots, \nu - 1, \nu + 1, \dots, n$ (при условии, что остальные аргументы фиксированы). Из определения интервальных арифметических операций в \mathbb{KR} как минимаксов результатов арифметических операций между концами следует, что функции

$$\underline{\omega}_{i\nu}(r) = \frac{\left(\mathbf{b}_i^c \ominus \sum_{j=1, j \neq \nu}^n \mathbf{a}_{ij}^c r_j \right) \oslash \mathbf{a}_{i\nu}^c}{}$$

— это нижние огибающие для (5.25), а функции

$$\bar{\omega}_{i\nu}(r) = \frac{\left(\mathbf{b}_i^c \ominus \sum_{j=1, j \neq \nu}^n \mathbf{a}_{ij}^c r_j \right) \oslash \mathbf{a}_{i\nu}^c}{}$$

— это верхние огибающие для (5.25). При этом все они также невозрастающие по r_k . Такими же невозрастающими являются функции $\underline{\Omega}_\nu(r)$, которые в силу (5.21)–(5.22) суть верхние огибающие всех $\underline{\omega}_{i\nu}(r)$, $i = 1, 2, \dots, m$ (и, возможно, константы $\underline{\mathbf{U}}_\nu$), а также функции $\bar{\Omega}_\nu(r)$, которые в силу (5.23)–(5.24) суть нижние огибающие для всех $\underline{\omega}_{i\nu}(r)$, $i = 1, 2, \dots, m$ (и, возможно, константы $\bar{\mathbf{U}}_\nu$). ■

Например, для известной интервальной линейной системы Хансена [161]

$$\begin{pmatrix} [2, 3] & [0, 1] \\ [1, 2] & [2, 3] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [0, 120] \\ [60, 240] \end{pmatrix},$$

объединённое множество решений, изображённое на Рисунке 5.5, в целом не является выпуклым, но имеет веретенообразную “монотонную” конфигурацию. В то же время, в силу Предложения 5.5.1 форма множества решений, подобная той, что представлена на Рисунках 2.1, 2.2 справа, 4.1 и 4.4, с выпирающими в разных направлениях шипами, невозможна для множеств решений двумерных интервальных линейных систем с неотрицательными матрицами.

Ещё более наглядной иллюстрацией Предложения 5.5.1 является интервальная линейная система

$$\begin{pmatrix} 3.5 & [0, 2] & [0, 2] \\ [0, 2] & 3.5 & [0, 2] \\ [0, 2] & [0, 2] & 3.5 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 1] \\ [-1, 1] \end{pmatrix},$$

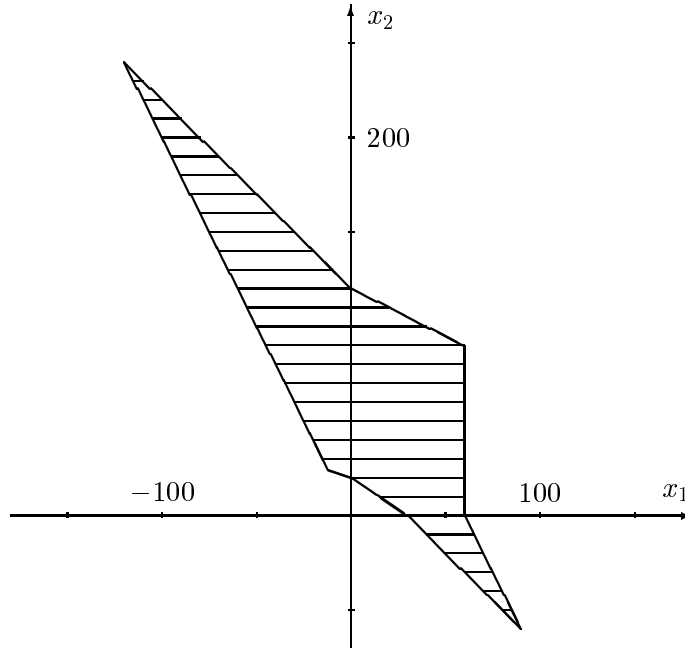


Рис. 5.5: Множество решений системы Хансена.

объединённое множество решений которой изображено на суперобложке книги А. Ноймайера [219] и воспроизведено на Рисунке 5.8. Несмотря на кажущуюся беспорядочность и неструктурированность конфигурации этого множества ограничивающие его поверхности всё равно монотонны! Рассмотренные примеры иллюстрируют также ещё одну особенность функций $\underline{\Omega}_\nu(r)$ и $\overline{\Omega}_\nu(r)$ — их возможную разрывность, которая возникает из-за того, что концами интервальных элементов матрицы ИСЛАУ являются нули.

Теорема 5.5.1 Если матрица \mathbf{A} интервальной линейной системы (5) неотрицательна, то для любых двух точек $y, z \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, таких что $y \leq z$, интервальный вектор $[y, z]$ также является подмножеством множества решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Доказательство. Из самого определения функций $\underline{\Omega}_\nu(r)$ и $\overline{\Omega}_\nu(r)$ следует, что для любого $r \in \mathbb{R}^{n-1}$ и любого индекса $\nu \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\underline{\Omega}_\nu(r) \leq \{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap l(r)\} \leq \overline{\Omega}_\nu(r).$$

Но при сделанном нами допущении о неотрицательности матрицы \mathbf{A} справедливо даже большее, —

$$\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap l(r)\} = [\underline{\Omega}_\nu(r), \overline{\Omega}_\nu(r)],$$

— так как множество $\{x_\nu \mid x \in \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap l(r)\}$ связно. Следовательно, множество решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ является в точности пересечением надграфика функции $\underline{\Omega}_\nu(r)$ и подграфика функции $\overline{\Omega}_\nu(r)$. Доказываемое утверждение вытекает поэтому из того, что эти функции ещё и монотонны (невозрастающие). ■

Таким образом, структура множества решений ИСЛАУ с неотрицательными матрицами является весьма специальной и для их внутреннего оценивания могут быть построены эффективные (даже полиномиальные) алгоритмы.

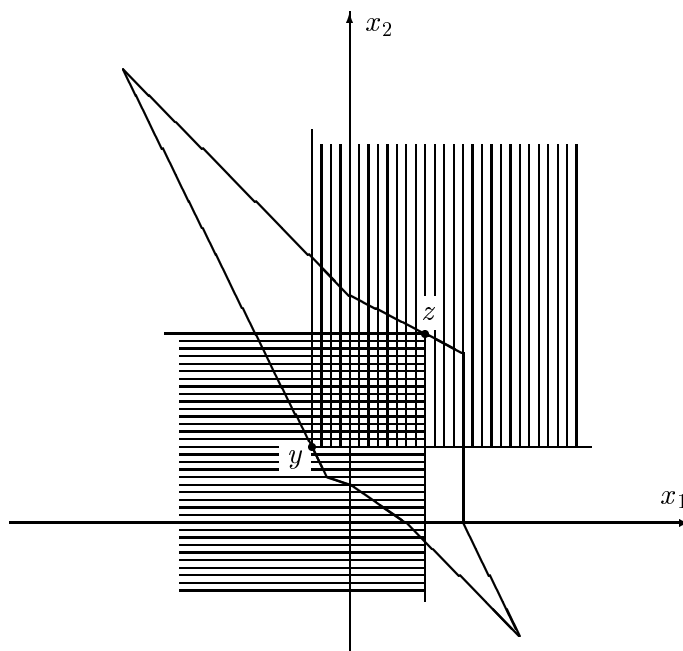


Рис. 5.6: Иллюстрация Предложения 5.5.1.

5.5 b Алгоритм

Псевдокод алгоритма внутреннего интервального оценивания множеств решений ИСЛАУ с неотрицательными матрицами приведён в Таблице 5.1.

Дадим необходимые пояснения к нему. Алгоритм осуществляет построение нижней y и верхней z границ интервального вектора $[y, z]$ внутренней оценки для $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, отправляясь от некоторой начальной точки $\tilde{x} \in \Xi$. Первоначально полагаем

$$z := y := \tilde{x},$$

а далее i -ый, $i = 1, 2, \dots, n$, шаг алгоритма “раздвигает” точки y и z по i -ой координате (см. Рисунок 5.7), так что в результате n -ого шага получается, вообще говоря, строгое покомпонентное неравенство $y < z$.

С помощью вспомогательных безразмерных параметров λ и μ пользователь имеет возможность изменять форму интервальной оценки $[y, z]$ и её расположение внутри множества решений. Эти параметры регулируют то, насколько на i -ом шаге алгоритма y_i и z_i , соответственно, будут отличаться от \tilde{x}_i . Значение $\lambda = 1$ или $\mu = 1$ задаёт максимально возможное в пределах множества решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ отклонение от y_i от \tilde{x}_i в сторону уменьшения и z_i от \tilde{x}_i в сторону увеличения, а нулевые λ или μ соответствовали бы $z_i = y_i = \tilde{x}_i$. Конкретная величина сдвига y_i и z_i относительно \tilde{x}_i определяется из информации о пересечении с множеством решений ИСЛАУ прямых, параллельных i -ой координатной оси и проходящих через насчитанные к текущему шагу точки y и z . Методика вычисления таких пересечений подробно изложена нами в §5.5 а.

Отдельного пояснения требует факт различного подхода к обработке i -ой, $i = 1, 2, \dots, n - 1$ и последней n -ой компонент векторов y и z . Для получения максимального по включению внутреннего бруса имеет смысл взять точки y и z на границе множества решений, а потому по n -ой координате эти точки раздвигаются максимально далеко друг

Таблица 5.1:

Алгоритм NonNeg

для внутреннего интервального оценивания множеств решений
ИСЛАУ с неотрицательными матрицами

Вход

Характеристические матрица $\mathbf{A}^c \in \mathbb{K}\mathbb{R}^{n \times n}$ и вектор правой части $\mathbf{b}^c \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n$, соответствующие оцениваемому АЕ-множеству решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ интервальной линейной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ с неотрицательной матрицей.

Точка \tilde{x} из оцениваемого множества решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Параметры $\lambda, \mu \in (0, 1]$.

Выход

Нижняя y и верхняя z границы интервального вектора $[y, z]$ внутренней оценки множества решений $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Алгоритм

$y := \tilde{x}$;

$z := \tilde{x}$;

DO FOR $k = 1$ TO n

$\mathbf{Y} := (-\infty, \infty)$;

$\mathbf{Z} := (-\infty, \infty)$;

 DO FOR $i = 1$ TO n

$$\mathbf{Y} := \mathbf{Y} \cap \left(\left(\mathbf{b}_i^c \ominus \sum_{j=1, j \neq k}^n \mathbf{a}_{ij}^c y_j \right) \oslash \mathbf{a}_{ik}^c \right) ;$$

$$\mathbf{Z} := \mathbf{Z} \cap \left(\left(\mathbf{b}_i^c \ominus \sum_{j=1, j \neq k}^n \mathbf{a}_{ij}^c z_j \right) \oslash \mathbf{a}_{ik}^c \right) ;$$

 END DO

 IF ($k < n$) THEN

$$y_k := \lambda \underline{\mathbf{Y}} + (1 - \lambda) \tilde{x}_k ;$$

$$z_k := (1 - \mu) \tilde{x}_k + \mu \overline{\mathbf{Z}} ;$$

 ELSE

$$y_k := \underline{\mathbf{Y}} ;$$

$$z_k := \overline{\mathbf{Z}} ;$$

 END IF

END DO

от друга, на противоположные границы $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, так что параметры λ и μ уже никак не влияют на выполнение этого завершающего шага алгоритма.

Для получения “телесной” формы бруса внутренней оценки множества решений наш вычислительный опыт рекомендует выбирать “средние” значения для λ и μ , т.е. в районе 0.3–0.7. Слишком близкие к 0 или к 1 значения λ и μ могут привести к “сплющиванию” оценивающего бруса по некоторым координатам. Впрочем, нередко построение удовлетворяющей пользователя оценки может стать лишь результатом интерактивной процедуры, включающей многократный выбор \tilde{x} и варьирование λ и μ .

Приведённая в Таблице 5.1 версия алгоритма рассчитана на интервальные линейные системы с неотрицательными квадратными невырожденными матрицами, т.е. на случай ограниченных множеств решений. Для ИСЛАУ с неотрицательными прямоугольными $m \times n$ -матрицами внутренний цикл “DO FOR” следует выполнять до m и в начале внешнего цикла “DO FOR” по k инициализировать интервалы \mathbf{Y} и \mathbf{Z} не всей числовой осью, а \mathbf{U}_k , т.е. k -ой компонентой ограничивающего интервала, данного нам из самой постановки (5.18).

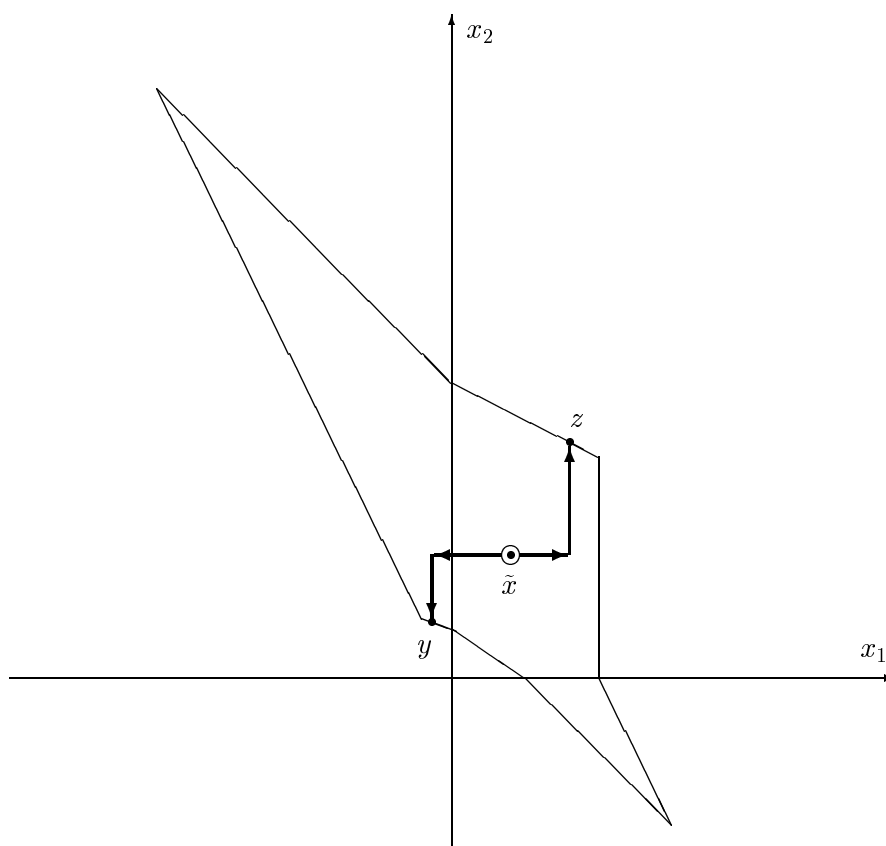


Рис. 5.7: Как работает алгоритм NonNeg.

5.5 с Выбор начальной точки

Для получения телесной внутренней оценки множества решений желательно, чтобы начальная точка \tilde{x} алгоритма NonNeg лежала во внутренней части $\Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. В этом параграфе мы обсудим, как проверять, действительно ли $\tilde{x} \in \text{int } \Xi_{\alpha\beta}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, а в некоторых случаях корректировать положение \tilde{x} .

В самой общей ситуации корректировка точки из множества решений ИСЛАУ представляет из себя непростую задачу, так как NP-трудной задачей является распознавание самих этих множеств решений. Но существуют два частных случая, когда множество решений может быть исследовано относительно несложно. Это случаи

- объединённого множества решений ИСЛАУ с квадратной невырожденной матрицей,
- допустимого множества решений ИСЛАУ.

В первом случае точку \tilde{x} из $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ можно получить, решив какую-нибудь точечную систему уравнений с коэффициентами из \mathbf{A} и \mathbf{b} , скажем, “среднюю” систему

$$(\text{mid } \mathbf{A}) x = \text{mid } \mathbf{b}.$$

Что касается допустимого множества решений ИСЛАУ, то выяснение его пустоты или непустоты является полиномиально разрешимой задачей. Для достижения своих целей мы воспользуемся техникой так называемых “распознающих функционалов”, разработанной автором в работах [101, 104, 108, 286, 291] (см. Дополнение к диссертации). Напомним некоторые понятия и факты.

Пусть \mathbf{A} — интервальная $m \times n$ -матрица, \mathbf{b} — интервальный m -вектор, и выражением

$$\text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left\langle \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right\rangle \right\}$$

задается функционал $\text{Uni} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда принадлежность точки x объединённому множеству решений интервальной линейной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ равносильна неотрицательности в x функционала Uni :

$$x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \quad \iff \quad \text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0,$$

т.е. объединённое множество решений соответствующей ИСЛАУ есть лебегово множество $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0\}$. Функционал Uni — вогнутый в каждом ортанте \mathbb{R}^n , а если в интервальной матрице \mathbf{A} некоторые столбцы — целиком вещественные, то $\text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$ вогнут и на объединениях нескольких ортантов. Кроме того, функционал $\text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$ достигает конечного максимума на всем пространстве \mathbb{R}^n . Если x — точка топологической внутренности $\text{int } \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ объединённого множества решений, то $\text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) > 0$. При некоторых дополнительных ограничениях на \mathbf{A} , \mathbf{b} и x верно и обратное: из принадлежности $x \in \text{int } \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ следует $\text{Uni}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) > 0$.

Пусть \mathbf{A} — интервальная $m \times n$ -матрица, \mathbf{b} — интервальный m -вектор, и выражением

$$\text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right\}$$

задается функционал $\text{Tol} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда принадлежность точки x допустимому множеству решений интервальной линейной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ равносильна неотрицательности в x функционала Tol :

$$x \in \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \quad \iff \quad \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0,$$

т.е. допустимое множество решений соответствующей ИСЛАУ есть лебегово множество $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0\}$. Кроме того, функционал Tol вогнутый и достигает своего конечного максимума на всем \mathbb{R}^n . Если интервальная матрица \mathbf{A} задачи не имеет нулевых строк, то из $x \in \text{int } \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$ следует $\text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) > 0$. Обратно, если $\text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) > 0$, то $x \in \text{int } \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Как следствие этих результатов, мы естественно приходим к следующему практическому рецепту коррекции начальной точки \tilde{x} для алгоритма NonNeg: находим какую-нибудь точку из объединённого (соответственно, допустимого) множества решений ИСЛАУ, а затем, пользуясь градиентным подъёмом, пытаемся достичь лучшего значения распознающего функционала Uni (соответственно, Tol). Если полученное новое значение строго больше нуля, то мы оказались во внутренности объединённого (допустимого) множества решений.

5.5 d Численные эксперименты

Пример 1. Для интервальной линейной системы Хансена

$$\begin{pmatrix} [2, 3] & [0, 1] \\ [1, 2] & [2, 3] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [0, 120] \\ [60, 240] \end{pmatrix},$$

применение алгоритма NonNeg с параметрами $\lambda = \mu = 1$ приводит к ответу

$$\begin{pmatrix} [-25.909, 60] \\ [51.818, 90] \end{pmatrix},$$

а с параметрами $\lambda = \mu = 0.7$ получается внутренняя оценка

$$\begin{pmatrix} [-13.022, 47.114] \\ [26.045, 96.443] \end{pmatrix}.$$

Пример 2. В качестве второго примера рассмотрим интервальную линейную систему с матрицей

$$\begin{pmatrix} t & [0, 2] & \cdots & [0, 2] \\ [0, 2] & t & \cdots & [0, 2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0, 2] & [0, 2] & \cdots & t \end{pmatrix},$$

которая была предложена А. Ноймайером в книге [219] и которую мы уже использовали для тестовых расчётов в Главе 3. Эта матрица, помимо прочего, неотрицательна и потому интервальные линейные системы с ней могут служить тестовыми для развитой нами в этом параграфе методики.

При размерности 3, $t = 3.5$ и правой части $([-1, 1], [-1, 1], [1, 1])^\top$ объединённое множество решений этой интервальной системы имеет вид, изображённый на Рисунке 5.8, а применение для его внутреннего оценивания алгоритма NonNeg с параметрами $\lambda = \mu = 1$ даёт результат

$$\begin{pmatrix} [-0.285714, 0.285714] \\ [-0.285714, 0.285714] \\ [-0.285714, 0.285714] \end{pmatrix},$$

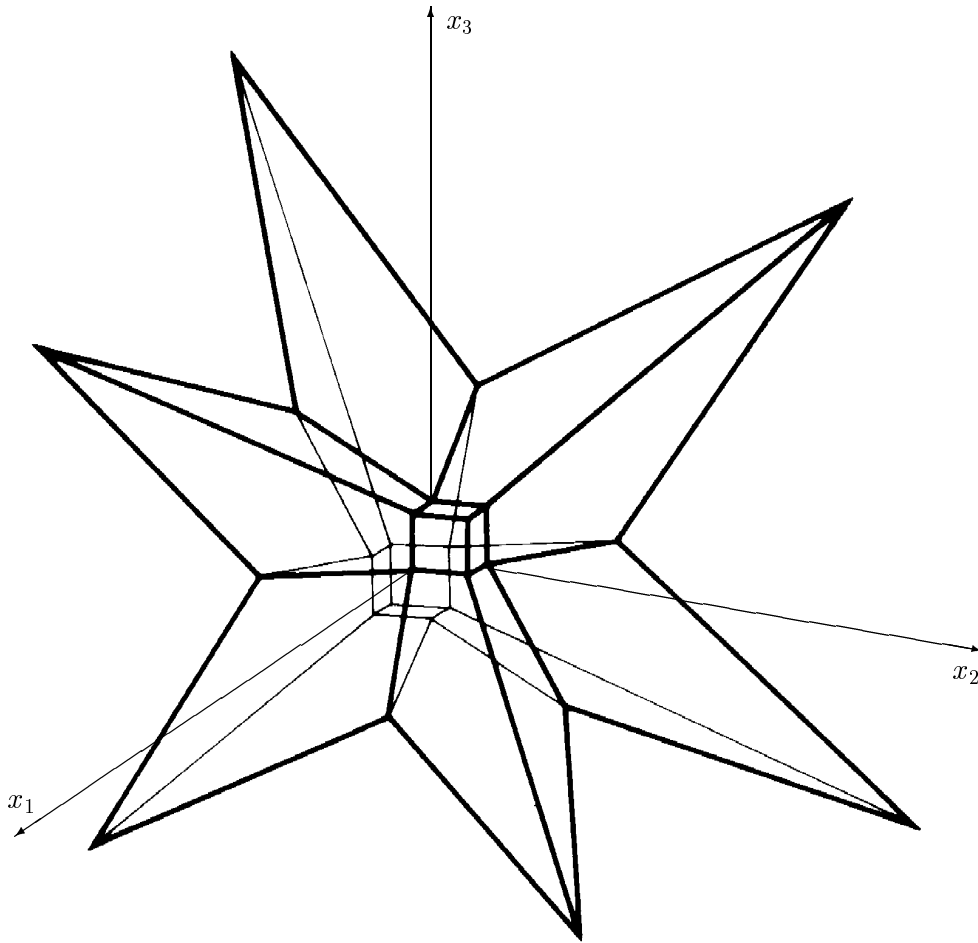


Рис. 5.8: Объединённое множество решений трёхмерной системы Ноймайера (воспроизведено из книги [219]).

совпадающий с той внутренней оценкой множества решений, которая получается с помощью формального подхода. Мы, таким образом, практически точно оценили изнутри ту часть объединённого множества решений (“кубик”), который прилегает к началу координат. Аналогично предыдущему примеру, столь хорошие результаты оценивания при граничных значениях параметров λ и μ имеют причиной специальную конфигурацию множества решений. Именно, так как в матрице ИСЛАУ “много” элементов имеют нулевые концы, то некоторые из граней множества решений оказываются параллельными координатным плоскостям. Наши выводы подтверждает

Пример 3. Рассмотрим интервальную линейную систему

$$\begin{pmatrix} 3.5 & [1, 2] & [1, 2] \\ [1, 2] & 3.5 & [1, 2] \\ [1, 2] & [1, 2] & 3.5 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 1] \\ [-1, 1] \end{pmatrix},$$

которая отличается от системы Ноймайера тем, что вместо нулей левыми концами внедиагональных элементов матрицы взяты единицы. Для неё внутреннее оценивание объединённого множества решений алгоритмом NonNeg с параметрами $\lambda = \mu = 1$ приводит к

“сплюсненному” интервальному ответу

$$\begin{pmatrix} [-0.285714, 0.285714] \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что в этом случае правильнее взять параметры λ и μ внутри отрезка $(0, 1]$. Например, мы получаем телесную внутреннюю оценку

$$\begin{pmatrix} [-0.2, 0.2] \\ [-0.16, 0.16] \\ [-0.14, 0.14] \end{pmatrix}$$

при использовании алгоритма **NonNeg** с $\lambda = \mu = 0.7$.

Во всех рассмотренных в этом параграфе примерах в качестве стартовой точки для построения внутренней интервальной оценки использовалось решений “средней” вещественной системы.

Численное нахождение формальных решений

Цель этой главы работы — развитие численных методов нахождения формальных решений интервальных систем уравнений, т.е., фактически, развитие вычислительных основ формального подхода к задачам внутреннего и внешнего оценивания множеств решений, развитого в Главах 3 и 5. Необходимость в отдельном большом исследовании этого вопроса вызвана, с одной стороны, его новизной и малоизученностью. Действительно, реализация традиционных интервальных методов является в настоящее время достаточно разработанной и в большинстве своих аспектов не встречает затруднений. Но ценность вычисления формальных решений никем, по существу, не осознавалась вплоть до недавнего времени, а соответствующая вычислительная задача оставалась практически неисследованной. С другой стороны, рассматриваемая новая область интервального численного анализа оказывается полной интересных, красивых и содержательных результатов.

6.1 Погружение в линейное пространство

6.1 а Зачем погружать?

Возвратимся к формальному подходу для решения задач внешнего и внутреннего оценивания множеств решений ИСЛАУ. Задача внешнего интервального оценивания (2.53) была сведена нами к нахождению формальных решений интервальных уравнений вида

$$x = \mathbf{C}x + \mathbf{d},$$

а задача внутреннего интервального оценивания (2.52) сводится к нахождению формальных решений интервальных уравнений вида

$$\mathbf{C}x = \mathbf{d}$$

с интервальными матрицей \mathbf{C} и вектором \mathbf{d} , образованными из элементов полной интервальной арифметики Каухера \mathbb{KR} . В этой арифметике выписанные уравнения равносильны уравнениям

$$\mathbf{C}x \ominus x + \mathbf{d} = 0, \tag{6.1}$$

и

$$\mathbf{C}x \ominus \mathbf{d} = 0 \tag{6.2}$$

соответственно. Аналогичным образом задачи внешнего и внутреннего оценивания множеств решений общих нелинейных интервальных систем также сводятся к вычислению формальных решений некоторых специальных интервальных уравнений вида (3.35) и (5.1)–(5.4).

Как мы уже отмечали, задачи нахождения формальных решений интервальных уравнений, по существу, суть традиционные математические задачи решения некоторых уравнений, и большая часть классического численного анализа посвящена решению подобных постановок. Но особенность нашей ситуации состоит в том, что основное множество \mathbb{KR}^n , на котором рассматриваются решаемые уравнения, совсем не является линейным пространством: отсутствие дистрибутивности в интервальной арифметике ведёт к нарушению той аксиомы линейного пространства, которая требует выполнения

$$(\mu + \nu) \mathbf{x} = \mu \mathbf{x} + \nu \mathbf{x}$$

для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{KR}^n$ и любых скаляров $\mu, \nu \in \mathbb{R}$. Таким образом, большинство из существующих подходов к исследованию операторных уравнений и к вычислению их решений не применимы напрямую к нашей задаче.

Более того, оставаясь в интервальном пространстве \mathbb{KR}^n , мы не сможем выполнить теоретический анализ ситуации и понять некоторые явления. Например, точечная матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

является невырожденной (неособенной) в смысле классической линейной алгебры, хотя умножение на эту матрицу в \mathbb{KR}^2 может занулить даже ненулевой вектор:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [1, -1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В чём причина? Едва ли возможно обнаружить её изнутри интервального пространства, которое является существенно нелинейным. Итак, имеется настоятельная потребность перенести наши рассуждения в некоторое *линейное пространство*, которое мы обозначим для общности через U . Предполагаем также, что на U задана некоторая топология, согласованная с линейной структурой.

С абстрактной математической точки зрения мы имеем два различных пространства, — интервальное пространство \mathbb{KR}^n и линейное пространство U , — на которых заданы существенно разные алгебраические структуры; каким образом возможно “перепрыгнуть” из первого во второе? Мы собираемся сделать это способом, родственным обычной замене переменных и называемым далее *погружением*.

6.1 b Определение и основные свойства

Прежде всего, нам следует построить некоторое отображение $\iota : \mathbb{KR}^n \rightarrow U$, — *вложение* интервального пространства \mathbb{KR}^n в линейное пространство U , — которое должно быть *биективным* (*взаимно однозначным отображением на*) для того, чтобы корректно восстанавливать интервальный прообраз по его образу в U и наоборот. Далее, нетрудно понять, что всякая биекция $\iota : \mathbb{KR}^n \rightarrow U$ порождает также биекцию из множества всех

отображений $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ в себя на множество всех отображений U в себя. Более точно, каждому $\varphi : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$ сопоставляется единственное отображение

$$\iota \circ \varphi \circ \iota^{-1} : U \rightarrow U, \tag{6.4}$$

где “ \circ ” обозначает композицию отображений.

Определение 6.1.1 Для интервального отображения φ и некоторого фиксированного вложения $\iota : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow U$ мы будем называть отображение линейного пространства U в себя, задаваемое посредством (6.4), индуцированным отображением для φ (или, развёрнуто, ι -индуцированным).

Наглядно ситуация может быть описана коммутативной диаграммой, изображённой на Рисунке 6.1.

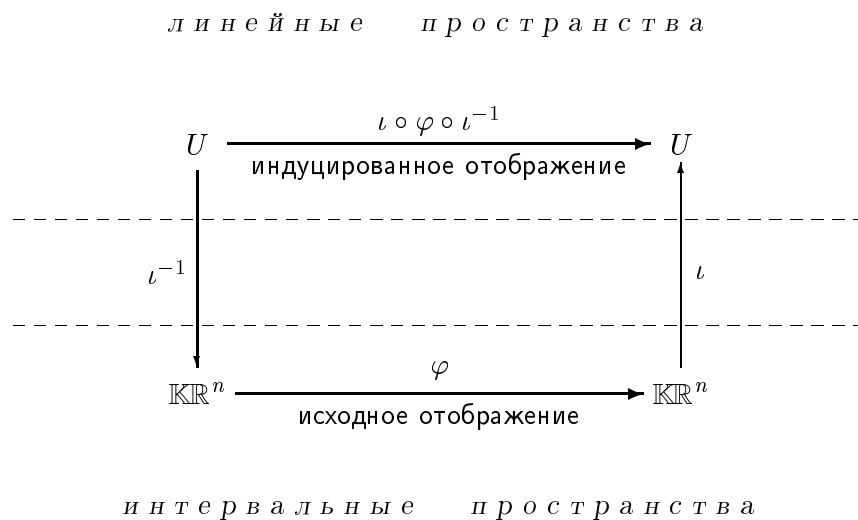


Рис. 6.1: Как вложение ι порождает индуцированное отображение.

Свойства отображений φ и $(\iota \circ \varphi \circ \iota^{-1})$ оказываются тесно связанными, так что вместо исследования φ можно исследовать индуцированное им отображение $(\iota \circ \varphi \circ \iota^{-1})$. Более того, мы можем заменить задачу решения уравнения в $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ на решение уравнения в линейном пространстве U , придя к ситуации, более привычной для современного численного анализа.

Определение 6.1.2 Пусть в интервальном пространстве $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ задано уравнение

$$\varphi(x) = 0, \tag{6.5}$$

где $\varphi : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$ — некоторое отображение, и фиксировано вложение $\iota : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow U$. Будем называть индуцированным уравнением для (6.5) такое уравнение

$$\Phi(y) = 0$$

в линейном пространстве U , что Φ является индуцированным отображением для φ , т.е. $\Phi = \iota \circ \varphi \circ \iota^{-1}$.

Таким образом, исходное интервальное уравнение

$$\varphi(x) = 0 \quad (6.6)$$

имеет формальное решение $\mathbf{x}^* \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда индуцированное уравнение

$$\Phi(y) = 0$$

имеет решение $y^* \in U$. При этом искомое формальное интервальное решение \mathbf{x}^* для (6.6) однозначно восстанавливается по y^* из соотношения

$$\mathbf{x}^* = \iota^{-1}(y^*).$$

В интересующей нас конкретной ситуации с уравнениями (6.1) и (6.2) мы можем заменить исходную задачу — задачу нахождения корней уравнений

$$\mathfrak{f}(x) = 0 \quad \text{и} \quad \mathfrak{g}(x) = 0,$$

таких что

$$\mathfrak{f} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{C}\mathbf{x} \ominus \mathbf{x} + \mathbf{d} \quad \text{и} \quad \mathfrak{g} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{C}\mathbf{x} \ominus \mathbf{d}$$

— на задачу решения уравнений

$$\mathfrak{F}(y) = 0 \quad \text{и} \quad \mathfrak{G}(y) = 0$$

в линейном пространстве U с индуцированными отображениями

$$\mathfrak{F} = \iota \circ \mathfrak{f} \circ \iota^{-1} : U \rightarrow U \quad \text{и} \quad \mathfrak{G} = \iota \circ \mathfrak{g} \circ \iota^{-1} : U \rightarrow U,$$

определяемыми как

$$\mathfrak{F}(y) = \iota(\mathbf{C}\iota^{-1}(y) \ominus \iota^{-1}(y) + \mathbf{d}) \quad \text{и} \quad \mathfrak{G}(y) = \iota(\mathbf{C}\iota^{-1}(y) \ominus \mathbf{d})$$

соответственно.

Более общее соображение. Поскольку ι и ι^{-1} — биекции, то обратимость любого отображения φ на интервальном пространстве равносильна обратимости ι -индуцированного отображения $\Phi := \iota \circ \varphi \circ \iota^{-1}$, действующего на линейном пространстве U . При этом

$$\varphi^{-1} = \iota^{-1} \circ \Phi^{-1} \circ \iota. \quad (6.7)$$

Основной вопрос, касающийся построения вложения интервального пространства в линейное пространство, заключается в выборе разумного компромисса между простотой этого вложения и удобной формой индуцированных отображений (6.4). Среди всех биективных вложений $\iota : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow U$ мы выделим специальные вложения, которые

- 1) сохраняют аддитивную алгебраическую структуру $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$, т.е. $\iota(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \iota(\mathbf{x}) + \iota(\mathbf{y})$ для любых \mathbf{x}, \mathbf{y} ,
- 2) сохраняют топологическую структуру $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$, т.е. как само отображение $\iota : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow U$, так и его обратное $\iota^{-1} : U \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$ непрерывны.

Такие вложения $\mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow U$ мы будем называть *погружениями* интервального пространства $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ в линейное пространство U . Таким образом, формально мы принимаем следующее

Определение 6.1.3 [292] Пусть U — линейное пространство. Биективное отображение $\iota : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow U$ будем называть погружением $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ в U , если оно удовлетворяет следующим свойствам:

- (1) ι является изоморфизмом аддитивных групп $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ и U ,
- (2) ι является гомеоморфизмом топологических пространств $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ и U .

Например, если интервалу $\mathbf{x} \in \mathbb{K}\mathbb{R}$ сопоставить пару чисел $(\underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}) \in \mathbb{R}^2$, т.е. его концы, “забыв” об их интервальном смысле, то задаваемое таким образом отображение $\mathbb{K}\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ является погружением. Приведённый пример в некотором смысле типичен, так как, привлекая соображения размерности, нетрудно показать, что Определением 6.1.3 линейное пространство U задаётся однозначно: U должно быть евклидовым пространством \mathbb{R}^{2n} . Этот факт хорошо согласуется с аналитической интуицией и мы не приводим здесь его строгого обоснования, чтобы не перегружать и без того разросшийся текст работы. Цель настоящего подготовительного параграфа — исследование простейших свойств погружений, которые понадобятся нам в дальнейшем при изучении индуцированного уравнения.

Из Определения 6.1.3 немедленно следует, что для любого погружения $\iota : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ мы имеем

$$\begin{aligned} \iota(0_{\mathbb{K}\mathbb{R}^n}) &= 0_{\mathbb{R}^{2n}}, \\ \iota(\text{opp } \mathbf{x}) &= -\iota(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{6.8}$$

тогда как

$$\iota(\mathbf{x}) \neq 0 \text{ в } \mathbb{R}^{2n} \iff \mathbf{x} \neq 0 \text{ в } \mathbb{K}\mathbb{R}^n.$$

Кроме того, обратное погружению отображение $\iota^{-1} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$ также удовлетворяет условиям, аналогичным (1)–(2) из Определения 6.1.3, и

$$\begin{aligned} \iota^{-1}(0_{\mathbb{R}^{2n}}) &= 0_{\mathbb{K}\mathbb{R}^n}, \\ \iota^{-1}(-x) &= \text{opp } \iota^{-1}(x), \quad x \in \mathbb{R}^{2n}. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Предложение 6.1.1 Всякое погружение интервального пространства является положительно-однородным отображением, т.е.

$$\iota(\lambda \mathbf{x}) = \lambda \iota(\mathbf{x}) \quad \text{для всех } \mathbf{x} \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n \text{ и } \lambda \geq 0.$$

Отображение $\mathbb{K}\mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$, обратное к погружению, также положительно однородно.

Доказательство является стандартным. Пусть $\mathbf{x} \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n$. Если $\lambda = k$ — натуральное число, то

$$\iota(k\mathbf{x}) = \iota(\underbrace{\mathbf{x} + \mathbf{x} + \dots + \mathbf{x}}_k) = k \iota(\mathbf{x}).$$

Если $\lambda = 1/l$ для некоторого натурального l , то

$$l \iota(\lambda \mathbf{x}) = \underbrace{\iota(\lambda \mathbf{x}) + \iota(\lambda \mathbf{x}) + \dots + \iota(\lambda \mathbf{x})}_l = \iota(\mathbf{x}) \implies \iota(\lambda \mathbf{x}) = l^{-1} \iota(\mathbf{x}) = \lambda \iota(\mathbf{x}).$$

Если $\lambda = k/l$ для натуральных k и l , то, пользуясь уже рассмотренными случаями, получим

$$\iota(\lambda \mathbf{x}) = \iota\left(\frac{k}{l} \mathbf{x}\right) = k \iota\left(\frac{1}{l} \mathbf{x}\right) = \frac{k}{l} \iota(\mathbf{x}) = \lambda \iota(\mathbf{x}).$$

Следовательно, равенство $\iota(\lambda \mathbf{x}) = \lambda \iota(\mathbf{x})$ верно для всех неотрицательных рациональных λ . Распространение его на все неотрицательные вещественные числа можно осуществить путём предельного перехода, используя непрерывность ι . ■

Предложение 6.1.2 *Если $\iota : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ — погружение, а T — невырожденное линейное преобразование пространства \mathbb{R}^{2n} , то $(T \circ \iota)$ также является погружением. Обратно, любое другое погружение $\varkappa : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ может быть представлено в виде $(T \circ \iota)$ для некоторого невырожденного линейного преобразования $T : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$.*

Доказательство. Первая часть Предложения обосновывается тривиально. Чтобы доказать вторую часть, рассмотрим отображение $(\varkappa \circ \iota^{-1})$. Очевидно, что, будучи композицией двух изоморфизмов, оно является автоморфизмом аддитивной группы \mathbb{R}^{2n} . Кроме того, в силу Предложения 6.1.1, это отображение положительно однородно, а так как при любом $x \in \mathbb{R}^{2n}$

$$(\varkappa \circ \iota^{-1})(x - x) = 0 = (\varkappa \circ \iota^{-1})(x) + (\varkappa \circ \iota^{-1})(-x) \quad \Rightarrow \quad (\varkappa \circ \iota^{-1})(-x) = -(\varkappa \circ \iota^{-1})(x),$$

то мы можем также заключить о его однородности относительно умножения на отрицательные числа.

Таким образом, в целом отображение $\varkappa \circ \iota^{-1}$ оказывается невырожденным линейным преобразованием пространства \mathbb{R}^{2n} . Мы можем поэтому взять $T = \varkappa \circ \iota^{-1}$. ■

6.1 с Стандартное погружение

Из Предложения 6.1.2 следует, что любые два погружения $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ в \mathbb{R}^{2n} , удовлетворяющие Определению 6.1.3, одинаковы с точностью до невырожденного линейного преобразования \mathbb{R}^{2n} . Поэтому мы имеем возможность выбирать каждое конкретное погружение из соображений удобства в том или ином смысле.

Каждое погружение $\iota : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ естественно порождает на линейном пространстве \mathbb{R}^{2n} некоторый частичный порядок “ \sqsubseteq ” — образ порядка по включению “ \subseteq ” на $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ при погружении ι , а именно:

$$x \sqsubseteq y, \text{ т.е. “}x \text{ не превосходит } y\text{” в } \mathbb{K}\mathbb{R}^n \quad \Longleftrightarrow \quad \iota^{-1}(x) \subseteq \iota^{-1}(y) \text{ в } \mathbb{K}\mathbb{R}^n. \quad (6.10)$$

Определение 6.1.4 *Частичный порядок “ \sqsubseteq ”, определяемый (6.10), мы назовём индуцированным частичным порядком на \mathbb{R}^{2n} .*

Поскольку для любых $x, y, u, v \in \mathbb{R}^{2n}$ имеет место

$$x \sqsubseteq y, \alpha \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha x \sqsubseteq \alpha y,$$

$$x \sqsubseteq y, u \sqsubseteq v \quad \Rightarrow \quad x + u \sqsubseteq y + v,$$

то частичный порядок “ \sqsubseteq ” согласован с линейной структурой на \mathbb{R}^{2n} [2, 47]. Следовательно, он может быть задан эквивалентным образом путём указания конуса положительных элементов, т.е. множества $K_{\sqsubseteq} = \{x \in \mathbb{R}^{2n} \mid 0 \sqsubseteq x\}$ [2, 52, 54]. Напомним, что конусом в линейном топологическом пространстве называется замкнутое выпуклое положительно инвариантное множество, не содержащее никакого одномерного подпространства.^{6.1} Как

^{6.1}При определении конуса некоторые авторы (например, [84]) опускают требования выпуклости, замкнутости и т.п. В нашей работе для удобства изложения мы придерживаемся того определения конуса, которое традиционно для школы М. А. Красносельского [52, 54].

