МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
УКРАИНЫ
Львовский государственный университет
им. И. Франко

На правах рукописи

ВЕНГЕРСКИЙ Петр Сергеевич

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕРВАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ И ИССЛЕДОВАНИЯ ЭФФЕКТИВНЫХ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ЗАДАЧ

специальность 05.13.16 - применение вычислительной техники, математических методов и математического моделирования в научных исследованиях

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискания ученой степени кандидата
физико - математических наук

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ -
кандидат физико - математических наук,
доцент П.С.Сеньо

Львов - 1992

С О Д Е Р Ж А Н И Е

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время интервальный анализ применяется в различных областях народного хозяйства таких, как машиноведение, метрология и инженерия, экономическое моделирование и прогнозирование, медицина, космические исследования. Возросший интерес к применению интервальных методов обусловлен тем, что в ряде областей для решения практических задач приходится иметь дело с различного рода неопределенностями, вызванными следующими причинами [16]:

- как правило, для описания различных процессов и явлений используются приближенные математические модели;
- исходные данные в математических моделях либо неизвестны, либо приближенны;
- для решения задач применяются приближенные методы;
- в процессе решения задачи на ЭВМ возникает погрешность округления.

Удобным способом формализации таких неопределенностей является заключение их в объемлющие интервалы. Некоторые из интервальных методов являются расширениями соответствующих вещественных, поэтому рассмотрим сначала историю развития исследуемого типа методов в действительном пространстве.

Одной из наиболее важных проблем современной вычислительной математики является решения нелинейных уравнений, в частности, систем нелинейных алгебраических уравнений.

Пусть необходимо решить уравнение

$$f(x)=0, \qquad (1)$$

где $f(x)$ - функция действительного аргумента.

Большинство методов отыскания корней уравнения (I) предполагают, что заранее известны достаточно малые окрестности, в каждой из которых имеется только один корень уравнения. Принимая за начальное приближение корня одну из точек этой окрестности, можно с помощью известных методов [15] вычислить искомый корень с заданной точностью.

Таким образом, проблема приближенного вычисления корней уравнения (I) распадается на две задачи; задачу отделения корней, т.е. отыскания достаточно малых областей, в каждой из которых заключен один и только один корень уравнения; задачу вычисления корня с заданной точностью, если известно некоторое начальное его приближение в области, не содержащей других корней.

Первая задача значительно сложней, чем вторая. Для ее решения иногда выгодно применять графические методы, однако задача отделения корней алгебраического уравнения (I) изучена достаточно хорошо. Существуют методики Декарта, Бюдана - Фурье, Штурма, которые позволяют определить количество действительных корней системы, а также заключить эти корни в отдельные промежутки (в предположении, что задача (I) не имеет кратных корней).

Для решения уравнения вида (I) применяются в большинстве случаев итерационные методы. Наиболее простым из итерационных методов является метод итераций, в котором последовательные приближения, начиная с некоторого значения x_o, определяются по рекурентной формуле

$$x_{n+1} = \varphi (x_n), \ n=0,1, \ldots \qquad (2)$$

Если функция $\varphi(x)$ осуществляет сжатое отображение, то итерационный процесс (2) сходится к точному решению x^* уравнения (I) со скоростью типа геометрической прогрессии, причем решение x^* единственно. Основным недостатком данного метода является его медленная сходимость.

Одним из широко прменяемых итерационных методов решения нелинейных уравнений является метод Ньютона. Л.В.Канторович обобщил известный метод касательных Ньютона на функциональное уравнение

$$P(x) = 0, \qquad (3)$$

где $P(x)$ – оператор, действующий из одного банахова пространства X в другое банахово пространство Y. При этом была доказана фундаментальная теорема об обобщенном методе Ньютона [38]

$$x_{n+1} = x_n - [P'(x_n)]^{-1} P(x_n), \; n=0,1, \ldots \qquad (4)$$

В научной литературе метод (4) часто называют еще методом Ньютона - Канторовича. Исследованию и применению метода Ньютона, его разностных аналогов, модификаций, методов типа Ньютона посвящены работы Л.В. Канторовича [38]-[40], Л.В.Канторовича и Г.П.Акилова [4I], Л.Коллатца [43], М.А. Красносельского, Г.М. Вайникко и др. [44], В.Е. Шаманского [69], С.Ю. Ульма [66], М.К.Гавурина [30], Б.А. Бельтюкова [II] - [I2], В.А. Курчатова [45]-[47], М.Я. Бартиша [3],[4],[6] и других.