известно, в частично упорядоченном линейном пространстве, где порядок согласован с линейной структурой, множество положительных элементов является конусом. И наоборот, задание конуса K_{\sqsubseteq} однозначно определяет частичное упорядочение пространства, при котором

$$x \sqsubseteq y \iff y - x \in K_{\sqsubseteq}.$$

Ясно, что конкретные формулы, определяющие индуцированный порядок “ \sqsubseteq ”, зависят от вида погружения ι . Но на евклидовом пространстве \mathbb{R}^{2n} простейшим и наиболее удобным является задание порядка покомпонентным образом, т.е. когда

$$x \leq y \iff x_i \leq y_i, \quad i = 1, 2, \dots, 2n. \quad (6.11)$$

Соответственно, конусом положительных элементов при таком упорядочении \mathbb{R}^{2n} является множество

$$K_{\leq} = \{ x \in \mathbb{R}^{2n} \mid x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 2n \}$$

— положительный ортант пространства \mathbb{R}^{2n} . Естественно поэтому потребовать от погружения, чтобы индуцированный им порядок (6.10) совпадал с этим простейшим покомпонентным порядком (6.11), т.е. чтобы

$$x \sqsubseteq y \iff x \leq y \text{ в покомпонентном смысле.} \quad (6.12)$$

Для какого погружения $\mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ это возможно?

Нетрудно понять, что требуемым погружением является так называемое *стандартное погружение*, впервые введённое в работе [292]:

Определение 6.1.5 Погружение $\sigma : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, которое действует по правилу

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) \mapsto (-\underline{\mathbf{x}}_1, -\underline{\mathbf{x}}_2, \dots, -\underline{\mathbf{x}}_n, \overline{\mathbf{x}}_1, \overline{\mathbf{x}}_2, \dots, \overline{\mathbf{x}}_n), \quad (6.13)$$

т.е. такое, при котором взятые с противоположным знаком левые концы интервалов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ становятся первой, второй, ..., n -ой компонентами вещественного $2n$ -вектора, а правые концы интервалов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ становятся $(n + 1)$ -ой, ..., $2n$ -ой компонентами вещественного $2n$ -вектора соответственно, будем называть *стандартным погружением интервального пространства $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ в \mathbb{R}^{2n}* .

Следствие. Из определения (6.10) индуцированного порядка на \mathbb{R}^{2n} и требования (6.12) к стандартному погружению σ легко вывести, что

$$\sigma \left(\bigvee_{\kappa \in K} \mathbf{x}_{\kappa} \right) = \sigma \left(\sup_{\kappa \in K} \sqsubseteq \mathbf{x}_{\kappa} \right) = \sup_{\kappa \in K} \leq \sigma(\mathbf{x}_{\kappa}) \quad (6.14)$$

для любого ограниченного семейства интервальных векторов $\{ \mathbf{x}_{\kappa} \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n \mid \kappa \in K \}$, где K — некоторое индексное множество. Таким образом, стандартное погружение переводит супремумы по включению на интервальном пространстве $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ в супремумы относительно покомпонентного порядка на \mathbb{R}^{2n} . Аналогичное утверждение справедливо и для инфимумов.

Итак, факт совпадения индуцированного частичного порядка на линейном пространстве \mathbb{R}^{2n} с обычным покомпонентным упорядочением и, как следствие, упрощение выкладок и рассуждений являются главным оправданием выбранного нами вида (6.13) для

погружения, названного стандартным. Более того, вышеизложенное достаточно веско свидетельствует в пользу того, чтобы далее в теоретической части нашей работы рассматривать лишь стандартное погружение вида (6.13), хотя иногда практически полезными могут оказаться и другие погружения. Например, при компьютерной реализации описываемых в этой работе алгоритмов автор нередко использовал простейшее погружение

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) \mapsto (\underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \dots, \underline{\mathbf{x}}_n, \overline{\mathbf{x}}_1, \overline{\mathbf{x}}_2, \dots, \overline{\mathbf{x}}_n)$$

которое более удобно при практическом программировании и т.п.

Полезно дать методологический комментарий по поводу содержания этого и предшествующих пунктов. Приём идентификации концов интервала или интервального вектора с компонентами вектора в евклидовом пространстве нередко применялся и применяется исследователями. Но мы выделили процедуру этой идентификации в отдельное понятие — погружение $\mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ — и предприняли его тщательное исследование. С какой целью? Нельзя ли было обойтись без “лишних абстракций”?

Помимо того, что явное и осознанное оперирование с любым объектом всегда более предпочтительно, чем неявное, “по умолчанию”, имеются, по крайней мере, ещё две причины того, чтобы рассматривать погружение в качестве самостоятельного понятия:

- 1) отображение $\mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ не может быть определено раз и навсегда единственным образом, который был бы наиболее удобен (естественен и т.п.) для всех возможных практических ситуаций;
- 2) мы можем получить ощутимую выгоду от этой неединственности, т.е. наиболее полно использовать особенности того или иного погружения в каждой конкретной ситуации.

Как легко видеть, оба этих довода действительно применимы к рассматриваемому нами случаю.

6.1 d Сопутствующие матрицы

Теорема 6.1.1 Пусть $\phi : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$ — оператор умножения на точечную матрицу, т.е.

$$\phi(\mathbf{x}) = Q\mathbf{x}$$

для некоторой $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q = (q_{ij})$, а $\iota : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ — погружение. Тогда индуцированное отображение $\iota \circ \phi \circ \iota^{-1}$ является линейным преобразованием пространства \mathbb{R}^{2n} .

Для стандартного погружения σ матрица этого индуцированного линейного преобразования $\sigma \circ \phi \circ \sigma^{-1}$ является блочной $2n \times 2n$ -матрицей вида

$$\left(\begin{array}{c|c} Q^+ & Q^- \\ \hline Q^- & Q^+ \end{array} \right), \quad (6.15)$$

где $n \times n$ -подматрицы $Q^+ = (q_{ij}^+)$ и $Q^- = (q_{ij}^-)$ — это положительная и отрицательная части Q , т.е. матрицы образованные положительными и отрицательными частями элементов Q соответственно.

Доказательство. Для обоснования первого утверждения Теоремы нам нужно установить аддитивность и однородность отображения $\iota \circ \phi \circ \iota^{-1}$.

Аддитивность ϕ немедленно вытекает из соотношения дистрибутивности

$$q \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = q \cdot \mathbf{x} + q \cdot \mathbf{y},$$

справедливого при точечных q для любых интервалов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{KR}$. Погружение ι и обратное к нему отображение ι^{-1} также аддитивны. Следовательно, индуцированное отображение $\iota \circ \phi \circ \iota^{-1}$ аддитивно как композиция аддитивных.

Далее, оператор ϕ умножения на матрицу однороден, а погружение ι и обратное к нему отображение ι положительно однородны в силу Предложения 6.1.1. Поэтому композиция $\iota \circ \phi \circ \iota^{-1}$ по меньшей мере положительно однородна. Кроме того, для любого $x \in \mathbb{R}^{2n}$

$$\begin{aligned} (\iota \circ \phi \circ \iota^{-1})(-x) &= (\iota \circ \phi)(\text{орр } \iota^{-1}(x)) && \text{в силу (6.9)} \\ &= \iota(\text{орр } (\phi \circ \iota^{-1})(x)) && \text{в соответствии с определениями (2.14) и (2.15)} \\ &= -(\iota \circ \phi \circ \iota^{-1})(x) && \text{в силу (6.8),} \end{aligned}$$

что доказывает однородность индуцированного отображения $\iota \circ \phi \circ \iota^{-1}$ относительно умножения на любые скаляры.

Второе утверждение Теоремы — это следствие определения стандартного погружения (6.13) и правила (2.14) умножения числа на интервал

$$q \cdot \mathbf{x} = \begin{cases} [q \underline{\mathbf{x}}, q \overline{\mathbf{x}}], & \text{если } q \geq 0, \\ [q \overline{\mathbf{x}}, q \underline{\mathbf{x}}], & \text{иначе,} \end{cases}$$

которому удобно придать следующую равносильную форму

$$\begin{cases} \frac{q \cdot \mathbf{x}}{q \cdot \overline{\mathbf{x}}} = q^+ \underline{\mathbf{x}} - q^- \overline{\mathbf{x}}, \\ \frac{q \cdot \mathbf{x}}{q \cdot \underline{\mathbf{x}}} = -q^- \underline{\mathbf{x}} + q^+ \overline{\mathbf{x}}. \end{cases}$$

■

Блочная $2n \times 2n$ -матрица из Теоремы 6.1.1 настолько важна в развиваемой нами теории, что мы примем для неё специальные обозначение и термин.

Определение 6.1.6 Для точечной $n \times n$ -матрицы Q мы полагаем

$$Q^\sim := \left(\begin{array}{c|c} Q^+ & Q^- \\ \hline Q^- & Q^+ \end{array} \right) \quad (6.15)$$

и будем называть точечную $2n \times 2n$ -матрицу Q^\sim сопутствующей матрицей для Q .

Важная особенность сопутствующей матрицы $Q^\sim \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ состоит в том, что она всегда неотрицательна: такая матрица должна соответствовать “ \leq ”-изотонному оператору на \mathbb{R}^{2n} , индуцированному изотонным по включению умножением на Q в интервальном пространстве \mathbb{KR}^n .

Следствие из Теоремы 6.1.1. Привлекая определение индуцированного отображения легко заключить, что для любой точечной $n \times n$ -матрицы Q и любого $x \in \mathbb{R}^{2n}$ справедливо

$$\sigma(Q\sigma^{-1}(x)) = Q\tilde{x}. \quad (6.16)$$

Аналогично, для любой точечной $n \times n$ -матрицы Q и любого интервального вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{KR}^n$ имеет место

$$Q\mathbf{x} = \sigma^{-1}(Q\tilde{\sigma}(\mathbf{x})) \quad (6.17)$$

(наглядно соотношения (6.16) и (6.17) иллюстрируются изображённой на Рисунке 6.1 коммутативной диаграммой).

6.1 е Вполне невырожденные матрицы

Теорема 6.1.2 Для точечной $n \times n$ -матрицы Q следующие условия эквивалентны:

- (а) $Q\mathbf{x} = 0$ в интервальном пространстве \mathbb{KR}^n тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} = 0$;
- (б) матрица $Q\tilde{\sigma} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, сопутствующая для Q , является невырожденной;
- (в) невырожденными являются как сама матрица Q , так и её модуль $|Q|$ (т.е. матрица, образованная модулями элементов Q).

Доказательство. Эквивалентность (а) \Leftrightarrow (б) является следствием соотношения (6.17).

Для доказательства эквивалентности условий (б) и (в) выполним с сопутствующей матрицей $Q\tilde{\sigma}$ следующие преобразования. К её $(n+1)$ -ой строке прибавим первую строку, к $(n+2)$ -ой — вторую и т.д. до $2n$ -ой включительно, к которой мы прибавляем n -ую строку матрицы $Q\tilde{\sigma}$. Поскольку

$$q^+ + q^- = |q|$$

для любого вещественного числа q , то в результате проделанных преобразований мы получим $2n \times 2n$ -матрицу

$$\begin{pmatrix} Q^+ & Q^- \\ |Q| & |Q| \end{pmatrix}. \quad (6.18)$$

Далее, вычтем из первого столбца получившейся матрицы (6.18) её $(n+1)$ -ый столбец, из второго — $(n+2)$ -ой и т.д. до n -го включительно, из которого вычтем последний $2n$ -ый столбец. Поскольку

$$q^+ - q^- = q$$

для любого вещественного числа q , то мы получим блочно-треугольную $2n \times 2n$ -матрицу

$$\begin{pmatrix} Q & Q^- \\ 0 & |Q| \end{pmatrix}. \quad (6.19)$$

Как известно из линейной алгебры, проделанные нами преобразования (линейное комбинирование строк и столбцов) не изменяют свойство матрицы быть вырожденной или невырожденной (см., например, [65]). Следовательно, матрица (6.19) вырождена или невырождена одновременно с сопутствующей матрицей $Q\tilde{\sigma}$. Но в силу специального вида матрицы (6.19) её определитель равен произведению определителей матриц Q и $|Q|$. Таким

образом, сопутствующая матрица Q^\sim невырождена действительно тогда и только тогда, когда невырождены обе матрицы Q и $|Q|$. ■

Мы уже отмечали, что невырожденность (неособенность) точечной матрицы Q в смысле классической линейной алгебры не обязательно влечёт то, что соответствующий оператор умножения на Q в $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ обратим. Но теперь феномен матрицы (6.3) и ей подобных получает полное объяснение: хотя сами такие матрицы могут быть и невырожденными, но умножение на них после погружения в линейное пространство соответствует умножению на вырожденные сопутствующие матрицы. Например, для матрицы (6.3) сопутствующей матрицей является

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.20)$$

и её определитель нулевой!

Результат Теоремы 6.1.2 позволяет сформулировать следующее

Определение 6.1.7 Точечная $n \times n$ -матрица Q , удовлетворяющая какому-нибудь (а значит и любому) из равносильных условий (а)–(в) Теоремы 6.1.2, называется вполне невырожденной (вполне неособенной)^{6.2}.

К примеру, единичная матрица — вполне невырожденная, тогда как матрица (6.3) невырождена в обычном смысле, но не является вполне невырожденной. Очевидно также, что если матрица вырождена в обычном смысле, то она тем более не есть вполне невырожденная. Все неотрицательные невырожденные матрицы также являются вполне невырожденными. Практически удобный критерий для проверки полной невырожденности матрицы предоставляет условие (в) из Теоремы 6.1.2. Например, вместо вычисления определителя сопутствующей матрицы (6.20) для матрицы (6.3) можно было бы просто заметить вырожденность матрицы модулей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следствие из Теорем 6.1.1 и 6.1.2. Оператор $\phi : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$, задаваемый умножением на квадратную точечную матрицу в $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$, т.е. такой что

$$\phi(\mathbf{x}) = Q\mathbf{x} \quad \text{для некоторой } Q \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

обратим тогда и только тогда, когда матрица Q является вполне невырожденной. При этом обратный оператор $\phi^{-1} : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$ действует, согласно (6.7), следующим образом

$$\phi^{-1}(\mathbf{x}) = \sigma^{-1}((Q^\sim)^{-1} \cdot \sigma(\mathbf{x})). \quad (6.21)$$

Замечание. Несмотря на существование явной формулы (6.21), оператор, который обратен оператору умножения на точечную $n \times n$ -матрицу Q в $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$, в общем случае не может быть выражен через умножение на какую-нибудь матрицу в $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ (в частности, на матрицу Q^{-1}).

^{6.2}Предлагаемый нами английский вариант этого термина — *completely regular matrix*, или *completely nonsingular matrix*. В своих ранних работах [292, 295, 297] и некоторых других автор называл такие матрицы *i-невырожденными* (*i-nonsingular*).

6.2 Исследование индуцированных уравнений

Итак, в результате погружения исследование интервальных отображений $\mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$ сведено нами к исследованию отображений $\mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ на привычном евклидовом пространстве, а нахождение формальных решений интервальных уравнений заменено на решение индуцированных уравнений в \mathbb{R}^{2n} . Учитывая особую роль стандартного погружения $\sigma : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, мы всюду ниже под индуцированными отображениями и уравнениями будем иметь в виду именно σ -индуцированные отображения и уравнения на \mathbb{R}^{2n} . Следовательно, вместо задачи вычисления формальных решений интервальных уравнений (6.1)–(6.2)

$$\mathbf{C}x \ominus x + \mathbf{d} = 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{C}x \ominus \mathbf{d} = 0 \quad (6.22)$$

мы будем заниматься решением индуцированных уравнений в \mathbb{R}^{2n} :

уравнения

$$\mathfrak{F}(y) = 0, \quad (6.23)$$

такого что

$$\mathfrak{F}(y) = \sigma(\mathbf{C}\sigma^{-1}(y) \ominus \sigma^{-1}(y) + \mathbf{d}) = \sigma(\mathbf{C}\sigma^{-1}(y)) - y + \sigma(\mathbf{d}), \quad (6.24)$$

и уравнения

$$\mathfrak{G}(y) = 0, \quad (6.25)$$

такого что

$$\mathfrak{G}(y) = \sigma(\mathbf{C}\sigma^{-1}(y) \ominus \mathbf{d}) = \sigma(\mathbf{C}\sigma^{-1}(y)) - \sigma(\mathbf{d}). \quad (6.26)$$

Отметим, что для уравнения (6.23)–(6.24), возникающего при внешнем оценивании множеств решений ИСЛАУ, нахождение решений имеет содержательный смысл лишь в условиях Теорем 3.1.2–3.1.3 из Главы 3, которые уже обеспечивают существование и единственность формальных решений исходного уравнения (3.42), равносильного (6.23). По этой причине мы далее не будем отдельно исследовать эти вопросы для индуцированного уравнения (6.23)–(6.24). Что же касается уравнения (6.25)–(6.26), возникающего при внутреннем оценивании множеств решений ИСЛАУ, то формальный подход не накладывает никаких ограничений на \mathbf{C} и \mathbf{d} , а потому исследование существования и единственности решений для этих уравнений действительно необходимо. Соответствующие результаты нетривиальны и мы ещё обсудим их ниже.

Предложение 6.2.1 *Индукцированные отображения $\mathfrak{F} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ и $\mathfrak{G} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, определённые посредством (6.24) и (6.26), непрерывны.*

Доказательство. Отображения $\mathfrak{f} : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$ и $\mathfrak{g} : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{R}^n$, действующие как

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{C}\mathbf{x} \ominus \mathbf{x} + \mathbf{d} \quad \text{и} \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{C}\mathbf{x} \ominus \mathbf{d},$$

непрерывны в силу непрерывности интервальных арифметических операций в $\mathbb{K}\mathbb{R}$. Погружение σ , как и обратное ему отображение σ^{-1} , также непрерывны. Следовательно, непрерывны и их композиции $\mathfrak{F} = \sigma \circ \mathfrak{f} \circ \sigma^{-1}$ и $\mathfrak{G} = \sigma \circ \mathfrak{g} \circ \sigma^{-1}$. ■

Напомним

Определение 6.2.1 [50] Пусть U — частично упорядоченное множество с порядком “ \preceq ”. Отображение $T : U \rightarrow U$ называется изотонным относительно этого порядка “ \preceq ”, если

$$T(x) \preceq T(y)$$

для любых $x, y \in U$, таких что $x \preceq y$. Отображение T называется антитонным, если

$$T(x) \succcurlyeq T(y)$$

для любых $x, y \in U$, таких что $x \preceq y$. Отображение T называется положительным, если $x \succcurlyeq 0$ влечёт $T(x) \succcurlyeq 0$.

Для линейных отображений на линейных частично упорядоченных пространствах изотонность, как известно, равносильна положительности.

Предложение 6.2.2 Индуцированное отображение $\mathfrak{G} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, определённое соотношением (6.26), является изотонным относительно покомпонентного порядка “ \leq ”.

Доказательство. Пусть $y, z \in \mathbb{R}^{2n}$, $y \leq z$. Тогда $\sigma^{-1}(y) \subseteq \sigma^{-1}(z)$, и в силу изотонности интервальных арифметических операций по включению

$$\mathbf{C}\sigma^{-1}(y) \ominus \mathbf{d} \subseteq \mathbf{C}\sigma^{-1}(z) \ominus \mathbf{d},$$

т.е.

$$\mathfrak{G}(y) = \sigma(\mathbf{C}\sigma^{-1}(y) \ominus \mathbf{d}) \leq \sigma(\mathbf{C}\sigma^{-1}(z) \ominus \mathbf{d}) = \mathfrak{G}(z),$$

что и требовалось. ■

Для отображения $\mathfrak{F} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, определённого в (6.24), ни изотонность, ни антитонность в общем случае и в условиях Теорем 3.1.2–3.1.3 не выполняются.

Коль скоро отображения \mathfrak{F} и \mathfrak{G} действуют на евклидовом пространстве, мы можем поставить вопрос об их дифференцируемости, гладкости и т.п. К сожалению, глобально, т.е. на всей области определения, мы не можем похвастаться ни одним из этих свойств. Но вместо этого, наложив на матрицу \mathbf{C} некоторые дополнительные ограничения, мы получим нечто даже более привлекательное — *выпуклость*.

Именно, предположим, что

в каждой строке интервальной матрицы \mathbf{C}
все элементы являются либо только правильными,
либо только неправильными интервалами

(6.27)

Определим множества натуральных чисел

$$\mathcal{I}' = \{i'_1, i'_2, \dots, i'_\gamma\} \quad \text{и} \quad \mathcal{I}'' = \{i''_1, i''_2, \dots, i''_\delta\}, \quad \mathcal{I}' \cap \mathcal{I}'' = \emptyset, \quad \gamma + \delta = n,$$

так, чтобы они представляли номера строк матрицы $\mathbf{C} = (c_{ij})$ с правильными и неправильными интервалами соответственно:

$$c_{ij} \text{ является } \begin{cases} \text{правильным,} & \text{если } i \in \mathcal{I}' \\ \text{неправильным,} & \text{если } i \in \mathcal{I}'' \end{cases}$$

Зададим на $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ частичный порядок “ \Subset ” и на \mathbb{R}^{2n} частичный порядок “ \ll ” следующим образом:

$$\mathbf{x} \Subset \mathbf{y} \quad \text{в } \mathbb{K}\mathbb{R}^n \iff \begin{cases} \mathbf{x}_i \subseteq \mathbf{y}_i & \text{для } i \in \mathcal{I}', \\ \mathbf{x}_i \supseteq \mathbf{y}_i & \text{для } i \in \mathcal{I}'', \end{cases}$$

$$x \ll y \quad \text{в } \mathbb{R}^{2n} \iff \begin{cases} x_i \leq y_i & \text{для } i \in \{i'_1, \dots, i'_\gamma, i'_1 + n, \dots, i'_\gamma + n\}, \\ x_i \geq y_i & \text{для } i \in \{i''_1, \dots, i''_\delta, i''_1 + n, \dots, i''_\delta + n\}. \end{cases}$$

Нетрудно понять, что

$$\mathbf{x} \Subset \mathbf{y} \quad \text{в } \mathbb{K}\mathbb{R}^n \iff \sigma(\mathbf{x}) \ll \sigma(\mathbf{y}) \quad \text{в } \mathbb{R}^{2n}.$$

Частичные порядки “ \Subset ” и “ \ll ” — это упорядочения пространств $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ и \mathbb{R}^{2n} , в некотором смысле “согласованные” с матрицей \mathbf{C} , со структурой её правильных и неправильных строк.

Далее нам понадобится также конус положительных элементов в \mathbb{R}^{2n} относительно порядка “ \ll ”:

$$K_{\ll} = \{x \in \mathbb{R}^{2n} \mid (x_i \geq 0, i \in \mathcal{I}') \& (x_i \leq 0, i \in \mathcal{I}'')\}. \quad (6.28)$$

Оказывается, что следствием свойств суб- и супердистрибутивности (2.20)–(2.21) в арифметике Каухера, является тот факт, что исследуемые отображения $\mathfrak{F}(x)$ и $\mathfrak{G}(x)$, задаваемые посредством (6.24) и (6.26) — выпуклые относительно “ \ll ”. Соответственно, тогда в любой точке $x \in \mathbb{R}^{2n}$ будут существовать непустые субдифференциалы $\partial_{\ll} \mathfrak{F}(x)$ и $\partial_{\ll} \mathfrak{G}(x)$, легко вычисляемые, поскольку $\mathfrak{F}(x)$ и $\mathfrak{G}(x)$ являются полиэдральными (кусочно-аффинными) отображениями. Наконец, знание субдифференциалов позволит нам построить для вычисления формальных решений *субдифференциальный метод Ньютона*.

Такова вкратце наша программа действий. Перейдем теперь к детальному обоснованию сделанных заявлений.

6.2 а Порядковая выпуклость и субдифференцируемость

Из классического анализа хорошо известно понятие *выпуклой функции* и его многочисленные плодотворные применения. Напомним обобщение этого понятия на многомерный случай.

Определение 6.2.2 [2, 73, 76, 84] Пусть евклидово пространство \mathbb{R}^q упорядочено частичным порядком “ \preceq ”. Отображение $F : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ называется *порядково выпуклым* относительно “ \preceq ”, если

$$F(\lambda y + (1 - \lambda)z) \preceq \lambda F(y) + (1 - \lambda)F(z)$$

для любых $y, z \in \mathbb{R}^p$ и $\lambda \in (0, 1)$.

Предложение 6.2.3 Если интервальная матрица \mathbf{C} удовлетворяет условию (6.27), то индуцированные отображения $\mathfrak{F}(y)$ и $\mathfrak{G}(y)$, определённые в (6.24)–(6.26), являются *порядково выпуклыми* относительно *покомпонентного* порядка “ \ll ” на \mathbb{R}^{2n} .

Доказательство. Для любых $\lambda \in (0, 1)$ и $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n$, принимая во внимание субдистрибутивность (2.20) и супердистрибутивность (2.21), мы имеем

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}(\lambda\mathbf{u} + (1-\lambda)\mathbf{v}))_i &\subseteq \lambda(\mathbf{C}\mathbf{u})_i + (1-\lambda)(\mathbf{C}\mathbf{v})_i && \text{для } i \in \mathcal{I}', \\ (\mathbf{C}(\lambda\mathbf{u} + (1-\lambda)\mathbf{v}))_i &\supseteq \lambda(\mathbf{C}\mathbf{u})_i + (1-\lambda)(\mathbf{C}\mathbf{v})_i && \text{для } i \in \mathcal{I}'', \end{aligned}$$

так что в целом

$$\mathbf{C}(\lambda\mathbf{u} + (1-\lambda)\mathbf{v}) \subseteq \lambda\mathbf{C}\mathbf{u} + (1-\lambda)\mathbf{C}\mathbf{v}.$$

Следовательно, в \mathbb{R}^{2n}

$$\sigma(\mathbf{C}(\lambda\mathbf{u} + (1-\lambda)\mathbf{v})) \ll \lambda\sigma(\mathbf{C}\mathbf{u}) + (1-\lambda)\sigma(\mathbf{C}\mathbf{v}). \quad (6.29)$$

Пусть $y, z \in \mathbb{R}^{2n}$. Если обозначить $\mathbf{u} = \sigma^{-1}(x)$, $\mathbf{v} = \sigma^{-1}(z)$, то справедлива следующая цепочка преобразований

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(\lambda y + (1-\lambda)z) &= \sigma(\mathbf{C}\sigma^{-1}(\lambda y + (1-\lambda)z)) - (\lambda y + (1-\lambda)z) + \sigma(\mathbf{d}) \\ &= \sigma(\mathbf{C}(\lambda\mathbf{u} + (1-\lambda)\mathbf{v})) - (\lambda y + (1-\lambda)z) + \sigma(\mathbf{d}) \\ &\ll \lambda\sigma(\mathbf{C}\mathbf{u}) + (1-\lambda)\sigma(\mathbf{C}\mathbf{v}) - (\lambda y + (1-\lambda)z) + \sigma(\mathbf{d}) && \text{в силу (6.29)} \\ &= \lambda(\sigma(\mathbf{C}\mathbf{u}) - y + \sigma(\mathbf{d})) + (1-\lambda)(\sigma(\mathbf{C}\mathbf{v}) - z + \sigma(\mathbf{d})) \\ &= \lambda\mathfrak{F}(y) + (1-\lambda)\mathfrak{F}(z), \end{aligned}$$

которая и доказывает Предложение для \mathfrak{F} . Для отображения \mathfrak{G} доказательство завершается аналогично. ■

Выпуклые функции и отображения, будучи одними из ближайших родственников линейным и аффинным отображениям, обладают, как известно, многими замечательными свойствами. Некоторыми из этих свойств мы и собираемся воспользоваться.

Определение 6.2.3 [2, 73, 82, 84] Пусть \mathbb{R}^q — частично упорядоченное евклидово пространство с порядком “ \preceq ”, отображение $F: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ порядково выпукло относительно “ \preceq ”. Субдифференциалом отображения F в точке $x \in \mathbb{R}^p$ называется множество, обозначаемое $\partial_{\preceq} F(x)$, которое образовано всеми такими линейными операторами $D: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, что

$$D(v) \preceq F(x+v) - F(x) \quad (6.30)$$

для любого $v \in \mathbb{R}^p$. Элементы множества $\partial_{\preceq} F(x)$ — линейные операторы, удовлетворяющие (6.30) — называются субградиентами отображения F в точке x . Если субдифференциал $\partial_{\preceq} F(x)$ непуст, то про отображение F говорят, что оно субдифференцируемо в точке x .

Как известно, в общем случае понятие субдифференциала может быть определено и для отображений со значениями в общих линейных упорядоченных пространствах. Но проверка существования субдифференциала и его вычисление представляют собой при этом весьма непростые задачи [2]. По счастью, в интересующей нас конечномерной ситуации всё существенно упрощается. Конечномерный выпуклый анализ является одной из наиболее красивых, развитых и практически важных математических дисциплин, результатами которой мы будем существенно пользоваться в нашей работе. Здесь имеет смысл дать краткую сводку необходимых нам сведений.

Определение 6.2.4 [73, 82, 84] *Односторонней производной функции $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ в точке x по направлению $y \in \mathbb{R}^p$ (или, коротко, производной по направлению) называется предел*

$$\frac{\partial f(x)}{\partial y} := \lim_{\alpha \searrow 0} \frac{f(x + \alpha y) - f(x)}{\alpha},$$

в случае, если он существует.

Определение 6.2.5 [73, 82, 84] *Опорной функцией (выпуклого) множества $W \subseteq \mathbb{R}^p$ называется функция $\delta_W : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что*

$$\delta_W(x) := \sup\{x^\top w \mid w \in W\}.$$

Теорема 6.2.1 [73, 82, 84] *Если выпуклая функция $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна в некоторой точке x , то субдифференциал $\partial f(x)$ — непустое ограниченное множество и производная по направлению $\frac{\partial f(x)}{\partial y}$ как функция направления y является опорной функцией для $\partial f(x)$.*

В рассматриваемой нами ситуации выпуклость исследуемых отображений $\mathfrak{F} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ и $\mathfrak{G} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ относительно порядка “ \ll ” равносильна тому, что их координатные компоненты — функционалы $\mathfrak{F}_i : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ и $\mathfrak{G}_i : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, — выпуклы для $i \in \mathcal{I}'$ и вогнуты для $i \in \mathcal{I}''$ в обычном смысле. Вдобавок, все $\mathfrak{F}_i(x)$ и $\mathfrak{G}_i(x)$ непрерывны, и значит субдифференцируемы всюду на \mathbb{R}^{2n} в силу классического результата Теоремы 6.2.1.

Субдифференциалы $\partial \mathfrak{F}_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, 2n$, можно мыслить, например, как множества $2n$ -векторов $d_{(i)}$, таких что для любых $v \in \mathbb{R}^{2n}$

$$\mathfrak{F}_i(x + v) - \mathfrak{F}_i(x) \geq d_{(i)}^\top v \quad \text{при } i \in \mathcal{I}',$$

$$\mathfrak{F}_i(x + v) - \mathfrak{F}_i(x) \leq d_{(i)}^\top v \quad \text{при } i \in \mathcal{I}''.$$

Если же сконструировать из этих векторов $d_{(i)}$, как из строк, $2n \times 2n$ -матрицу $D := (d_{(1)}, d_{(2)}, \dots, d_{(2n)})^\top$, то, каков бы ни был $v \in \mathbb{R}^{2n}$, удовлетворяется неравенство

$$\mathfrak{F}(x + v) - \mathfrak{F}(x) \gg Dv,$$

и потому линейный оператор, задаваемый матрицей D , является субградиентом \mathfrak{F} в x . Соответственно, субдифференциал $\partial \ll \mathfrak{F}(x)$ непуст. Поскольку наши рассуждения дословно переносятся на отображение \mathfrak{G} и никак не зависят от точки x , мы обосновали

Предложение 6.2.4 *Для индуцированных отображений \mathfrak{F} и \mathfrak{G} , задаваемых соотношениями (6.24)–(6.26) (и порядково выпуклых в силу Предложения 6.2.3) субдифференциалы $\partial \ll \mathfrak{F}(y)$ и $\partial \ll \mathfrak{G}(y)$ являются непустыми в любой точке $y \in \mathbb{R}^{2n}$, т.е. отображения \mathfrak{F} и \mathfrak{G} всюду субдифференцируемы.*

Ниже мы для краткости часто будем обозначать эти субдифференциалы просто $\partial \mathfrak{F}(y)$ и $\partial \mathfrak{G}(y)$.

Если \mathfrak{F} дифференцируема в точке x , то субдифференциал $\partial \mathfrak{F}(y)$ состоит из единственного элемента, именно, из матрицы Якоби

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathfrak{F}_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \mathfrak{F}_1(x)}{\partial x_{2n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mathfrak{F}_{2n}(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \mathfrak{F}_{2n}(x)}{\partial x_{2n}} \end{pmatrix}.$$

Аналогичный факт верен и в отношении \mathfrak{G} . Но, как мы уже отмечали, отображения \mathfrak{F} и \mathfrak{G} не являются всюду дифференцируемыми. Чтобы указать явный вид субдифференциалов $\partial\mathfrak{F}(x)$ и $\partial\mathfrak{G}(x)$ в общем случае, и вывести для них некоторые оценки, существенно используемые в дальнейшем, нам необходимо знать больше о самих исследуемых отображениях \mathfrak{F} и \mathfrak{G} .

6.2 b Полиэдральность

Определение 6.2.6 [73, 82, 84] *Надграфиком функции $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ называется множество в \mathbb{R}^{p+1} , определяемое как*

$$\text{epi } f := \{ (x, t) \in \mathbb{R}^{p+1} \mid x \in \mathbb{R}^p, t \in \mathbb{R}, f(x) \leq t \}.$$

Подграфиком функции $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ называется множество в \mathbb{R}^{p+1} , определяемое как

$$\text{hyp } f := \{ (x, t) \in \mathbb{R}^{p+1} \mid x \in \mathbb{R}^p, t \in \mathbb{R}, f(x) \geq t \}.$$

Определение 6.2.7 [84] *Полиэдральным выпуклым множеством в \mathbb{R}^p называется множество, которое можно представить как пересечение конечного числа замкнутых полупространств \mathbb{R}^p , т.е. как множество решений конечной системы линейных неравенств вида*

$$h_{(i)}^\top x \leq \xi_i, \quad i = 1, 2, \dots, M,$$

где $h_{(i)} \in \mathbb{R}^p$, $\xi_i \in \mathbb{R}$ и M — некоторый натуральный номер^{6.3}.

Определение 6.2.8 [84] *Выпуклая функция $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, надграфик которой является полиэдральным множеством в \mathbb{R}^{p+1} , называется полиэдральной выпуклой функцией. Вогнутая функция $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, подграфик которой является полиэдральным множеством в \mathbb{R}^{p+1} , называется полиэдральной вогнутой функцией.*

Подчеркнём, что полиэдральные функции — это простейшие среди выпуклых функций: по существу, полиэдральные функции можно характеризовать как почти всюду локально аффинные выпуклые функции, поскольку их графики составлены из кусков гиперплоскостей.

Предложение 6.2.5 *В условиях (6.27) координатные компоненты $\mathfrak{F}_i(x)$ и $\mathfrak{G}_i(y)$ отображений \mathfrak{F} и \mathfrak{G} , определённых формулами (6.24)–(6.26), являются выпуклыми полиэдральными функциями для $i \in \mathcal{I}'$ и вогнутыми полиэдральными функциями для $i \in \mathcal{I}''$.*

Доказательство. Факт полиэдральности функций $\mathfrak{F}_i(x)$ и $\mathfrak{G}_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, 2n$, мы получим как следствие некоторых специальных представлений для $\mathfrak{F}(x)$ и $\mathfrak{G}(x)$. Его выводом для \mathfrak{F} мы сейчас и займёмся.

Прежде всего отметим, что для любой интервальной $n \times n$ -матрицы \mathbf{C} , удовлетворяющей условию (6.27) и произвольного интервального n -вектора \mathbf{v} имеет место

$$\mathbf{C}\mathbf{v} = \sup_{\mathbf{C} \in \mathbf{C}} \mathbf{C}\mathbf{v}. \quad (6.31)$$

^{6.3}В русской литературе используется также термин *многогранное множество* [82]

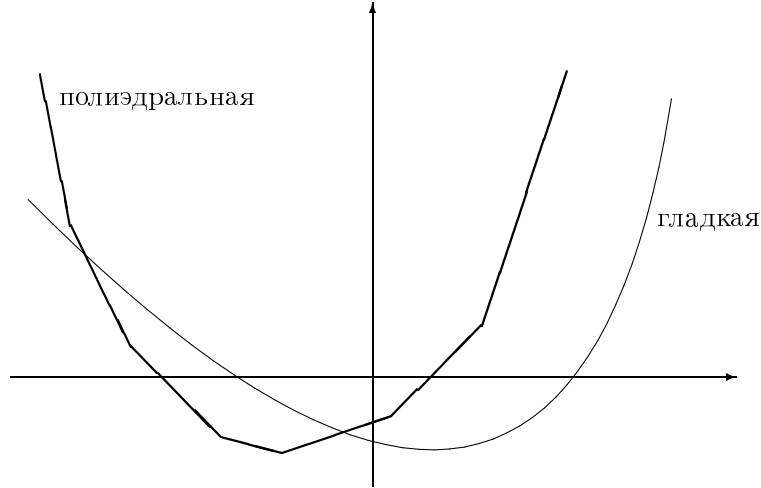


Рис. 6.2: График гладкой выпуклой функции в сравнении с графиком полиэдральной выпуклой функции: у полиэдральной он склеен из кусков гиперплоскостей.

Действительно, согласно представлению (2.31) для правильных интервалов \mathbf{c}_{ij} можно написать

$$\mathbf{c}_{ij}\mathbf{v}_j = \bigvee_{c_{ij} \in \mathbf{c}_{ij}} c_{ij}\mathbf{v}_j,$$

а для неправильных

$$\mathbf{c}_{ij}\mathbf{v}_j = \bigwedge_{c_{ij} \in \mathbf{c}_{ij}} c_{ij}\mathbf{v}_j.$$

Используя свойства (2.16) и (2.17) дистрибутивности операций “ \wedge ” и “ \vee ” относительно сложения, мы получим для $i \in \mathcal{I}'$

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}\mathbf{v})_i &= \sum_{j=1}^n \mathbf{c}_{ij}\mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^n \bigvee_{c_{ij} \in \mathbf{c}_{ij}} c_{ij}\mathbf{v}_j = \bigvee_{c_{i1} \in \mathbf{c}_{i1}} \bigvee_{c_{i2} \in \mathbf{c}_{i2}} \cdots \bigvee_{c_{in} \in \mathbf{c}_{in}} \sum_{j=1}^n c_{ij}\mathbf{v}_j \\ &= \bigvee_{C \in \mathbf{C}} \sum_{j=1}^n c_{ij}\mathbf{v}_j = \bigvee_{C \in \mathbf{C}} (\mathbf{C}\mathbf{v})_i, \end{aligned}$$

и для $i \in \mathcal{I}''$

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}\mathbf{v})_i &= \sum_{j=1}^n \mathbf{c}_{ij}\mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^n \bigwedge_{c_{ij} \in \mathbf{c}_{ij}} c_{ij}\mathbf{v}_j = \bigwedge_{c_{i1} \in \mathbf{c}_{i1}} \bigwedge_{c_{i2} \in \mathbf{c}_{i2}} \cdots \bigwedge_{c_{in} \in \mathbf{c}_{in}} \sum_{j=1}^n c_{ij}\mathbf{v}_j \\ &= \bigwedge_{C \in \mathbf{C}} \sum_{j=1}^n c_{ij}\mathbf{v}_j = \bigwedge_{C \in \mathbf{C}} (\mathbf{C}\mathbf{v})_i, \end{aligned}$$

что и доказывает равенство (6.31).

Далее, принимая во внимание соотношения (6.14) и (6.16), заключаем

$$\sigma(\mathbf{C}\sigma^{-1}(x)) = \sigma\left(\sup_{C \in \mathbf{C}} C\sigma^{-1}(x)\right) = \sup_{C \in \mathbf{C}} \ll \sigma(C\sigma^{-1}(x)) = \sup_{C \in \mathbf{C}} \ll C \tilde{x}.$$

В целом для отображения \mathfrak{F} , определённого посредством (6.24), справедливо следующее представление:

$$\mathfrak{F}(x) = \sup_{C \in \mathbf{C}} \ll C \tilde{x} - x + \sigma(\mathbf{d}). \quad (6.32)$$

В частности,

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_i(x) &= \left(\sup_{C \in \mathbf{C}} \ll C \tilde{x} \right)_i - x_i + (\sigma(\mathbf{d}))_i \\ &= \begin{cases} \sup_{C \in \mathbf{C}} (C \tilde{x})_i - x_i + (\sigma(\mathbf{d}))_i, & \text{если } i \in \mathcal{I}', \\ \inf_{C \in \mathbf{C}} (C \tilde{x})_i - x_i + (\sigma(\mathbf{d}))_i, & \text{если } i \in \mathcal{I}''. \end{cases} \end{aligned} \quad (6.33)$$

Тот факт, что в представлениях (6.32) и (6.33) матрица $C \tilde{}$ — это неотрицательная матрица специального блочного вида (6.15), имеет важное следствие. Именно, $\sup (C \tilde{x})_i$ и $\inf (C \tilde{x})_i$ могут достигаться только в *концах* интервальных элементов \mathbf{c}_{ij} , $j = 1, 2, \dots, n$, или же дополнительно ещё в *нулях*, если соответствующие элементы $\mathbf{c}_{ij} \ni 0$. В любом случае мы можем эквивалентным образом заменить интервал \mathbf{c}_{ij} на конечное число точек (две или три), по которым только и надлежит брать супремумы и инфимумы в (6.33). Поэтому вместо (6.32) и (6.33) мы можем выписать более точные представления

$$\mathfrak{F}(x) = \max_{C \in \text{Vert } \mathbf{C}} \ll C \tilde{x} - x + \sigma(\mathbf{d}), \quad (6.34)$$

и

$$\mathfrak{F}_i(x) = \begin{cases} \max_{C \in \text{Vert } \mathbf{C}} (C \tilde{x})_i - x_i + (\sigma(\mathbf{d}))_i, & \text{если } i \in \mathcal{I}', \\ \min_{C \in \text{Vert } \mathbf{C}} (C \tilde{x})_i - x_i + (\sigma(\mathbf{d}))_i, & \text{если } i \in \mathcal{I}'', \end{cases} \quad (6.35)$$

где $\text{Vert } \mathbf{C}$ — это расширенная матрица вершин для \mathbf{C} , т.е. множество всех точечных $n \times n$ -матриц, определяемое как

$$(\text{Vert } \mathbf{C})_{ij} := \begin{cases} \{ \underline{\mathbf{c}}_{ij}, \bar{\mathbf{c}}_{ij} \}, & \text{если } 0 \notin \mathbf{c}_{ij}, \\ \{ \underline{\mathbf{c}}_{ij}, 0, \bar{\mathbf{c}}_{ij} \}, & \text{если } 0 \in \mathbf{c}_{ij}. \end{cases}$$

Поскольку $\text{Vert } \mathbf{C}$ конечно, то из (6.35) следует, что каждая $\mathfrak{F}_i(x)$ есть максимум или минимум, в зависимости от того $i \in \mathcal{I}'$ или $i \in \mathcal{I}''$, от конечного числа линейных форм. Это и доказывает предложение для отображения \mathfrak{F} .

Для \mathfrak{G} все рассуждения проводятся аналогично и приводят к следующим представлениям:

$$\mathfrak{G}(x) = \max_{C \in \text{Vert } \mathbf{C}} \ll C \tilde{x} - \sigma(\mathbf{d}), \quad (6.36)$$

и

$$\mathfrak{G}_i(x) = \begin{cases} \max_{C \in \text{Vert } \mathbf{C}} (C \tilde{x})_i - (\sigma(\mathbf{d}))_i, & \text{если } i \in \mathcal{I}', \\ \min_{C \in \text{Vert } \mathbf{C}} (C \tilde{x})_i - (\sigma(\mathbf{d}))_i, & \text{если } i \in \mathcal{I}'', \end{cases} \quad (6.37)$$

Итак, каждое из отображений \mathfrak{G}_i также является либо максимумом либо минимумом конечного количества линейных форм. ■

6.2 с Оценки субдифференциалов

Наша ближайшая цель — получить оценки субдифференциалов исследуемых отображений \mathfrak{F} и \mathfrak{G} , которые будут играть важную роль в доказательстве сходимости субдифференциального метода Ньютона в §6.4. Но предварительно нам необходимо ввести

Определение 6.2.9 Положительной частью \mathbf{x}^+ и отрицательной частью \mathbf{x}^- правильного интервала \mathbf{x} назовём следующие интервалы

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^+ &:= \{x^+ \mid x \in \mathbf{x}\} = \{\max\{x, 0\} \mid x \in \mathbf{x}\}, \\ \mathbf{x}^- &:= \{x^- \mid x \in \mathbf{x}\} = \{\max\{-x, 0\} \mid x \in \mathbf{x}\}.\end{aligned}$$

Например,

$$\begin{aligned}[-1, 2]^+ &= [0, 2], & [-1, 2]^- &= [0, 1], \\ [1, 2]^+ &= [1, 2], & [1, 2]^- &= [0, 0].\end{aligned}$$

Можно рассматривать операции взятия положительной и отрицательной частей интервала как интервальные расширения функций $(\cdot)^+$ и $(\cdot)^-$ введённых в Определении 2.2.4. Как обычно, к правильным интервальным векторам и матрицам эти операции будут применяться покомпонентным образом.

Предложение 6.2.6 Для субдифференциала $\partial\mathfrak{F}(x)$ отображения \mathfrak{F} , определённого формулой (6.24), справедлива оценка

$$\partial\mathfrak{F}(x) \subseteq \begin{pmatrix} (\text{pro } \mathbf{C})^+ & (\text{pro } \mathbf{C})^- \\ \text{pro } (\mathbf{C})^- & (\text{pro } \mathbf{C})^+ \end{pmatrix} - I. \quad (6.38)$$

Для субдифференциала $\partial\mathfrak{G}(x)$ отображения \mathfrak{G} , определённого формулой (6.26), справедлива оценка

$$\partial\mathfrak{G}(x) \subseteq \begin{pmatrix} (\text{pro } \mathbf{C})^+ & (\text{pro } \mathbf{C})^- \\ \text{pro } (\mathbf{C})^- & (\text{pro } \mathbf{C})^+ \end{pmatrix}. \quad (6.39)$$

Доказательство мы проведем, как и ранее, только для \mathfrak{F} , так как для отображения \mathfrak{G} оно отличается малосущественными техническими деталями.

Покажем сначала, что субдифференциал $\partial\mathfrak{F}(x)$ имеет внешнюю интервальную оценку в виде правильной $2n \times 2n$ -матрицы, составленной из интервалов односторонних частных производных \mathfrak{F} . Более точно

$$\partial\mathfrak{F}(x) \subseteq \begin{pmatrix} \left[\frac{\partial\mathfrak{F}_1(x)}{\partial x_1^-}, \frac{\partial\mathfrak{F}_1(x)}{\partial x_1^+} \right] & \cdots & \left[\frac{\partial\mathfrak{F}_1(x)}{\partial x_{2n}^-}, \frac{\partial\mathfrak{F}_1(x)}{\partial x_{2n}^+} \right] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left[\frac{\partial\mathfrak{F}_{2n}(x)}{\partial x_1^-}, \frac{\partial\mathfrak{F}_{2n}(x)}{\partial x_1^+} \right] & \cdots & \left[\frac{\partial\mathfrak{F}_{2n}(x)}{\partial x_{2n}^-}, \frac{\partial\mathfrak{F}_{2n}(x)}{\partial x_{2n}^+} \right] \end{pmatrix}, \quad (6.40)$$

где

$$\frac{\partial\mathfrak{F}_i(x)}{\partial x_j^-} := \lim_{\alpha \searrow 0} \frac{\mathfrak{F}_i(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j - \alpha, x_{j+1}, \dots, x_{2n}) - \mathfrak{F}_i(x_1, \dots, x_{2n})}{\alpha}$$

и

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_i(x)}{\partial x_j^\pm} := \lim_{\alpha \searrow 0} \frac{\mathfrak{F}_i(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + \alpha, x_{j+1}, \dots, x_{2n}) - \mathfrak{F}_i(x_1, \dots, x_{2n})}{\alpha},$$

— односторонние частные производные компонент \mathfrak{F}_i в точке x слева и справа по j -ому координатному направлению.

Поскольку покомпонентный порядок “ \ll ” на \mathbb{R}^{2n} является прямым произведением порядков “ \leq ” и “ \geq ” на вещественных осях \mathbb{R} , то порядковый \ll -субдифференциал $\partial \mathfrak{F}(x)$ является прямым произведением субдифференциалов $\partial \mathfrak{F}_i(x)$ отдельных компонент $\mathfrak{F}_i : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, для каждой из которых мы можем воспользоваться Теоремой 6.2.1: из этого классического результата и из определения опорной функции следует неравенство

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_i(x)}{\partial y} \geq \{ y^\top d \mid d \in \partial \mathfrak{F}_i(x) \}. \quad (6.41)$$

Далее, последовательно полагая y равным векторам, имеющим j -ой компонентой -1 или 1 , $j = 1, 2, \dots, n$, а остальными — нули, получим из (6.41) включение

$$\partial \mathfrak{F}_i(x) \subseteq \left(\left[\frac{\partial \mathfrak{F}_i(x)}{\partial x_1^-}, \frac{\partial \mathfrak{F}_i(x)}{\partial x_1^+} \right], \dots, \left[\frac{\partial \mathfrak{F}_i(x)}{\partial x_{2n}^-}, \frac{\partial \mathfrak{F}_i(x)}{\partial x_{2n}^+} \right] \right),$$

равносильное (6.40).

Теперь можно перейти собственно к выводу оценки (6.38). Для удобства условимся писать \pm вместо каждого отдельного из знаков $+$ и $-$. В силу представления (6.35)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{F}_i(x)}{\partial x_j^\pm} &= \frac{\partial}{\partial x_j^\pm} \left(\max_{C \in \text{Vert } \mathbf{C}} (C \tilde{x})_i - x_i + (\sigma(\mathbf{d}))_i \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j^\pm} \left(\max_{C \in \text{Vert } \mathbf{C}} (C \tilde{x})_i \right) - \delta_{ij} \quad \text{для } i \in \mathcal{I}', \end{aligned} \quad (6.42)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{F}_i(x)}{\partial x_j^\pm} &= \frac{\partial}{\partial x_j^\pm} \left(\min_{C \in \text{Vert } \mathbf{C}} (C \tilde{x})_i - x_i + (\sigma(\mathbf{d}))_i \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j^\pm} \left(\min_{C \in \text{Vert } \mathbf{C}} (C \tilde{x})_i \right) - \delta_{ij} \quad \text{для } i \in \mathcal{I}'', \end{aligned} \quad (6.43)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Воспользовавшись известным правилом дифференцирования функции экстремума (см., например, [27], §III.2), можем заключить, что для $i \in \mathcal{I}'$

$$\frac{\partial}{\partial x_j^\pm} \left(\max_{C \in \text{Vert } \mathbf{C}} (C \tilde{x})_i \right) = \left(\begin{array}{c} ij\text{-й элемент той матрицы } C \tilde{}, \text{ на которой} \\ \text{достигается рассматриваемый } \max_{C \in \text{Vert } \mathbf{C}} (C \tilde{x})_i, \end{array} \right) \quad (6.44)$$

и, совершенно аналогично, для $i \in \mathcal{I}''$

$$\frac{\partial}{\partial x_j^\pm} \left(\min_{C \in \text{Vert } \mathbf{C}} (C \tilde{x})_i \right) = \left(\begin{array}{c} ij\text{-й элемент той матрицы } C \tilde{}, \text{ на которой} \\ \text{достигается рассматриваемый } \min_{C \in \text{Vert } \mathbf{C}} (C \tilde{x})_i. \end{array} \right) \quad (6.45)$$

В целом, объединяя (6.15) и (6.42)–(6.45), мы придём к следующему общему виду матрицы производных по направлению:

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{F}_i(x)}{\partial x_j^\pm} \right)_{i,j=1}^{2n} = \begin{pmatrix} (C')^+ & (C')^- \\ (C'')^- & (C'')^+ \end{pmatrix} - I,$$

где $C', C'' \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C', C'' \in \text{Vert } \mathbf{C}$. Следовательно, с учётом включения (6.40), действительно получим доказываемую оценку (6.38). ■

6.3 Существование и единственность формальных решений

Основной результат этого параграфа — локальная теорема существования формальных решений для интервальных линейных систем вида (6.2).

Теорема 6.3.1 *Если интервальная матрица $\mathbf{C} \in \mathbb{KR}^{n \times n}$ достаточно узка (т.е., если $\|\text{grad } \mathbf{C}\|$ достаточно мала) и $\text{pro } \mathbf{C}$ содержит вполне невырожденные точечные матрицы, то для любого $\mathbf{d} \in \mathbb{KR}^n$ уравнение*

$$\mathbf{C}x = \mathbf{d}$$

имеет формальное решение в арифметике Каухера.

Доказательство мы проведём топологическими методами (см., например, [53, 76]), на основе теории вращения векторного поля (или равносильной ей теории степени отображения).

Пусть $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывное положительно однородное отображение. Справедливо следующее общее рассуждение. Предположим, что нуль — единственная особая точка векторного поля Φx . Она поэтому изолирована и определён индекс нуля поля Φx — величина $\text{ind}(0, \Phi)$, являющаяся вращением векторного поля Φx на сфере S_R достаточно малого радиуса R с центром в начале координат (в данном случае в силу положительной однородности поля величину R можно выбирать произвольной). Пусть также $\text{ind}(0, \Phi) \neq 0$.

Если $h \in \mathbb{R}^n$ — какой-то вектор, то возьмём, например,

$$R > \frac{\|h\|}{\inf_{\|x\|=1} \|\Phi x\|}$$

Тогда при $\|x\| = R$ справедливо

$$\|\Phi x - (\Phi x - h)\| < \|\Phi x\|,$$

что в силу теоремы Пуанкаре-Боля [53, 76] означает гомотопность векторных полей (Φx) и $(\Phi x - h)$ на S_R . Следовательно, на S_R вращения полей (Φx) и $(\Phi x - h)$ совпадают, а поскольку $\text{ind}(0, \Phi) \neq 0$, то в шаре $\|x\| \leq R$ должна находиться особая точка поля $\Phi x - h$ ([53], стр. 20, Теорема 4.2), т.е. решение уравнения $\Phi x = h$.

Всё вышеизложенное в полной мере применимо к векторному полю

$$\sigma(\mathbf{C}\sigma^{-1}(x)) \tag{6.46}$$

в \mathbb{R}^{2n} , и потому для завершения доказательства нам достаточно установить, что в условиях теоремы индекс нуля векторного поля (6.46) не равен нулю.

На единичной сфере S_1 с центром в начале координат строгое неравенство

$$\| \sigma(\mathbf{C}\sigma^{-1}(x)) - (\text{mid } \mathbf{C})^{\sim}x \| < \|(\text{mid } \mathbf{C})^{\sim}x\| \quad (6.47)$$

справедливо для вполне невырожденных матриц $\mathbf{C} = \mathbf{C}$ нулевой ширины: левая часть неравенства при этом обращается в тождественный нуль, а правая оценивается снизу как

$$\inf_{\|x\|=1} \|C^{\sim}x\| > 0.$$

Но строгое неравенство (6.47) останется верным при достаточно малых возмущениях его частей, когда \mathbf{C} есть “достаточно узкая” интервальная матрица. Тогда, опять-таки в силу теоремы Пуанкаре-Боля, условие (6.47) означает гомотопность векторных полей (6.46) и $(\text{mid } \mathbf{C})^{\sim}x$ на сфере S_1 . Поэтому индекс нуля поля (6.46) совпадает с индексом нуля поля $(\text{mid } \mathbf{C})^{\sim}x$, т.е. равен знаку определителя $\det(\text{mid } \mathbf{C})^{\sim} \neq 0$. ■

Обратимся теперь к вопросу о единственности формальных решений интервальных систем уравнений (6.2). Он полностью решается теорией §6.1 в случае, если матрица системы точечная. Именно, интервальная система уравнений

$$\mathbf{C}x = \mathbf{d}$$

с вполне невырожденной матрицей \mathbf{C} имеет единственное формальное решение для любой правой части $\mathbf{d} \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n$ (Следствие из Теорем 6.1.1 и 6.1.2). Что касается интервальных систем уравнений (6.2) с существенно интервальными матрицами \mathbf{C} , то для них единственность формальных решений является в настоящее время сравнительно малоисследованной. Её рассмотрению посвящены работа Лакеева [63] и ряд результатов, изложенных в последнем параграфе этой главы. В частности, формальное решение системы (6.2) существует и единственно, если матрица $\text{pro } \mathbf{C}$ имеет строгое диагональное преобладание.

Теорема 6.3.2 Пусть в каждой строке интервальной матрицы $\mathbf{C} \in \mathbb{K}\mathbb{R}^{n \times n}$ все элементы являются либо только правильными, либо только неправильными интервалами (т.е. выполнено условие (6.27)) и невырожденной оказывается интервальная $2n \times 2n$ -матрица

$$\begin{pmatrix} (\text{pro } \mathbf{C})^+ & (\text{pro } \mathbf{C})^- \\ (\text{pro } \mathbf{C})^- & (\text{pro } \mathbf{C})^+ \end{pmatrix}. \quad (6.48)$$

Тогда интервальная линейная система

$$\mathbf{C}x \ominus \mathbf{d} = 0 \quad (6.2)$$

может иметь не более чем конечное количество несравнимых между собой по включению формальных решений.

Доказательство. Перейдем в пространство \mathbb{R}^{2n} и рассмотрим индуцированное для (6.2) уравнение

$$\mathfrak{G}(x) = 0. \quad (6.25)$$

Вспомним, что для $\mathfrak{G}(x)$ верно представление

$$\mathfrak{G}(x) = \max_{C \in \text{Vert } \mathbf{C}} \ll C \tilde{x} - \sigma(\mathbf{d}). \quad (6.36)$$

Его содержательный смысл заключается в том, что в условиях (6.27) отображение $\mathfrak{G} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ является кусочно-аффинным — склеенным из конечного числа кусков аффинных отображений, каждое из которых невырождено, если удовлетворена невырожденность матрицы (6.48). Ясно, что на каждом из невырожденных аффинных кусков может находиться не более одного решения индуцированного уравнения (6.25), а потому общее количество решений этого уравнения во всём \mathbb{R}^{2n} также должно быть конечным. То же самое верно и для формальных решений исходной интервальной линейной системы (6.2).

Далее, предположим, что из этих формальных решений какие-либо два — \mathbf{x}' и \mathbf{x}'' — сравнимы друг с другом относительно порядка по включению: пусть, скажем, $\mathbf{x}' \subseteq \mathbf{x}''$ и $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}''$. Тогда для любого интервального вектора \mathbf{u} , такого что $\mathbf{x}' \subseteq \mathbf{u} \subseteq \mathbf{x}''$, в силу монотонности интервальных арифметических операций в \mathbb{KR} по включению имеет место

$$0 = \mathbf{C}\mathbf{x}' \ominus \mathbf{d} \subseteq \mathbf{C}\mathbf{u} \ominus \mathbf{d} \subseteq \mathbf{C}\mathbf{x}'' \ominus \mathbf{d} = 0,$$

т.е. \mathbf{u} также является формальным решением для (6.2). Мы приходим, таким образом, к выводу о существовании бесконечного множества формальных решений системы уравнений (6.2), что противоречит полученному ранее результату. Итак, различные формальные решения \mathbf{x}' и \mathbf{x}'' должны быть несравнимы между собой. ■

В отсутствие единственности формальные решения системы

$$\mathbf{C}x = \mathbf{d}$$

могут образовывать целые порядковые отрезки. При этом с практической точки зрения наибольший интерес представляют, видимо, максимальные и минимальные по включению формальные решения, причём таких несравнимых между собой экстремальных решений может быть несколько. К примеру, если $\mathbf{C} = [-1, 1]$, $\mathbf{d} = [-1, 1]$, то каждый интервал вида $[\epsilon, 1]$ и $[-1, \epsilon]$, $-1 \leq \epsilon \leq 1$, является формальным решением соответствующего уравнения. Следовательно, среди них имеется одно максимальное по включению формальное решение $[-1, 1]$, а также два несравнимых между собой минимальных по включению решений -1 и 1 .

Рассмотрим также интересный пример интервальной линейной системы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [2, -2] \\ [2, -2] \end{pmatrix},$$

иллюстрирующий теорию §§6.1–6.2. Здесь формальные решения образуют целое параметрическое семейство

$$\begin{pmatrix} [1+t, -1-t] \\ [1-t, -1+t] \end{pmatrix},$$

где $t \in \mathbb{R}$ — произвольный параметр. Все эти формальные решения несравнимы друг с другом и каждое из них является одновременно как максимальным, так и минимальным по включению.

Если множество формальных решений для системы (6.2) ограничено, то всякое её формальное решение содержится в некотором максимальном по включению формальном решении и, в свою очередь, содержит некоторое минимальное по включению формальное решение для (6.2).

Действительно, если формальное решение \mathbf{x}' не содержится ни в каком более широком решении, то оно само максимально. В противном случае возьмём максимум

$$\bigvee \{ \mathbf{y} \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n \mid \mathbf{C}\mathbf{y} = \mathbf{d}, \mathbf{y} \supset \mathbf{x}' \}$$

всех формальных решений, содержащих \mathbf{x}' . Из свойства непрерывности интервальных арифметических операций и операции \bigvee в $\mathbb{K}\mathbb{R}$ можно заключить, что полученный таким образом интервальный вектор является формальным решением. Второе утверждение доказывается аналогично, взятием противоположного порядка.

6.4 Субдифференциальный метод Ньютона

6.4 а Алгоритм

В качестве эффективного инструмента для решения индуцированных уравнений (6.23)–(6.24) и (6.25)–(6.26) в евклидовом пространстве \mathbb{R}^{2n} мы предлагаем *субдифференциальный метод Ньютона*, который является дальнейшим развитием известных результатов о монотонно сходящихся методах ньютоновского типа в упорядоченных линейных пространствах. Ниже в Таблице 6.1 представлены две разновидности этого метода, предназначенные для нахождения решений индуцированных уравнений (6.23) и (6.25) соответственно.

Константа τ — это релаксационный параметр, с помощью которого в методах ньютоновского типа иногда удаётся расширить область сходимости. Наш вычислительный опыт тоже позволяет однозначно утверждать полезность выбора $\tau < 1$ в некоторых ситуациях (см. §6.5). С другой стороны, мы вводим этот параметр также как потенциальный путь для модификации методов (например, можно попытаться рассмотреть нестационарный метод, в котором τ меняется от шага к шагу и т.п.). На практике мы рекомендуем сначала брать τ равным единице. Тогда при сходимости субдифференциальный метод Ньютона даёт *точное* решение уравнений (6.23)–(6.24) и (6.25)–(6.26) за небольшое конечное число итераций (которое примерно равно размерности n интервальной системы). Такая исключительно быстрая сходимость субдифференциального метода Ньютона объясняется полиэдральностью функций, фигурирующих в решаемых уравнениях. Другое достоинство предлагаемых методов — отсутствие проблем с выбором начального приближения. В целом, субдифференциальный метод Ньютона имеет огромное практическое значение, и помимо своего основного назначения он может рассматриваться также как вспомогательный алгоритм, начальное звено в составе численных процессов более широкого назначения.

6.4 б Доказательство сходимости

Полное и всеобъемлющее исследование субдифференциального метода Ньютона выходит за рамки настоящей работы, и ниже мы дадим, основываясь на стандартной технике (см., например, [76]), доказательство локальных теорем сходимости. Их утверждения сводятся к следующему:

Таблица 6.1:

Алгоритм SubDiff1

субдифференциальный метод Ньютона
для решения уравнения (6.23)–(6.24)

Выбираем некоторое начальное приближение $x^{(0)} \in \mathbb{R}^{2n}$.

Если $(k-1)$ -е приближение $x^{(k-1)} \in \mathbb{R}^{2n}$, $k = 1, 2, \dots$, уже найдено, то вычисляем какой-нибудь субградиент $D^{(k-1)}$ отображения \mathfrak{F} в точке $x^{(k-1)}$ и полагаем

$$x^{(k)} := x^{(k-1)} - \tau (D^{(k-1)})^{-1}(\mathfrak{F}(x^{(k-1)})),$$

где $\tau \in (0, 1]$ — некоторая константа.

Алгоритм SubDiff2

субдифференциальный метод Ньютона
для решения уравнения (6.25)–(6.26)

Выбираем некоторое начальное приближение $x^{(0)} \in \mathbb{R}^{2n}$.

Если $(k-1)$ -е приближение $x^{(k-1)} \in \mathbb{R}^{2n}$, $k = 1, 2, \dots$, уже найдено, то вычисляем какой-нибудь субградиент $D^{(k-1)}$ отображения \mathfrak{G} в точке $x^{(k-1)}$ и полагаем

$$x^{(k)} := x^{(k-1)} - \tau (D^{(k-1)})^{-1}(\mathfrak{G}(x^{(k-1)})),$$

где $\tau \in (0, 1]$ — некоторая константа.

Теорема 6.4.1 Пусть интервальная $n \times n$ -матрица \mathbf{C} такова, что в каждой её строке все элементы либо только правильны, либо только неправильны, и невырожденной является интервальная $2n \times 2n$ -матрица

$$\begin{pmatrix} (\text{pro } \mathbf{C})^+ & (\text{pro } \mathbf{C})^- \\ (\text{pro } \mathbf{C})^- & (\text{pro } \mathbf{C})^+ \end{pmatrix} - I.$$

Если при этом \mathbf{C} достаточно узка, то алгоритм SubDiff1 со значением релаксационного параметра $\tau = 1$ сходится за конечное число итераций к $\sigma(\mathbf{x}^*)$, где \mathbf{x}^* — формальное решение интервальной системы $\mathbf{C}x \ominus x + \mathbf{d} = 0$.

Теорема 6.4.2 Пусть интервальная $n \times n$ -матрица \mathbf{C} такова, что в каждой её строке все элементы либо только правильны, либо только неправильны, и невырожденной является интервальная $2n \times 2n$ -матрица

$$\begin{pmatrix} (\text{pro } \mathbf{C})^+ & (\text{pro } \mathbf{C})^- \\ (\text{pro } \mathbf{C})^- & (\text{pro } \mathbf{C})^+ \end{pmatrix}.$$

Если при этом \mathbf{C} достаточно узка, то алгоритм SubDiff2 со значением релаксационного параметра $\tau = 1$ сходится за конечное число итераций к $\sigma(\mathbf{x}^*)$, где \mathbf{x}^* — формальное решение интервальной системы $\mathbf{C}x \ominus \mathbf{d} = 0$.

Ниже мы дадим развёрнутое доказательство лишь для Теоремы 6.4.1, так как для Теоремы 6.4.2 оно совершенно аналогично по идее и отличается лишь малозначительными деталями.

Доказательство. Уточним, что имеется в виду под “достаточной узостью” интервальной матрицы \mathbf{A} . Это условие будет означать, что

замыкание выпуклой оболочки множества

$$\bigcup \left\{ S^{-1}K_{\ll} \mid S \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, S \in \begin{pmatrix} (\text{pro } \mathbf{C})^+ & (\text{pro } \mathbf{C})^- \\ (\text{pro } \mathbf{C})^- & (\text{pro } \mathbf{C})^+ \end{pmatrix} - I \right\}, \quad (6.49)$$

где $S^{-1}K_{\ll}$ обозначает прообраз конуса положительных элементов (6.28) при линейном преобразовании S , само является некоторым конусом в пространстве \mathbb{R}^{2n} .

Это осмысленное условие. Если матрица \mathbf{C} имеет нулевую ширину, т.е. $\mathbf{C} = C$, то множество $(C^{\sim})^{-1}K_{\ll}$, как прообраз конуса при невырожденном линейном преобразовании, является конусом. Если же точечные невырожденные $2n \times 2n$ -матрицы S', S'' “достаточно близки” друг к другу, то близки также и конусы $(S')^{-1}K_{\ll}$ и $(S'')^{-1}K_{\ll}$, и их выпуклая оболочка всё ещё является конусом. Следовательно, условие (6.49) в некотором смысле действительно отражает “узость” интервальной матрицы \mathbf{C} .

Итак, пусть множество (6.49) — некоторый конус, который мы будем обозначать K_{\triangleleft} . Тогда он определяет некоторый частичный порядок “ \triangleleft ” на \mathbb{R}^{2n} . Мы станем считать, что

$$x \triangleleft y \iff y - x \in K_{\triangleleft}. \quad (6.50)$$

Основная идея нашего доказательства — продемонстрировать то, что последовательность приближений, порождённая алгоритмом `SubDiff1` является, во-первых, монотонно невозрастающей, и, во-вторых, ограниченной снизу относительно этого специальным образом сконструированного порядка “ \leq ”.

Начнём с того, что из неравенства (6.30), определяющего субдифференциал, вытекает

$$\mathfrak{F}(x^{(k)}) \gg \mathfrak{F}(x^{(k-1)}) + D^{(k-1)}(x^{(k)} - x^{(k-1)})$$

для $D^{(k-1)} \in \partial \mathfrak{F}(x^{(k-1)})$ и всех $k = 1, 2, \dots$. Но, по построению алгоритма `SubDiff1` с релаксационным параметром $\tau = 1$,

$$D^{(k-1)}(x^{(k)} - x^{(k-1)}) = -\mathfrak{F}(x^{(k-1)}). \quad (6.51)$$

Следовательно,

$$\mathfrak{F}(x^{(k)}) \gg 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (6.52)$$

— все порождаемые алгоритмом последовательные приближения не меньше нуля относительно порядка “ \ll ”.

Что стоит за неравенством (6.52)? Привлекая представление (6.34), мы можем заключить:

$$\max_{C \in \text{Vert } \mathbf{C}} C \tilde{x}^{(k)} - x^{(k)} + \sigma(\mathbf{d}) \gg 0,$$

или

$$\max_{C \in \text{Vert } \mathbf{C}} C \tilde{x}^{(k)} - x^{(k)} + \sigma(\mathbf{d}) \in K_{\ll}.$$

В частности, для некоторой матрицы

$$S^{(k)} \in \left(\begin{array}{cc} (\text{pro } \mathbf{C})^+ & (\text{pro } \mathbf{C})^- \\ (\text{pro } \mathbf{C})^- & (\text{pro } \mathbf{C})^+ \end{array} \right) - I,$$

на которой достигается $(\max_{\ll} C \tilde{x}^{(k)} - x^{(k)})$, имеет место

$$S^{(k)} x^{(k)} + \sigma(\mathbf{d}) \in K_{\ll}.$$

Так как эта матрица $S^{(k)}$ по условию Теоремы невырождена, то

$$x^{(k)} + (S^{(k)})^{-1} \sigma(\mathbf{d}) \in (S^{(k)})^{-1} K_{\leq} \subseteq K_{\triangleleft},$$

а это включение, в силу (6.50), означает, что

$$-(S^{(k)})^{-1} \sigma(\mathbf{d}) \triangleleft x^{(k)}.$$

Если же мы положим вектор $\xi \in \mathbb{R}^{2n}$ таким, что

$$\xi := \inf_{\leq} \left\{ -S^{-1} \sigma(\mathbf{d}) \mid S \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, S \in \left(\begin{array}{cc} (\text{pro } \mathbf{C})^+ & (\text{pro } \mathbf{C})^- \\ (\text{pro } \mathbf{C})^- & (\text{pro } \mathbf{C})^+ \end{array} \right) - I \right\},$$

то тогда $\xi \triangleleft x^{(k)}$ для всех $k = 1, 2, \dots$, т.е. последовательность $\{x^{(k)}\}$ оказывается в самом деле ограниченной снизу относительно порядка “ \leq ”.

Другой важный момент доказательства: последовательность $\{x^{(k)}\}$, порождённая рассматриваемым алгоритмом, является монотонно невозрастающей относительно “ \leq ”, т.е.

$$x^{(k)} \leq x^{(k-1)} \tag{6.53}$$

для всех $k = 1, 2, \dots$.

Действительно, комбинируя (6.51) и (6.52), нетрудно получить

$$D^{(k-1)} (x^{(k)} - x^{(k-1)}) \ll 0.$$

Из Предложения 6.2.6 следует, что для всех $D^{(k-1)}$ имеют место включения

$$D^{(k-1)} \in \left(\begin{array}{cc} (\text{pro } \mathbf{C})^+ & (\text{pro } \mathbf{C})^- \\ (\text{pro } \mathbf{C})^- & (\text{pro } \mathbf{C})^+ \end{array} \right) - I.$$

Отсюда, с учётом (6.49), следует (6.53).

Мы доказали, таким образом, что

$$\xi \leq x^{(k)} \leq x^{(k-1)}, \quad k = 1, 2, \dots \tag{6.54}$$

В общем случае связь между порядком и топологией в частично упорядоченном линейном топологическом пространстве может быть весьма сложной, но, к счастью, в конечномерном пространстве ситуация решительно упрощается: любая последовательность, монотонная и ограниченная относительно частичного порядка, согласованного с линейной структурой пространства, всегда имеет (топологический) предел.^{6.4} Следовательно, из (6.54) мы можем заключить о существовании некоторого предела x^* последовательности $\{x^{(k)}\}$, порождаемой алгоритмом SubDiff1. Значение этого предела является решением уравнения для неподвижной точки

$$x^* = x^* - (D^*)^{-1}(\mathfrak{F}(x^*)),$$

где матрица $D^* \in \partial\mathfrak{F}(x^*)$ невырождена в силу (6.38) и условий доказываемой Теоремы. Итак, $\mathfrak{F}(x^*) = 0$.

Тот факт, что при своей сходимости субдифференциальный метод Ньютона выдаёт точное решение за конечное число шагов, следует из представления (6.34), т.е. из полиэдральности отображения \mathfrak{F} : как только текущее $(k-1)$ -е приближение алгоритма оказывается на одном аффинном куске с точным решением x^* , следующее, k -е приближение обязано быть равным x^* по самому построению метода и в силу выбора релаксационного параметра. ■

Важнейший частный случай применения субдифференциальных ньютоновских методов SubDiff1 и SubDiff2 — нахождение формальных решений систем (6.1) и (6.2) с правильными интервальными матрицами \mathbf{C} . При этом на $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ частичный порядок “ \subseteq ” переходит в обычный порядок по включению “ \subset ”, на \mathbb{R}^{2n} частичный порядок “ \ll ” совпадает с покомпонентным упорядочением “ \leq ”, и эти упрощения позволяют более детально исследовать поведение рассматриваемых алгоритмов. В частности, для правильной матрицы \mathbf{C} сходимость методов SubDiff1 и SubDiff2 с некоторым специальным начальным приближением может быть обоснована и при $0 < \tau < 1$.

^{6.4}Это факт часто формулируют в следующем эквивалентном виде: в конечномерном пространстве всякий конус является *правильным* [52, 54].

Именно, в случае правильности всех элементов матрицы \mathbf{C} начальные приближения для `SubDiff1` и `SubDiff2` имеет смысл полагать равными решениям некоторых специальных систем уравнений:

- в качестве начального вектора $x^{(0)} \in \mathbb{R}^{2n}$ алгоритма `SubDiff1` возьмём решение “средней” $2n \times 2n$ -системы линейных уравнений

$$(I - (\text{mid } \mathbf{C})^\sim) x = \sigma(\mathbf{d}),$$

- в качестве начального вектора $x^{(0)} \in \mathbb{R}^{2n}$ алгоритма `SubDiff2` возьмём решение “средней” $2n \times 2n$ -системы линейных уравнений

$$(\text{mid } \mathbf{C})^\sim x = \sigma(\mathbf{d}).$$

Тогда, например, в алгоритме `SubDiff1` специальный выбор начального приближения $x^{(0)}$ влечёт следующую цепочку соотношений

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(x^{(0)}) &= \sigma(\mathbf{C} \sigma^{-1}(x^{(0)})) - x^{(0)} + \sigma(\mathbf{d}) \\ &\geq \sigma((\text{mid } \mathbf{C}) \sigma^{-1}(x^{(0)})) - x^{(0)} + \sigma(\mathbf{d}) && \text{в силу монотонности по включению} \\ &= (\text{mid } \mathbf{C})^\sim x^{(0)} - x^{(0)} + \sigma(\mathbf{d}) && \text{в силу свойства (6.16)} \\ &= ((\text{mid } \mathbf{C})^\sim - I) x^{(0)} + \sigma(\mathbf{d}) = 0. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\mathfrak{F}(x^{(0)}) \geq 0,$$

и далее неравенство

$$\mathfrak{F}(x^{(k)}) \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.52)$$

легко обосновывается по индукции. Завершение доказательства сходимости алгоритма `SubDiff1` дословно повторяет те рассуждения, которые приведены выше для случая $\tau = 1$ с единственной разницей, что при значениях $\tau < 1$ сходимость эта уже не является конечной. Ясно также, что всё сказанное верно и для алгоритма `SubDiff2`.

Заметим также, что никто не препятствует нам брать специальное начальное приближение в виде решения “средней системы” для алгоритмов `SubDiff1` и `SubDiff2` даже при $\tau = 1$. Это уменьшает на единицу количество итераций, необходимых для сходимости к решению, хотя и не уменьшает объёма вычислительной работы.

Замечательные качества субдифференциальных ньютоновских методов в применении к интервальным линейным системам получили определённый резонанс среди исследователей, и вслед за автором их сходимость для ИСЛАУ частного вида в работе [220] доказал А. Ноймайер, который использовал классическую технику матричных преобразований.

6.4 с Вычисление субдифференциала

Сейчас мы опишем методику вычисления субдифференциалов $\partial \mathfrak{F}(x)$ и $\partial \mathfrak{G}(x)$, необходимую при практической реализации субдифференциальных методов Ньютона `SubDiff1` и `SubDiff2`.

Как и следовало ожидать, субдифференциал $\partial \mathfrak{F}(x)$, вообще говоря, не совпадает с интервальной матрицей из правой части оценки (6.40), образованной интервалами односторонних частных производных, и то же самое верно в отношении $\partial \mathfrak{G}(x)$. Для некоторых

интервальных матриц \mathbf{C} равенство на месте включения (6.40) может не выполняться даже на множестве аргументов x ненулевой меры. Тем не менее, мы можем выписать явный вид субдифференциалов $\partial\mathfrak{F}(x)$ и $\partial\mathfrak{G}(x)$ в самом общем случае.

Вспомним определение стандартного погружения σ интервального пространства \mathbb{KR}^n в линейное пространство \mathbb{R}^{2n} : для интервального вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{KR}^n$

$$\begin{aligned} (\sigma(\mathbf{x}))_i &= -\underline{\mathbf{x}}_i, & \text{если } i \in \{1, 2, \dots, n\}, \\ (\sigma(\mathbf{x}))_i &= \overline{\mathbf{x}}_i, & \text{если } i \in \{n+1, \dots, 2n\}. \end{aligned}$$

Обозначая через e_i вектор, имеющий i -ой компонентой 1, а остальные нули, и привлекая известный результат о субдифференциале суммы [73, 82, 84], найдём

$$\begin{aligned} \partial\mathfrak{F}_i(x) &= \partial\left((\sigma(\mathbf{C}\sigma^{-1}(x)))_i - x_i + (\sigma(\mathbf{d}))_i \right) \\ &= \partial\left(-\sum_{j=1}^n \underline{\mathbf{c}_{ij}[-x_j, x_{j+n}]} - x_i + (\sigma(\mathbf{d}))_i \right) \\ &= -\partial\sum_{j=1}^n \underline{\mathbf{c}_{ij}[-x_j, x_{j+n}]} - e_i \\ &= -\sum_{j=1}^n \partial\left(\underline{\mathbf{c}_{ij}[-x_j, x_{j+n}]} \right) - e_i \quad \text{для } i \in \{1, 2, \dots, n\}, \end{aligned} \quad (6.55)$$

$$\begin{aligned} \partial\mathfrak{F}_i(x) &= \partial\left((\sigma(\mathbf{C}\sigma^{-1}(x)))_i - x_i + (\sigma(\mathbf{d}))_i \right) \\ &= \partial\left(\sum_{j=1}^n \overline{\mathbf{c}_{ij}[-x_j, x_{j+n}]} - x_i + (\sigma(\mathbf{d}))_i \right) \\ &= \partial\sum_{j=1}^n \overline{\mathbf{c}_{ij}[-x_j, x_{j+n}]} - e_i \\ &= \sum_{j=1}^n \partial\left(\overline{\mathbf{c}_{ij}[-x_j, x_{j+n}]} \right) - e_i \quad \text{для } i \in \{n+1, \dots, 2n\}. \end{aligned} \quad (6.56)$$

Таким образом, вычисление субдифференциала $\partial\mathfrak{F}_i(x)$ сводится к вычислению субдифференциалов простейших отображений $\mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ следующих двух видов

$$(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) \mapsto \underline{\mathbf{c}_{ij} \cdot [-x_j, x_{j+n}]}, \quad (6.57)$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) \mapsto \overline{\mathbf{c}_{ij} \cdot [-x_j, x_{j+n}]}, \quad (6.58)$$

где \mathbf{c}_{ij} — некоторые правильные интервалы. Ниже, чтобы не загромождать изложение, имеет смысл не выписывать “немые” компоненты аргумента x , никак не влияющие на значения этих отображений, так что вместо (6.57)–(6.58) мы будем рассматривать

$$(x_j, x_{i+n}) \mapsto \underline{\mathbf{c}_{ij} \cdot [-x_j, x_{j+n}]},$$

$$(x_j, x_{j+n}) \mapsto \overline{\mathbf{c}_{ij} \cdot [-x_j, x_{j+n}]},$$

где \mathbf{c}_{ij} — некоторые правильные интервалы.

Воспользовавшись формулой Лакеева (2.18) и тем обстоятельством, что $(-x)^- = x^+$ и $(-x)^+ = x^-$, получим

$$\partial \left(\underline{\mathbf{c}}_{ij}[-x_j, x_{j+n}] \right) = \underline{\mathbf{c}}_{ij}^+ \partial(x_j^-) + \overline{\mathbf{c}}_{ij}^- \partial(x_{j+n}^-) - \partial(\max\{\overline{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_j^+, \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_{j+n}^+\}), \quad (6.59)$$

$$\partial \left(\overline{\mathbf{c}}_{ij}[-x_j, x_{j+n}] \right) = \partial(\max\{\overline{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_{j+n}^+, \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_j^+\}) - \underline{\mathbf{c}}_{ij}^+ \partial(x_{j+n}^-) - \overline{\mathbf{c}}_{ij}^- \partial(x_j^-). \quad (6.60)$$

Известно, что субдифференциал функции максимума в некоторой точке есть замыкание выпуклой оболочки объединения субдифференциалов тех функций, на которых рассматриваемый максимум достигается в данной точке (см., например, [73, 82, 84]). Привлекая дополнительно определения положительной и отрицательной частей числа, легко можем вывести, что

$$\partial(x_j^+) = \begin{cases} (0, 0), & \text{если } x_j < 0, \\ ([0, 1], 0), & \text{если } x_j = 0, \\ (1, 0), & \text{если } x_j > 0, \end{cases} \quad \partial(x_j^-) = \begin{cases} (-1, 0), & \text{если } x_j < 0, \\ ([-1, 0], 0), & \text{если } x_j = 0, \\ (0, 0), & \text{если } x_j > 0, \end{cases} \quad (6.61)$$

и

$$\partial(x_{j+n}^+) = \begin{cases} (0, 0), & \text{если } x_{j+n} < 0, \\ (0, [0, 1]), & \text{если } x_{j+n} = 0, \\ (0, 1), & \text{если } x_{j+n} > 0, \end{cases} \quad \partial(x_{j+n}^-) = \begin{cases} (0, -1), & \text{если } x_{j+n} < 0, \\ (0, [-1, 0]), & \text{если } x_{j+n} = 0, \\ (0, 0), & \text{если } x_{j+n} > 0. \end{cases} \quad (6.62)$$

Таким образом, вычисление первых двух слагаемых в выражении (6.59) и последних двух слагаемых в (6.60) не представляет трудностей.

Далее, вычисление оставшихся членов сумм (6.59) и (6.60) требует предварительного нахождения и сравнения значений $\overline{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_j^+$ и $\underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_{j+n}^+$, $\overline{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_{j+n}^+$ и $\underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_j^+$ соответственно. Но величины $\underline{\mathbf{c}}_{ij}^-$, $\overline{\mathbf{c}}_{ij}^+$, x_j^+ , x_{j+n}^+ все неотрицательны, и потому, например, из неравенства $\overline{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_j^+ > \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_{j+n}^+$ следует $x_j^+ > 0$, так что $\partial(x_j^+) = (1, 0)$. Аналогично,

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_j^+ < \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_{j+n}^+ &\Rightarrow \partial(x_{j+n}^+) = (0, 1), \\ \overline{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_{j+n}^+ > \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_j^+ &\Rightarrow \partial(x_{j+n}^+) = (0, 1), \\ \overline{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_{j+n}^+ < \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_j^+ &\Rightarrow \partial(x_{j+n}^+) = (1, 0). \end{aligned}$$

С учётом выписанных равенств мы можем заключить

$$\partial(\max\{\overline{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_j^+, \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_{j+n}^+\}) = \begin{cases} (\overline{\mathbf{c}}_{ij}^+, 0), & \text{если } \overline{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_j^+ > \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_{j+n}^+, \\ \text{выпуклая оболочка} \\ \overline{\mathbf{c}}_{ij}^+ \partial(x_j^+) \text{ и } \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- \partial(x_{j+n}^+), & \text{если } \overline{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_j^+ = \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_{j+n}^+, \\ (0, \underline{\mathbf{c}}_{ij}^-), & \text{если } \overline{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_j^+ < \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_{j+n}^+, \end{cases} \quad (6.63)$$

и

$$\partial(\max\{\overline{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_{j+n}^+, \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_j^+\}) = \begin{cases} (0, \overline{\mathbf{c}}_{ij}^+), & \text{если } \overline{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_{j+n}^+ > \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_j^+, \\ \text{выпуклая оболочка} \\ \overline{\mathbf{c}}_{ij}^+ \partial(x_{j+n}^+) \text{ и } \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- \partial(x_j^+), & \text{если } \overline{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_{j+n}^+ = \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_j^+, \\ (\underline{\mathbf{c}}_{ij}^-, 0), & \text{если } \overline{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_{j+n}^+ < \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_j^+. \end{cases} \quad (6.64)$$

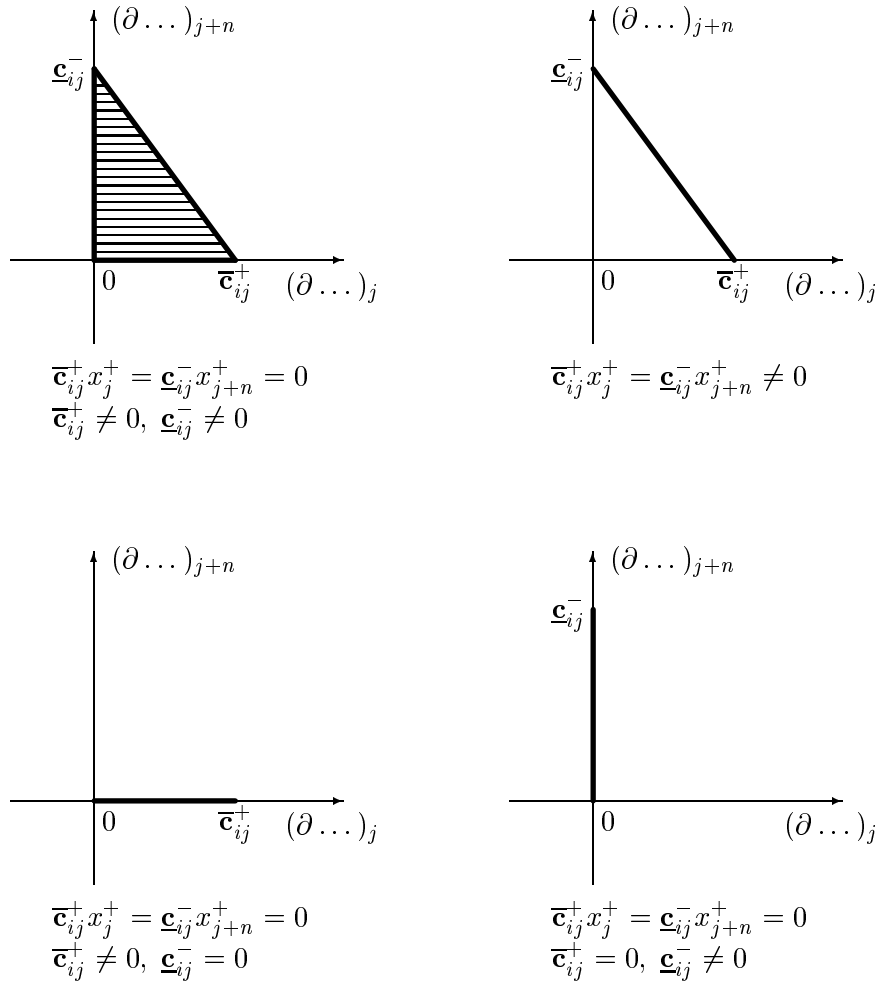


Рис. 6.3: Различные конфигурации субдифференциала $\partial(\max\{\bar{c}_{ij}^+ x_j^+, \underline{c}_{ij}^- x_{j+n}^+\})$ в точках, где $\bar{c}_{ij}^+ x_j^+ = \underline{c}_{ij}^- x_{j+n}^+$.

Остаётся лишь уточнить вид искомых субдифференциалов (6.63) и (6.64) в точках, где достигаются равенства $\bar{c}_{ij}^+ x_j^+ = \underline{c}_{ij}^- x_{j+n}^+$ и $\bar{c}_{ij}^+ x_{j+n}^+ = \underline{c}_{ij}^- x_j^+$. Разбор всех возможных ситуаций является в этих случаях несложным, хотя и довольно хлопотным делом. Например, различные конфигурации субдифференциала $\partial(\max\{\bar{c}_{ij}^+ x_j^+, \underline{c}_{ij}^- x_{j+n}^+\})$ изображены на Рисунке 6.4 с. Похоже выглядит и $\partial(\max\{\bar{c}_{ij}^+ x_{j+n}^+, \underline{c}_{ij}^- x_j^+\})$.

В действительности, нам нужно совсем немного: вычислительная схема субдифференциального метода Ньютона требует нахождения какого-нибудь одного (безразлично какого именно) субградиента отображения $\mathfrak{F}(x)$, а для этого нам достаточно предъявить по единственному субградиенту для функций

$$\max\{\bar{c}_{ij}^+ x_j^+, \underline{c}_{ij}^- x_{j+n}^+\} \quad \text{и} \quad \max\{\bar{c}_{ij}^+ x_{j+n}^+, \underline{c}_{ij}^- x_j^+\}.$$

Соответственно, нам нужна только одна какая-нибудь точка выпуклой оболочки $\bar{c}_{ij}^+ \partial(x_j^+)$ и $\underline{c}_{ij}^- \partial(x_{j+n}^+)$ при $\bar{c}_{ij}^+ x_j^+ = \underline{c}_{ij}^- x_{j+n}^+$, и одна какая-нибудь точка выпуклой оболочки $\bar{c}_{ij}^+ \partial(x_{j+n}^+)$ и $\underline{c}_{ij}^- \partial(x_j^+)$ при $\bar{c}_{ij}^+ x_{j+n}^+ = \underline{c}_{ij}^- x_j^+$. Нетрудно понять, что в первом случае такой точкой может служить, например, $(\frac{1}{2}\bar{c}_{ij}^+, \frac{1}{2}\underline{c}_{ij}^-)$ (см. Рисунок 6.4 с), а во втором — $(\frac{1}{2}\underline{c}_{ij}^-, \frac{1}{2}\bar{c}_{ij}^+)$.

В целом

$$\partial \left(\max \{ \bar{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_j^+, \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_{j+n}^+ \} \right) \ni \begin{cases} (\bar{\mathbf{c}}_{ij}^+, 0), & \text{если } \bar{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_j^+ > \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_{j+n}^+, \\ (\frac{1}{2} \bar{\mathbf{c}}_{ij}^+, \frac{1}{2} \underline{\mathbf{c}}_{ij}^-), & \text{если } \bar{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_j^+ = \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_{j+n}^+, \\ (0, \underline{\mathbf{c}}_{ij}^-), & \text{если } \bar{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_j^+ < \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_{j+n}^+, \end{cases} \quad (6.65)$$

$$\partial \left(\max \{ \bar{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_{j+n}^+, \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_j^+ \} \right) \ni \begin{cases} (0, \bar{\mathbf{c}}_{ij}^+), & \text{если } \bar{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_{j+n}^+ > \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_j^+, \\ (\frac{1}{2} \underline{\mathbf{c}}_{ij}^-, \frac{1}{2} \bar{\mathbf{c}}_{ij}^+), & \text{если } \bar{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_{j+n}^+ = \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_j^+, \\ (\underline{\mathbf{c}}_{ij}^-, 0), & \text{если } \bar{\mathbf{c}}_{ij}^+ x_{j+n}^+ < \underline{\mathbf{c}}_{ij}^- x_j^+. \end{cases} \quad (6.66)$$

На практике вычисление искомого субградиента для $\mathfrak{F}(x)$ может быть выполнено одновременно с вычислением значений этого отображения, опираясь на формулы (6.55)–(6.62), (6.65) и (6.66).

6.5 Численные эксперименты с субдифференциальным методом Ньютона

В этом параграфе мы приводим результаты численных экспериментов на персональном компьютере с процессором Intel Pentium, выполненных с субдифференциальным методом Ньютона SubDiff2.^{6.5}

Пример 1, классический.

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 1] \\ [-1, 2] & [2, 4] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [-2, 2] \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

При значении $\tau = 1$ алгоритм SubDiff2 находит всего за 2 итерации точное формальное решение — правильный интервальный вектор

$$\begin{pmatrix} [-0.333 \dots, 0.333 \dots] \\ [-0.333 \dots, 0.333 \dots] \end{pmatrix},$$

который, как можно видеть из Рисунка 2.1, является максимальной по включению внутренней оценкой допустимого множества решений системы (2.40).

Для интервальной линейной системы (2.40) с дуализованной матрицей

$$\begin{pmatrix} [4, 2] & [1, -2] \\ [2, -1] & [4, 2] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [-2, 2] \end{pmatrix}$$

алгоритм SubDiff2 сходится к точному формальному решению

$$\begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 1] \end{pmatrix}$$

^{6.5}Как и ранее, всё программное обеспечение находится на сервере Института вычислительных технологий СО РАН по адресу <http://www.ict.nsc.ru/ftp/ict/interval>, файлы subdiff.c, subdiff.exe, или же заархивированный файл shary.zip.

при $\tau = 1$ также за 2 итерации. Интересно также отметить, что за эти же 2 итерации алгоритм `SubDiff2` надежно находит формальные решения и для любых других ИСЛАУ, получающихся из системы (2.40) дуализацией некоторых элементов матрицы или вектора правой части, т.е. при любых распределениях правильных и неправильных элементов в ИСЛАУ.

Пример 2 [36].

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [-5, -1] & [-2, 3] \\ [-3, 1] & [5, 7] & [4, 6] \\ [-1, 1] & [-2, 1] & [-7, -2] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-28, 43] \\ [-60, 29] \\ [-11, 39] \end{pmatrix}$$

С $\tau = 1$ алгоритм `SubDiff2` сходится за 4 итерации к точному формальному решению

$$\begin{pmatrix} [2, 5] \\ [-3, 4] \\ [-4, -1] \end{pmatrix}.$$

Пример 3, в котором алгоритм `SubDiff2` расходится.

$$\begin{pmatrix} [3, 4] & [-5, -2] & [-2, 2] \\ [-3, -1] & [6, 7] & [5, 6] \\ [-1, 0] & [-1, 1] & [-4, 1] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-28, 43] \\ [-60, 69] \\ [-11, 39] \end{pmatrix}$$

Для этой интервальной линейной системы алгоритм `SubDiff2` с $\tau = 1$ порождает осциллирующую (начиная со второго шага) последовательность, которая попеременно принимает значения

$$\begin{pmatrix} [-1.666 \dots, 14.4666 \dots] \\ [6.5666 \dots, 11.5333 \dots] \\ [-9.333 \dots, -0.8666 \dots] \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} [-9.4, 7.666 \dots] \\ [2.5888 \dots, -5.4222 \dots] \\ [-8.7555 \dots, 17.75111 \dots] \end{pmatrix}$$

в зависимости от четности-нечетности номера шага. Она, очевидно, не имеет никакого предела. Уменьшение релаксационного параметра τ также не приводит к успеху алгоритма. Возможно, что причиной этого является отсутствие формального решения.

Пример 4. Для интервальной линейной 7×7 -системы

$$\begin{pmatrix} [4, 6] & [-9, 0] & [0, 12] & [2, 3] & [5, 9] & [-23, -9] & [15, 23] \\ [0, 1] & [6, 10] & [-1, 1] & [-1, 3] & [-5, 1] & [1, 15] & [-3, -1] \\ [0, 3] & [-20, -9] & [12, 77] & [-6, 30] & [0, 3] & [-18, 1] & [0, 1] \\ [-4, 1] & [-1, 1] & [-3, 1] & [3, 5] & [5, 9] & [1, 2] & [1, 4] \\ [0, 3] & [0, 6] & [0, 20] & [-1, 5] & [8, 14] & [-6, 1] & [10, 17] \\ [-7, -2] & [1, 2] & [7, 14] & [-3, 1] & [0, 2] & [3, 5] & [-2, 1] \\ [-1, 5] & [-3, 2] & [0, 8] & [1, 11] & [-5, 10] & [2, 7] & [6, 82] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-10, 95] \\ [35, 14] \\ [-6, 2] \\ [30, 7] \\ [4, 95] \\ [-6, 46] \\ [-2, 65] \end{pmatrix}$$

из работы [292] алгоритм SubDiff2 успешно вычисляет формальное решение

$$\begin{pmatrix} [-1.22474317578, 0.50542987670] \\ [18.26444337096, -9.51750410300] \\ [-0.02818650587, 1.16075521933] \\ [16.40769576636, -14.45553419850] \\ [-1.34356527337, 3.98821848038] \\ [-3.52893852104, 4.54345836822] \\ [5.43086236811, -0.67400838683] \end{pmatrix}$$

за 9 итераций при значении релаксационного параметра $\tau = 1$.

Но при сужении (7,7)-элемента матрицы ИСЛАУ сходимость субдифференциального метода Ньютона для $\tau = 1$ пропадает, начиная с $\mathbf{a}_{77} = [8, 82]$, и восстанавливается лишь при $\mathbf{a}_{77} = [12.8, 82]$. С другой стороны, уменьшив релаксационный параметр до $\tau = 0.8$, мы добьемся сходимости алгоритма SubDiff2 к формальному решению во всём диапазоне “неблагоприятных” значений элемента \mathbf{a}_{77} , хотя она и не будет в этом случае конечной.

Дальнейшие примеры работы субдифференциального метода Ньютона можно найти в последнем параграфе этой главы.

6.6 Стационарные одношаговые итерационные методы

Цель настоящего параграфа — развитие стационарных одношаговых итерационных методов для нахождения формальных решений ИСЛАУ вида

$$\mathbf{C}x \ominus \mathbf{d} = 0. \quad (6.2)$$

Необходимость в построении таких методов вызвана тем, что

- несмотря на очень хорошее поведение субдифференциального (квазидифференциального в случае невыполнения (6.27)) метода Ньютона на практике, его обоснование для самого общего случая сталкивается с трудностями;
- помимо вычисления решения стационарные итерационные методы, основанные на теоремах о сжимающих отображениях, обеспечивают ещё и доказательство единственности найденного решения, чего не даёт субдифференциальный (квазидифференциальный) метод Ньютона.

Определение 6.6.1 *Интервальную матрицу \mathbf{C} будем называть невырожденной, если невырождены все вещественные матрицы из её правильной проекции $\text{pro } \mathbf{C}$, т.е. матрицы составленной из правильных проекций элементов \mathbf{C} .*

6.6 а Общий подход: расщепление матрицы ИСЛАУ

Как находить формальные решения ИСЛАУ вида (6.2) с матрицами, имеющими произвольное распределение правильных и неправильных элементов? В общем случае для

этой цели применима, например, универсальная схема метода простой итерации со всеми её многочисленными модификациями — Зейделя, Якоби и т.п. [76], хотя получаемая в подобных алгоритмах сходимость является качественно более медленной, чем в субдифференциальном (квазидифференциальном) методе Ньютона. При реализации подобных стационарных методов иногда можно итерировать непосредственно в интервальном пространстве \mathbb{KR}^n , даже не погружая его в линейное пространство.

В соответствии с общей схемой одношаговых стационарных итерационных методов исходное уравнение (6.2) предварительно должно быть приведено к виду

$$x = T(x) \tag{6.67}$$

с некоторым оператором $T : \mathbb{KR}^n \rightarrow \mathbb{KR}^n$, а затем, после выбора начального приближения $\mathbf{x}^{(0)}$, запускается итерирование

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = T(\mathbf{x}^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{6.68}$$

При выполнении ряда специальных условий на оператор перехода T (когда он является сжатием и т.п.) и на начальное приближение $\mathbf{x}^{(0)}$ последовательность $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ сходится к неподвижной точке оператора T , т.е. к искомому решению уравнения (6.2). Но, в отличие от традиционного вещественного случая, приведение ИСЛАУ (6.2) к виду (6.67) из-за недостаточных алгебраических свойств арифметики Каухера является не вполне тривиальной задачей. Проблема состоит в том, что по меньшей мере *два* члена с интервальной переменной x в формуле (6.67) (которая эквивалентна $x \ominus T(x) = 0$) должны в итоге свернуться в выражение $\mathbf{C}x \ominus \mathbf{d}$, содержащее лишь *одно* вхождение переменной x . А это, при отсутствии полноценной возможности приводить подобные члены, требует специальных средств для преобразования исходного уравнения к виду (6.67).

Один из возможных подходов к конструированию итерационных схем для решения уравнения (6.2) заключается в том, чтобы пойти обратным путём — от возможных представлений

$$\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathcal{G}(\mathbf{x}) + \mathcal{H}(\mathbf{x}), \tag{6.69}$$

где

- i) функция $\mathcal{G} : \mathbb{KR}^n \rightarrow \mathbb{KR}^n$ легко обратима, т.е. для неё может быть легко построена обратная функция $\mathcal{G}^{-1} : \mathbb{KR}^n \rightarrow \mathbb{KR}^n$, такая что $\mathcal{G}^{-1}(\mathcal{G}(\mathbf{x})) = \mathcal{G}(\mathcal{G}^{-1}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$;
- ii) функция $\mathcal{H} : \mathbb{KR}^n \rightarrow \mathbb{KR}^n$ легко вычислима.

Определение 6.6.2 Пусть $\psi : \mathbb{KR}^n \rightarrow \mathbb{KR}^n$ — оператор в \mathbb{KR}^n , задаваемый умножением на интервальную матрицу \mathbf{C} , т.е. $\psi(\mathbf{x}) = \mathbf{C}\mathbf{x}$. Представление ψ в виде (6.69), удовлетворяющем для любых $\mathbf{x} \in \mathbb{KR}^n$ выписанным выше условиям i)–ii), будем называть расщеплением оператора ψ умножения на матрицу, или, коротко, расщеплением матрицы \mathbf{C} .

Если нам известно некоторое расщепление матрицы \mathbf{C} в интервальной линейной системе

$$\mathbf{C}\mathbf{x} \ominus \mathbf{d} = 0, \tag{6.2}$$

то мы можем перейти к эквивалентному уравнению

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}) + \mathcal{H}(\mathbf{x}) \ominus \mathbf{d} = 0,$$

или

$$x = \mathcal{G}^{-1}\left(\mathbf{d} \ominus \mathcal{H}(x)\right),$$

что совпадает с желаемой формой (6.67). Соответственно, итерационный процесс можно организовывать по формуле

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathcal{G}^{-1}\left(\mathbf{d} \ominus \mathcal{H}(\mathbf{x}^{(k)})\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.70)$$

Далее мы ограничимся рассмотрением простейшего случая, когда $\mathcal{G}, \mathcal{H} : \mathbb{KR}^n \rightarrow \mathbb{KR}^n$ либо сами представляют собой умножения на некоторые интервальные матрицы, либо являются близкими по виду отображениями.

Пусть в ИСЛАУ (6.2) интервальная матрица \mathbf{C} невырождена. Тогда существуют по крайней мере две возможности для расщепления (6.69) оператора умножения на \mathbf{C} с легко обратимым отображением $\mathcal{G}^{-1}(\cdot)$:

1. $\mathcal{G}(\cdot)$ берётся в виде умножения на некоторую точечную вполне невырожденную матрицу G , т.е.

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}) = G\mathbf{x}.$$

При этом $\mathcal{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{H}\mathbf{x}$, $\mathbf{H} = \mathbf{C} - G$, а ненулевые элементы G и \mathbf{H} подбираются имеющими одинаковые знаки (за счёт чего в силу дистрибутивности (2.23) и обеспечивается равенство (6.69) для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{KR}^n$).

2. $\mathcal{G}(\cdot)$ и $\mathcal{H}(\cdot)$ берутся, соответственно, в виде

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}\mathbf{x} \quad \text{и} \quad \mathcal{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{H}\mathbf{x},$$

где \mathbf{G} и \mathbf{H} — верхняя и нижняя треугольные интервальные матрицы, $\mathbf{C} = \mathbf{G} + \mathbf{H}$, причём \mathbf{G} имеет обратимые элементы на главной диагонали, а у \mathbf{H} главная диагональ нулевая (возможно, для этого сначала потребуется поменять местами уравнения системы).

Обратное отображение $\mathcal{G}^{-1}(\cdot)$ при этом таково, что результат \mathbf{y} его действия на элемент $\mathbf{x} \in \mathbb{KR}^n$ определяется по формулам обратного хода интервального аналога метода Гаусса для треугольной системы $\mathbf{G}\mathbf{y} = \mathbf{x}$. Естественно называть такое расщепление оператора умножения на \mathbf{C} *треугольным*.

Заметим, что в обоих рассмотренных случаях обратное отображение $\mathcal{G}^{-1} : \mathbb{KR}^n \rightarrow \mathbb{KR}^n$, вообще говоря, не может быть задано умножением на какую-либо интервальную матрицу.

6.6 b Отщепление вещественного слагаемого

В этом пункте для первого из рассмотренных в §6.6 а случаев расщепления матрицы ИСЛАУ мы выпишем расчётные формулы соответствующего итерационного процесса (6.70) в явном виде. Покажем также, каким образом можно на практике строить расщепление интервальной матрицы.

Определение 6.6.3 На множестве интервалов \mathbb{KR} введём унарную операцию $[\cdot]$, такую что

$$[\mathbf{x}] = \begin{cases} \max\{\underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}\}, & \text{если } \mathbf{x} < 0, \\ 0 & , \text{ если } 0 \in \text{pro } \mathbf{x}, \\ \min\{\underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}\}, & \text{если } \mathbf{x} > 0, \end{cases}$$

— взятие ближайшего к нулю элемента правильной проекции интервала.

$[\mathbf{x}]$ — это наименьшая по абсолютной величине точка из правильной проекции интервала, которая имеет тот же знак, что и сам интервал. Нетрудно понять, что если x лежит между 0 и $[\mathbf{x}]$, т.е. $x \in 0 \vee [\mathbf{x}]$, то интервалы

$$\mathbf{x} - x \quad \text{и} \quad x$$

имеют одинаковый знак, а потому образуют требуемое расщепление для оператора умножения на \mathbf{x} . Следовательно, условию 1 из §6.6 а можно удовлетворить, например, если взять

$$G \in 0 \vee [\mathbf{C}]. \tag{6.71}$$

Для минимизации абсолютной величины остатка $\mathbf{H} = \mathbf{C} - G$ можно положить $G = [\mathbf{C}]$, т.е. образовать G поэлементным применением к \mathbf{C} унарной операции $[\cdot]$. Ясно, что при сделанном нами предположении о невырожденности \mathbf{C} матрица G также получится невырожденной. Если G к тому же вполне невырождена, то обратное отображение $\mathcal{G}^{-1}(\cdot)$ соответствует умножению на матрицу $(G^\sim)^{-1}$ в \mathbb{R}^{2n} . В любом случае у нас всегда есть возможность сделать матрицу G вполне невырожденной путём небольшого уменьшения абсолютной величины её ненулевых элементов, не нарушающего условия расщепления (6.71).

Полезно выписать формулы соответствующего итерационного процесса в евклидовом пространстве \mathbb{R}^{2n} . Как конкретизацию для (6.70) мы имеем

$$x^{(k+1)} = (G^\sim)^{-1} \sigma \left(\mathbf{d} \ominus \mathbf{H} \sigma^{-1}(x^{(k)}) \right). \tag{6.72}$$

где $G \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{H} = \mathbf{C} - G$, σ — стандартное погружение \mathbb{KR}^n в \mathbb{R}^{2n} .

Итерационный процесс с таким расщеплением работает в целом удовлетворительно, но иногда не столь хорошо, как того хотелось бы. Например, он не приводит к успеху при решении популярной интервальной линейной системы

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 1] \\ [-1, 2] & [2, 4] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [-2, 2] \end{pmatrix}$$

из работы [129], а потому имеет смысл рассмотреть и другие рецепты расщепления матрицы ИСЛАУ.

Ещё один способ расщепления интервальной матрицы может быть основан на обобщённом дистрибутивном законе Маркова (2.24). Введём

Определение 6.6.4 На множестве интервалов \mathbb{KR} введём унарную операцию $[\cdot]$, такую что

$$[\mathbf{x}] = \begin{cases} \min\{\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}\}, & \text{если } \mathbf{x} \leq 0, \\ 0 & , \text{ если } 0 \in \text{pro } \mathbf{x}, \\ \max\{\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}\}, & \text{если } \mathbf{x} \geq 0. \end{cases}$$

— взятие наибольшего по модулю элемента из правильной проекции интервала, не содержащего нуля.

Если $0 \notin \text{pro } \mathbf{x}$, то $[\mathbf{x}]$ — это *наибольшая* по абсолютной величине точка из правильной проекции интервала (в отличие от $\lfloor \mathbf{x} \rfloor$), которая имеет тот же знак, что и сам интервал. Нетрудно понять, что если x совпадает по знаку с $[\mathbf{x}]$ и $|x| > [\mathbf{x}]$, то интервалы

$$\mathbf{x} - x \quad \text{и} \quad x$$

имеют разные знаки, а знак их суммы $(\mathbf{x} - x) + x$ совпадает со знаком \mathbf{x} . Поэтому для любого $\mathbf{y} \in \mathbb{KR}$ в силу (2.24) справедливо

$$((\mathbf{x} - x) + x) \cdot \mathbf{y} = (\mathbf{x} - x) \cdot \text{dual } \mathbf{y} + x \cdot \mathbf{y}.$$

Следовательно, в общей формуле итерационных процессов (6.70) можно положить

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}) = G\mathbf{x}, \quad \text{где } G = (g_{ij}) = [\mathbf{C}], \quad (6.73)$$

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1(\mathbf{x}) \\ \mathcal{H}_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \mathcal{H}_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad \text{где } \mathcal{H}_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \mathbf{h}_{ij} \cdot \begin{pmatrix} \text{если } g_{ij} = 0, \text{ то } \mathbf{x}_j, \\ \text{иначе } \text{dual } \mathbf{x}_j \end{pmatrix}, \quad (6.74)$$

$$\mathbf{H} = (\mathbf{h}_{ij}) = [\mathbf{C}] - G. \quad (6.75)$$

В \mathbb{R}^{2n} явная формула для итерационного процесса, основанного на таком модифицированном вещественном расщеплении матрицы ИСЛАУ, имеет вид

$$x^{(k+1)} = (G^\sim)^{-1} \sigma \left(\mathbf{d} \ominus \mathcal{H}(\sigma^{-1}(x^{(k)})) \right), \quad (6.76)$$

где матрица G и отображение $\mathcal{H}(\cdot)$ определены посредством (6.73)–(6.75), а σ — стандартное погружение \mathbb{KR}^n в \mathbb{R}^{2n} . Ниже в §6.7 мы приводим результаты численных экспериментов с этим методом, фигурирующим под именем **RealSplit**.

Каковы условия сходимости рассмотренных итерационных процессов? Имеет место

Теорема 6.6.1 Пусть матрицы $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $\mathbf{H} \in \mathbb{KR}^{n \times n}$ получены в результате расщеплений (6.73)–(6.75) интервальной матрицы \mathbf{C} , а \mathfrak{V} — это $2n \times 2n$ -матрица $(G^\sim)^{-1}$. Если спектральный радиус матрицы $|\mathfrak{V}| |\mathbf{H}|^\sim$ меньше единицы, то формальное решение интервальной линейной системы

$$\mathbf{C}x \ominus \mathbf{d} = 0 \quad (6.2)$$

существует, единственно и итерации (6.72) сходятся к нему из любого начального приближения.

Доказательство мы проведём сначала для итерационного процесса (6.72).

Введём на \mathbb{R}^{2n} псевдометрику $d : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ следующим образом

$$d(x, y) := \begin{pmatrix} \max\{|x_1 - y_1|, |x_{n+1} - y_{n+1}|\} \\ \vdots \\ \max\{|x_n - y_n|, |x_{2n} - y_{2n}|\} \\ \max\{|x_1 - y_1|, |x_{n+1} - y_{n+1}|\} \\ \vdots \\ \max\{|x_n - y_n|, |x_{2n} - y_{2n}|\} \end{pmatrix}.$$

Вспоминая определение стандартного погружения σ , мы можем дать и другое определение для псевдометрики d , именно

$$d(x, y) = \begin{pmatrix} |\sigma^{-1}(x) \ominus \sigma^{-1}(y)| \\ |\sigma^{-1}(x) \ominus \sigma^{-1}(y)| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Dist}(\sigma^{-1}(x), \sigma^{-1}(y)) \\ \text{Dist}(\sigma^{-1}(x), \sigma^{-1}(y)) \end{pmatrix}.$$

Покажем, что относительно такой псевдометрики оператор перехода T итерационной схемы (6.72), определяемый как

$$T(x) = \mathfrak{V} \sigma(\mathbf{d} \ominus \mathbf{H}\sigma^{-1}(x))$$

удовлетворяет условиям теоремы Шрёдера об обобщённых сжатиях (см., например, [4, 50, 219, 76]).

Имеем

$$\begin{aligned} |T_i(x) - T_i(y)| &= |T(x) - T(y)|_i \\ &= |\mathfrak{V} \sigma(\mathbf{d} \ominus \mathbf{H}\sigma^{-1}(x)) - \mathfrak{V} \sigma(\mathbf{d} \ominus \mathbf{H}\sigma^{-1}(y))|_i \\ &= |\mathfrak{V}(\sigma(\mathbf{d} \ominus \mathbf{H}\sigma^{-1}(x)) - \sigma(\mathbf{d} \ominus \mathbf{H}\sigma^{-1}(y)))|_i \\ &= |\mathfrak{V} \sigma(\mathbf{H}\sigma^{-1}(x) \ominus \mathbf{H}\sigma^{-1}(y))|_i \\ &\leq (|\mathfrak{V}| \cdot |\sigma(\mathbf{H}\sigma^{-1}(x) \ominus \mathbf{H}\sigma^{-1}(y))|)_i \\ &= \left(|\mathfrak{V}| \cdot \left(\frac{|\mathbf{H}\sigma^{-1}(x) \ominus \mathbf{H}\sigma^{-1}(y)|}{|\overline{\mathbf{H}\sigma^{-1}(x) \ominus \mathbf{H}\sigma^{-1}(y)}|} \right) \right)_i \\ &\leq \left(|\mathfrak{V}| \cdot \left(\max\left\{ \frac{|\mathbf{H}\sigma^{-1}(x) \ominus \mathbf{H}\sigma^{-1}(y)|}{|\overline{\mathbf{H}\sigma^{-1}(x) \ominus \mathbf{H}\sigma^{-1}(y)}|}, \frac{|\overline{\mathbf{H}\sigma^{-1}(x) \ominus \mathbf{H}\sigma^{-1}(y)}|}{|\overline{\mathbf{H}\sigma^{-1}(x) \ominus \mathbf{H}\sigma^{-1}(y)}|} \right\} \right) \right)_i \\ &= \left(|\mathfrak{V}| \cdot \left(\frac{|\text{Dist}(\mathbf{H}\sigma^{-1}(x), \mathbf{H}\sigma^{-1}(y))|}{|\text{Dist}(\mathbf{H}\sigma^{-1}(x), \mathbf{H}\sigma^{-1}(y))|} \right) \right)_i \end{aligned}$$

Воспользуемся теперь неравенством (2.29): для любых $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n$ справедливо

$$\text{Dist}(\mathbf{H}\mathbf{u}, \mathbf{H}\mathbf{v}) \leq |\mathbf{H}| \cdot \text{Dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Следовательно, продолжая выкладки, получим:

$$\begin{aligned} |T_i(x) - T_i(y)| &\leq \left(|\mathfrak{Y}| \cdot \begin{pmatrix} |\mathbf{H}| \cdot \text{Dist}(\sigma^{-1}(x), \sigma^{-1}(y)) \\ |\mathbf{H}| \cdot \text{Dist}(\sigma^{-1}(x), \sigma^{-1}(y)) \end{pmatrix} \right)_i \\ &= \left(|\mathfrak{Y}| \begin{pmatrix} |\mathbf{H}| & 0 \\ 0 & |\mathbf{H}| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Dist}(\sigma^{-1}(x), \sigma^{-1}(y)) \\ \text{Dist}(\sigma^{-1}(x), \sigma^{-1}(y)) \end{pmatrix} \right)_i \\ &= \left(|\mathfrak{Y}| |\mathbf{H}|^{\sim} \begin{pmatrix} \text{Dist}(\sigma^{-1}(x), \sigma^{-1}(y)) \\ \text{Dist}(\sigma^{-1}(x), \sigma^{-1}(y)) \end{pmatrix} \right)_i \\ &= (|\mathfrak{Y}| |\mathbf{H}|^{\sim} d(x, y))_i \\ &= (i\text{-ая строка матрицы } |\mathfrak{Y}| |\mathbf{H}|^{\sim}) \cdot d(x, y). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} &\max\{|T_i(x) - T_i(y)|, |T_{i+n}(x) - T_{i+n}(y)|\} \\ &= \max\{(|\mathfrak{Y}| |\mathbf{H}|^{\sim} d(x, y))_i, (|\mathfrak{Y}| |\mathbf{H}|^{\sim} d(x, y))_{i+n}\} \\ &= \max\left\{ \begin{pmatrix} i\text{-ая строка} \\ \text{матрицы} \\ |\mathfrak{Y}| |\mathbf{H}|^{\sim} \end{pmatrix} d(x, y), \begin{pmatrix} (i+n)\text{-ая строка} \\ \text{матрицы} \\ |\mathfrak{Y}| |\mathbf{H}|^{\sim} \end{pmatrix} d(x, y) \right\}. \end{aligned}$$

Из формул Фробениуса для обращения блочных матриц (см., например, [21]) следует, что $2n \times 2n$ -матрица \mathfrak{Y} является блочной матрицей той же структуры, что и сопутствующая матрица G^{\sim} , т.е. разбивается на четыре $n \times n$ -блока, причем диагональные блоки одинаковы. Поэтому в целом получаем

$$d(T(x), T(y)) \leq |\mathfrak{Y}| |\mathbf{H}|^{\sim} d(x, y),$$

что и требовалось.

Нетрудно видеть, что проведённое доказательство легко может быть адаптировано и для итерационного процесса (6.76), так как

$$|\mathcal{H}(\mathbf{x})| = |\mathbf{H}\mathbf{x}|$$

для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n$. ■

Предмет основной заботы разработчиков итерационных методов вида (6.68) — как можно сильнее уменьшить спектральный радиус (либо норму) оператора Липшица для оператора перехода T , чтобы, во-первых, обеспечить сходимость итераций, и, во-вторых, ускорить эту сходимость там, где она уже есть. Как следует из доказательства Теоремы 6.6.1,

для схемы (6.72) матрица этого оператора Липшица равна $|\mathfrak{B}| |\mathbf{H}| \sim$. Оптимизация дистрибутивного расщепления матрицы \mathbf{C} на \mathbf{G} и \mathbf{H} является непростой интересной задачей и в этой работе мы не будем заниматься её решением в самом общем виде. Отметим лишь, что отщепление вещественного слагаемого особенно удобно на практике в случаях, когда матрица ИСЛАУ имеет много точечных элементов, а доля существенно интервальных элементов невелика.

6.6 с Треугольное расщепление матрицы системы

При треугольном расщеплении интервальной матрицы \mathbf{C} равенство

$$\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{G}\mathbf{x} + \mathbf{H}\mathbf{x}$$

достигается за счёт того, что \mathbf{G} и \mathbf{H} образуют дизъюнктное разложение для \mathbf{C} , т.е. ненулевые элементы в \mathbf{G} и \mathbf{H} взаимно дополняют друг друга. Псевдокод итерационного процесса (6.70) с треугольным расщеплением матрицы \mathbf{C} имеет в $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$ вид, представленный в Таблице 6.3.

Исследование сходимости алгоритма `TriangleSplit` было выполнено А.Ю. Карлюк под руководством автора в работе [48]. Основным итогом статьи [48] является следующий результат.

Теорема 6.6.2 Пусть для интервальной матрицы \mathbf{C} системы уравнений (6.2) вещественные квадратные $n \times n$ -матрицы D, L, R определяются формулами

$$D = \text{diag} \{ |\mathbf{c}_{11}^{-1}|, |\mathbf{c}_{22}^{-1}|, \dots, |\mathbf{c}_{nn}^{-1}| \},$$

$$L = (l_{ij}), \quad \text{где} \quad l_{ij} = \begin{cases} |\mathbf{c}_{ij}|, & \text{если } i > j, \\ 0, & \text{если } i \leq j, \end{cases}$$

$$R = (r_{ij}), \quad \text{где} \quad r_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \geq j, \\ |\mathbf{c}_{ij}|, & \text{если } i < j. \end{cases}$$

Если спектральный радиус матрицы

$$P = \sum_{j=0}^{n-1} (DL)^j DR = (I - DL)^{-1} DR$$

меньше единицы, то итерационный процесс `TriangleSplit` для нахождения формального решения ИСЛАУ (6.2) в полной интервальной арифметике сходится из любого начального приближения $\mathbf{x}^{(0)}$ к единственной неподвижной точке \mathbf{x}^* , являющейся формальным решением системы (6.2). При этом имеет место оценка

$$\text{Dist} \left(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^{(k)} \right) \leq \left((I - P)^{-1} - \sum_{j=0}^{k-1} P^j \right) \cdot \text{Dist} \left(\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)} \right).$$

Для выполнения условия $\rho(P) < 1$ достаточно, например, выполнения следующего условия на интервальную матрицу \mathbf{C} системы (6.2): рекуррентно вычисляемые числа s_1, s_2, \dots, s_n , такие что

$$s_i = \frac{1}{\langle \text{pro } \mathbf{c}_{ii} \rangle} \left(\sum_{j=1}^{i-1} |\mathbf{c}_{ij}| s_j + \sum_{j=i+1}^n |\mathbf{c}_{ij}| \right), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

Таблица 6.2:

Алгоритм TriangleSplit

Вход

Интервальная линейная система $Cx \ominus \mathbf{d} = 0$. Треугольное расщепление матрицы C на матрицы $\mathbf{G} = (\mathbf{g}_{ij})$ и $\mathbf{H} = (\mathbf{h}_{ij})$. Заданная точность ϵ .

Выход

Приближение к формальному решению ИСЛАУ $Cx \ominus \mathbf{d} = 0$.

Алгоритм

$d := +\infty$;

присваиваем вектору \mathbf{x} некоторое начальное значение;

DO WHILE ($d \geq \epsilon$)

$\mathbf{p}_1 := \mathbf{d}_1$;

 DO FOR $i = 2$ TO n

$$\mathbf{p}_i := \mathbf{d}_i \ominus \sum_{j=1}^{i-1} \mathbf{h}_{ij} \mathbf{x}_j$$

 END DO

$\tilde{\mathbf{x}}_n := \mathbf{p}_n \oslash \mathbf{g}_{nn}$;

 DO FOR $i = n - 1$ TO 1

$$\tilde{\mathbf{x}}_i := \left(\mathbf{p}_i \ominus \sum_{j=i+1}^n \mathbf{g}_{ij} \tilde{\mathbf{x}}_j \right) \oslash \mathbf{g}_{ii}$$

 END DO

$d :=$ расстояние между \mathbf{x} и $\tilde{\mathbf{x}}$;

$\mathbf{x} := \tilde{\mathbf{x}}$;

END DO

все строго меньше единицы. Эти условия заведомо выполняются, в частности, для интервальных матриц со свойством строгого диагонального преобладания:

$$\langle \text{pro } \mathbf{c}_{ii} \rangle > \sum_{j \neq i} |\mathbf{c}_{ij}| \quad \text{для всех } i \in \{1, \dots, n\}.$$

6.7 Численные эксперименты со стационарными итерационными методами

Пример 1, неоднократно рассматривавшаяся нами интервальная линейная система

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 1] \\ [-1, 2] & [2, 4] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [-2, 2] \end{pmatrix} \tag{2.40}$$

из [129]. Алгоритм `RealSplit` за 10 итераций дает 3 верных значащих цифры точного ответа $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})^T$, а за 20 итераций — 6 верных значащих цифр, что по порядку трудозатрат сравнимо с итерационным методом из [39, 40, 317], основанным на отщеплении главной диагонали матрицы ИСЛАУ. Такие же показатели достигаются алгоритмом `RealSplit` и при нахождении формального решения системы (2.40) с дуализованной матрицей (которая возникает, к примеру, при внутреннем оценивании объединённого множества решений для (2.40)).

Пример 2. Рассмотрим интервальную линейную 40×40 -систему

$$\begin{pmatrix} [1.8, 2.2] & [-1.1, -0.9] & & & 0 \\ [-1.1, -0.9] & [1.8, 2.2] & [-1.1, -0.9] & & \\ & [-1.1, -0.9] & [1.8, 2.2] & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & [1.8, 2.2] & [-1.1, -0.9] \\ 0 & & & & [-1.1, -0.9] & [1.8, 2.2] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [0.9, 1.1] \\ [1.8, 2.2] \\ [2.7, 3.3] \\ \vdots \\ [35.1, 42.9] \\ [36, 44] \end{pmatrix}$$

матрица которой получена из известной трехдиагональной матрицы, аппроксимирующей вторую производную на симметричном шаблоне, путём 10%-ного уширения элементов, а правая часть получена таким же уширением вектора

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ 39 \\ 40 \end{pmatrix}. \tag{6.77}$$

Как и в случае с субдифференциальным методом Ньютона, ни она сама, ни ИСЛАУ с дуализованной матрицей не представляют серьёзного труда для методов §6.6. Основанный на вещественном расщеплении алгоритм `RealSplit` уже за 16 итераций находит 12–13 верных значащих цифр для концов компонент формальных решений и исходной интервальной системы и системы с дуализованной матрицей. Ниже на отдельной странице мы приводим эти формальные решения, сохраняя по шесть знаков после запятой.

Совершенно аналогичная картина быстрой сходимости алгоритма `RealSplit` наблюдается при вычислении формальных решений ИСЛАУ с правой частью (6.77) и матрицами, которые являются 10%-уширениями матриц (4.58) и (4.60), рассмотренных нами вслед за [159, 312].

Отметим, что во всех рассмотренных в этом пункте системах интервальные матрицы не являются строго невырожденными.

Пример 3. Для интервальной линейной 40×40 -системы с матрицей Ноймайера

$$\begin{pmatrix} 40 & [0, 2] & \cdots & [0, 2] & [0, 2] \\ [0, 2] & 40 & \cdots & [0, 2] & [0, 2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [0, 2] & [0, 2] & \cdots & 40 & [0, 2] \\ [0, 2] & [0, 2] & \cdots & [0, 2] & 40 \end{pmatrix}, \quad (6.78)$$

(т.е. матрица системы (4.56) с параметром $t = 40$) и с вектором правой части

$$\begin{pmatrix} [10, 20] \\ [10, 20] \\ \vdots \\ [10, 20] \end{pmatrix} \quad (6.79)$$

алгоритм `RealSplit` за 40 итераций находит приближение к формальному решению

$$\begin{pmatrix} [0.25, 0.16949152542] \\ [0.25, 0.16949152542] \\ \vdots \\ [0.25, 0.16949152542] \end{pmatrix}$$

с точностью порядка 10^{-8} .

Совершенно то же самое можно наблюдать и при вычислении формального решения ИСЛАУ с дуализованной матрицей (6.78) и правой частью (6.79). Интересная особенность этого примера — вырожденность интервальной матрицы ИСЛАУ (см. [219]), несмотря на которую развитые нами алгоритмы успешно считают формальное решение.

Пример 4. Для интервальной линейной 7×7 -системы

Формальные решения ИСЛАУ из примера 2.

<p>[221.680216, 182.261640]</p> <p>[433.306233, 354.567627]</p> <p>[632.818428, 518.603104]</p> <p>[822.168021, 672.771618]</p> <p>[999.512195, 818.580931]</p> <p>[1166.585365, 954.611973]</p> <p>[1321.761517, 1082.195121]</p> <p>[1466.558265, 1200.088691]</p> <p>[1599.566395, 1309.445676]</p> <p>[1722.086720, 1409.201773]</p> <p>[1832.926829, 1500.332594]</p> <p>[1933.170731, 1581.951219]</p> <p>[2021.842818, 1654.855875]</p> <p>[2099.810298, 1718.337028]</p> <p>[2166.314363, 1773.015521]</p> <p>[2222.005420, 1818.359201]</p> <p>[2266.341463, 1854.811529]</p> <p>[2299.756097, 1882.017738]</p> <p>[2321.924119, 1900.243902]</p> <p>[2333.062330, 1909.312638]</p> <p>[2333.062330, 1909.312638]</p> <p>[2321.924119, 1900.243902]</p> <p>[2299.756097, 1882.017738]</p> <p>[2266.341463, 1854.811529]</p> <p>[2222.005420, 1818.359201]</p> <p>[2166.314363, 1773.015521]</p> <p>[2099.810298, 1718.337028]</p> <p>[2021.842818, 1654.855875]</p> <p>[1933.170731, 1581.951219]</p> <p>[1832.926829, 1500.332594]</p> <p>[1722.086720, 1409.201773]</p> <p>[1599.566395, 1309.445676]</p> <p>[1466.558265, 1200.088691]</p> <p>[1321.761517, 1082.195121]</p> <p>[1166.585365, 954.611973]</p> <p>[999.512195, 818.580931]</p> <p>[822.168021, 672.771618]</p> <p>[632.818428, 518.603104]</p> <p>[433.306233, 354.567627]</p> <p>[221.680216, 182.261640]</p>	и	<p>[181.374722, 222.764227]</p> <p>[354.523281, 433.360433]</p> <p>[517.760532, 633.848238]</p> <p>[672.682926, 822.276422]</p> <p>[817.782705, 1000.487804]</p> <p>[954.478935, 1166.747967]</p> <p>[1081.441241, 1322.682926]</p> <p>[1199.911308, 1466.775067]</p> <p>[1308.736141, 1600.433604]</p> <p>[1408.980044, 1722.357723]</p> <p>[1499.667405, 1833.739837]</p> <p>[1581.685144, 1933.495934]</p> <p>[1654.235033, 2022.601626]</p> <p>[1718.026607, 2100.189701]</p> <p>[1772.439024, 2167.018970]</p> <p>[1818.004434, 2222.439024]</p> <p>[1854.279379, 2266.991869]</p> <p>[1881.618625, 2300.243902]</p> <p>[1899.756097, 2322.520325]</p> <p>[1908.869179, 2333.604336]</p> <p>[1908.869179, 2333.604336]</p> <p>[1899.756097, 2322.520325]</p> <p>[1881.618625, 2300.243902]</p> <p>[1854.279379, 2266.991869]</p> <p>[1818.004434, 2222.439024]</p> <p>[1772.439024, 2167.018970]</p> <p>[1718.026607, 2100.189701]</p> <p>[1654.235033, 2022.601626]</p> <p>[1581.685144, 1933.495934]</p> <p>[1499.667405, 1833.739837]</p> <p>[1408.980044, 1722.357723]</p> <p>[1308.736141, 1600.433604]</p> <p>[1199.911308, 1466.775067]</p> <p>[1081.441241, 1322.682926]</p> <p>[954.478935, 1166.747967]</p> <p>[817.782705, 1000.487804]</p> <p>[672.682926, 822.276422]</p> <p>[517.760532, 633.848238]</p> <p>[354.523281, 433.360433]</p> <p>[181.374722, 222.764227]</p>
---	---	---

$$\begin{pmatrix} [4, 6] & [-9, 0] & [0, 12] & [2, 3] & [5, 9] & [-23, -9] & [15, 23] \\ [0, 1] & [6, 10] & [-1, 1] & [-1, 3] & [-5, 1] & [1, 15] & [-3, -1] \\ [0, 3] & [-20, -9] & [12, 77] & [-6, 30] & [0, 3] & [-18, 1] & [0, 1] \\ [-4, 1] & [-1, 1] & [-3, 1] & [3, 5] & [5, 9] & [1, 2] & [1, 4] \\ [0, 3] & [0, 6] & [0, 20] & [-1, 5] & [8, 14] & [-6, 1] & [10, 17] \\ [-7, -2] & [1, 2] & [7, 14] & [-3, 1] & [0, 2] & [3, 5] & [-2, 1] \\ [-1, 5] & [-3, 2] & [0, 8] & [1, 11] & [-5, 10] & [2, 7] & [6, 82] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-10, 95] \\ [35, 14] \\ [-6, 2] \\ [30, 7] \\ [4, 95] \\ [-6, 46] \\ [-2, 65] \end{pmatrix}$$

из работы [292] алгоритм `RealSplit` расходится, но, как мы уже отмечали, формальное решение может быть успешно вычислено с помощью субдифференциального метода Ньютона (за 9 итераций при значении релаксационного параметра $\tau = 1$).

При сужении (7,7)-элемента матрицы появляется сходимость алгоритма `RealSplit` к формальному решению, но она очень медленная. Например, при $a_{77} = [8, 82]$ для получения 5 верных значащих цифр алгоритму требуется около сотни итераций. Резюмируя этот пример, можно сказать, что он весьма убедительно демонстрирует преимущество субдифференциального метода Ньютона не только по эффективности, но и в том, что касается сферы применимости и универсализма.

Литература

- [1] АЙЗЕКС Р. *Дифференциальные игры*. – Москва: Мир, 1967.
- [2] АКИЛОВ Г. П., КУТАТЕЛАДЗЕ С. С. *Упорядоченные векторные пространства*. – Новосибирск: Наука, 1978.
- [3] АКОФФ Р., САСИЕНИ М. *Основы исследования операций*. – Москва: Мир, 1971.
- [4] АЛЕФЕЛЬД Г., ХЕРЦБЕРГЕР Ю. *Введение в интервальные вычисления*. – Москва: Мир, 1987.
- [5] АЩЕПКОВ Л. Т. К проблеме повышения живучести управляемых систем // *Модели и методы исследования операций*, под ред. Б. А. Бельтюкова и В. П. Булатова. – Новосибирск: Наука, 1988. – С. 69–85.
- [6] БАУЭР Ф. Л., ГООЗ Г. *Информатика. В 2-х ч.* – Москва: Мир, 1990.
- [7] БЕЛОВ Б. И., АНЦИФЕРОВ Е. Г. К установлению линейной зависимости в условиях неопределённости исходных данных // *Информационный сборник трудов Вычислительного Центра ИрГУ; выпуск II*. – Иркутск: Изд-во Иркутского университета, 1968. – С. 143–147.
- [8] БИРКГОФ Г. *Теория решеток*. – Москва: Наука, 1984.
- [9] БИРКГОФ Г., БАРТИ Т. *Современная прикладная алгебра*. – Москва: Мир, 1976.
- [10] БОРЕЛЬ Э. *Вероятность и достоверность*. – Москва: Физматгиз, 1961.
- [11] БОЧКОВ А. Ф., ЕВТУШЕНКО Т. В. Один подход к выбору стационарных режимов технологических процессов в условиях неопределенности. – Москва, 1988. – 17 с. – Депонировано в ВИНТИ, №2891-В88.
- [12] БОЧКОВ А. Ф., МИЛЕВСКИЙ М. В. Оценивание параметров модели для объектов с интервальной неопределенностью в выходных параметрах. – Москва, 1988. – 23 с. – Депонировано в ВИНТИ, №926-В88.
- [13] В.М. БРАДИС, *Опыт обоснования некоторых практических правил действий над приближенными числами*. – Тверь, 1927.
- [14] В.М. БРАДИС, *Теория и практика вычислений. Пособие для высших педагогических учебных заведений*. – Москва: Учпедгиз, 1937.
- [15] В.М. БРАДИС, *Устный и письменный счёт. Вспомогательные средства вычислений // Энциклопедия элементарной математики. Книга 1*. – Москва: Учпедгиз, 1951.

- [16] ВАТОЛИН А. А. О задачах линейного программирования с интервальными коэффициентами // *Журнал Вычисл. Математики и Матем. Физики*. – 1984. – Т. 24. – С. 1629–1637.
- [17] ВЕРБИЦКИЙ В. И., ГОРБАНЬ А. Н., УТЮБАЕВ Г. Ш., ШОКИН Ю. И. Эффект Мура в интервальных пространствах // *Доклады Академии Наук*. – 1989. – Т. 304, №1. – С. 17–22.
- [18] ВОЕВОДИН В. В., КУЗНЕЦОВ Ю. А. *Матрицы и вычисления*. – Москва: Наука, 1984.
- [19] ВОЩИНИН А. П., СОТИРОВ Г. Р. *Оптимизация в условиях неопределенности*. – Москва–София: Издательство МЭИ–Техника, 1989.
- [20] ГАГАНОВ А. А. О сложности вычисления интервала значений полинома от многих переменных // *Кибернетика*. – 1985. – №4. – С. 6–8.
- [21] ГАНТМАХЕР Ф. Р. *Теория матриц*. – Москва: Наука, 1988.
- [22] ГЕРМЕЙЕР Ю. *Введение в теорию исследования операций*. – Москва: Наука, 1971.
- [23] ГОДУНОВ С.К., АНТОНОВ А.Г., КИРИЛЮК О.П., КОСТИН В.И. *Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах*. – Новосибирск: Наука, 1988.
- [24] ГОЛУБ ДЖ., ВАН ЛОАН Ч. *Матричные вычисления*. – Москва: Мир, 1998.
- [25] ГРАНОВСКИЙ В. Г., СИРАЯ Т. Н. *Методы обработки экспериментальных данных при измерениях*. – Ленинград: Энергоатомиздат, 1990.
- [26] ГЭРИ М., ДЖОНСОН Д. *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи*. – Москва: Мир, 1982.
- [27] ДЕМЬЯНОВ В. Ф., МАЛОЗЕМОВ В. Н. *Введение в минимакс*. – Москва: Наука, 1972.
- [28] ДЭННИС ДЖ., мл., ШНАБЕЛЬ Р. *Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений*. – Москва: Мир, 1988.
- [29] ДОБРОНЕЦ Б. С., ШАЙДУРОВ В. В. *Двусторонние численные методы*. – Новосибирск: Наука, 1990.
- [30] ДУГАРОВА И. В., СМАГИНА Е. М. Обеспечение устойчивости системы с неопределенными параметрами // *Автоматика и Телемеханика*. – 1990. – №11. – С. 176–181.
- [31] ЕВТУШЕНКО Ю.Г. Численный метод нахождения глобального экстремума функции // *Журнал Вычисл. Математики и Матем. Физики*. – 1971. – Т. 11. – С. 1390–1403.
- [32] ЕВТУШЕНКО Ю.Г., РАТЬКИН В.А. Метод половинных делений для глобальной оптимизации функции многих переменных // *Известия АН СССР. Техническая кибернетика*. – 1987. – №1. – С. 119–128.
- [33] ЕРЕМИН И. И. *Противоречивые модели оптимального планирования*. – Москва: Наука, 1988.

- [34] ЖИГЛЯВСКИЙ А. А., ЖИЛИНСКАС А. Г. *Методы поиска глобального экстремума*. – Москва: Наука, 1991.
- [35] ЗАМАНСКИЙ М. *Введение в современную алгебру и анализ*. – Москва: Наука, 1974.
- [36] ЗАХАРОВ А.В., ШОКИН Ю.И. Синтез систем управления при интервальной неопределённости параметров их математических моделей // *Доклады АН СССР*. – 1988. – Т. 299, №2. – С. 292–295.
- [37] ЗОРИЧ В. А. *Математический анализ*. Т. 1. – Москва: Наука, 1981. Т. 2. – Москва: Наука, 1984.
- [38] ЗОРКАЛЬЦЕВ В. И. *Методы прогнозирования и анализа эффективности функционирования системы топливоснабжения*. – Москва: Наука, 1988.
- [39] ЗЮЗИН В. С. Об одном способе отыскания двусторонних интервальных приближений решения системы линейных интервальных уравнений // *Дифференциальные уравнения и теория функций*. – Саратов: Изд-во Саратовского университета, 1987. – С. 28–32.
- [40] ЗЮЗИН В. С. Итерационный метод решения системы алгебраических сегментных уравнений первого порядка // *Дифференциальные уравнения и теория функций (выпуск 8)*. – Саратов: Изд-во Саратовского университета, 1989. – С. 72–82.
- [41] ИВЛЕВ Р.С. Построение и исследование свойств многомерных систем управления интервально-заданными объектами. *Диссертация ... канд. техн. наук*. – Алматы: ИПИУ НАН Республики Казахстан, 1999.
- [42] ИВЛЕВ Р. С., СОКОЛОВА С. П. Построение векторного управления многомерным интервально-заданным объектом // *Вычислительные Технологии*. – 1999. – Т. 4, №4. – С. 3–13.
- [43] *Исследование операций. Методологические основы и математические методы*, под ред. Дж. Моудера и С. Элмаграби. – Москва: Мир, 1981.
- [44] КАЛМАН Р., ФАЛЬ П., АРБИВ М. *Очерки по математической теории систем*. – Москва: Мир, 1971.
- [45] КАЛМЫКОВ С. А., ШОКИН Ю. И., ЮЛДАШЕВ З. Х. *Методы интервального анализа*. – Новосибирск: Наука, 1986.
- [46] КАНТОРОВИЧ Л.В. О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений // *Сибирский Математический Журнал*. – 1962. – Т. 3, №5. – С. 701–709.
- [47] КАНТОРОВИЧ Л. В., АКИЛОВ Г. П. *Функциональный анализ*. – Москва: Наука, 1984.
- [48] КАРЛЮК А.Ю. Численный метод нахождения алгебраического решения ИСЛАУ, основанный на треугольном расщеплении // *Вычислительные Технологии*. – Т. 4, №4. – С. 14–23.

- [49] Клини С. К. *Математическая логика*. – Москва: Мир, 1973.
- [50] Коллатц Л. *Функциональный анализ и вычислительная математика*. – Москва: Мир, 1969.
- [51] Корноушенко Е.К. Интервальные покоординатные оценки для множества достижимых состояний линейной стационарной системы // *Автоматика и Телемеханика*. – 1980–1983. *Часть I*, 1980, №5, сс. 12–22; *Часть II*, 1980, №12, сс. 10–17; *Часть III*, 1982, №10, сс. 47–52 ; *Часть IV*, 1983, №3, сс. 81–87.
- [52] Красносельский М. А. *Положительные решения операторных уравнений*. – Москва: Физматгиз, 1962.
- [53] Красносельский М. А., Забрейко П. П. *Геометрические методы нелинейного анализа*. – Москва: Наука, 1975.
- [54] Красносельский М. А., Лифшиц Е. А., Соболев А. В. *Позитивные линейные системы*. – Москва: Наука, 1985.
- [55] Куратовский К., Мостовский А. *Теория множеств*. – Москва: Мир, 1970.
- [56] Куржанский А. Б. Задача идентификации — теория гарантированных оценок // *Автоматика и Телемеханика*. – 1991. – №4. – С. 3–26.
- [57] Курош А. Г. *Лекции по общей алгебре*. – Москва: Наука, 1973.
- [58] Курпель Н. С., Шувар Б. А. *Двусторонние операторные неравенства и их применения*. – Киев: Наукова думка, 1980.
- [59] Лакеев А. В., Носков С. И. Описание множества решений линейного уравнения с интервально заданными оператором и правой частью // *Доклады Академии Наук*. – 1993. – Т. 330, №4. – С. 430–433.
- [60] Лакеев А. В., Носков С. И. О множестве решений линейного уравнения с интервально заданными оператором и правой частью // *Сибирский Математический Журнал*. – 1994. – Т. 35, №5. – С. 1074–1084.
- [61] Лакеев А. В. Вычислительная сложность оценивания обобщённых множеств решений интервальных линейных систем // *Труды XI международной Байкальской школы-семинара “Методы оптимизации и их приложения”, Иркутск, Байкал, 5–12 июля 1998 г., секция 4*. – Иркутск: ИСЭМ, 1998. – С. 115–118.
- [62] Лакеев А. В. Оценка спектрального радиуса нерасширяющих матриц // *Вычислительные Технологии*. – 1998. – Т. 3, №2. – С. 21–30.
- [63] Лакеев А. В. Существование и единственность алгебраических решений интервальных линейных систем в полной арифметике Каухера // *Вычислительные Технологии*. – 1999. – Т. 4, №4. – С. 33–44.
- [64] Ли Э. Б., Маркус Л. *Основы теории оптимального управления*. – Москва: Наука, 1972.

- [65] МАЛЬЦЕВ А. И. *Основы линейной алгебры*. – Москва: Наука, 1970.
- [66] МАНУСОВ В.З., МОИСЕЕВ С.М., ПЕРКОВ С.Д. Интервальный анализ в задачах расчета токов короткого замыкания // *Техническая электродинамика*. – 1987. – №5. – С. 13–18.
- [67] *Математическая энциклопедия. Том 2*. – Москва: Советская Энциклопедия, 1979.
- [68] *Математический энциклопедический словарь*. – Москва: Наука, 1995.
- [69] МЕНЬШИКОВ Г.Г. Интервальные вычисления: упущенные возможности и попытки наверстать // *Процессы управления и устойчивость. Труды XXIX научной конференции 4–11 апреля 1998 года*, Санкт-Петербург, СПбГУ, Факультет прикладной математики – процессов управления. – Санкт-Петербург: СПбГУ, 1998. – С. 440–447.
- [70] МЕСАРОВИЧ М., ТАКАХАРА Я. *Общая теория систем: математические основы*. – Москва: Мир, 1978.
- [71] НАЗАРЕНКО Т.И., МАРЧЕНКО Л.В. *Введение в интервальные методы вычислительной математики*. – Иркутск: Издательство Иркутского университета, 1982.
- [72] НИКАЙДО Х. *Выпуклые структуры и математическая экономика*. – Москва: Мир, 1972.
- [73] ОБЭН Ж.-П. *Нелинейный анализ и его экономические приложения*. – Москва: Мир, 1988.
- [74] ОБЭН Ж.-П. и ЭКЛАНД И. *Прикладной нелинейный анализ*. – Москва: Мир, 1988.
- [75] ОРЕ О. *Теория графов*. – Москва: Мир, 1980.
- [76] ОРТЕГА ДЖ., РЕЙНБОЛДТ В. *Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными*. – Москва: Мир, 1975.
- [77] ПАНКОВ П. С. Алгоритм доказательного поиска экстремума с использованием миноранты по области // *Известия АН Киргизской ССР*. – 1979. – №6. – С. 12–13.
- [78] ПАНКОВ П. С. Алгоритмы доказательства устойчивых утверждений и глобальной оптимизации в ограниченной области. – Фрунзе, 1984. – 13 с. – Депонировано в ВИНТИ, №5250-84Деп.
- [79] ПАНКОВ П. С. Доказательные вычисления на ЭВМ. Диссертация ... докт. физ.-мат. наук. – Фрунзе: Институт Математики АН Киргизской ССР, 1985.
- [80] ПАПАДИМИТРИУ Х., СТАЙГЛИЦ К. *Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность*. – Москва: Мир, 1985.
- [81] ПИЯВСКИЙ С.А. Один алгоритм отыскания абсолютного экстремума функции // *Журнал Вычисл. Математики и Матем. Физики*. – 1972. – Т. 12, №4. – С. 888–896.
- [82] ПШЕНИЧНЫЙ Б. Н. *Выпуклый анализ и экстремальные задачи*. – Москва: Наука, 1980.

- [83] ПЫЛАЕВ Н. К., ЯДЫКИН И. Б. Интервальные алгоритмы адаптивного управления с неявной эталонной моделью // *Автоматика и Телемеханика*. №6. – С. 63–72.
- [84] РОКАФЕЛЛАР Р. *Выпуклый анализ*. – Москва: Мир, 1973.
- [85] САМОРУКОВ А. К., ХЛЕБАЛИН Н. А., ЗАХАРОВ А. В. Синтез регулятора стабилизации бокового движения вертолетного буксировочного комплекса с учётом неопределённости параметров его математической модели // *Аналитические методы синтеза регуляторов*. – Саратов: Саратовский политехнический ин-т, 1982. – С. 109–122.
- [86] СМАГИНА Е. М., ДУГАРОВА И. В. Синтез модального регулятора для системы с неопределёнными параметрами. – Москва, 1987. – 38 с. – Депонировано в ВИНТИ, №789-B87.
- [87] СУХАРЕВ А. Г. *Минимаксные алгоритмы в задачах численного анализа*. – Москва: Наука, 1989.
- [88] ХАЧИЯН Л.Г. Полиномиальные алгоритмы в линейном программировании // *Журнал Вычисл. Математики и Матем. Физики*. – 1980. – Т. 20, №1. – С. 51–68.
- [89] ХЛЕБАЛИН Н. А. Аналитический метод синтеза регуляторов в условиях неопределённости параметров объекта // *Аналитические методы синтеза регуляторов*. – Саратов: Саратовский политехнический ин-т, 1981. – С. 107–123.
- [90] ХЛЕБАЛИН Н. А. Синтез интервальных регуляторов в задаче модального управления // *Аналитические методы синтеза регуляторов*. – Саратов: Саратовский политехнический ин-т., 1988. – С. 26–30.
- [91] ХЛЕБАЛИН Н.А., ШОКИН Ю.И. Интервальный вариант метода модального управления // *Доклады Академии Наук*. – 1991. – Т. 316, №4. – С. 846–850.
- [92] ХОРН Р., ДЖОНСОН Ч. *Матричный анализ*. – Москва: Мир, 1989.
- [93] ЧЕРНИКОВ С.Н. *Линейные неравенства*. – Москва: Наука, 1968.
- [94] ЧЕРНОУСЬКО Ф. Л. *Оценивание фазового состояния динамических систем*. – Москва: Наука, 1988.
- [95] ШАЙДУРОВ В. В., ШАРЫЙ С. П. Решение интервальной алгебраической задачи о допусках. – Красноярск, 1988. – 27 с. – (Препринт / ВЦ СО АН СССР ; №5).
- [96] ШАЙДУРОВ В. В., ШАРЫЙ С. П. Интервальная алгебраическая задача о допусках // *Информационно-оперативный материал (интервальный анализ)*. – Красноярск, 1988. – (Препринт / ВЦ СО АН СССР; №6). – С. 38–40.
- [97] ШАЙДУРОВ В. В., ШАРЫЙ С. П. Интервальное решение алгебраической задачи о допусках // *Труды Первого советско-болгарского семинара по числовой обработке, Переславль-Залесский, 18–24 октября 1987 г.* / Институт Программных Систем АН СССР. – Переславль-Залесский, 1988. – С. 137–140. – Депонировано в ВИНТИ, №2634-B89.

- [98] Шайдуrow В. В., Шарый С. П. Некоторые методы решения линейной задачи о допусках // Информационно-оперативный материал (интервальный анализ). – Красноярск, 1989. – (Препринт / ВЦ СО АН СССР; №9). – С. 38–41.
- [99] Шарая И. А. О максимальной внутренней оценке множеств решений интервальных линейных систем // *Вычислительные Технологии*. – 1998. – Т. 3, №2. – С. 55–66.
- [100] Шарый С. П. Об одной интервальной задаче линейной алгебры // Информационно-оперативный материал. – Красноярск, 1987. – (Препринт / ВЦ СО АН СССР; №2). – С. 45–46.
- [101] Шарый С. П. О некоторых методах решения линейной задачи о допусках. – Красноярск, 1989. – 45 с. – (Препринт / ВЦ СО АН СССР; №6).
- [102] Шарый С. П. Об оптимальном решении интервальных систем линейных алгебраических уравнений. I. – Красноярск, 1989. – 24 с. – Депонировано в ВИНТИ, №4180-B89.
- [103] Шарый С. П. К вопросу разрешимости линейной задачи о допусках. – Красноярск, 1990. – 8 с. – Депонировано в ВИНТИ, №3353-B89.
- [104] Шарый С. П. О характеристике объединенного множества решений интервальной линейной алгебраической системы. – Красноярск, 1990. – 20 с. – Депонировано в ВИНТИ, №726-B91.
- [105] Шарый С. П. Оптимальное решение интервальных систем линейных алгебраических уравнений // *Информационно-оперативный материал. Часть 1 (интервальный анализ)*. – Красноярск, 1990. – (Препринт / ВЦ СО АН СССР; №16). – С. 39–41.
- [106] Шарый С. П. О разрешимости линейной задачи о допусках // *Interval Computations*. – 1991. – №1. – С. 92–97.
- [107] Шарый С. П. Новый класс алгоритмов для оптимального решения интервальных линейных систем // *Конференция “Актуальные проблемы прикладной математики”*, Саратов, 20 – 22 мая 1991 г. – Саратов, 1991. – С. 113–119.
- [108] Шарый С. П. Решение “внешней” и “внутренней” задач для интервальной системы линейных алгебраических уравнений. Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук. – Красноярск: ВЦ СО РАН, 1992. – 212 с.
- [109] Шарый С. П. Решение “внешней” и “внутренней” задач для интервальной системы линейных алгебраических уравнений. Автореферат диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук. – Красноярск: ВЦ СО РАН, 1992. – 45 с.
- [110] Шарый С. П. Линейные статические системы с интервальной неопределённостью: эффективные алгоритмы для решения задач управления и стабилизации. – Красноярск, 1994. – 13 с. – (Препринт / ВЦ СО РАН; №7).
- [111] Шарый С. П. Алгебраический подход к анализу статических систем с интервальной неопределённостью // *10-я Байкальская школа-семинар “Методы оптимизации и их приложения”*. – Иркутск: СЭИ, 1995. – С. 141–142.

- [112] ШАРЫЙ С. П. Линейные статические системы с интервальной неопределенностью: эффективные алгоритмы для решения задач управления и стабилизации // *Вычислительные Технологии* (Сборник научных трудов ИВТ СО РАН, Т. 4, №13), Новосибирск, 1995. – С. 64–80.
- [113] ШАРЫЙ С. П. Алгебраический подход к анализу линейных статических систем с интервальной неопределенностью // *Актуальные проблемы информатики, прикладной математики и механики*. – Красноярск: ВЦ СО РАН, 1995. – С. 331–356.
- [114] ШАРЫЙ С. П. Численное нахождение алгебраического решения интервальных линейных систем // *Дискретная математика*. – Красноярск: КГТУ, 1996. – С. 129–145.
- [115] ШАРЫЙ С. П. Алгебраический подход к анализу линейных статических систем с интервальной неопределенностью // *Известия РАН. Теория и системы управления*. – 1997. – №3. – С. 51–61.
- [116] ШАРЫЙ С. П. Новый подход к анализу статических систем с интервальной неопределенностью в данных // *Вычислительные Технологии*. – 1997. – Т. 2, №1. – С. 84–102.
- [117] ШАРЫЙ С. П. Интервальный анализ: прошлое, настоящее и будущее // *Наука в Сибири*. – 1997. – №41 (2127). – С. 3.
- [118] ШАРЫЙ С. П. Алгебраический подход во “внешней задаче” для интервальных линейных систем // *Вычислительные Технологии*. – 1998. – Т. 3, №2. – С. 67–114.
- [119] ШАРЫЙ С.П. Анализ чувствительности интервальных линейных статических систем // *Труды XI международной Байкальской школы-семинара “Методы оптимизации и их приложения”, Иркутск, Байкал, 5–12 июля 1998 г., секция 4*. – Иркутск: ИСЭМ, 1998. – С. 187–190.
- [120] ШАРЫЙ С.П. Внешнее оценивание обобщенных множеств решений интервальных линейных систем // *Вычислительные Технологии*. – 1999. – Т. 4, №4. – С. 82–110.
- [121] ЯКОВЛЕВ А. Г. Машинная арифметика мультиинтервалов // *Вопросы Кибернетики* (Научный Совет по компл. проблеме “Кибернетика” АН СССР). – 1986. – Вып. 125. – С. 66–81.
- [122] ABERTH O. *Precise Numerical Methods Using C++*. – San Diego: Academic Press, 1998.
- [123] ALEFELD G., HERZBERGER J. Über die Verbesserung von Schranken für die Lösung bei linearen Gleichungssystemen // *Angewandte Informatik*. – 1971. – B. 13. – S. 107–112.
- [124] APOSTOLATOS N., KULISCH U. Grundzüge einer Intervallrechnung für Matrizen und einige Anwendungen // *Electron. Rechenanl.* – 1968. – B. 10. – S. 73–83.
- [125] ASAITHAMBI N. S., SHEN ZUHE, MOORE R. E. On computing the range of values // *Computing*. – 1982. – Vol. 28, №3. – P. 225–237.
- [126] AUBIN J.-P. *Viability Theory*. – Boston: Birkhäuser, 1991.
- [127] AUBIN J.-P. AND FRANKOWSKA H. *Set-Valued Analysis*. – Boston: Birkhäuser, 1990.

- [128] BABICHEV A. B., KADYROVA O. B., KASHEVAROVA T. P., LESHCHENKO A. S., SEMENOV A. L. UniCalc, a novel approach to solving systems of algebraic equations // *Interval Computations*. – 1993. – №2. – P. 29–47.
- [129] BARTH W., NUDING E. Optimale Lösung von Intervallgleichungssystemen // *Computing*. – 1974. – Vol. 12. – P. 117–125.
- [130] BAUMANN M. Numerical experience with methods for solving an interval linear system // *Freiburger Intervall-Berichte*. – 1984. – №7. – S. 61–66.
- [131] BEECK H. Über die Struktur und Abschätzungen der Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen mit Intervallkoeffizienten // *Computing*. – 1972. – Vol. 10. – P. 231–244.
- [132] BERMAN A., PLEMMONS R. J. *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*. – New York: Academic Press, 1979.
- [133] BERTI S. The solution of an interval equation // *Mathematica*. – 1969. – Vol. 11 (34), №2. – P. 189–194.
- [134] BRAESS D. Die Berechnung der Fehlergrenzen bei linearen Gleichungssystemen mit fehlerhaften Koeffizienten // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. – 1965. – B. 19. – P. 74–80.
- [135] BURGEIMER P. Controllability and interval mathematics // *Mathematical Modelling and Scientific Computations*; Andreev A. S., Dimov I. T., Markov S. M. and Ullrich Ch., eds. – Sofia: Bulgarian Academy of Sciences, 1991. – P. 1–13.
- [136] CAPRANI O., MADSEN K. Iterative methods for interval inclusion of fixed points // *BIT*. – 1978. – Vol. 18. – P. 42–51.
- [137] CAPRANI O., MADSEN K. Experiments with interval methods for nonlinear systems // *Freiburger Intervall-Berichte*. – 1981. – №7. – S. 1–13.
- [138] CHIRIAEV D., WALSTER G. W. *Interval Arithmetic Specification*.
Файл в формате PostScript доступен в Интернете по адресу
<http://www.mscs.mu.edu/~georgec/Courses/GlobSol/Papers/spec.ps>
- [139] COPE J., RUST B. Bounds on solutions of linear systems with inaccurate data // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1979. – Vol. 16, №6. – P. 950–963.
- [140] COXSON G., DE MARCO C. The computational complexity of approximating the minimal perturbation scaling to achieve instability in an interval matrix // *Mathematics of Control, Signals and Systems*. – 1995. – Vol. 7. – P. 279–291.
- [141] COXSON G. E. Computing exact bounds on elements of an inverse interval matrix is NP-hard // *Reliable Computing*. – 1999. – Vol. 5. – P. 137–142.
- [142] DEAN T. L., BODDY M. An analysis of time dependent planning // *Proceedings of AAAI-88 Conference*. – St. Paul, 1988. – P. 49–54.
- [143] DEIF A. S. *Sensitivity Analysis in Linear Systems*. – Berlin: Springer-Verlag, 1986.

- [144] DIMITROVA N.S., MARKOV S.M., POPOVA E.D. Extended interval arithmetics: new results and applications // *Computer Arithmetic and Enclosure Methods*; Atanassova L. and Herzberger J., eds. – Amsterdam: Elsevier, 1992. – P. 225–232.
- [145] DOBRONETS B. S. On some two-sided methods for solving systems of ordinary differential equations // *Interval Computations*. – 1992. – №1(3). – P. 6–21.
- [146] FILIPPOV A. F. Ellipsoidal estimates for a solution of a system of differential equations // *Interval Computations*. – 1992. – №2(4). – P. 6–17.
- [147] FUJII Y., ICHIDA K., OZASA M. Maximization of multivariable functions using interval analysis // *Interval Mathematics 1985*; K. Nickel, ed. – New York: Springer Verlag, 1986. – P. 17–26. – (*Lecture Notes in Computer Science; vol. 212*).
- [148] GARDEÑES E., MIELGO H., TREPAT A. Modal intervals: reason and ground semantics // *Interval mathematics 1985*; Nickel K., ed. – Berlin: Springer Verlag, 1986. – P.
- [149] GARDEÑES E., SAINZ M. A., JORBA L., CALM R., ESTELA R., MIELGO H., TREPAT A. Modal intervals // *Reliable Computing*. – 2001. – Vol. 7, №2. – P. 77–111.
- [150] GARDEÑES E., SAINZ M. A. Solution for a set of simultaneous interval linear equations // *Reliable Computing*. – в печати.
- [151] GARDEÑES E., TREPAT A. Fundamentals of SIGLA, an interval computing system over the completed set of intervals // *Computing*. – 1980. – Vol. 24. – P. 161–179
- [152] GARDEÑES E., TREPAT A., JANER J. M. SIGLA-PL/1 development and applications // *Interval Mathematics 1980*; Nickel K., ed. – New York: Academic Press, 1980. – P. 301–315.
- [153] GARDEÑES E., TREPAT A., JANER J. M. Approaches to simulation and to the linear problem in the SIGLA system // *Freiburger Intervall-Berichte*. – 1981. – №81/8. – P. 1–28.
- [154] GARDEÑES E., TREPAT A., MIELGO H. Present perspective of the SIGLA interval system // *Freiburger Intervall-Berichte*. – 1982. – №82/9. – P. 1–65.
- [155] GARLOFF J. Block methods for the solution of linear equations // *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. – 1990. – Vol. 11. – P. 89–106.
- [156] GAY D. M. Solving interval linear equations // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1982. – Vol. 19, №4. – P. 858–870.
- [157] GAY D. M. Computing perturbation bounds for nonlinear algebraic equations // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1983. – Vol. 20. – P. 638–651.
- [158] GAY D. M. Interval least squares — a diagnostic tool // *Reliability in Computing*; Moore R. E., ed. – New York: Academic Press, 1988. – P. 183–205.
- [159] GREGORY R.T, KARNEY D.L. *A Collection of Matrices for Testing Computational Algorithms*. – New York: Wiley Interscience, John Wiley and Sons, 1969.

- [160] HADJIHASSAN S., WALTER E., PRONZATO L. Quality improvement via optimization of tolerance intervals during the design stage // *Applications of Interval Computations*; Kearfott R. B. and Kreinovich V., eds. – Dordrecht: Kluwer, 1996. – P. 91–131.
- [161] HANSEN E.R. On linear algebraic equations with interval coefficients // *Topics in Interval Analysis*; Hansen E., ed. – Oxford: Clarendon Press, 1969. – P. 35–46.
- [162] HANSEN E. R. Interval form of Newton's method // *Computing*. 1978. – Vol. 4, №3. – P. 187–201.
- [163] HANSEN E. R. Global optimization using interval analysis — the one-dimensional case // *Journal of Optimization Theory and Applications*. – 1979. – Vol. 29. – P. 331–344.
- [164] HANSEN E. R. Global optimization using interval analysis — the multidimensional case // *Numerische Mathematik*. – 1980. – Vol. 34, №3. – P. 247–270.
- [165] HANSEN E. Bounding the solution of interval linear equations // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1992. – Vol. 29, №5. – P. 1493–1503.
- [166] HANSEN E. *Global Optimization Using Interval Analysis*. – New York: Marcel Dekker, 1992.
- [167] HANSEN E. R., GREENBERG R. I. An interval Newton method // *Applied Mathematics and Computation*. – 1983. – Vol. 12. – P. 89–98.
- [168] HARTFIEL D.J. Concerning the solution set of $Ax = b$ where $P \leq A \leq Q$ and $p \leq b \leq q$ // *Numerische Mathematik*. – 1980. – Vol. 35, №3. – P. 355–359.
- [169] HEINDL G. A method for verified computing of inner and outer approximations of interval hull of a tolerance polyhedron // *Scientific Computing and Validated Numerics*; Alefeld G., Frommer A. and Lang B., eds. – Berlin: Akademie Verlag, 1996. – P. 207–213.
- [170] HEINDL G., KREINOVICH V., LAKEYEV A. Solving linear interval systems is NP-hard even if we exclude overflow and underflow // *Reliable Computing*. – 1998. – Vol. 4. – P. 383–388.
- [171] HYVÖNEN E., DE PASCALE S. Interval computations on the spreadsheets // *Applications of Interval Computations*; Kearfott R. B. and Kreinovich V., eds. – Dordrecht: Kluwer, 1995. – P. 169–209.
- [172] JANSSON C. A global minimization method using interval arithmetic // *Computer Arithmetic and Enclosure Methods*; Atanassova L. and Herzberger J., eds. – IMACS Annals of Computing and Applied Mathematics. – Amsterdam: Elsevier, 1992. – P. 259–267. – (*IMACS Annals of Computing and Applied Mathematics*).
- [173] JANSSON C. Calculation of exact bounds for the solution sets of linear interval systems // *Linear Algebra and its Applications*. – 1997. – Vol. 251. – P. 321–340.
- [174] JANSSON C. An NP-hardness result for nonlinear systems // *Reliable Computing*. – 1998. – Vol. 4. – P. 345–350.

- [175] JERRELL M. E. Applications of interval computations to regional economic input-output models // *Applications of Interval Computations*; Kearfott R. B. and Kreinovich V., eds. – Dordrecht: Kluwer, 1996. – P. 133–143.
- [176] KARMARKAR N. A new polynomial-time algorithm for linear programming // *Combinatorica*. – 1984. – Vol. 4. – P. 373–395.
- [177] KAUCHER E. Über metrische und algebraische Eigenschaften einiger beim numerischen Rechnen auftretender Räume. Dissertation. – Universität Karlsruhe: Karlsruhe, 1973.
- [178] KAUCHER E. Algebraische Erweiterungen der Intervallrechnung unter Erhaltung Ordnungs- und Verbandsstrukturen // *Computing Supplement*. – 1977. – Vol. 1. – P. 65–79.
- [179] KAUCHER E. Interval analysis in the extended interval space \mathbb{IR} // *Computing Supplement*. – 1980. – Vol. 2. – P. 33–49.
- [180] KEARFOTT R. B. Preconditioners for the interval Gauss-Seidel method // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1990. – Vol. 27, №3. – P. 804–822.
- [181] KEARFOTT R. B. *Rigorous Global Search: Continuous Problems*. – Dordrecht: Kluwer, 1996.
- [182] KELLING B. Geometrische Untersuchungen zur eigenschränkten Lösungsmenge Intervallgleichungssysteme // *ZAMM*. – 1994. – Bd. 74, №12. – P. 625–628.
- [183] KELLING B., OELSCHLÄGEL D. Zur Lösung von linearen Toleranzproblemen // *Wiss. Zeitschrift TH Leuna-Merseburg*. – 1991. – B. 33, №1. – P. 121–131.
- [184] KEENEY R. L., RAIFA H. *Decision with Multiple Objectives: Preferences and Value Trade-off*. – New York: John Wiley, 1976.
- [185] KLATTE P., ULLRICH CH. Complex sector arithmetic // *Computing*. – 1980. – Vol. 24. – P. 139–148.
- [186] KOLACZ H. On the optimality of inclusion algorithms // *Interval Mathematics 1985*; Nickel K., ed. – New York: Springer Verlag, 1986. – P. 67–80. – (*Lecture Notes in Computer Science*; vol. 212).
- [187] KOLEV L. V. *Interval Methods for Circuit Analysis*. – Singapore: World Scientific, 1993.
- [188] KRAWCZYK R. Newton-Algorithmen zur Bestimmung von Nullstellen mit Fehler-schranken // *Computing*. – 1969. – Vol. 4. – P. 187–201.
- [189] KREINOVICH V., LAKEYEV A. V., NOSKOV S. I. Optimal solution of interval linear systems is intractable (NP-hard) // *Interval Computations*. – 1993. – №1. – P. 6–14.
- [190] KREINOVICH V., LAKEYEV A. V., NOSKOV S. I. Approximate linear algebra is intractable // *Linear Algebra and its Applications*. – 1996. – Vol. 232. – P. 45–54.
- [191] KREINOVICH V., LAKEYEV A., ROHN J., KAHL P. *Computational Complexity and Feasibility of Data Processing and Interval Computations*. – Dordrecht: Kluwer, 1997.

- [192] KUPERMANN I. B. *Approximate Linear Algebraic Equations*. – New York: Van Nostrand, 1971.
- [193] KUPRIYANOVA L. Inner estimation of the united solution set of interval linear algebraic system // *Reliable Computing*. – 1995. – Vol. 1, №1. – P. 15–31.
- [194] LAKEYEV A. V. Linear algebraic equations in Kaucher arithmetic // *Reliable Computing, 1995, Supplement* (Extended Abstracts of APIC'95: International Workshop on Applications of Interval Computations, El Paso, TX, Febr. 23–25, 1995). – P. 130–133.
- [195] LAKEYEV A. V. On the computational complexity of the solution of linear systems with moduli // *Reliable Computing*. – 1996. – Vol. 2, №2. – P. 125–131.
- [196] LAKEYEV A. V. On existence and uniqueness of solutions of linear algebraic equations in Kaucher's interval arithmetic // *Developments in Reliable Computing*; Csendes T., ed. – Dordrecht: Kluwer, 1999. – P. 53–65.
- [197] LAVEUVE S. E. Definition einer Kahan-Arithmetic und ihre Implementierung // *Interval Mathematics*; Nickel K., ed. – Berlin: Springer Verlag, 1975. – P. 236–245. – (*Lecture Notes in Computer Science; vol. 29*).
- [198] LHOMME O. Consistency techniques for numeric CSPs // *IJCAI'93*. – Chambéry, France, August 1993. – P. 232–238.
- [199] MACKWORTH A. K. Consistency in network of relations // *Artificial Intelligence*. – 1977. – Vol. 8.. – P. 99–119.
- [200] MADSEN K., TOFT O. A parallel method for linear interval equations // *Interval Computations*. – 1994. – №3. – P. 81–105.
- [201] MARKOV S. M. Extended interval arithmetic involving infinite intervals // *Mathematica Balcanica. New Series*. – 1992. – Vol. 6, Fasc. 3. – P. 269–304.
- [202] MARKOV S., POPOVA E., ULLRICH CH. On the solution of linear algebraic equations involving interval coefficients // *Iterative methods in linear algebra II*; Margenov S., Vassilevski P., eds. – (*IMACS Series on computational and Applied Mathematics; vol. 3*). – 1996. – P. 216–225.
- [203] MAYER O. Algebraische und metrische Strukturen in der Intervallrechnung und einige Anwendungen // *Computing*. – 1970. – Vol. 5. – P. 144–162.
- [204] MAYER G. Enclosing the solutions of systems of linear equations by interval iterative processes // *Computing Supplement*. – 1988. – Vol. 6. – P. 47–58.
- [205] MAYER G. Old and new aspects for the interval Gaussian algorithm // *Computer Arithmetic, Scientific Computation and Mathematical Modelling*; Kaucher E., Markov S. M. and Mayer G., eds. – (*IMACS Annals on Computing and Applied Mathematics; vol. 12*). – Basel: Baltzer, 1991. – P. 329–349.
- [206] MAYER G., PIEPER L. A necessary and sufficient criterion to guarantee feasibility of the interval Gaussian algorithm for a class of matrices // *Applications of Mathematics*. – 1993. – Vol. 38, №3. – P. 205–220.

- [207] MAYER G., ROHN J. On the applicability of the interval Gaussian algorithm // *Reliable Computing*. – 1998. – Vol. 4, №3. – P. 205–222.
- [208] MOORE R.E. Automatic error analysis in digital computation // *Technical Report LMSD-48421, Lockheed Missiles and Space Division, Sunnyvale, 1959.*
- [209] MOORE R. E. *Interval Analysis*. – Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1966.
- [210] MOORE R. E. On computing the range of a rational function of n variables over a bounded region // *Computing*. –1976. – Vol. 16. – P. 1–15.
- [211] MOORE R. E. *Methods and Applications of Interval Analysis*. – SIAM, Philadelphia, 1979.
- [212] MOORE R. E. Interval methods for nonlinear systems // *Fundamentals of numerical computation (computer-oriented numerical analysis)*. *Computing Supplement 2*; Alefeld G., Grigorieff R. D., eds. – Wienn: Springer Verlag, 1980. – P. 113–120.
- [213] MOORE R. E., JONES S. T. Safe starting regions for iterative methods // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1977. – Vol. 14. – P. 1051–1065.
- [214] NEUMAIER A. New techniques for the analysis of linear interval equations // *Linear Algebra and its Applications*. – 1984. – Vol. 58. – P. 273–325.
- [215] NEUMAIER A. Linear interval equations // *Interval Mathematics 1985*; Nickel K., ed. – New York: Springer Verlag, 1986. – P. 109–120. – (*Lecture Notes in Computer Science; vol. 212*).
- [216] NEUMAIER A. Tolerance analysis with interval arithmetic // *Freiburger Intervall-Berichte*. – 1986. – №86/9. – S. 5–19.
- [217] NEUMAIER A. Overestimation in linear interval equations // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1987. – Vol. 24. – P. 207–214.
- [218] NEUMAIER A. Rigorous sensitivity analysis for parameter-dependent systems of equations // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. – 1989. – Vol. 144. – P. 16–25.
- [219] NEUMAIER A. *Interval Methods for Systems of Equations*. – Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [220] NEUMAIER A. On Shary's algebraic approach for linear interval equations // *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. – 2000. – Vol. 21. – P. 1156–1162. (PostScript-файл работы доступен на <http://www.mat.univie.ac.at/~neum/papers.html>).
- [221] NEUMAIER A. A simple derivation of Hansen-Bliek-Rohn-Ning-Kearfott enclosure for linear interval equations // *Reliable Computing*. – 1999. – Vol. 5, №2. – P. 131–136.
- [222] NICKEL K. Interval-Analysis // *The state of the art in numerical analysis: Proceedings of the Conference on the State of Art in Numerical Analysis, University of York, April 12th-15th, 1976*; Jacobs D., ed. – York: University of York, 1977. – P. 193–225.

- [223] NICKEL K. Die Überschätzung des Wertebereiches einer Funktion in der Intervallrechnung mit Anwendungen auf lineare Gleichungssysteme // *Computing*. – 1977. – Vol. 18. – P. 15–36.
- [224] NICKEL K. Die Auflösbarkeit linearer Kreisscheiben- und Intervall-Gleichungssystemen // *Linear Algebra and its Applications*. – 1982. – Vol. 44. – P. 19–40.
- [225] NICKEL K. Using interval methods for the numerical solution of ODE's // *ZAMM*. – 1986. – Bd. 66, №11. – P. 513–523.
- [226] NING S., KEARFOTT R. B. A comparison of some methods for solving linear interval equations // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1997. – Vol. 34, №4. – P. 1289–1305.
- [227] NUDING E. *Intervallrechnung und Wirklichkeit* // *Interval Mathematics*; Nickel K., ed. – Berlin: Springer Verlag, 1975. – P. 263–269. – (*Lecture Notes in Computer Science; vol. 29*).
- [228] NUDING E. Schrankentreue Algorithmen // *Beiträge zur Numerische Mathematik*. – 1983. – Vol. 11. – P. 115–137.
- [229] NUDING E. Ein einfacher Beweis der Satze von Oettli-Prager und J. Rohn // *Freiburger Intervall-Berichte*. – 1986. – №9/86. – S. 1–3.
- [230] NUDING E., WILHELM W. Über Gleichungen und über Lösungen // *ZAMM*. – 1972. – Bd. 52. – P. T188–T190.
- [231] OETTLI W. On the solution set of a linear system with inaccurate coefficients // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1965. – Vol. 2, №1. – P. 115–118.
- [232] OETTLI W., PRAGER W. Compatibility of approximate solution of linear equations with given error bounds for coefficients and right-hand sides // *Numerische Mathematik*. – 1964. – Vol. 6. – P. 405–409.
- [233] PETKOVIC M. S., MITROVIC Z. M., PETKOVIC, L. B. Arithmetic of circular rings // *Interval Mathematics 1985*; Nickel K., ed. – New York: Springer Verlag, 1986. – P. 133–142. – (*Lecture Notes in Computer Science; vol. 212*).
- [234] PETUNIN D., SEMENOV A. The use of multi-intervals in the UniCalc solver // *Scientific Computing and Validated Numerics*; Alefeld G., Frommer A. and Lang B., eds. – Berlin: Akademie Verlag, 1996. – P. 91–97.
- [235] POLJAK S., ROHN J. Checking robust nonsingularity is NP-hard // *Mathematics of Control, Signals & Systems*. – 1993. – Vol. 6. – P. 99–105.
- [236] POPOVA E. D. Algebraic solutions to a class of interval equations // *Journal of Universal Computer Science*. – 1998. – Vol. 4, №1. – P. 48–67.
- [237] POPOVA E. D. Generalized interval distributive relations and their applications // *MISC'99 – Workshop on Applications of Interval Analysis to Systems and Control, Girona, Spain, February 24–26, 1999*. – Girona: Universitat de Girona, 1999. – P. 13–23.

- [238] QUINGRONG L., ZHIYING J. The SOR method for solving linear interval equations // *Freiburger Intervall-Berichte*. – 1987. – №7/87. – S. 1–7.
- [239] RATSCHKE H. Teilbarkeitskriterien der Intervallarithmetik // *J. Reine Angew. Mathematik*. – 1972. – B. 252. – S. 128–138.
- [240] RATSCHKE H. Optimal approximations in interval analysis // *Interval Mathematics 1980*; Nickel K., ed. – New York: Academic Press, 1980. – P. 181–202.
- [241] RATSCHKE H. Inclusion functions and global optimization // *Mathematical Programming*. – 1985. – Vol. 33. – P. 300–317.
- [242] RATSCHKE H., ROKNE J. *Computer Methods for the Range of Functions*. – Chichester, New York: Ellis Horwood, Halsted Press, 1984.
- [243] RATSCHKE H., ROKNE J. *New Computer Methods for Global Optimization*. – Chichester, New York: Ellis Horwood, Halsted Press, 1988.
- [244] RATSCHKE H., SAUER W. Linear interval equations // *Computing*. 1982. – Vol. 28, №2. – P. 105–115.
- [245] RATZ D. *Automatische Ergebnisverifikation bei globalen Optimierungsproblemen. Ph.D. dissertation*. – Karlsruhe: Universität Karlsruhe, 1992.
- [246] RATZ D., CSENDES T. On the selection of subdivision directions in interval branch-and-bound methods for global optimization // *Journal of Global Optimization*. – 1995. – Vol. 7. – P. 183–207.
- [247] REX G., ROHN J. Sufficient conditions for regularity and singularity of interval matrices // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1999. – Vol. 20. – P. 437–445.
- [248] RIS F. N. *Interval Analysis and Applications to Linear Algebra. Ph.D. dissertation*. – Oxford: Oxford University, 1972.
- [249] ROHN J. Input-output planning with inexact data // *Freiburger Intervall-Berichte*. – 1978. – №9/78. – S. 1–16.
- [250] ROHN J. Input-output model with interval data // *Econometrica*. – 1980. – Vol. 48. – P. 767–769.
- [251] ROHN J. Duality in interval linear programming // *Interval Mathematics 1980*; Nickel K., ed. – New York: Academic Press, 1980. – P. 521–529.
- [252] ROHN J. Interval linear systems with prescribed column sums // *Linear Algebra and its Applications*. – 1981. – Vol. 39. – P. 143–148.
- [253] ROHN J. Inner solutions of linear interval systems // *Interval Mathematics 1985*; Nickel K., ed. – New York: Springer Verlag, 1986. – P. 157–158. – (*Lecture Notes on Computer Science; vol. 212*).
- [254] ROHN J. Testing regularity of interval matrices // *Freiburger Intervall-Berichte*. – 1986. – №4/86. – S. 33–37.

- [255] ROHN J. Inverse-positive interval matrices // *ZAMM*. – 1987. – Bd. 57, №5. – S. T492–T493.
- [256] ROHN J. Formulae for exact bounds on solutions of linear systems with rank one perturbations // *Freiburger Intervall-Berichte*. – 1987. – №6/87. – S. 1–20.
- [257] ROHN J. Systems of linear interval equations // *Linear Algebra and its Applications*. – 1989. – Vol. 126. – P. 39–78.
- [258] ROHN J. A two-sequence method for linear interval equations // *Computing*. – 1989. – Vol. 41, №1–2. – P. 137–140.
- [259] ROHN J. An asymptotic result for linear interval systems // *BIT*. – 1989. – Vol. 29, №2. – P. 372–374.
- [260] ROHN J. On singular matrices contained in an interval matrix // *Ekonomicko-Matematicky Obzor*. – 1989. – Vol. 25, №3. – S. 320–322.
- [261] ROHN J. A Farkas-type theorem for linear interval equations // *Computing*. – 1989. – Vol. 43. – P. 93–95.
- [262] ROHN J. On nonconvexity of the solution set of a system of linear interval equations // *BIT*. – 1990. – Vol. 30, №1. – P. 161–165.
- [263] ROHN J. Cheap and tight bounds: the recent result by E. Hansen can be made more efficient // *Interval Computations*. – 1993. – №4. – P. 13–21.
- [264] ROHN J. NP-hardness results for linear algebraic problems with interval data // *Topics in Validated Numerics*; Herzberger J., ed. – Amsterdam: North-Holland, 1994. – P. 463–471.
- [265] ROHN J. Personal communication. Würzburg, 1996.
- [266] ROHN J., KREINOVICH V. Computing exact componentwise bounds on solutions of linear system is NP-hard // *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. – 1995. – Vol. 16. – P. 415–420.
- [267] ROHN J., KRESLOVÁ J. Linear interval inequalities // *Linear and Multilinear Algebra*. – 1994. – Vol. 38. – P. 41–43.
- [268] RUMP S. M. Solving algebraic problems with high accuracy // *A New Approach to Scientific Computation*; Kulisch U. W. and Miranker W. L., eds. – New York: Academic Press, 1983. – P. 51–120.
- [269] RUMP S. M. Solution of linear and nonlinear algebraic problems with sharp guaranteed bounds // *Computing Supplement*. – 1984. – Vol. 5. – P. 147–168.
- [270] RUMP S. M. Verification methods for dense and sparse systems of equations // *Topics in Validated Numerics*; Herzberger J., ed. – Amsterdam: Elsevier, 1994. – P. 63–135.
- [271] RUMP S. M. The distance between regularity and strong regularity // *Scientific Computing and Validated Numerics*; Alefeld G., Frommer A. and Lang B., eds. – Berlin: Akademie Verlag, 1996. – P. 105–117.

- [272] RUMP S. M., KAUCHER E. Small bounds for the solution of systems of linear equations // *Computing Supplement*. – 1980. – Vol. 2. – P. 157–164.
- [273] SAATY T. L. *Analytic Hierarchy Process*. – New York: McGraw Hill, 1980.
- [274] SCHWANDT H. Iterative methods for systems of equations with interval coefficients and linear form // *Computing*. – 1987. – Vol. 38, №2. – P. 143–161.
- [275] SCHWANDT H. Cyclic reduction for tridiagonal systems of equations with interval coefficients on vector computer // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1989. – Vol. 26, №3. – P. 661–680.
- [276] SCHWEPPE F. C. *Uncertain Dynamic Systems*. – Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1973.
- [277] SHARAYA I. A. On maximal inner estimation of the solution sets of linear systems with interval parameters // *Reliable Computing*. – 2001. – Vol. 7, №5. – P. 409–424.
- [278] SHARY S. P. Optimal solution of interval linear algebraic systems. I // *Interval Computations*. – 1991. – Vol. 1, №2. – P. 7–30.
- [279] SHARY S. P. Solving interval linear algebraic systems optimally. I // *Advances in Modelling & Analysis, C*. – 1992. – Vol. 33, №4. – P. 1–28.
- [280] SHARY S. P. A new class of algorithms for optimal solution of interval linear systems // *Interval Computations*. – 1992. – №2(4). – P. 18–29.
- [281] SHARY S. P. On controlled solution set of interval algebraic systems // *Interval Computations*. – 1992. – №4(6). – P. 66–75.
- [282] SHARY S. P. Solving interval linear algebraic systems with nonnegative matrices // *Abstracts for An International Conference on Numerical Analysis with Automatic Result Verification, February 25 – March 1, 1993, Lafayette, Louisiana*. – Lafayette: Univ. of Southwestern Louisiana, 1993. – P. 97.
- [283] SHARY S. P. Solving interval linear systems with nonnegative matrices // *Abstracts of International Congress on Computer Systems and Applied Mathematics (CSAM-93), St. Petersburg, July 19–23, 1993*. – St. Petersburg, 1993. – P. 100.
- [284] SHARY S. P. Solving interval linear systems with nonnegative matrices // *Scientific Computations and Mathematical Modelling: Proceedings of the International Conference MMSC-93*; Markov S. M., ed. – Sofia: DATECS Publishing, 1993. – P. 179–182.
- [285] SHARY S. P. Algebraic approach to some interval problems, or One more application of the Kaucher arithmetic // *Abstracts of International Conference on Interval and Computer-Algebraic Methods in Science and Engineering. INTERVAL'94, March 7–10, 1994*. – St. Petersburg, 1994. – P. 212–216.
- [286] SHARY S. P. Solving the tolerance problem for interval linear systems // *Interval Computations*. – 1994. – №2. – P. 6–26.
- [287] SHARY S. P. Numerical computation of algebraic solutions to interval linear systems // *IMACS-GAMM International Symposium on Numerical Methods and Error Bounds, Universität Oldenburg, Germany, July 9–12, 1995. Extended abstracts*. – P. 30.

- [288] SHARY S. P. On optimal solution of interval linear equations // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1995. – Vol. 32, №2. – P. 610–630.
- [289] SHARY S. P. A new approach to the analysis of static systems under interval uncertainty // *IMACS-GAMM International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic and Validated Numerics (SCAN'95), September 26–29, 1995, Wuppertal, Germany. Extended Abstracts*. – Wuppertal: IMACS-GAMM, 1995. – P. 128–129.
- [290] SHARY S. P. Linear static systems under interval uncertainty: Algorithms to solve control and stabilization problems // *International Journal of Reliable Computing. Supplement. Extended Abstracts of APIC'95, International Workshop on Applications of Interval Computations*, El Paso, TX, 1995. – P. 181–184.
- [291] SHARY S. P. Solving the linear interval tolerance problem // *Mathematics and Computers in Simulation*. – 1995. – Vol. 39. – P. 53–85.
- [292] SHARY S. P. Algebraic approach to the interval linear static identification, tolerance and control problems, or One more application of Kaucher arithmetic // *Reliable Computing*. – 1996. – Vol. 2, №1. – P. 3–33.
- [293] SHARY S. P. Algebraic solutions to interval linear equations and their applications // *Numerical Methods and Error Bounds*; Alefeld G. and Herzberger J., eds. – Berlin: Akademie Verlag, 1996. – P. 224–233.
- [294] SHARY S. P. A new approach to the analysis of static systems under interval uncertainty // *Scientific Computing and Validated Numerics*; Alefeld G., Frommer A. and Lang B., eds. – Berlin: Akademie Verlag, 1996. – P. 118–132.
- [295] SHARY S. P. Algebraic approach in the “outer problem” for interval linear equations // *INTERVAL'96. International Conference on Interval Methods and Computer Aided Proofs in Science and Engineering*, Sep. 30 – Oct. 2, 1996, Würzburg, Germany. Extended Abstracts. – P. 102–103.
- [296] SHARY S. P. Algebraic approach to the analysis of linear static systems with interval uncertainty // *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. – 1996. – Vol. 11, №3. – P. 259–274.
- [297] SHARY S. P. Algebraic approach in the “outer problem” for interval linear equations // *Reliable Computing*. – 1997. – Vol. 3, №2. – P. 103–135.
- [298] SHARY S. P. On uniqueness of algebraic solutions to interval linear equations // *SCAN'97, GAMM/IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic and Validated Numerics*, September 10–12, 1997, Lyon, France. Extended Abstracts. – Lyon: IMACS-GAMM, 1997. – P. XI-12–XI-15.
- [299] SHARY S. P. Controllable solution sets to interval static systems // *Applied Mathematics and Computation*. – 1997. – Vol. 86, №2–3. – P. 185–196.
- [300] SHARY S. P. Outer estimation of generalized solution sets to interval linear systems. In *Abstracts of International conference on interval methods and their application in global optimization (INTERVAL'98)*, Nanjing, China, April 20–23, 1998. – P. 129–131.

- [301] SHARY S. P. Outer estimation of generalized solution sets to interval linear systems // *SCAN-98, IMACS/GAMM International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic and Validated Numerics, Budapest, September 22–25, 1998, Volume of Extended Abstracts*. – Budapest: IMACS-GAMM, 1998. – P. 159–160.
- [302] SHARY S. P. Interval Gauss-Seidel method for generalized solution sets to interval linear systems // *MISC'99 – Workshop on Applications of Interval Analysis to Systems and Control, Girona, Spain, February 24–26, 1999*. – Girona: Universitat de Girona, 1999. – P. 51–65.
- [303] SHARY S. P. Outer estimation of generalized solution sets to interval linear systems // *Developments in Reliable Computing*; Csendes T., ed. – Dordrecht: Kluwer, 1999. – P. 323–335.
- [304] SHARY S. P. Outer estimation of generalized solution sets to interval linear systems // *Reliable Computing*. – 1999. – Vol. 5. – P. 323–335.
- [305] SHARY S. P. Interval Gauss-Seidel method for generalized solution sets to interval linear systems // *Reliable Computing*. – 2001. – Vol. 7, №2. – P. 141–155.
- [306] SHOKIN YU. I. On interval problems, interval algorithms and their computational complexity // *Scientific Computing and Validated Numerics*; Alefeld G., Frommer A. and Lang B., eds. – Berlin: Akademie Verlag, 1996. – P. 314–328.
- [307] SIGLA/X GROUP. Modal intervals (Basic tutorial) // *MISC'99 – Workshop on Applications of Interval Analysis to Systems and Control. Girona, Spain, February 24–26, 1999*. – Girona: Universitat de Girona, 1999. – P. 139–207.
- [308] SKELBOE S. Computation of rational interval functions // *BIT*. – 1974. – Vol. 14. – P. 87–95.
- [309] SMAGINA YE. M. A new approach to the modal regulator synthesis for interval plant with scalar input // *Reliable Computing*. – 1997. – Vol. 3. – P. 401–410.
- [310] SUNAGA T. Theory of an interval algebra and its application to numerical analysis // *RAAG Memoirs*. – 1958. – Vol. 2. – P. 547–564.
- [311] SZULC T. Sufficient criteria for nonsingularity of interval matrices // *Freiburger Intervall-Berichte*. – 1985. – №2. – S. 29–33.
- [312] TOFT O. Sequential and parallel solution of linear interval equations // Eksamensprojekt: NI-E-92-04, Numerisk Institute, Danmarks Tekniske Hojskole. – Lyngby, 1992. – 98 p.
- [313] WALTER E., PRONZATO L. *Identification of Parametric Models from Experimental Data*. – Berlin-Heidelberg: Springer, 1997.
- [314] WARMUS M. Calculus of approximations // *Bull. Acad. Polon. Sci.* – 1956. – Vol. 4, №5. – P. 253–259.
- [315] WONGWISES P. Experimentelle Untersuchungen zur numerischen Auflösung von linearen Gleichungssystemen mit Fehlerfassung // *Interval Mathematics*; Nickel K., ed. – Berlin: Springer Verlag, 1975. – P. 316–325. – (*Lecture Notes on Computer Science; vol. 29*).

- [316] ЯКОВЛЕВ А. Г. Classification approach to programming of localizational (interval) computations // *Interval Computations*. – 1992. – №1(3). – P. 61–84.
- [317] ЗЮЗИН В. С. An interval arithmetic solution of a system of interval algebraic equations of the first order // *International Symposium on Computer Arithmetic, Scientific Computation and Mathematical Modelling, Albena, Bulgaria, September 23–28, 1990 (SCAN-90)*. – Sofia: Bulgarian Academy of Sciences, 1990. – P. 160–162.

Solving the linear interval tolerance problem^{8.1}

Sergey P. Shary

This paper deals with both mathematical and computational aspects of the linear static systems under interval uncertainty. For the interval linear system $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ with an interval matrix \mathbf{A} and an interval right-hand side vector \mathbf{b} , the *linear tolerance problem* is considered, which is a generalized *stabilization problem* for the linear static systems with disturbances. It requires inner evaluation of the *tolerable solution set* $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \mathbf{A})(Ax \in \mathbf{b})\}$ formed by all point vectors x such that the product Ax remains within \mathbf{b} for all possible $A \in \mathbf{A}$. Along with the simple incompatibility criterion, we develop comprehensive solvability theory for the linear tolerance problem that not only settles whether Ξ_{tol} is empty or not, but also enables modification of the problem to ensure its desired properties. To conclude, we advance several numerical methods of various accuracy and complexity for construction of an interval solution to the linear tolerance problem around a given center.

8.1 Introduction

This paper deals with both mathematical and computational aspects of the linear static systems under uncertainty. However, we shall not consider them in the context of probabilistic or fuzzy models as is fashionable among modern system analysts. The uncertainty our paper is devoted to is *interval*, that is, the bounds of possible variations of the parameters, both those prescribed by our will and those resulted from our ignorance, are the only information about the system we have at our disposal. If need be, one may take as a fact that the parameters of the system have *bounded* uncertainty (similar to what was done in the works [8, 33, 34]), but it is described by interval analysis tools in our case.

The natural mathematical model for deterministic linear static systems is the linear algebraic equation

$$Ax = b, \tag{8.1}$$

where A is an $m \times n$ -matrix and b is an m -vector. We shall restrict our attention to the real case and assume that we only know that the elements of (8.1) may independently vary within

^{8.1}Опубликовано в виде статьи S.P. SHARY, Solving the linear interval tolerance problem, *Mathematics and Computers in Simulation*, **39** (1995), pp. 53–85.

the intervals $[\underline{a}_{ij}; \bar{a}_{ij}] = \mathbf{a}_{ij}$ and $[\underline{b}_i; \bar{b}_i] = \mathbf{b}_i$ respectively. Put otherwise, we formally have the interval system of linear algebraic equations

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b} \quad (8.2)$$

with an interval $m \times n$ -matrix \mathbf{A} and an interval right-hand side m -vector \mathbf{b} . The solution set to (8.2) has been defined in a variety of ways: aside from the *united solution set*

$$\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(Ax = b) \}$$

commonly used in applications there exists, for example, the *controllable solution set*

$$\Xi_{ctrl}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall b \in \mathbf{b})(\exists A \in \mathbf{A})(Ax = b) \}$$

(see [26]) among many others. But the subject matter of our paper will be the *tolerable solution set* formed by all point vectors x such that the product Ax falls into \mathbf{b} for any $A \in \mathbf{A}$, i.e., the set

$$\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \Xi_{tol} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(Ax = b) \}, \quad (8.3)$$

sometimes written out as

$$\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \mathbf{A})(Ax \in \mathbf{b}) \}.$$

Neumaier in [10, 11] introduced the term *restricted solution set* for (8.3), and other authors followed; they denote the set $\Sigma_0(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Others speak of “inner solutions”, but we prefer the more adequate term — *tolerable* — that used in Russian works. The history of the set (8.3) and of some related problems was described comprehensively in the papers by Neumaier [10] and by Kelling and Oelschlägel [4].

To clarify what the tolerable solution set has to do with the mathematical modelling and the system analysis, it is very instructive to consider its practical interpretation. Let the “black box” be given with the input subjection vector $x \in \mathbb{R}^n$ and the output response vector $y \in \mathbb{R}^m$, where the input-output relationship is linear, i.e., $y = Ax$ with a real $m \times n$ -matrix $A = (a_{ij})$. Suppose that the parameters of the black box are not precisely known, but are given only by intervals \mathbf{a}_{ij} , $a_{ij} \in \mathbf{a}_{ij}$, which constitute the interval $m \times n$ -matrix $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$. For example, these parameters may vary in an unpredictable way (drift) within \mathbf{a}_{ij} , or the interval uncertainty may be intrinsic to the very description of the mathematical model.

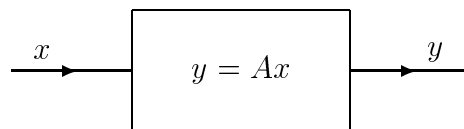


Figure 8.1: A model for interpretation of the tolerable solution set.

Also assume that the set of the black box output states is specified as an interval vector \mathbf{y} and we must ensure y to arrive at it no matter what the exact values of a_{ij} from \mathbf{a}_{ij} are. Our interest is in finding input signal \tilde{x} such that for any values of the parameters a_{ij} from \mathbf{a}_{ij} we altogether get the output response y within the required tolerances \mathbf{y} . The tolerable solution set $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{y})$ is just the set of all such \tilde{x} 's. That general scheme is known to be successfully

applied to specific problems in mathematical economics by Rohn [20, 21], in automatic control by Khlebalin [5, 6], Skybytsky and Yuping [32], Zakharov and Shokin [35] and so on.

The ideas developed above are straightforwardly transferred to the general case of interval nonlinear system

$$F(x, \mathbf{a}) = \mathbf{b}, \tag{8.4}$$

with $F(x, a) = (f_1(x, a), f_2(x, a), \dots, f_m(x, a))$ and \mathbf{a}, \mathbf{b} being interval vectors of the same dimension as a, b , respectively. Let us call

$$\Xi_{tol}(F; \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall a \in \mathbf{a})(\exists b \in \mathbf{b})(F(x, a) = b) \}$$

the *tolerable solution set* to the interval system (8.4). If for the considered “black box” the input-output relationship has the form $y = F(x, a)$, then the regimes that correspond to the points of $\Xi_{tol}(F; \mathbf{a}, \mathbf{y})$ (and no one else) ensure functioning of the device within the required output state corridor \mathbf{y} irrespective of the input subjection a from \mathbf{a} . In our work, however, we shall study only the linear case at length.

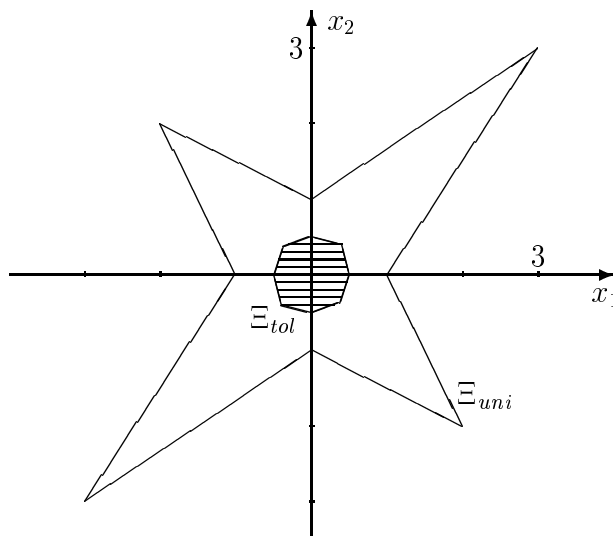


Figure 8.2: The solution sets to (8.5).

In general, the tolerable solution set to interval linear system is easily proved (for instance, in [4, 22, 23] or in §3 of our paper) to be a convex polyhedral set in \mathbb{R}^n . The Figure 2 depicts, for example, the set $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ for the system

$$\begin{pmatrix} [1; 2] & [-\frac{2}{3}; \frac{1}{2}] \\ [-\frac{2}{3}; \frac{1}{2}] & [1; 2] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-1; 1] \\ [-1; 1] \end{pmatrix}, \tag{8.5}$$

from the work [27]. Nevertheless, if the dimension of the interval system is large, then the direct description of its tolerable solution set becomes laborious and practically useless (its complexity is proportional to $m \cdot 2^n$). For this reason it is expedient to confine ourselves to finding some simple subsets $\mathcal{X} \subseteq \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, since for any $x \in \mathcal{X}$ the characteristic condition

$$(\forall A \in \mathbf{A})(Ax \in \mathbf{b})$$

remains valid. In other words, we change $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ by its inner approximation, usually formulating the problem to be solved in the following form:

$$\begin{aligned} &\text{Find an interval vector that is contained in the tolerable} \\ &\text{solution set (if nonempty) of the interval linear system.} \end{aligned} \tag{8.6}$$

This *linear tolerance problem* (LTP) is the subject of the present paper, and its principal practical significance lies in the fact that it is a generalized *stabilization problem* for the linear static systems with disturbances.

Sometimes (8.6) is referred to as *inner problem* for interval linear systems [2, 23, 25] and the points of the tolerable solution set as *inner solutions* [22, 32]. The main mathematical results of our work are new techniques for the investigation of solvability of the linear tolerance problem (Sections 3–5) as well as methods for inner approximation of the tolerable solution set (Sections 6–8). Previously, some results of the present paper have been published in the separated and abridged form in [23, 24, 25, 28].

8.2 Discussion of the problem statement

In this paper, intervals and other interval objects are denoted by boldface letters, for example, $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$, while non-interval (real) objects are not distinguished in any way. Also, we need the following notation:

\mathbb{IR} — the set of all real intervals $[\underline{x}; \bar{x}]$ on \mathbb{R} , $\underline{x} \leq \bar{x}$,

\mathbb{IR}^n — the set of n -dimensional interval vectors,

$\text{int } X$ — topological interior of the set X in \mathbb{R}^n with the standard topology,

$\bar{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{x}}$ — upper and lower bounds of the interval \mathbf{x} , respectively,

$\text{mid } \mathbf{x} = (\bar{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{x}})/2$ — mean value (midpoint) of the interval \mathbf{x} ,

$\text{rad } \mathbf{x} = (\bar{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}})/2$ — radius of the interval \mathbf{x} ,

$\text{vert } \mathbf{x}$ — vertex set of the interval (interval vector, matrix) \mathbf{x} ,

$|\mathbf{x}| = \max\{|\bar{\mathbf{x}}|, |\underline{\mathbf{x}}|\}$ — absolute value (magnitude) of the interval \mathbf{x} ,

$\langle \mathbf{x} \rangle = \begin{cases} \min\{|\bar{\mathbf{x}}|, |\underline{\mathbf{x}}|\}, & \text{if } 0 \notin \mathbf{x}, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ — magnitude of the interval \mathbf{x} or the least distance between points of \mathbf{x} and zero, in some sense the opposite of the absolute value.

If $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_i)_{i=1}^n$ is an interval vector, then all of the operations defined above are to be understood componentwise, so that $\text{rad } \mathbf{x}$, for instance, is the real vector $(\text{rad } \mathbf{x}_i)_{i=1}^n$.

The interval \mathbf{x} is said to be *symmetric* if $\text{mid } \mathbf{x} = 0$, that is, if $\bar{\mathbf{x}} = -\underline{\mathbf{x}}$.

Throughout the rest of this paper, all arithmetic operations with intervals and interval objects are those of classical interval arithmetic [1, 2, 3, 9, 11, 17]:

$$[\underline{x}; \bar{x}] + [\underline{y}; \bar{y}] = [\underline{x} + \underline{y}; \bar{x} + \bar{y}],$$

$$[\underline{x}; \bar{x}] - [\underline{y}; \bar{y}] = [\underline{x} - \bar{y}; \bar{x} - \underline{y}],$$

$$\begin{aligned}
 [\underline{x}; \bar{x}] \cdot [\underline{y}; \bar{y}] &= [\min\{\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}\}; \max\{\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}\}], \\
 [\underline{x}; \bar{x}]/[\underline{y}; \bar{y}] &= [\underline{x}; \bar{x}] \cdot [1/\bar{y}; 1/\underline{y}] \quad \text{for } [\underline{y}; \bar{y}] \neq 0.
 \end{aligned}$$

Besides, the endwise interval subtraction

$$[\underline{\mathbf{x}}; \bar{\mathbf{x}}] \ominus [\underline{\mathbf{y}}; \bar{\mathbf{y}}] = [\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}; \bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}]$$

will be necessary in our work. The result of this operation is an interval only if $\text{rad } \mathbf{x} \geq \text{rad } \mathbf{y}$.

Notice that the tolerable solution set may turn out to be empty even for “good” interval data, as, for instance, it does in the one-dimensional case $\mathbf{A} = [1; 2]$, $\mathbf{b} = [2; 3]$. The two-dimensional system

$$\begin{pmatrix} [1; 2] & [-1; 1] \\ [-1; 1] & [1; 2] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [1; 3] \\ [1; 3] \end{pmatrix} \tag{8.7}$$

gives a more complex example with the empty tolerable solution set. In such cases, we shall speak that the linear tolerance problem is *unsolvable* (incompatible), since then the initial problem statement (8.6) becomes empty. In our paper, much attention will be accordingly paid to development of the technique for detailed solvability examination and correction (Sections 3–5).

It is pertinent to note that the inclusion of a vector x to the tolerable solution set is equivalent to

$$\mathbf{A} \cdot x \subseteq \mathbf{b},$$

where “ \cdot ” means the standard interval matrix-vector multiplication, since $\{Ax \mid A \in \mathbf{A}\} = \mathbf{A} \cdot x$ [1, 11]. The equality

$$\{Ax \mid A \in \mathbf{A}, x \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\} = \mathbf{b}$$

may appear to be valid. This is not so, however, as the tolerance problem with the data $\mathbf{A} = [-1; 1]$, $\mathbf{b} = [0; 1]$ shows. Here, only zero may belong to $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, since otherwise, multiplying $y \neq 0$, $y \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ on $(-\text{sgn } y)$ from the interval $[-1; 1] = \mathbf{A}$, we would get a negative number $-|y| \notin [0; 1]$. Therefore,

$$\{Ax \mid A \in \mathbf{A}, x \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\} = 0 \neq [0; 1] = \mathbf{b}.$$

On its turn, if a set $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ has the property

$$\{Ax \mid A \in \mathbf{A}, x \in \mathcal{C}\} = \mathbf{b}, \tag{8.8}$$

this does not necessarily imply that $\mathcal{C} = \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. To illustrate, let us consider the one-dimensional example of the linear tolerance problem with $\mathbf{A} = \mathbf{b} = [-1; 1]$. Now $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = [-1; 1]$, but for each of intervals $[\kappa; 1]$ or $[-1; \kappa]$, $-1 \leq \kappa \leq 1$, (8.8) holds too. Hence, the property (8.8) does not entirely characterize the tolerable solution set of interval linear systems, but it is fairly simple to realize that $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ is the most inclusive of the sets \mathcal{C} satisfying

$$\{Ax \mid A \in \mathbf{A}, x \in \mathcal{C}\} \subseteq \mathbf{b}.$$

One of the classical interval analysis problem that has numerous and significant applications is known to be the *outer problem*, that is, the problem of outer component-wise estimation of the united solution set

$$\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(Ax = b)\},$$

the set of solutions to all point linear systems $Ax = b$ contained in (8.2) (see e.g. [1, 2, 9, 11, 27] and the extensive references there). Usually, it is formulated as follows:

Find an interval vector that contains the united
solution set of the interval linear system.

The inclusion

$$\begin{aligned}\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(Ax = b)\} \\ &\subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(Ax = b)\} = \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})\end{aligned}$$

is quite obvious and so, if the interval vectors \mathbf{U} and \mathbf{V} are solutions, respectively, to the linear tolerance problem and to the outer problem for the interval linear system, then

$$\mathbf{U} \subseteq \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \subseteq \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \subseteq \mathbf{V},$$

that is, each solution of the linear tolerance problem is contained in every solution of the outer problem. The Figure 2 demonstrates that the sets $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ and $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ may greatly differ in size and this especially telling for the corresponding interval solutions \mathbf{U} and \mathbf{V} .

In general, the tolerable solution set may be unbounded, but if the interval system is square, that is, $m = n$, and at least one point matrix $\tilde{A} \in \mathbf{A}$ is nonsingular, then $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ is a bounded set, since

$$\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \subseteq \{\tilde{A}^{-1}b \mid b \in \mathbf{b}\}.$$

In this case the solution process for the linear tolerance problem has a pictorial geometrical interpretation, as inscribing a rectangular box with the sides parallel to the coordinate axes in the convex polyhedron $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

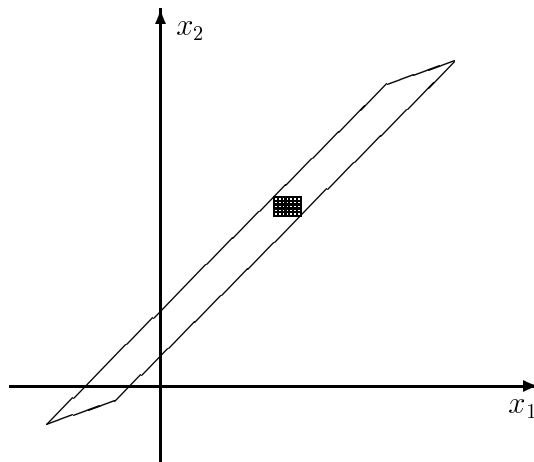


Figure 8.3: The inner estimation by interval vectors may turn out bad.

Although throughout this paper we consider the inner approximation of the tolerable solution set by interval vectors, that is, by rectangular boxes whose sides are parallel to the coordinate axes, one should be fully aware of possible advantages and disadvantages of such a way of estimation. It may turn out bad (see Fig. 3) in the sense that the ratio of volumes of $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ and of its best inner interval approximations can be arbitrary large (for ill-conditioned \mathbf{A}).

It is amply clear that

$$\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \bigcap_{A \in \mathbf{A}} \Xi_{tol}(A, \mathbf{b}), \tag{8.9}$$

and

$$\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \bigcap_{A \in \mathbf{A}} \{ A^{-1}b \mid b \in \mathbf{b} \}, \tag{8.10}$$

if \mathbf{A} is square and nonsingular, that is, all point matrices $A \in \mathbf{A}$ are nonsingular. Though the definition of the tolerable solution set requires the product Ax to get into the right-hand side vector \mathbf{b} for *every* $A \in \mathbf{A}$, we show that in the linear case it is sufficient for the inclusion $Ax \in \mathbf{b}$ to be fulfilled for each A from a *finite* subset of matrices within \mathbf{A} . Namely, there holds

Lemma 1. $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \text{vert } \mathbf{A})(Ax \in \mathbf{b}) \}$.

This implies in particular that

$$\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \bigcap_{A \in \text{vert } \mathbf{A}} \Xi_{tol}(A, \mathbf{b}), \tag{8.11}$$

and if \mathbf{A} is square and all point matrices $A \in \text{vert } \mathbf{A}$ are nonsingular (and not necessarily all $A \in \mathbf{A}$),

$$\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \bigcap_{A \in \text{vert } \mathbf{A}} \{ A^{-1}b \mid b \in \mathbf{b} \},$$

that is, we substantially refine the representations (8.9) and (8.10).

Proof of the Lemma actually boils down to the verification of whether

$$\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \supseteq \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \text{vert } \mathbf{A})(Ax \in \mathbf{b}) \},$$

since the inverse inclusion is obvious.

Suppose some vector $x \in \mathbb{R}^n$ satisfies

$$Ax \in \mathbf{b}$$

for all $A \in \text{vert } \mathbf{A}$. Let E be a matrix from \mathbf{A} . According to the definition of $\text{vert } \mathbf{A}$, there exist coefficients $\lambda_A \geq 0$, with their number equal to 2^{mn} , such that

$$\sum_{A \in \text{vert } \mathbf{A}} \lambda_A = 1 \quad \text{and} \quad E = \sum_{A \in \text{vert } \mathbf{A}} \lambda_A A,$$

or, put otherwise, E is represented as a convex combination of the extreme matrices from \mathbf{A} . Then

$$Ex = \left(\sum_{A \in \text{vert } \mathbf{A}} \lambda_A A \right) \cdot x = \sum_{A \in \text{vert } \mathbf{A}} \lambda_A Ax. \tag{8.12}$$

But all $Ax \in \mathbf{b}$ in virtue of the statement of the Lemma. Therefore, their convex combination, such as the sum (8.12) is, also belongs to the convex set \mathbf{b} . ■

In this work, we shall follow the approach to the linear tolerance problem that may be called “center”: first one finds a point of the interior $\text{int } \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ — the “center” — and then, if succeeded, an interval solution is constructed around it. There exists the other, “algebraic”,

approach to the linear tolerance problem, first formulated by Zyuzin [36] (though in the very vague form). Its essence is the change of the original linear tolerance problem for the problem of finding an algebraic interval solution to the interval system, that is, the interval vector \mathbf{x}_a such that its substitution into the system (8.2) and execution of all interval arithmetic operations results to the valid equality $\mathbf{A}\mathbf{x}_a = \mathbf{b}$. Then, due to inclusion monotonicity of the interval vector-matrix operations [1, 11], there holds

$$\mathbf{A}x \subseteq \mathbf{A}\mathbf{x}_a = \mathbf{b}$$

for any $x \in \mathbf{x}_a$, and so $\mathbf{x}_a \subseteq \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. The linear tolerance problem thus reduces to a purely algebraic one: solve a system of equations in the interval space $\mathbb{I}\mathbb{R}^n$. This is a very attractive circumstance, notwithstanding one can not perform complete solvability examination for the linear tolerance problem using the algebraic approach (see the next Section). The numerical procedures initially proposed to implement the algebraic approach in [35, 36, 37] were not sufficiently elaborated, but recently Shary [29, 30] has advanced very efficient computational algorithm based on imbedding of the equation into Kaucher extended interval arithmetic and further application of *subdifferential Newton method*. It is intended primarily for quick calculation of the solutions to (8.6) when its “good” solvability is given *a priori* (in real-time devices, for example).

8.3 Quick examination of solvability

The results concerning solvability of the linear tolerance problem have been appearing long ago in the publications on the subject. Rohn turned to the linear tolerance problem in [20, 21] when studying linear economic input-output models (the interval Leontieff-type equation). In those his works, explicit formulae are written out that enable to examine solvability of the linear tolerance problem, but for a special type of the interval matrix \mathbf{A} and nonnegative \mathbf{b} . In the work by Khlebalin [5] as well as in [10,23], the following simple heuristic LTP solvability test was proposed: the solution \tilde{x} of the “middle” point system

$$\text{mid } \mathbf{A} \cdot x = \text{mid } \mathbf{b}$$

is taken as the most probable representative of the tolerable solution set, and if $\mathbf{A}\tilde{x} \not\subseteq \mathbf{b}$ we infer “practical unsolvability” of the linear tolerance problem, though, strictly speaking, no definite conclusion may be done in this case. This criterion is easily seen to work only when the matrix \mathbf{A} is “sufficiently narrow” as compared with the right-hand side vector \mathbf{b} and is not able to distinguish boundary situations. The examples below demonstrating its fault were first presented by the author in [25].

Let $\mathbf{A} = [-1; 2]$, $\mathbf{b} = [-2; 6]$. Then $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = [-1; 2]$, but the solution to the middle system is 3 and it does not belong to the tolerable solution set. The two-dimensional counterexample is very interesting, with the data

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & [1; 2] \\ [1; 2] & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [5; 7] \\ [7; 9] \end{pmatrix}.$$

Here $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ consists of the single point $(1, 2)^\top$ while the solution of the “middle system” is $(\frac{8}{9}, \frac{20}{9})^\top$. The feature of this example is that the matrix of the problem is strictly positive and contains only nonsingular point matrices.

In algebraic approach to the linear tolerance problem developed in [35, 36], the conclusion on whether $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ is empty or not is taken while constructing an algebraic interval solution to the interval system. Sometimes this enables to recognize solvability of problems for which the “middle system” test fails. Unfortunately, the algebraic interval solution does not need to exist even when the linear tolerance problem for the original interval system is compatible. It is illustrated by that same one-dimensional example with $\mathbf{A} = [-1; 2]$, $\mathbf{b} = [-2; 6]$. The algebraic interval solution of the equation $[-1; 2] \cdot x = [-2; 6]$ does not exist, but $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = [-1; 2] \neq \emptyset$.

As we have already mentioned, the tolerable solution set is a convex polyhedral set in \mathbb{R}^n , the equations of bounding hyperplanes being straightforwardly written out explicitly. Hence, the set $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ may be represented as the set of all feasible solutions of a linear programming problem, and the question of whether it is empty or not (that is, solvability of LTP) can be resolved through applying the initial stage of the standard simplex-algorithm (entering into the basis). The corresponding linear program was first presented by Rohn in [22]:

Theorem 1. (J. Rohn) A point x belongs to the tolerable solution set $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ if and only if $x = x' - x''$, where x' and x'' form a solution to the system of linear inequalities

$$\begin{cases} \overline{\mathbf{A}}x' - \underline{\mathbf{A}}x'' \leq \overline{\mathbf{b}}, \\ -\underline{\mathbf{A}}x' + \overline{\mathbf{A}}x'' \leq -\underline{\mathbf{b}}, \\ x', x'' \geq 0. \end{cases} \quad (8.13)$$

Proof. Notice that

$$\mathbf{A}x = [(\text{mid } \mathbf{A})x - (\text{rad } \mathbf{A})|x|, (\text{mid } \mathbf{A})x + (\text{rad } \mathbf{A})|x|],$$

so as the membership $x \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ implies

$$\underline{\mathbf{b}} \leq (\text{mid } \mathbf{A})x - (\text{rad } \mathbf{A})|x| \quad \text{and} \quad (\text{mid } \mathbf{A})x + (\text{rad } \mathbf{A})|x| \leq \overline{\mathbf{b}}.$$

Substituting $x = x^+ - x^-$ and $|x| = x^+ + x^-$, we can see that the vectors $x' = x^+$ and $x'' = x^-$ satisfy (8.13).

Conversly, let some x', x'' solve the system (8.13). Define a vector $d \in \mathbb{R}^n$ by $d_i = \min\{x'_i, x''_i\}$ for every $i = 1, 2, \dots, n$. Then $d \geq 0$ and for $x = x' - x''$ we have $x^+ = x' - d$, $x^- = x'' - d$. Hence,

$$(\text{mid } \mathbf{A})x + (\text{rad } \mathbf{A})|x| = \overline{\mathbf{A}}x' - \underline{\mathbf{A}}x'' - 2(\text{rad } \mathbf{A})d \leq \overline{\mathbf{b}}.$$

Similarly,

$$(\text{mid } \mathbf{A})x - (\text{rad } \mathbf{A})|x| \geq \underline{\mathbf{b}},$$

and overall

$$[(\text{mid } \mathbf{A})x - (\text{rad } \mathbf{A})|x|, (\text{mid } \mathbf{A})x + (\text{rad } \mathbf{A})|x|] \subseteq \mathbf{b},$$

that is, $x \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. ■

Afterward, Khlebalin [6] came to the similar results, having reduced inscribing the maximal perimeter hyperbar included in $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ to the solution of a full linear programming problem.

We shall conduct comprehensive investigation of solvability of the linear tolerance problem and of some other related questions in the next sections, using a special “identifying functional”

technique. At the same time, that approach, though the most informative, requires much computational labor. The aim of this section is to give a simple sufficient unsolvability criterion for the linear tolerance problem, based on comparison of the relative narrowness of elements of its interval matrix and right-hand side vector. It is intended for the preliminary quick examination of the linear tolerance problem under solution.

First, note that if the i -th row of \mathbf{A} contains only zero elements, it is necessary that $\mathbf{b}_i \ni 0$ for the tolerable solution set to be nonempty. If this condition holds, then the property of $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ being empty or nonempty depends upon the other, not the i -th, rows of \mathbf{A} and components of \mathbf{b} . Thus, without loss of generality, we may assume in the rest of this paper that \mathbf{A} does not have zero rows.

To characterize “relative narrowness” of nonzero intervals, Ratschek introduced in [16] the functional

$$\chi(\mathbf{x}) = \begin{cases} \underline{\mathbf{x}}/\overline{\mathbf{x}}, & \text{if } |\underline{\mathbf{x}}| \leq |\overline{\mathbf{x}}|, \\ \overline{\mathbf{x}}/\underline{\mathbf{x}}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Clearly, $-1 \leq \chi(\mathbf{x}) \leq 1$, and $\chi(\mathbf{x}) = 1$ if and only if $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$. Moreover, it is proved in [16] that

$$\chi(\mathbf{x}) = \chi(\mathbf{y}) \text{ if and only if } \mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0, \quad (8.14)$$

$$\text{if } \mathbf{x} + \mathbf{y} \neq 0, \text{ then } \chi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq \max\{\chi(\mathbf{x}), \chi(\mathbf{y})\}, \quad (8.15)$$

$$\text{if } \mathbf{x} \supseteq \mathbf{y} \text{ and } \chi(\mathbf{y}) \geq 0, \text{ then } \chi(\mathbf{x}) \leq \chi(\mathbf{y}). \quad (8.16)$$

Now we are able to formulate and to prove the

Theorem 2. Let the interval $m \times n$ -matrix \mathbf{A} and the interval m -vector \mathbf{b} be such that for some $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ the following conditions hold:

- (i) $0 \notin \mathbf{b}_k$,
- (ii) $\max\{\chi(\mathbf{a}_{kj}) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{kj} \neq 0\} < \chi(\mathbf{b}_k)$.

Then the tolerable solution set $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ is empty.

For example, using this criterion one can verify that the one-dimensional system with $\mathbf{A} = [1; 2]$, $\mathbf{b} = [2; 3]$ considered in the beginning of the Section 2 has empty tolerable solution set.

Proof of the Theorem [24] will be conducted *ad absurdum* employing a technique similar to that developed in [18]. Let us assume that the tolerance problem nonetheless has a solution $t \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$, that is, $\mathbf{A}t \subseteq \mathbf{b}$, the condition (i) making it impossible for the interval $(\mathbf{A}t)_k$ to equal zero. Then the following inequalities are true:

$$\begin{aligned} \chi((\mathbf{A}t)_k) &= \chi\left(\sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{kj}t_j\right) \\ &\leq \max\{\chi(\mathbf{a}_{kj}t_j) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{kj}t_j \neq 0\} && \text{by (8.15)} \\ &= \max\{\chi(\mathbf{a}_{kj}) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{kj}t_j \neq 0\} && \text{by (8.14)} \\ &\leq \max\{\chi(\mathbf{a}_{kj}) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{kj} \neq 0\}. \end{aligned}$$

We have found

$$\chi((\mathbf{A}t)_k) \leq \max\{ \chi(\mathbf{a}_{kj}) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{kj} \neq 0 \}. \quad (8.17)$$

On the other hand, by virtue of our assumption, $(\mathbf{A}t)_k \subseteq \mathbf{b}_k$ which because of (8.16) implies

$$\chi((\mathbf{A}t)_k) \geq \chi(\mathbf{b}_k).$$

Combining this with (8.17) now gives

$$\max\{ \chi(\mathbf{a}_{kj}) \mid 1 \leq j \leq n, \mathbf{a}_{kj} \neq 0 \} \geq \chi(\mathbf{b}_k)$$

which is contrary to (ii). \blacksquare

Importance of all the conditions of Theorem 8.3 may be exhibited on the one-dimensional example with $\mathbf{A} = [-1; 2]$, $\mathbf{b} = [-2; 6]$ mentioned above. Here $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = [-1; 2] \neq \emptyset$, though $\chi(\mathbf{A}) = -\frac{1}{2} < -\frac{1}{3} = \chi(\mathbf{b})$. The more profound explanation is that the property (8.16) of the functional χ does not hold for intervals containing zero in their interiors:

$$[-1; 1] \subseteq [-1; 2] \subseteq [-2; 2], \text{ but } \chi([-1; 1]) = \chi([-2; 2]) = -1, \chi([-1; 2]) = -\frac{1}{2}.$$

At the same time, if the conditions of Theorem 8.3 fail, this does not necessarily mean compatibility of the linear tolerance problem. For instance, (ii) is not true for the system (8.7), but even so its tolerable solution set is empty.

If one concludes from Theorem 8.3 that some LTP is incompatible, then

$$\Omega = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \max_{1 \leq j \leq n} \chi(\mathbf{a}_{ij}) - \chi(\mathbf{b}_i) \right\} \leq 0,$$

and this value to some extent characterizes the degree of unsolvability of the tolerance problem: it is less, the farther problem from solvable, and vice versa. Besides, the indices $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ for which the condition (ii) of Theorem 8.3 fails point to those rows of the matrix \mathbf{A} and the respective components of \mathbf{b} that make the dominant contribution to the incompatibility of the given LTP. To lessen its deflection from a solvable one (to approach to solvability), one should either narrow the widest elements of these rows of the matrix \mathbf{A} , that is, to increase $\max_{1 \leq j \leq n} \chi(\mathbf{a}_{kj})$, or to widen the right-hand side, that is, to decrease $\chi(\mathbf{b}_k)$.

8.4 Detailed examination of solvability

The basis of the solvability theory developed below for the linear tolerance problem is a new analytical characterization of the tolerable solution set. Along this lines, the most important result was obtained by Rohn who had shown in [22] that $x \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ is equivalent to

$$| \text{mid } \mathbf{A} \cdot x - \text{mid } \mathbf{b} | \leq \text{rad } \mathbf{b} - \text{rad } \mathbf{A} \cdot |x|$$

(analogue of Oettli-Prager criterion for the united solution set [11]). In [13], Nuding gave the other proof of this statement. But the starting point of our considerations is

Lemma 2. Let an interval $m \times n$ -matrix \mathbf{A} and an interval right-hand side m -vector \mathbf{b} be given, so the expression

$$\text{Tol}(x) = \text{Tol}(x; \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right\}$$

defines a functional $\text{Tol} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Then the inclusion $x \in \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ is equivalent to $\text{Tol}(x; \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0$, i.e., the tolerable solution set of the relevant interval system is the Lebesgue set $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{Tol}(x; \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0\}$ of the functional Tol .

Proof. As we have previously stated, $x \in \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ holds iff $\mathbf{A}x \subseteq \mathbf{b}$. We rewrite the latter in the following form

$$\text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \subseteq [-\text{rad } \mathbf{b}_i; \text{rad } \mathbf{b}_i], \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

which is equivalent to

$$\left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \leq \text{rad } \mathbf{b}_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Therefore, x actually belongs to $\Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ if and only if

$$\text{Tol}(x; \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right\} \geq 0.$$

■

Notice that the functional $\text{Tol}(x; \mathbf{A}, \mathbf{b})$ is continuous (even Lipschitz-continuous) on all of its arguments.

Lemma 3. The functional $\text{Tol}(x)$ is concave.

Proof. The functional $\text{Tol}(x)$ is the lower envelope of the functionals

$$\xi_i(x) = \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right|, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

and we need only to establish the concavity of each $\xi_i(x)$.

Let $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in [0; 1]$. The subdistributivity of the interval arithmetic [1, 2, 9, 11] then implies

$$\begin{aligned} \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} (\lambda x_j + (1-\lambda)y_j) \\ \subseteq \lambda \left(\text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right) + (1-\lambda) \left(\text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} y_j \right). \end{aligned}$$

The magnitude $|\cdot|$ is isotonic with respect to the inclusion ordering of intervals and the standard linear order on \mathbb{R} [11]. Hence,

$$\begin{aligned} \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} (\lambda x_j + (1-\lambda)y_j) \right| \\ \leq \left| \lambda \left(\text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right) + (1-\lambda) \left(\text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} y_j \right) \right| \\ \leq \lambda \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| + (1-\lambda) \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} y_j \right|, \end{aligned}$$

and the assertion of the Lemma follows. ■

Thus, the ordinate set

$$\text{hyp Tol} = \{ (x, z) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}, \text{Tol}(x) \leq z \}$$

of the map $\text{Tol} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ is a convex set. We shall show that hyp Tol is the intersection of a finite number of half-spaces of \mathbb{R}^{n+1} , i.e., it is a *convex polyhedral set* according to the terminology by Rockafellar [19]. Indeed, expressing the absolute value in terms of maximum, we get for each $i = 1, 2, \dots, m$

$$\begin{aligned} \text{rad } \mathbf{b}_i &= \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \\ &= \text{rad } \mathbf{b}_i - \max_{\hat{a}_{ij}} \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \hat{a}_{ij} x_j \right| \\ &= \text{rad } \mathbf{b}_i - \max_{\hat{a}_{ij}} \left\{ \max \left\{ \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \hat{a}_{ij} x_j, \sum_{j=1}^n \hat{a}_{ij} x_j - \text{mid } \mathbf{b}_i \right\} \right\} \\ &= \min_{\hat{a}_{ij}} \left\{ \min \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \text{mid } \mathbf{b}_i + \sum_{j=1}^n \hat{a}_{ij} x_j, \text{rad } \mathbf{b}_i + \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \hat{a}_{ij} x_j \right\} \right\}, \end{aligned}$$

where the n -tuple $(\hat{a}_{i1}, \hat{a}_{i2}, \dots, \hat{a}_{in})$ runs over the finite set $\text{vert}(\mathbf{a}_{i1}, \mathbf{a}_{i2}, \dots, \mathbf{a}_{in})$, that is, over all vertices of the i -th row of the interval matrix \mathbf{A} . Owing to this, the functional Tol is the lower envelope of at most $m \cdot 2^{n+1}$ affine functionals of the form

$$\text{rad } \mathbf{b}_i \pm \left(\text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \hat{a}_{ij} x_j \right),$$

$i = 1, 2, \dots, m$, and the set hyp Tol is intersection of these functionals' ordinate sets.

As a consequence we get the following well known result: *tolerable solution set is a convex polyhedral set.*

Lemma 4. The functional $\text{Tol}(x)$ attains a finite maximum on all of \mathbb{R}^n .

Proof. Being a convex polyhedral set, the ordinate set hyp Tol is the convex hull of a finite set of points (c_k, γ_k) , $k = 1, 2, \dots, p$, and directions (c_k, γ_k) , $k = p + 1, \dots, q$, of \mathbb{R}^{n+1} (excluding the direction $(0, \dots, 0, 1)$ since $\text{Tol}(x)$ is defined everywhere) [19]. More precisely,

$$\text{hyp Tol} = \left\{ \sum_{k=1}^q \lambda_k (c_k, \gamma_k) \mid c_k \in \mathbb{R}^n, \gamma_k \in \mathbb{R}, \lambda_k \geq 0, \sum_{k=1}^p \lambda_k = 1 \right\}.$$

Inasmuch as $\text{Tol}(x) \leq \min_{1 \leq i \leq m} \text{rad } \mathbf{b}_i$, we must conclude that $\gamma_k \leq 0$, $k = p + 1, \dots, q$, since otherwise the functional Tol would be unbounded from above. For this reason,

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x) = \max \{ z \mid (x, z) \in \text{hyp Tol}, x \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R} \}$$

$$\begin{aligned}
&= \max \left\{ \sum_{k=1}^q \lambda_k \gamma_k \mid \lambda_k \geq 0, \sum_{k=1}^p \lambda_k = 1 \right\} \\
&= \max \left\{ \sum_{k=1}^p \lambda_k \gamma_k \mid \lambda_k \geq 0, \sum_{k=1}^p \lambda_k = 1 \right\} \\
&= \max_{1 \leq k \leq p} \gamma_k.
\end{aligned}$$

The sought-for maximum thus coincides with that over a finite number of the functional's values, and $\max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x)$ is attainable together with all γ_k , $k = 1, 2, \dots, p$. ■

Lemma 5. If the interval matrix \mathbf{A} does not have zero rows, then $t \in \text{int } \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ implies $\text{Tol}(t; \mathbf{A}, \mathbf{b}) > 0$.

Proof. Let $\Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$ and $\max \text{Tol}(x)$ is reached at some point $\tau \in \Xi_{\text{tol}}$. If $t \in \text{int } \Xi_{\text{tol}}$, then t is an interior point of a segment $[\tau; y] \subset \Xi_{\text{tol}}$, i.e. $t = \lambda\tau + (1 - \lambda)y$ for some $\lambda \in (0; 1)$, $y \in \Xi_{\text{tol}}$. Therefore

$$\text{Tol}(t) \geq \lambda \text{Tol}(\tau) + (1 - \lambda) \text{Tol}(y),$$

because the functional Tol is concave.

Suppose $\text{Tol}(t) = 0$. Then the above inequality holds only when $\text{Tol}(\tau) = \text{Tol}(y) = 0$ and the functional Tol must equal zero on the entire set $\Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Furthermore, let $\mathbb{R}^n = \bigcup_{1 \leq i \leq m} \mathcal{O}_i$ with

$$\mathcal{O}_i = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \text{Tol}(x) = \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right\}.$$

It is fairly simple to see that

$$\Xi_{\text{tol}} = \bigcup_{1 \leq i \leq m} (\Xi_{\text{tol}} \cap \mathcal{O}_i),$$

all the sets $\Xi_{\text{tol}} \cap \mathcal{O}_i$, $i = 1, 2, \dots, m$, being closed. Hence, $\text{int } (\Xi_{\text{tol}} \cap \mathcal{O}_i) \neq \emptyset$ for at least one $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ and we have

$$\text{rad } \mathbf{b}_k - \left| \text{mid } \mathbf{b}_k - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{kj} x_j \right| = 0 = \text{const}$$

for all $x \in \text{int } (\Xi_{\text{tol}} \cap \mathcal{O}_k)$. The latter may occur only when all $\mathbf{a}_{k1}, \dots, \mathbf{a}_{kn}$ are zeros, which contradicts the assertion of the Lemma. ■

Lemma 6. If $\text{Tol}(t; \mathbf{A}, \mathbf{b}) > 0$, then $t \in \text{int } \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$.

Proof. The map $\text{Tol} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ is continuous, so the set $Y = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \text{Tol}(y) > 0\}$ is open. Also, it is nonempty — $t \in Y \subseteq \Xi_{\text{tol}}$ — and $Y \subseteq \text{int } \Xi_{\text{tol}}$. Hence, $x \in \text{int } \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$. ■

To summarize, we come to the following technique to investigate solvability of the linear tolerance problem, i.e., to the criterion for the tolerable solution set to be nonempty:

Solve the unconstrained maximization problem for the concave functional

$$\text{Tol}(x; \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right\}.$$

Let $T = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x; \mathbf{A}, \mathbf{b})$ and let T be reached at a point τ . We have

- if $T \geq 0$, then $\tau \in \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$, i.e., the linear tolerance problem is compatible, and if $T > 0$, then $\tau \in \text{int } \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$;
- if $T < 0$, then $\Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \emptyset$, i.e., the linear tolerance problem is incompatible.

It is worth noting that Lemmas 1–4 as well as the above solvability criterion would remain valid if the functional Tol was defined by the expression

$$\min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \zeta_i \left(\text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right) \right\},$$

where ζ_i , $i=1, 2, \dots, m$, are positive reals. Below are some examples in which such functionals naturally come into existence and then are employed fruitfully.

Maximization of nonsmooth concave functions has been much studied during the last few decades. A good many efficient numerical methods have been proposed to solve this problem (see [7, 31] et al) and this is reason to hope that the solvability criterion developed above is quite practical.

8.5 Correction of the linear tolerance problem

Imagine solving an actual practical problem. Usually, the effort does not terminate even after we reach the conclusion that the problem has no solutions (unsolvable). A client is very likely to be interested in an information about

how unsolvable the problem is,

how one must change the input data to make the problem solvable,
and so on.

Alternately, if the original problem proves to be solvable, then, frequently, the region of variations of input data within which the problem remains solvable is to be outlined. We are able to give quite expanded answers to some of these questions.

If \mathbf{A} and mid \mathbf{b} are unchanged, increasing the radii of all the components of \mathbf{b} by the same value K is easily seen to lead to adding the constant K to the functional $\text{Tol}(x)$. Therefore,

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x; \mathbf{A}, \mathbf{b} + K\mathbf{e}) = K + \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x; \mathbf{A}, \mathbf{b}),$$

where $\mathbf{e} = ([-1; 1], \dots, [-1; 1])^\top$. If the linear tolerance problem is unsolvable and

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x; \mathbf{A}, \mathbf{b}) = T < 0,$$

we can make it solvable with the same matrix \mathbf{A} through widening the right-hand side vector by $K\mathbf{e}$, $K \geq 0$, and the points $\tau \in \text{Arg max Tol}(x; \mathbf{A}, \mathbf{b})$ will certainly belong to the nonempty set $\Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b} + K\mathbf{e})$. Conversely, if

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x; \mathbf{A}, \mathbf{b}) = T \geq 0,$$

that is, the linear tolerance problem is solvable, it will remain so even after we decrease the radii of all right-hand side components by K , $K \leq T$.

Sometimes, such uniform widening of all the components of \mathbf{b} may prove unacceptable in practice. So, let us assume that a vector $v = (v_1, v_2, \dots, v_m)$, $v_i \geq 0$, is given such that the increase of the width of \mathbf{b}_i is to be proportional to v_i . Now, calculate

$$T_v = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}_v(x; \mathbf{A}, \mathbf{b}),$$

where

$$\text{Tol}_v(x) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ v_i^{-1} \left(\text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right) \right\}. \quad (8.18)$$

If, for instance, initially, the linear tolerance problem with the matrix \mathbf{A} and the right-hand side vector \mathbf{b} had no solutions, then the problem with the same matrix \mathbf{A} and the expanded vector $(\mathbf{b}_i + K v_i [-1; 1])_{i=1}^m$ in the right-hand side becomes solvable for $K \geq |T_v|$.

The most important particular case of the above construction is that of ensuring equal relative (proportional to the absolute values) increases of the radii of the right-hand side components, when $v_i = |\mathbf{b}_i|$ for nonzero \mathbf{b}_i , $i = 1, 2, \dots, m$. Denote

$$\text{Tol}_0(x) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ |\mathbf{b}_i|^{-1} \left(\text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right) \right\}$$

and let

$$T_0 = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}_0(x; \mathbf{A}, \mathbf{b}).$$

The magnitude of T_0 is the far more subtle quantitative characteristic of compatibility of the linear tolerance problem than

$$\Omega = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \max_{1 \leq j \leq n} \chi(\mathbf{a}_{ij}) - \chi(\mathbf{b}_i) \right\}$$

introduced in Section 2. Judging by the absolute value of T_0 , one can precisely estimate the degree of unsolvability in the case $T_0 < 0$ and the reserve of solvability (stability of the solvable state) in the case $T_0 \geq 0$. Naturally, all this is attained at the price of more laborious computation.

We have demonstrated some capabilities to correct the linear tolerance problem by modification of only the right-hand side vector \mathbf{b} . In fact, the tolerance problem can also be corrected through varying the elements of the matrix \mathbf{A} as well, and the basis of the corresponding technique is

Lemma 7. Let \mathbf{x} be an interval and \mathbf{s} be a symmetric interval such that $\text{rad } \mathbf{x} \geq \text{rad } \mathbf{s}$. Then $\mathbf{x} \ominus \mathbf{s}$ is also an interval and $|\mathbf{x} \ominus \mathbf{s}| = |\mathbf{x}| - |\mathbf{s}|$.

Proof. Denote for brevity $s := |\mathbf{s}| = \text{rad } \mathbf{s}$. Also, assume for definiteness that

$$|\mathbf{x}| = \max \{|\bar{\mathbf{x}}|, |\underline{\mathbf{x}}|\} = |\bar{\mathbf{x}}|,$$

i.e., $|\bar{\mathbf{x}}| \geq |\underline{\mathbf{x}}|$. In particular, this means $\bar{\mathbf{x}} \geq 0$.

It turns out that under our assumption

$$|\bar{\mathbf{x}} - s| \geq |\underline{\mathbf{x}} + s|. \tag{8.19}$$

Indeed, the statement of the Lemma implies

$$\text{rad } \mathbf{x} = \frac{\bar{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}}{2} \geq s,$$

that is,

$$\bar{\mathbf{x}} - s \geq \underline{\mathbf{x}} + s.$$

If $\underline{\mathbf{x}} + s \geq 0$, then the inequality (8.19) is obtained from that by taking the absolute values of both sides. Otherwise, if $\underline{\mathbf{x}} + s \leq 0$, then $\underline{\mathbf{x}} \leq 0$, $|\underline{\mathbf{x}}| = -\underline{\mathbf{x}}$ and we again have

$$|\bar{\mathbf{x}} - s| = \bar{\mathbf{x}} - s \geq |\underline{\mathbf{x}}| - s = -\underline{\mathbf{x}} - s = |\underline{\mathbf{x}} + s|.$$

Finally, in view of (8.19)

$$|\mathbf{x} \ominus \mathbf{s}| = \max \{|\bar{\mathbf{x}} - s|, |\underline{\mathbf{x}} + s|\} = |\bar{\mathbf{x}} - s| = \bar{\mathbf{x}} - s = |\mathbf{x}| - |\mathbf{s}|$$

as required. For $|\mathbf{x}| = |\underline{\mathbf{x}}|$, the proof is conducted in the similar way. ■

Assume that we are given an incompatible linear tolerance problem with the interval matrix \mathbf{A} and the interval right-hand vector \mathbf{b} . Accordingly the unconstrained maximum of its identifying functional $\text{Tol}(x; \mathbf{A}, \mathbf{b})$, which we suppose to be attained at the point τ , is negative, i.e.,

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x; \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \text{Tol}(\tau; \mathbf{A}, \mathbf{b}) = T < 0.$$

How can one diminish unsolvability measure of the linear tolerance problem through narrowing the matrix \mathbf{A} ?

In doing so, we shall take the following natural assumptions:

- (i) all the components of the right-hand side vector \mathbf{b} are thick intervals, that is, $\text{rad } \mathbf{b}_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, m$,
- (ii) $\min_{1 \leq j \leq m} \left\{ \sum_{j=1}^n \tau_j \text{rad } \mathbf{a}_{ij} \right\} = \Delta > 0$.

Let us choose an interval $m \times n$ -matrix $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_{ij})$ with symmetric interval elements $\mathbf{e}_{ij} = [-e_{ij}; e_{ij}]$ so that

$$\sum_{j=1}^n e_{ij} \tau_j = K, \quad i = 1, 2, \dots, m, \tag{8.20}$$

where K is a positive constant $\leq \Delta$ and, of course,

$$\text{rad } \mathbf{a}_{ij} \geq e_{ij} \geq 0 \tag{8.21}$$

for all i, j . Then the linear tolerance problem with that same right-hand side vector \mathbf{b} and the interval matrix $\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}$ is “less unsolvable” than the initial one.

Indeed, evaluating the identifying functional of the new tolerance problem, we have

$$\begin{aligned} \text{Tol}(x; \mathbf{A} \ominus \mathbf{E}, \mathbf{b}) &= \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n (\mathbf{a}_{ij} \ominus \mathbf{e}_{ij}) x_j \right| \right\} \\ &= \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \ominus \sum_{j=1}^n \mathbf{e}_{ij} x_j \right| \right\} \\ &= \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| + \left| \sum_{j=1}^n \mathbf{e}_{ij} x_j \right| \right\} \end{aligned}$$

by Lemma 7. Hence, since (8.20) is equivalent to

$$\left| \sum_{j=1}^n \mathbf{e}_{ij} \tau_j \right| = K,$$

we get

$$\begin{aligned} \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x; \mathbf{A} \ominus \mathbf{E}, \mathbf{b}) &\geq \text{Tol}(\tau; \mathbf{A} \ominus \mathbf{E}, \mathbf{b}) \\ &= \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} \tau_j \right| + \left| \sum_{j=1}^n \mathbf{e}_{ij} \tau_j \right| \right\} \\ &= \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| + K \right\} \\ &= K + \text{Tol}(\tau; \mathbf{A}, \mathbf{b}) \\ &= K + \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x; \mathbf{A}, \mathbf{b}) \\ &= K + T. \end{aligned}$$

If $K \geq |T|$ then the linear tolerance problem with the matrix $\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}$ and the right-hand side \mathbf{b} becomes compatible, and moreover, we may assert for sure that $\tau \in \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}, \mathbf{b})$.

The crucial point of the matrix variation correction procedure is the solution of the underdetermined system of equations (8.20)–(8.21). As one can see, sometimes the correction obtained through our prescription may turn out insufficient to make the tolerance problem certainly solvable (if $\Delta \leq |T|$), but one should perceive that rather as a drawback of our technique or as a consequence of the estimate's roughness. In principle, every linear tolerance problem with a nonsingular interval matrix \mathbf{A} can be made compatible by appropriate narrowing the matrix, since for nonsingular thin \mathbf{A} the problem always has a solution. To turn the initial problem into a compatible one for large $|T|$, we thereby recommend to apply the proposed expedient repeatedly, combined with recalculations of the identifying functional's maximum.

In the above consideration, we decreased the weighted (with the coefficients τ_j) width of each row of the interval matrix \mathbf{A} by the same value K . Similar to the preceding case, one may need to decrease those widths to a variable degree. The way out of that situation is standard: we introduce the positive vector $v = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ such that the decrease measure (8.20) of the i -th row's weighted width should be proportional to v_i and then operate with the modified functional $\text{Tol}_v(x; \mathbf{A}, \mathbf{b})$ which is defined by the expression (8.18).

8.6 Formula for the size of interval solution

Once the compatibility of the linear tolerance problems is established and a point of the tolerable solution set has been found, we may turn to the actual construction of the interval solution to the problem. To do so, we follow the so-called “center” approach adopted by Khlebalin [5], Neumaier [10], Shaidurov [2], Shaidurov and Shary [23] and others, in which the point of the tolerable solution set found earlier is taken to be the center of the interval solution under construction. Taking the minimum on a hyperbar plays a leading part in the formula derived below, so that the further solution of the linear tolerance problem amounts to a finite-dimensional constrained optimization problem on a hyperbar. In what follows, we do not discuss optimal choice of the interval solution’s center since that question is closely connected with the practical needs of those who solve specific problems.

In applications, the statement of the linear tolerance problem is often more rigid than (8.6). Like Shaidurov in [2, 23], in addition to (8.6), we take the ratio of the tolerances of the separate components to be determined by a real vector $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, $w_i > 0$, i.e., we introduce weighting coefficients for the widths of the tolerances so that

$$\text{rad } \mathbf{U}_i / \text{rad } \mathbf{U}_j = w_i / w_j.$$

Through scaling by the diagonal matrix $\text{diag}\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ all such cases are easily reduced to a standard one, when $w = (1, 1, \dots, 1)$ and we are to inscribe a hypercube in the properly modified set $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Indeed, we introduce matrices $D = \text{diag}\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ and $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}D$. Let the interval vector $\tilde{\mathbf{U}}$, $\text{rad } \tilde{\mathbf{U}}_i = \text{const}$, be a solution to the linear tolerance problem with the matrix $\tilde{\mathbf{A}}$ and the right-hand side vector \mathbf{b} . Then $\mathbf{U} = D\tilde{\mathbf{U}}$ is a solution to the original problem, since

$$\{ \mathbf{A}x \mid x \in \mathbf{U} \} = \{ \mathbf{A}DD^{-1}x \mid x \in \mathbf{U} \} = \{ \tilde{\mathbf{A}}\tilde{x} \mid \tilde{x} \in \tilde{\mathbf{U}} \} \subseteq \mathbf{b},$$

and moreover $\text{rad } \mathbf{U}_i / \text{rad } \mathbf{U}_j = w_i / w_j$ as required. That is why from now on the linear tolerance problem will be referred to as a problem of finding an interval vector \mathbf{U} with components of equal width and such that $\{ \mathbf{A}x \mid x \in \mathbf{U} \} \subseteq \mathbf{b}$.

The basis of all our further account is

Theorem 3. If $t \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ then for

$$r = \min_{1 \leq i \leq m} \min_{A \in \text{vert } \mathbf{A}} \left\{ \frac{\text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j \right|}{\sum_{i=1}^n |a_{ij}|} \right\} \quad (8.22)$$

the interval vector $\mathbf{U} = (t + r\mathbf{e})$ is also entirely contained in $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Proof. First assume that in the linear tolerance problem the matrix \mathbf{A} is thin, i.e., $\mathbf{A} = A$ and $\text{vert } \mathbf{A} = A$. We represent each $x \in \mathbf{U}$ in the form $x = t + y$, where $\max_{1 \leq j \leq n} |y_j| \leq r_A$ and

$$r_A = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j \right|}{\sum_{i=1}^n |a_{ij}|} \right\}, \quad (8.23)$$

so that the following holds for $i = 1, 2, \dots, m$:

$$|(Ay)_i| = \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}y_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |y_j| \leq r_A \cdot \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \leq \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}t_j \right|.$$

Therefore, since $Ax = At + Ay$, we obtain

$$(At)_i - \text{rad } \mathbf{b}_i + | \text{mid } \mathbf{b}_i - (At)_i | \leq (Ax)_i \leq (At)_i + \text{rad } \mathbf{b}_i - | \text{mid } \mathbf{b}_i - (At)_i |$$

or, equivalently,

$$\begin{aligned} & \underline{\mathbf{b}}_i - (\text{mid } \mathbf{b}_i - (At)_i) + | \text{mid } \mathbf{b}_i - (At)_i | \\ & \leq (Ax)_i \leq \\ & \bar{\mathbf{b}}_i - (\text{mid } \mathbf{b}_i - (At)_i) - | \text{mid } \mathbf{b}_i - (At)_i |. \end{aligned} \tag{8.24}$$

By virtue of the fact that

$$-z + |z| \geq 0 \quad \text{and} \quad -z - |z| \leq 0$$

for any real z , the inequality (8.24) implies

$$\underline{\mathbf{b}}_i \leq (Ax)_i \leq \bar{\mathbf{b}}_i,$$

that is, $Ax \in \mathbf{b}$ as was expected.

Now, let the matrix \mathbf{A} of the problem be a thick interval matrix, and $t \in \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$. We consider the totality of all linear tolerance problems for systems $Ax = \mathbf{b}$ with $A \in \mathbf{A}$. According to the representation (8.11),

$$\Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \bigcap_{A \in \text{vert } \mathbf{A}} \Xi_{\text{tol}}(A, \mathbf{b}),$$

and if for each $A \in \text{vert } \mathbf{A}$ the corresponding interval solution vector is \mathbf{U}_A , $\mathbf{U}_A \subseteq \Xi_{\text{tol}}(A, \mathbf{b})$, then the interval vector \mathbf{U} such that

$$\mathbf{U} = \bigcap_{A \in \text{vert } \mathbf{A}} \mathbf{U}_A$$

is also included in $\Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. In particular, when all \mathbf{U}_A have a common center and their radii are defined by formula (8.23), we have

$$\mathbf{U} = t + r\mathbf{e},$$

where

$$r = \min_{A \in \text{vert } \mathbf{A}} r_A = \min_{1 \leq i \leq m} \min_{A \in \text{vert } \mathbf{A}} \left\{ \frac{\text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}t_j \right|}{\sum_{i=1}^n |a_{ij}|} \right\}.$$

The Theorem is completely proved. \blacksquare

Despite outward simplicity of that proof, the statement of Theorem 8.6 is the most subtle of that kind of results. Previously, Shaidurov has established in [2, 23] that if $t \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ then for

$$r = \min_{1 \leq i \leq m} \min_{A \in \mathbf{A}} \left\{ \frac{\text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j \right|}{\sum_{i=1}^n |a_{ij}|} \right\} \quad (8.25)$$

the interval vector $(t + r\mathbf{e})$ is included in $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. As is seen, his formula coincides with ours except for the internal minimum is taken over *all* matrices $A \in \mathbf{A}$ and not over the *finite* set of extreme matrices. That, nevertheless, in no way affects the final results which are completely identical for both formulas. Indeed, one can easily show quasiconcavity of the functions in the braces of (8.25) (that was done by Shary in [25, 28]), and a quasiconcave function is known to reach its minimum in extreme points of its convex domain of definition. Thus, for each $i = 1, 2, \dots, m$, the expressions in braces of (8.25) attain their minimal values on $A \in \mathbf{A}$ in vertices of the interval vectors $(\mathbf{a}_{i1}, \mathbf{a}_{i2}, \dots, \mathbf{a}_{in})$ and the formula (8.22) follows. In this work, we achieve the same objective by the more elementary means.

The simplest way to estimate (8.25) and (8.22) is to take the left endpoint of the *natural interval extension* over \mathbf{A} [9] for the expressions in the braces of (8.25), that is, to replace the variables by the corresponding intervals of their domains and to replace the arithmetic operations by the corresponding interval arithmetic operations. The following algorithm by Shaidurov [2, 23] does exactly so.

ALGORITHM I.

For a given $t \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, calculate the intervals

$$\mathbf{r}_i = \frac{\text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} t_j \right|}{\sum_{i=1}^n |\mathbf{a}_{ij}|}, \quad (8.26)$$

$i = 1, 2, \dots, m$, and then put $\varrho := \min_{1 \leq i \leq m} \mathbf{r}_i$. The interval vector $(t + \varrho\mathbf{e})$ is a solution to the linear tolerance problem.

Since both numerator and denominator of the minimized expression contain only one occurrence of each variable in the first power, Shaidurov's algorithm is actually equivalent to estimation of a fraction as the quotient of the numerator's minimum and denominator's maximum. The relative accuracy of such estimation is proved in [2, 23] to be higher, the more narrow the matrix \mathbf{A} .

The other important result on construction of an interval solution to the linear tolerance problem is due to Neumaier [10], who has proposed the following simple method.

ALGORITHM II.

For a given $t \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, calculate the largest nonnegative η such that

$$\eta \cdot \mathbf{A}\mathbf{e} \subseteq \mathbf{b} \ominus \mathbf{A}t. \quad (8.27)$$

The interval vector $(t + \eta\mathbf{e})$ is a solution to the linear tolerance problem.

The latter is evident from the fact that

$$\mathbf{A}x \subseteq \mathbf{A}(t + \eta\mathbf{e}) \subseteq \mathbf{A}t + \mathbf{A}(\eta\mathbf{e}) \subseteq \mathbf{A}t + \mathbf{b} \ominus \mathbf{A}t = \mathbf{b}$$

for each $x \in t + \eta\mathbf{e}$.

Lemma 8. The results obtained by Neumaier's algorithm are completely identical to those given by Shaidurov's algorithm.

Proof. In fact, condition (8.27) means

$$\eta \cdot (\underline{\mathbf{Ae}})_i \geq (\mathbf{b} \ominus \mathbf{A}t)_i \quad \text{and} \quad \eta \cdot (\overline{\mathbf{Ae}})_i \leq (\overline{\mathbf{b} \ominus \mathbf{A}t})_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

where \mathbf{Ae} is a symmetrical interval vector in which

$$-(\underline{\mathbf{Ae}})_i = (\overline{\mathbf{Ae}})_i = |(\mathbf{Ae})_i|, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Moreover, for $t \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$

$$(\mathbf{b} \ominus \mathbf{A}t)_i \leq 0 \leq (\overline{\mathbf{b} \ominus \mathbf{A}t})_i$$

and thus the following chain of transformations is valid for each i :

$$\begin{aligned} \eta &\leq \min \left\{ \frac{(\mathbf{b} \ominus \mathbf{A}t)_i}{(\underline{\mathbf{Ae}})_i}, \frac{(\overline{\mathbf{b} \ominus \mathbf{A}t})_i}{(\overline{\mathbf{Ae}})_i} \right\} \\ &= \frac{\min \left\{ -(\text{mid } \mathbf{b}_i - \text{rad } \mathbf{b}_i) + (\underline{\mathbf{A}t})_i, (\text{mid } \mathbf{b}_i + \text{rad } \mathbf{b}_i) - (\overline{\mathbf{A}t})_i \right\}}{|(\mathbf{Ae})_i|} \\ &= \frac{\min \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - (\text{mid } \mathbf{b}_i - (\underline{\mathbf{A}t})_i), \text{rad } \mathbf{b}_i - ((\overline{\mathbf{A}t})_i - \text{mid } \mathbf{b}_i) \right\}}{|(\mathbf{Ae})_i|} \\ &= \frac{\text{rad } \mathbf{b}_i - \max \left\{ \text{mid } \mathbf{b}_i - (\underline{\mathbf{A}t})_i, (\overline{\mathbf{A}t})_i - \text{mid } \mathbf{b}_i \right\}}{|(\mathbf{Ae})_i|} \\ &= \frac{\text{rad } \mathbf{b}_i - |\text{mid } \mathbf{b}_i - (\mathbf{A}t)_i|}{|(\mathbf{Ae})_i|}. \end{aligned}$$

For $i = 1, 2, \dots, m$, the last expression coincides with the lower bounds of the respective interval (8.26), and so taking the minimum on all i leads to the equality $\eta = \varrho$. ■

Both these algorithms, by Shaidurov and by Neumaier, are simple and easy to implement: if a point $t \in \Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ has been already found, then the construction of an interval solution requires as low as $O(mn)$ arithmetical operations. This is achieved, however, at the price of considerable coarsening of the final result, especially for wide interval \mathbf{A} .

In the expression (8.22), taking the minimum on $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ involves no difficulties, so the central problem is computation of the internal $\min_{A \in \text{vert } \mathbf{A}}$ or its estimate from below. As a matter of fact, the rest of the paper will be devoted to solving this problem.

For the sake of convenience, we denote

$$(\mathbf{a}_{i1}, \mathbf{a}_{i2}, \dots, \mathbf{a}_{in}) = (\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_n) = \mathbf{D}$$

regardless of the index i , while the objective function will be the expression in braces of (8.22) and (8.25), that is,

$$\Phi(x) = \frac{R - \left| M - \sum_{j=1}^n x_j t_j \right|}{\sum_{i=1}^n |x_j|}.$$

Thus, the problem to be solved is

$$\text{Find } \min\{\Phi(x) \mid x \in \text{vert } \mathbf{D}\}.$$

8.7 Exact exhaustive algorithms to construct interval solution

When algorithmically implementing the exhaustion of $\text{vert } \mathbf{D}$, one usually indexes the vertices with the n -digit binary numbers from $00\dots 0$ to $11\dots 1$, the k -th digit being equal to 0 if the k -th coordinate of the respective vertex coincides with the left endpoint of the interval \mathbf{d}_k , and 1 if it coincides with the right one. Then item-by-item examination of the vertices of $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_n)$ can be organized, for instance, as a successive passage, starting from the vertex with the number 0 and further on, each time to the vertex that has the next binary number. If the steps of the exhaustion are also numbered, then the process we have considered is formally described in the following form:

ALGORITHM III.

We examine the vertex with the binary number ν at the ν -th step.

We shall show how to considerably decrease the complexity of this algorithm (which is proportional to 2^n). At each step of the exhaustion, we have to calculate the sums

$$\Upsilon(d) = M - \sum_{j=1}^n d_j t_j \quad \text{and} \quad \Theta(d) = \sum_{i=1}^n |d_j|$$

for the examined vertex (d_1, d_2, \dots, d_n) , so that $\Phi(d) = (R - |\Upsilon(d)|)/\Theta(d)$. If the item-by-item examination of the vertices is carried out in a special manner, passing at each step to an adjacent vertex (that has only one different component), then only one summand will change in each of the expressions Υ and Θ . So, to compute their new values, one does not need to sum all n terms anew. It is much more saving to recalculate Υ and Θ through the following recurrent formulae: if the new examined vertex is different from the preceding one in its j -th coordinate only — it is equal to d''_j instead of d'_j — then

$$\text{the new value of } \Upsilon = \text{the old value of } \Upsilon + (d''_j - d'_j) \cdot t_j,$$

$$\text{the new value of } \Theta = \text{the old value of } \Theta + |d''_j| - |d'_j|.$$

Algorithm III does not possess the desired property of “passing to an adjacent vertex”. For example, the subsequent binary numbers 011 and 100 differ in three digits and not in one as it should be for the neighboring vertices. So, to put the above idea to practice, one needs a special algorithm, which is actually a reenumeration of the rectangle’s vertices. We shall describe it recurrently, indexing the algorithm’s steps by n -digit binary numbers as before.

ALGORITHM IV.

We examine the vertex with the number $00 \dots 00$ at the first step of the algorithm (that has the number $k = 0$).

Let the number of the vertex μ_k be already determined. We denote the most significant digit's index in which the binary numbers k and $k + 1$ differ by j . As the number μ_{k+1} of the vertex examined at the $(k + 1)$ -th step, we put the binary number which is obtained from μ_k through replacing its j -th digit by the complimentary one (that is, 0 by 1 and 1 by 0).

Lemma 9. Algorithm IV passes just once through each vertex of the rectangle \mathbf{D} , and any two vertices with the numbers μ_k and μ_{k+1} are adjacent.

Proof. The property of Algorithm IV to perform the complete exhaustion of the vertices also remains valid if *any* other vertex is taken as the initial one and not only $00 \dots 00$. We shall prove this more general fact by the induction on the dimension n of the rectangle.

Indeed, if $n = 1$ the statement is evident for both binary sequences $\{0, 1\}$ and $\{1, 0\}$. Suppose it is already substantiated for the dimension $(n - 1)$. We consider the renumeration of the vertices produced by Algorithm IV for the dimension n :

$$\mu_{00\dots 00}, \mu_{00\dots 01}, \dots, \mu_{11\dots 11}. \quad (8.28)$$

It is significant that in this sequence the n -th digit changes only once, namely, when the step number passes from $01 \dots 11$ to $10 \dots 00$. So, no one of the numbers from the first half of the sequence (8.28) may be equal to a number from its second half because of the different n -th digits. Dropping the n -th digit from the numbers in (8.28), we get the two sequences that renumerate the vertices of the $(n - 1)$ -dimensional rectangle:

$$\begin{aligned} \mu'_{0\dots 00}, \mu'_{0\dots 01}, \dots, \mu'_{1\dots 11}, \\ \mu''_{0\dots 00}, \mu''_{0\dots 01}, \dots, \mu''_{1\dots 11}. \end{aligned}$$

They are produced by Algorithm IV, but with the different initial numbers $\mu'_{00\dots 0}$ and $\mu''_{00\dots 0}$, while $\mu''_{00\dots 0} = \mu'_{11\dots 1}$. By the induction assumption, each such sequence contains only different $(n - 1)$ -digit binary numbers from $00 \dots 0$ to $11 \dots 1$. Therefore, all the numbers from the sequence (8.28) are different from each other too. They are 2^n altogether and so each one of them occurs only once in (8.28).

The sequence (8.28) is thus an enumeration of vertices of the n -dimensional rectangle \mathbf{D} . Besides, it is straightforwardly seen from the very description of Algorithm IV that the vertices with the numbers ν and $\nu + 1$ are adjacent. The Lemma is completely proved. \blacksquare

In Algorithm IV, the reduction in complexity is large, the larger dimension of the problem, but the exponentiality is still not overcome. For this reason the practical significance of the exhaustive algorithms described in this section are limited only to the problems of moderate dimension.

8.8 Algorithms based on “branch-and-bound” strategy

As is seen, we need a more advanced algorithm having precision better than that of Algorithms I–II, but with complexity less than that of the exhaustive Algorithms III–IV rested on Theorem 8.6. The algorithms presented below, with the well known “branch and bound method” as a basis, occupies an intermediate position between the simplest Algorithms I–II by Shaidurov-Neumaier and the exhaustive algorithms of the previous section. Its running time is exponential with respect to the dimension only in the worst case (as in all methods of this kind), but, due to the flexible computational scheme, it can be successfully applied to the problems of any size, though the precision to which the value (8.22) is found will be limited by the computer resources available.

It is common knowledge that a natural interval extension of the rational function $F(x)$ ($= F(x_1, x_2, \dots, x_n)$) in which each variable occurs only once and to the first power only gives the exact range of values provided that no division by a zero-containing interval takes place [1, 2, 9, 11]. Thus, for $\mathbf{D} \in \mathbb{IR}^n$, $\mathbf{D} = (\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_n) = [\underline{d}_1; \bar{d}_1] \times [\underline{d}_2; \bar{d}_2] \times \dots \times [\underline{d}_n; \bar{d}_n]$, the left point of the natural interval extension $\underline{F}(\mathbf{D})$ is the global minimum of F over \mathbf{D} , and its right endpoint $\bar{F}(\mathbf{D})$ is the global maximum of F over \mathbf{D} . The point is that we can find not only the values $\min\{F(x) \mid x \in \mathbf{D}\}$ and $\max\{F(x) \mid x \in \mathbf{D}\}$, but also the arguments of F that provide them, that is, the sets $\text{Arg min}\{F(x) \mid x \in \mathbf{D}\}$ and $\text{Arg max}\{F(x) \mid x \in \mathbf{D}\}$. Henceforth we shall designate them as $\text{Arg } \underline{F}(\mathbf{D})$ and $\text{Arg } \bar{F}(\mathbf{D})$ for brevity.

Indeed, if each variable has the only occurrence in the first power in the rational expression F , then the dependence of F upon x_i , for example, looks as follows:

$$\begin{aligned} \text{either} \quad & F(x_i) = \alpha x_i + \beta \\ \text{or} \quad & F(x_i) = \frac{1}{\alpha x_i + \beta}, \end{aligned}$$

where α, β are constants independent of x_i . In any event, $F(x_i)$ is a monotonic function of x_i (as for the second opportunity, this is true for $0 \notin \alpha \cdot [\underline{d}_i; \bar{d}_i] + \beta$), and so, for fixed $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$, the values $\min F(x_i)$ and $\max F(x_i)$ are attained at the endpoints of $[\underline{d}_i; \bar{d}_i]$ or, if $\alpha = 0$, at any point of $[\underline{d}_i; \bar{d}_i]$. Since such a reasoning holds for any variable x_i no matter what the values of the other variables are, then the sets $\text{Arg } \underline{F}(\mathbf{D})$ and $\text{Arg } \bar{F}(\mathbf{D})$ are either vertices of the rectangle \mathbf{D} or its entire faces. How can one find them?

When executing any one of the four arithmetical operations with intervals, that is, addition, subtraction, multiplication or division, we can find out, simultaneously with the resulting interval, which endpoints of the initial intervals give, adding (subtracting, multiplying or dividing), one or the other endpoint of the interval result. In subtracting, for instance, the maximum of the difference, i.e., the right endpoint of the resulting interval, is reached when the minuend is equal to the right endpoint and the subtrahend is equal to the left endpoint of the respective intervals.

To compute the product $[\underline{d}_1; \bar{d}_1] \cdot [\underline{d}_2; \bar{d}_2]$, one has to perform four multiplications, that is, to find $\{\bar{d}_1 \bar{d}_2, \underline{d}_1 \bar{d}_2, \bar{d}_1 \underline{d}_2, \underline{d}_1 \underline{d}_2\}$ and to select minimum and maximum from these numbers. Let, for example, they be $\underline{d}_1 \bar{d}_2$ and $\bar{d}_1 \bar{d}_2$. We have thus found that

$$\text{Arg min} \{ x_1 \cdot x_2 \mid x_1 \in [\underline{d}_1; \bar{d}_1], x_2 \in [\underline{d}_2; \bar{d}_2] \} = \left(\frac{\underline{d}_1}{\bar{d}_2} \right),$$

$$\text{Arg max } \{ x_1 \cdot x_2 \mid x_1 \in [\underline{d}_1; \bar{d}_1], x_2 \in [\underline{d}_2; \bar{d}_2] \} = \begin{pmatrix} \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2 \end{pmatrix}.$$

If the minimal values over the set $\{\bar{d}_1\bar{d}_2, \underline{d}_1\bar{d}_2, \bar{d}_1\underline{d}_2, \underline{d}_1\underline{d}_2\}$ were two products simultaneously, say, $\underline{d}_1\underline{d}_2$ and $\underline{d}_1\bar{d}_2$, then we would conclude the following:

$$\text{Arg min } \{ x_1 \cdot x_2 \mid x_1 \in [\underline{d}_1; \bar{d}_1], x_2 \in [\underline{d}_2; \bar{d}_2] \} = \begin{pmatrix} \underline{d}_1 \\ [\underline{d}_2; \bar{d}_2] \end{pmatrix},$$

that is, the set $\text{Arg min } x_1 \cdot x_2$ consists of the whole face of the rectangle $[\underline{d}_1; \bar{d}_1] \times [\underline{d}_2; \bar{d}_2]$ of “input data” in this case.

Further, the value of any rational expression on an interval vector may be computed by a finite number of interval additions, subtractions, multiplications and divisions. If each variable appears only once in $F(x)$ and only to the first power, then, recurrently tracing evolution of the intervals’ endpoints, we can reveal that collection of endpoints of the initial intervals $[\underline{d}_1; \bar{d}_1]$, $[\underline{d}_2; \bar{d}_2]$, \dots , $[\underline{d}_n; \bar{d}_n]$, in which $\underline{F}(\mathbf{D})$ and $\bar{F}(\mathbf{D})$ are attained.

It is fairly simple to realize that all stated above holds true when the expression $F(x)$ that has single occurrence of each variable is constructed not only of the four arithmetic operations, but contains occurrences $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots$ of any other functions as well. We only need, when taking the “natural interval extension” of F , to change $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots$ for occurrences of the respective optimal interval extensions. For example, if, in the expressions

$$\Psi(x) = R - \left| M - \sum_{j=1}^n x_j t_j \right| \quad \text{and} \quad \Theta(x) = \sum_{j=1}^n |x_j|,$$

one changes all arithmetic operations by their interval counterparts and instead of the absolute value function its optimal interval extension

$$\text{abs}([\underline{d}; \bar{d}]) = [\langle [\underline{d}; \bar{d}] \rangle; |[\underline{d}; \bar{d}]|]$$

is taken, then the substitution of the variables x_1, x_2, \dots, x_n for the intervals of their possible variations $[\underline{d}_1; \bar{d}_1], [\underline{d}_2; \bar{d}_2], \dots, [\underline{d}_n; \bar{d}_n]$ gives the exact ranges of values for $\Psi(x)$ and $\Theta(x)$ over any rectangle $\mathbf{D} = [\underline{d}_1; \bar{d}_1] \times [\underline{d}_2; \bar{d}_2] \times \dots \times [\underline{d}_n; \bar{d}_n] \in \mathbb{IR}^n$.

Below, we shall be interested mainly in the sets $\text{Arg } \underline{\Psi}(\mathbf{D})$ and $\text{Arg } \bar{\Theta}(\mathbf{D})$ for an interval vector $\mathbf{D} \in \mathbb{IR}^n$. The problem of their computation is by no means harder than that for purely rational expressions, since we know how to find Arg min and Arg max of the absolute value function which occur in $\Psi(x)$ and $\Theta(x)$ aside from the basic arithmetical operations. It can be solved by that same “tracing endpoints” technique. For example, the algorithm for computing $\bar{\Theta}(\mathbf{D})$ and $\text{Arg } \bar{\Theta}(\mathbf{D})$ written in informal ALGOL looks as follows:

```

max := 0;
FOR j := 1 STEP 1 UNTIL n DO
  IF |d_j| ≤ |d_j| THEN BEGIN max := max + d_j; (Arg  $\bar{\Theta}(\mathbf{D})$ )_j := d_j END
  ELSE BEGIN max := max + d_j; (Arg  $\bar{\Theta}(\mathbf{D})$ )_j := d_j END
 $\bar{\Theta}(\mathbf{D}) := max;$ 
```

Of course, this algorithm is simplified for the sake of obviousness and does not take into account the fact that in reality the set $\text{Arg } \overline{\Theta(\mathbf{D})}$ may have quite nontrivial structure. In particular, it may be disconnected if $\underline{d}_j = -\overline{d}_j \neq 0$ for some $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. The set $\text{Arg } \underline{\Psi(\mathbf{D})}$ is also disconnected if

$$M - \overline{\sum_{j=1}^n [\underline{d}_j; \overline{d}_j] t_j} = \underline{\sum_{j=1}^n [\underline{d}_j; \overline{d}_j] t_j} - M.$$

In any case, separate connected components of the sets $\text{Arg } \overline{\Theta(\mathbf{D})}$ and $\text{Arg } \underline{\Psi(\mathbf{D})}$ are represented as direct products $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 \times \dots \times \mathcal{G}_n$, where \mathcal{G}_j is either a vertex of the rectangle \mathbf{D} or its entire edge.

Let us agree to take from now on as $\text{Arg } \underline{\Psi(\mathbf{D})}$ (or $\text{Arg } \overline{\Theta(\mathbf{D})}$) a connected component of the set of points furnishing with $\underline{\Psi(\mathbf{D})}$ ($\overline{\Theta(\mathbf{D})}$ respectively) and it does not matter which one exactly. Also, it is worth noting that for sets $\mathcal{G}, \mathcal{H} \subseteq \mathbb{R}^n$ with the direct product structure, that is, when $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 \times \dots \times \mathcal{G}_n$, $\mathcal{G}_j \subseteq \mathbb{R}$, and $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \times \dots \times \mathcal{H}_n$, $\mathcal{H}_j \subseteq \mathbb{R}$, the condition $(\mathcal{G} \cap \mathcal{H} = \emptyset)$ is equivalent to $(\mathcal{G}_j \cap \mathcal{H}_j = \emptyset)$ for at least one of $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. We shall substantially avail ourselves of this property later.

After such preliminary preparations, we turn to the actual computation of

$$\begin{aligned} \min\{\Phi(x) \mid x \in \text{vert } \mathbf{D}\} &= \min \left\{ \frac{\Psi(x)}{\Theta(x)} \mid x \in \text{vert } \mathbf{D} \right\} \\ &= \min_{\substack{x_j \in \{\underline{d}_j, \overline{d}_j\}, \\ j=1,2,\dots,n}} \left\{ \frac{R - \left| M - \sum_{j=1}^n x_j t_j \right|}{\sum_{i=1}^n |x_i|} \right\}, \end{aligned} \tag{8.29}$$

where $R, M, t_1, t_2, \dots, t_n$ are some known constants. As we have already noted, the simplest way to estimate (8.29) from below is to construct the natural interval extension $\Phi(\mathbf{D})$ for the minimized function $\Phi(x)$ over *entire* \mathbf{D} . Its left endpoint $\underline{\Phi(\mathbf{D})}$ that coincides with

$$\frac{\underline{\Psi(\mathbf{D})}}{\overline{\Theta(\mathbf{D})}} = \frac{\min\{\Psi(x) \mid x \in \mathbf{D}\}}{\max\{\Theta(x) \mid x \in \mathbf{D}\}}$$

gives the required lower estimate for $\min\{\Phi(x) \mid x \in \text{vert } \mathbf{D}\}$.

We find the sets $\text{Arg } \underline{\Psi(\mathbf{D})}$ and $\text{Arg } \overline{\Theta(\mathbf{D})}$. One may come across the following mutually exclusive situations:

- 1) $\text{Arg } \underline{\Psi(\mathbf{D})} \cap \text{Arg } \overline{\Theta(\mathbf{D})} \neq \emptyset$
- or 2) $\text{Arg } \underline{\Psi(\mathbf{D})} \cap \text{Arg } \overline{\Theta(\mathbf{D})} = \emptyset$.

In the first case, any point of the intersection $\text{Arg } \underline{\Psi(\mathbf{D})} \cap \text{Arg } \overline{\Theta(\mathbf{D})}$ must contain a point of $\text{vert } \mathbf{D}$ that provides the fraction $\Psi(x)/\Theta(x)$ with the global minimum over \mathbf{D} , and so the minimization problem for (8.29) is successfully solved. If $\text{Arg } \underline{\Psi(\mathbf{D})} \cap \text{Arg } \overline{\Theta(\mathbf{D})} = \emptyset$, then

$$\underline{\Phi(\mathbf{D})} = \frac{\min\{\Psi(x) \mid x \in \mathbf{D}\}}{\max\{\Theta(x) \mid x \in \mathbf{D}\}} \geq \min \left\{ \frac{\Psi(x)}{\Theta(x)} \mid x \in \mathbf{D} \right\}$$

and there exists an index $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ such that the k -th components of the sets $\text{Arg } \underline{\Psi(\mathbf{D})}$ and $\text{Arg } \overline{\Theta(\mathbf{D})}$ have no common values:

$$(\text{Arg } \underline{\Psi(\mathbf{D})})_k \cap (\text{Arg } \overline{\Theta(\mathbf{D})})_k = \emptyset.$$

Henceforth we shall refer to such components of the rectangle \mathbf{D} as *incidental*.

If k is the index of an incidental component (so, in particular, $\underline{d}_k \neq \overline{d}_k$), put

$$\mathbf{D}' := [\underline{d}_1; \overline{d}_1] \times \dots \times \underline{d}_k \times \dots \times [\underline{d}_n; \overline{d}_n],$$

$$\mathbf{D}'' := [\underline{d}_1; \overline{d}_1] \times \dots \times \overline{d}_k \times \dots \times [\underline{d}_n; \overline{d}_n].$$

We will speak that the rectangles \mathbf{D}' and \mathbf{D}'' are *descendants* of \mathbf{D} and call the very procedure of their generating the *subdivision* of the initial rectangle \mathbf{D} . Inclusion monotonicity of the interval arithmetic [1, 2, 3, 9, 11, 17] implies

$$\underline{\Phi(\mathbf{D})} \leq \underline{\Phi(\mathbf{D}')} \quad \text{and} \quad \underline{\Phi(\mathbf{D})} \leq \underline{\Phi(\mathbf{D}'')},$$

and therefore

$$\underline{\Phi(\mathbf{D})} \leq \min \left\{ \underline{\Phi(\mathbf{D}')}, \underline{\Phi(\mathbf{D}'')} \right\}.$$

In fact, this inequality is strict under our assumption, since the sets $\text{Arg } \underline{\Psi(\mathbf{D})}$ and $\text{Arg } \overline{\Theta(\mathbf{D})}$ get into different rectangles-descendants as the result of subdivision of $\overline{\mathbf{D}}$ (if they may be represented as direct products). For example, if we set for the sake of definiteness that

$$\text{Arg } \underline{\Psi(\mathbf{D})} \subseteq \mathbf{D}' \quad \text{and} \quad \text{Arg } \overline{\Theta(\mathbf{D})} \subseteq \mathbf{D}''$$

then

$$\underline{\Psi(\mathbf{D})} = \underline{\Psi(\mathbf{D}')} \quad \text{and} \quad \overline{\Theta(\mathbf{D})} = \overline{\Theta(\mathbf{D}'')},$$

while

$$\underline{\Psi(\mathbf{D}'')} > \underline{\Psi(\mathbf{D})} \quad \text{and} \quad \overline{\Theta(\mathbf{D}')} < \overline{\Theta(\mathbf{D})}.$$

Consequently,

$$\underline{\Psi(\mathbf{D})} / \overline{\Theta(\mathbf{D})} < \underline{\Psi(\mathbf{D}')} / \overline{\Theta(\mathbf{D}')} \quad \text{and} \quad \underline{\Psi(\mathbf{D})} / \overline{\Theta(\mathbf{D})} < \underline{\Psi(\mathbf{D}'')} / \overline{\Theta(\mathbf{D}'')},$$

that is, in reality

$$\underline{\Phi(\mathbf{D})} < \min \left\{ \underline{\Phi(\mathbf{D}')}, \underline{\Phi(\mathbf{D}'')} \right\}.$$

Let

$$\min \{ \Phi(x) \mid x \in \text{vert } \mathbf{D} \} = \Phi(\Pi)$$

for some vertex $\Pi \in \text{vert } \mathbf{D}$, $\Pi \in \mathbb{R}^n$. If Π' and Π'' are points obtained from Π by substituting its k -th component for \underline{d}_k and \overline{d}_k respectively, that is, for the left and right endpoints of the interval \mathbf{d}_k , then again making use of the inclusion monotonicity of the interval arithmetic, we find out

$$\underline{\Phi(\mathbf{D}')} \leq \Phi(\Pi') \quad \text{and} \quad \underline{\Phi(\mathbf{D}'')} \leq \Phi(\Pi''),$$

so that

$$\min \left\{ \underline{\Phi(\mathbf{D}')}, \underline{\Phi(\mathbf{D}'')} \right\} \leq \min \{ \Phi(\Pi'), \Phi(\Pi'') \} = \Phi(\Pi).$$

Because of this,

$$\underline{\Phi}(\mathbf{D}) < \min\{ \underline{\Phi}(\mathbf{D}'), \underline{\Phi}(\mathbf{D}'') \} \leq \min \left\{ \frac{\Psi(x)}{\Theta(x)} \mid x \in \text{vert } \mathbf{D} \right\}.$$

The presented reasoning is thus a practical prescription for sharpening the lower estimate of (8.29). The subdivision procedure may be repeated with the rectangles-descendants \mathbf{D}' and \mathbf{D}'' to get refined approximation of $\min\{ \Phi(x) \mid x \in \mathbf{D} \}$ as the minimum of all obtained estimates, then to subdivide again the descendants of \mathbf{D}' and \mathbf{D}'' and to further sharpen the estimate for (8.29) and so on. It advisable to arrange this process of successive refinement utilizing the general scheme of the “branch-and-bound” method (see, e.g., [15]): bisection of a rectangle \mathbf{D} is nothing but a decomposition of the problem into subproblems, that is, producing “branches”, while calculations of $\underline{\Phi}(\mathbf{P})$, $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{D}$, are simply estimations of the objective function’s “bounds” over these “branches”.

We shall keep the set of all rectangles \mathbf{P} resulted in subdividing (that is, actually, of all active subproblems of the original problem) together with all their related estimates in the form of an *ordered list* L consisting of sextuples

$$(\mathbf{P}, \underline{\Phi}(\mathbf{P}), \underline{\Psi}(\mathbf{P}), \overline{\Theta}(\mathbf{P}), \text{Arg } \underline{\Psi}(\mathbf{P}), \text{Arg } \overline{\Theta}(\mathbf{P})),$$

$\mathbf{P} \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n$, $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{D}$. As usual, the first record of the list L , that has the smallest estimate $\underline{\Phi}(\mathbf{P})$ to the beginning of the current step of the algorithm, is referred to as the *leading record*. At the start of the successive refinement algorithm,

$$L = \left\{ (\mathbf{D}, \underline{\Phi}(\mathbf{D}), \underline{\Psi}(\mathbf{D}), \overline{\Theta}(\mathbf{D}), \text{Arg } \underline{\Psi}(\mathbf{D}), \text{Arg } \overline{\Theta}(\mathbf{D})) \right\}$$

and then the list is modified at each step according to the following instructions:

ALGORITHM V.

1. If

$$\text{Arg } \underline{\Psi}(\mathbf{Q}) \cap \text{Arg } \overline{\Theta}(\mathbf{Q}) \neq \emptyset$$

in the leading rectangle \mathbf{Q} , then stop computation.

2. Choose an incidental component \mathbf{Q}_i in the leading rectangle. Bisect \mathbf{Q} to descendants \mathbf{Q}' and \mathbf{Q}'' so that \mathbf{Q}'_i and \mathbf{Q}''_i are the opposite endpoints of the interval \mathbf{Q}_i , and

$$\text{Arg } \underline{\Psi}(\mathbf{Q}) \subseteq \mathbf{Q}' \quad \text{and} \quad \text{Arg } \overline{\Theta}(\mathbf{Q}) \subseteq \mathbf{Q}''.$$

3. Delete in the list L the late leading record

$$(\mathbf{P}, \underline{\Phi}(\mathbf{P}), \underline{\Psi}(\mathbf{P}), \overline{\Theta}(\mathbf{P}), \text{Arg } \underline{\Psi}(\mathbf{P}), \text{Arg } \overline{\Theta}(\mathbf{P})).$$

4. Calculate $\overline{\Theta}(\mathbf{Q}')$ and $\text{Arg } \overline{\Theta}(\mathbf{Q}')$, $\underline{\Psi}(\mathbf{Q}'')$ and $\text{Arg } \underline{\Psi}(\mathbf{Q}'')$.

5. Put $\underline{\Phi}(\mathbf{Q}') := \underline{\Psi}(\mathbf{Q}') / \overline{\Theta}(\mathbf{Q}')$ and $\underline{\Phi}(\mathbf{Q}'') := \underline{\Psi}(\mathbf{Q}'') / \overline{\Theta}(\mathbf{Q}'')$.

6. Enter the records $(\mathbf{Q}', \underline{\Phi}(\mathbf{Q}'), \underline{\Psi}(\mathbf{Q}'), \overline{\Theta}(\mathbf{Q}'), \text{Arg } \underline{\Psi}(\mathbf{Q}'), \text{Arg } \overline{\Theta}(\mathbf{Q}'))$ and $(\mathbf{Q}'', \underline{\Phi}(\mathbf{Q}''), \underline{\Psi}(\mathbf{Q}''), \overline{\Theta}(\mathbf{Q}''), \text{Arg } \underline{\Psi}(\mathbf{Q}''), \text{Arg } \overline{\Theta}(\mathbf{Q}''))$ into the list L in the proper order (of increasing the second member).

As the result of this algorithm's fulfillment, a nondecreasing sequence of estimates $\Phi(\mathbf{Q})$ for the leading rectangles \mathbf{Q} is obtained, that better and better approximates the sought-for $\min\{\Phi(x) \mid x \in \text{vert } \mathbf{D}\}$ from below. It is finite: if T components ($T \leq n$) have nonzero width in the initial rectangle \mathbf{D} , then, as is easily seen, the leading rectangle will become a singleton Π after at most 2^T steps of Algorithm V and $\Phi(\Pi) = \min\{\Phi(x) \mid x \in \text{vert } \mathbf{D}\}$.

The idea of such algorithms for global optimization is undeniably not new, the similar methods were studied in [3, 9, 17] and many other works. However, when designing Algorithm V we tried to make the best use of the problem's structure, namely of the fact that the sought-for $\min\{\Phi(x) \mid x \in \mathbf{D}\}$ is reached in a vertex of the rectangle \mathbf{D} . In particular, we subdivide the leading rectangle to descendants which are not even its halves, but mere two its opposite faces with the smaller dimension. The other original feature of Algorithm V is that the subdivision (bisection) of the leading rectangles is executed not in all components, but only in incidental, that is, in such ones whose shortening solely refine the estimates of the objective function. In other words, we do not slip to disordered partitioning of the leading rectangles, but subdivide them so as to ensure a guaranteed sharpening of the estimate for (8.29). Finally, Algorithm V more completely utilizes the information about its preceding work, at the price of some extension of the records kept in the list L . Thanks to the last expedient, we calculate the objective function's estimate really only once for two rectangles-descendants.

Let us proceed to elaborate a more practical computational procedure on the basis of Algorithm V. In principle, we may improve the simplest algorithm along the following standard list of modifications (see, e.g., [3, 17] and others):

- tracing values of the objective function at some points of boxes along with evaluating over entire boxes enables one to control the precision of the current approximation to the sought-for optimum and to delete useless pairs (that never become leading) from the list L ,
- after revealing monotonicity of the objective function in some variables, one reduces the dimension of boxes from the list L ,
- based upon local characteristics of the objective function, one employs minimization procedures in appropriate boxes which are more efficient than bisection,
- one constructs a higher quality (more accurate) inclusion function for the objective function and so on.

We shall apply only the first ("midpoint test") and the second ("monotonicity test") of all the presented advances the more so, that they turn out to be aptly mutually complementary. Besides, to make improvement of the estimate of the sought for minimum more weighted, it is advisable to make use of the well-known heuristic recommendation: the leading rectangle is bisected only upon the longest of the incidental components at each step of the algorithm.

The classical "midpoint test" scheme as applied to Algorithm V is implemented as follows. Each time one calculates $\Phi(\text{mid } \mathbf{P})$ along with $\overline{\Phi(\mathbf{P})}$ and a real parameter ϕ is connected with the algorithm which is equal to the smallest one among the values $\Phi(\text{mid } \mathbf{P})$ for all rectangles \mathbf{P} ever been generated by the algorithm up to the current step. Then

$$\min\{\Phi(x) \mid x \in \mathbf{D}\} \leq \phi,$$

and all records $(\mathbf{P}, \overline{\Phi(\mathbf{P})}, \overline{\Psi(\mathbf{P})}, \overline{\Theta(\mathbf{P})}, \text{Arg } \overline{\Psi(\mathbf{P})}, \text{Arg } \overline{\Theta(\mathbf{P})})$ that satisfy

$$\phi < \overline{\Phi(\mathbf{P})} \tag{8.30}$$

may be removed from the list L without any effect on the algorithm's performance. However, substantial difficulties obstruct the realization of this idea. The thing is that the leading rectangle's diameters does not necessarily tend to zero in Algorithm V, since the rectangles are partitioned only in incidental components. Such a peculiarity of Algorithm V is undoubtedly positive inasmuch as it is this property that ensures economy and purposefulness of computation. On the other hand, it causes that the difference $(\Phi(\text{mid } \mathbf{P}) - \Phi(\mathbf{P}))$ may remain greater than some positive number even for the leading rectangles \mathbf{Q} . The numerical experiments show that then, as a rule, the inequality (8.30) never holds and we may recognize no one of the records of L as useless. Thus, there is a necessity to supplement Algorithm V, apart from the "midpoint test", with a procedure that reduces the component's size whenever it is incidental or not. In the point at issue, this can be a "contraction" of the rectangle on the components, in which the monotonicity of the objective function is revealed.

The objective function $\Phi(x)$ is nonsmooth, but continuous and almost everywhere differentiable. So we examine its monotonicity in separate variables over rectangles $\mathbf{P} \subseteq \mathbb{I}\mathbb{R}^n$ by the standard way, that is, through evaluating the sign of interval extensions of the derivatives $\partial\Phi(x)/\partial x_j$ over \mathbf{P} . Since $\Phi(x) = \Psi(x)/\Theta(x)$, we have

$$\Phi'(x) = \frac{\Psi'(x)\Theta(x) - \Psi(x)\Theta'(x)}{(\Theta(x))^2}.$$

Furthermore,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Psi(x)}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(R - \left| M - \sum_{j=1}^n x_j t_j \right| \right) \\ &= -\text{sgn} \left(M - \sum_{j=1}^n x_j t_j \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \left(M - \sum_{j=1}^n x_j t_j \right) \\ &= t_j \cdot \text{sgn} \left(M - \sum_{j=1}^n x_j t_j \right), \\ \frac{\partial\Theta(x)}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{j=1}^n |x_j| \right) = \text{sgn } x_j, \end{aligned}$$

and so

$$\begin{aligned} &\Psi'(x)\Theta(x) - \Psi(x)\Theta'(x) \\ &= t_j \cdot \text{sgn} \left(M - \sum_{j=1}^n x_j t_j \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n |x_j| \right) - \left(M - \sum_{j=1}^n x_j t_j \right) \cdot \text{sgn } x_j. \end{aligned} \quad (8.31)$$

Since the optimal interval extension of the sign function is

$$\text{sgn}([\underline{d}; \bar{d}]) = \begin{cases} 1, & \text{if } 0 < \underline{d}, \\ [0; 1], & \text{if } \underline{d} = 0 < \bar{d}, \\ [-1; 1], & \text{if } \underline{d} < 0 < \bar{d}, \\ [-1; 0], & \text{if } \underline{d} < 0 = \bar{d}, \\ -1, & \text{if } \bar{d} < 0, \end{cases}$$

one can easily find the natural interval extension for the expression (8.31), whose sign coincides with that of the natural interval extension of the derivatives $\partial\Phi(x)/\partial x_j$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Finally, for practical calculations of the size of interval solutions to the linear tolerance problem, we recommend the following

ALGORITHM VI. Put $\phi := \Phi(\text{mid } \mathbf{D})$ and

$$L = \{ (\mathbf{D}, \underline{\Phi(\mathbf{D})}, \underline{\Psi(\mathbf{D})}, \overline{\Theta(\mathbf{D})}, \text{Arg } \underline{\Psi(\mathbf{D})}, \text{Arg } \overline{\Theta(\mathbf{D})}) \}$$

1. If in the leading rectangle \mathbf{Q}

$$\text{Arg } \underline{\Psi(\mathbf{Q})} \cap \text{Arg } \overline{\Theta(\mathbf{Q})} \neq \emptyset$$

or if $(\phi - \underline{\Phi(\mathbf{Q})}) \leq \epsilon$, then stop computation.

2. Choose the incidental component \mathbf{Q}_i of the largest length in the leading rectangle and subdivide \mathbf{Q} to the descendants \mathbf{Q}' and \mathbf{Q}'' so that \mathbf{Q}'_i and \mathbf{Q}''_i are the opposite endpoints of the interval \mathbf{Q}_i and

$$\text{Arg } \underline{\Psi(\mathbf{Q})} \subseteq \mathbf{Q}' \quad \text{and} \quad \text{Arg } \overline{\Theta(\mathbf{Q})} \subseteq \mathbf{Q}''$$

3. Calculate the natural interval extension of the expression (8.31) over \mathbf{Q}' for all $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ such that $\text{rad } \mathbf{Q}'_j \neq 0$. If it is a nonnegative interval, then substitute \mathbf{Q}'_j for its left endpoint $\underline{\mathbf{Q}'_j}$, and if it is a nonpositive one, then for its right endpoint $\overline{\mathbf{Q}'_j}$.

We keep the former designation \mathbf{Q}' for the rectangle resulted from this procedure.

4. Do with the rectangle \mathbf{Q}'' that same as in the preceding item.
5. Calculate $\overline{\Theta(\mathbf{Q}')} and \text{Arg } \overline{\Theta(\mathbf{Q}')}, \underline{\Psi(\mathbf{Q}'')} and \text{Arg } \underline{\Psi(\mathbf{Q}'')}$.
6. Put $\underline{\Phi(\mathbf{Q}')} := \underline{\Psi(\mathbf{Q}')}/\overline{\Theta(\mathbf{Q}')}$ and $\underline{\Phi(\mathbf{Q}'')} := \underline{\Psi(\mathbf{Q}'')}/\overline{\Theta(\mathbf{Q}'')}$.
7. If $\underline{\Phi(\mathbf{Q}')} \leq \phi$, then enter the record $(\mathbf{Q}', \underline{\Phi(\mathbf{Q}')}, \underline{\Psi(\mathbf{Q}')}, \overline{\Theta(\mathbf{Q}')}, \text{Arg } \underline{\Psi(\mathbf{Q}')}, \text{Arg } \overline{\Theta(\mathbf{Q}')})$ into the list L in the proper order (of increasing the second member).
8. If $\underline{\Phi(\mathbf{Q}'')} \leq \phi$, then enter the record $(\mathbf{Q}'', \underline{\Phi(\mathbf{Q}'')}, \underline{\Psi(\mathbf{Q}'')}, \overline{\Theta(\mathbf{Q}'')}, \text{Arg } \underline{\Psi(\mathbf{Q}'')}, \text{Arg } \overline{\Theta(\mathbf{Q}'')})$ into the list L in the proper order.
9. Delete the late leading record $(\mathbf{Q}, \underline{\Phi(\mathbf{Q})}, \underline{\Psi(\mathbf{Q})}, \overline{\Theta(\mathbf{Q})}, \text{Arg } \underline{\Psi(\mathbf{Q})}, \text{Arg } \overline{\Theta(\mathbf{Q})})$ from the list L .
10. Calculate $\omega := \min\{\Phi(\text{mid } \mathbf{Q}'), \Phi(\text{mid } \mathbf{Q}'')\}$.
11. If $\phi > \omega$, then put $\phi := \omega$ and clean the list L , i.e., delete from it all records $(\mathbf{P}, \underline{\Phi(\mathbf{P})}, \underline{\Psi(\mathbf{P})}, \overline{\Theta(\mathbf{P})}, \text{Arg } \underline{\Psi(\mathbf{P})}, \text{Arg } \overline{\Theta(\mathbf{P})})$ such that $\underline{\Phi(\mathbf{P})} > \phi$.

In the second instruction, ϵ is a prescribed absolute accuracy of the result. For large dimensions, the practical work with this algorithm shows, however, that more often its stop is due to exhaustion of the computer resources (primarily, of the time). In such cases, we still obtain the answer to the problem: it will be the last computed leading estimate $\underline{\Phi(\mathbf{Q})}$.

References

- [1] G. Alefeld and J. Herzberger, *Introduction to Interval Computation* (Academic Press, New York, 1983).
- [2] B.S. Dobronets and V.V. Shaidurov, *Two-sided Numerical Methods* (Nauka, Novosibirsk, 1990). (in Russian)
- [3] E. Hansen, *Global Optimization Using Interval Analysis* (Marcel Dekker, New York, 1992).
- [4] B. Kelling and D. Oelschlägel, Zur Lösung von linearen Toleranzproblemen, *Wissenschaft. Zeitschrift TH Leuna-Merseburg* 33 (1) (1991) 121–131.
- [5] N.A. Khlebalin, Analytical synthesis of regulators under uncertainty of the plant's parameters, Ph. D. dissertation, Saratov, 1984. (in Russian)
- [6] N.A. Khlebalin, Synthesis of interval regulators in the modal control problem, in: *Analytical Methods for Synthesis of Regulators* (Saratov Polytechnical Institute, Saratov, 1988) 26–30. (in Russian)
- [7] K.C. Kiwiel, *Methods of Descent for Nondifferentiable Optimization* (Springer Verlag, Berlin, 1985).
- [8] M. Milanese and A. Vicino, Optimal estimation theory for dynamic systems with set membership uncertainty. An overview, *Automatica* 27 (1991) 997–1009.
- [9] R.E. Moore, *Methods and Applications of Interval Analysis* (SIAM, Philadelphia, 1979).
- [10] A. Neumaier, Tolerance analysis with interval arithmetic, *Freiburger Intervall-Berichte* 86/9 (1986) 5–19.
- [11] A. Neumaier, *Interval Methods for Systems of Equations* (Cambridge University Press, Cambridge, 1990).
- [12] J.P. Norton, Identification and application of bounded-parameter models, *Automatica* 23 (1987) 497–507.
- [13] E. Nuding, Ein einfacher Beweis der Satzes von Oettli-Prager und J. Rohn, *Freiburger Intervall-Berichte* 86/9 (1986) 1–3.
- [14] E. Nuding and W. Wilhelm, Über Gleichungen und über Lösungen, *ZAMM* 52 (1972) T188–T190.
- [15] Ch. Papadimitriou and K. Steiglitz, *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1982).
- [16] H. Ratschek, Teilbarkeitskriterien der Intervallarithmetik, *J. Reine Angew. Mathematik* 252 (1972) 128–138.
- [17] H. Ratschek and J. Rokne, *New Computer Methods for Global Optimization* (Ellis Horwood, Chichester, 1988).
- [18] H. Ratschek and W. Sauer, Linear interval equations, *Computing* 28 (1982) 105–115.

- [19] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis* (Princeton University Press, Princeton, 1970).
- [20] J. Rohn, Input-output planning with inexact data, *Freiburger Intervall-Berichte* 78/9 (1978) 1–16.
- [21] J. Rohn, Input–output model with interval data, *Econometrica* 48 (1980) 767–769.
- [22] J. Rohn, Inner solutions of linear interval systems, in: K. Nickel, Ed., *Interval Mathematics 1985*, Lecture Notes in Comput. Sci. 212 (Springer-Verlag, Berlin, 1986) 157–158.
- [23] V.V. Shaidurov and S.P. Shary, Solving interval algebraic tolerance problem, Preprint #5/88, Computer Center of the Siberian Department of the USSR Academy of Sciences, Krasnoyarsk, 1987. (in Russian)
- [24] S.P. Shary, On compatibility of linear tolerance problem, *Interval Computations* 1 (1991) 92–98. (in Russian)
- [25] S.P. Shary, *Solving “outer” and “inner” problems for interval linear algebraic system*, Ph. D. dissertation, Institute for Mathematics and Mechanics, Ural Department of Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, 1992. (in Russian)
- [26] S.P. Shary, On controlled solution set of interval algebraic systems, *Interval Computations* 4 (6) (1992) 66–75.
- [27] S.P. Shary, On optimal solution of interval linear equations, *SIAM J. Numer. Anal.* 32 (1995), to appear.
- [28] S.P. Shary, Solving the tolerance problem for interval linear systems, *Interval Computations* (2) (1994) 6–26.
- [29] S.P. Shary, Algebraic approach to some interval problems, or One more application of Kaucher extended arithmetic, in: *INTERVAL'94, Abstracts, International Conference on Interval and Computer-Algebraic Methods in Science and Engineering, March 7–10, 1994* (St. Petersburg, 1994) 212–216.
- [30] S.P. Shary, Algebraic approach to the interval linear static observation, tolerance and control problems for interval linear systems, or One more application of Kaucher Arithmetic, *Interval Computations*, to appear.
- [31] N.Z. Shor, *Minimization Methods for Non-differentiable Functions* (Springer, Berlin, 1985).
- [32] N.V. Skybytsky and T. Yuping, Control of the linear dynamic plant with intervably given parameters from the guarantee condition of the required accuracy of the solution, *Interval Computations* 4(6) (1992) 88–93.
- [33] A.P. Voshinin and G.R. Sotirov, *Optimization Under Uncertainty Conditions* (MEI–Technika, Moscow, Sofia, 1990). (in Russian)
- [34] E. Walter and H. Piet-Lahanier, Estimation of parameter bounds from bounded-error data: a survey, *Math. Comput. Simulation* 32 (1990) 449–468.

- [35] A.V. Zakharov and Yu.I. Shokin, Synthesis of control systems under conditions of interval uncertainty in parameters of their mathematical models, *Doklady Akademii Nauk* 299 (2) (1988) 292–295. (in Russian)
- [36] V.S. Zyuzin, On a way of determination of two-sided approximations to the solution of system of the linear interval equations, in: *Differential Equations and the Theory of Functions* (Saratov State University, Saratov, 1987) 28–32. (in Russian)
- [37] V.S. Zyuzin, An interval arithmetic solution of a system of interval algebraic equations of first order, in: *International Symposium on Computer Arithmetic, Scientific Computation and Mathematical Modelling, Albena, Bulgaria, September 23–28, 1990 (SCAN-90)* (Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, 1990) 160–162.