Используя разложение оператора $P(x)$ в окрестности приближения x_n по формуле Тейлора мы можем получить итерационные процессы высоких порядков сходимости [52],[7I]. Однако, существенным недостатком таких методов является то, что вычислительные схемы содержат производные высших порядков. Для вычисления их в конкретной точке требуется большой объем вычислений. Это недостатка лишены итерационные методы, содержащие лишь первую производную в разных точках и обладающие высоким порядком сходимости. К ним относятся методы, преложенные Т.И.Коган [42]

$$x_{n+1} = x_n - [P'(x_n - 1/2\,\Gamma_n P(x_n))]^{-1} P(x_n),\ n=0,1,\ldots \qquad (5)$$

и М.Я.Бартишем [5]

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma_n [P'(x_n + 1/2\,\Gamma_n P(x_n))]^{-1} \Gamma_n' P(x_n),\ n=0,1,\ldots \qquad (6)$$

а также целые классы методов, зависящих от некоторых вещественных параметров, предложенные в [8],[35]

$$x_{n+1}=x_n-[(1-\beta)P'(x_n)+\beta P'(x_n - 1/(2\beta)\Gamma_n P(x_n))]^{-1}P(x_n), \qquad (7)$$

$n=0,1,2,\ldots,$

и в работе [56]

$$x_{n+1}=x_n-[(1-\beta)\Gamma_n+\beta\Gamma(x_n - 1/(2\beta)\Gamma_n P(x_n))]P(x_n), \qquad (8)$$

$n=0,1,2,\ldots,$

где $\beta \neq 0$ - произвольное вещественное число, $\Gamma_n = \Gamma(x_n)=[P'(x_n)]^{-1}$. Отметим, что методы (5)-(8) имеют третий порядок сходимости. Исследование такого типа методов посвящены работы Д.К.Лики [48], А.Роозе [56], В.Полля [55], В.М.Чернышенко [68], В.С.Гребенюк [34], М.Я.Бартиша и П.С. Сеньо [8], Шахно [73] и других.

В дальнейшем было предложено сохранять в методе Ньютона оператор $\Gamma = [P'(x)]^{-1}$ постоянным на фиксированном числе итераций. Как оказалось, при этом повышается эффективность метода Ньютона. Эту идею использовали при построении итерационных методов И.Трауб [117], В.Е.Шаманский [69], В.А.Вельтюков и

С.С.Волокитин [14], М.Я.Бартиш и Ю.Н.Щербина [9]. Л.Л.Роман [7], С.М.Шахно [72] и другие.

Одним из способов повышения эффективности итерационных методов является применение аппроксимации обратного оператора. Так сходимость метода Ньютона с последовательной аппроксимацией обратного оператора

$$x_{n+1} = x_n - A_n P(x_n),$$

$$A_{n+1} = A_n [2 I - P'(x_{n+1}) A_n], \; n=0,1,2, \dots ,$$

где A_0 - некоторое начальное приближение к оператору $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$; исследована в работе С.Ю.Ульма [67]. Развитие этого направления посвящены работы О.М.Ваармана [18], В.М.Вержбицкого [27], В.А.Шафиева [70], В.М.Вержбицкого и З.В.Цалюка [28] и других.

В последнее время значительное внимание уделяется исследованию итерационных методов на устойчивость. В большинстве случаев при теоретических исследованиях алгоритмов предполагается, что вычислительный процесс является идеальным. Однако, на практике вычисления ведутся с конечным числом разрядов. Кроме того, каждый вычислительный процесс сопровождают погрешности метода, начальных данных, а также округлений(аппроксимаций). Совокупно все эти погрешности могут полностью нарушить сходимость метода и даже при получении предельного элемента нет уверенности, что найдено искомое решение. Решив аппроксимационную задачу, необходимо дополнительно выяснить степень близости полученного решения ее к искомому решению исходной задачи. Один из подходов изучения влияния погрешностей, сопровождающих процесс решения нелинейных уравнений рассмотрен в работах М.Д.Бабича и В.В. Иванова [2], И.В.Бойкова и И.И.Жечева [17], М.Я.Бартиша И Ю.Н.Щербины [10], Б.А.Бельтюкова [13], В.А.Курчатова [46], П.С. Сенью [58] и других. Другой подход основан на применении к решению уравнений интервальных итерационных методов, которые свободны от всех перечисленных недостатков. Такому подходу посвящены работы Ю.И.Шокина, С.А. Калмыкова и З.Х.Юлдашева [37], Н.М.Глазунова [32], А.П.Вощинина и Г.Р.Сотирова [29], З.Х.Юлдашева [76], Б.С.Добронца и В.В.Шайдурова [36], Э.А.Мусаева [49], Мура [106], Г.Алефельда и Ю.Херцбергера [1] и других. Рассмотрим более подробно некоторые из интервальных методов.

Пусть функция $f(x)$ задана на интервале $[a,b]$ и имеет непрерывную производную $f'(x)$. Допустим также наличие интервального расширения $F'(X)$ функции $f'(x)$, определенного при всех $X \subset [a,b]$. Для отыскания нулей функции $f(x)$ наиболее часто используется интервальный метод Ньютона

$$N(X^{(k)}) = m(X^{(k)}) - \frac{f(m(X^{(k)}))}{F'(X^{(k)})}, \tag{9}$$

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} \cap N(X^{(k)}), \; k=0,1,2, \ldots \tag{10}$$

Этот метод был исследован многими авторами, среди которых работы Мура [106] - [108], Ки Ли-Куна [112], Оельшлегеля и Зюзе [109], Г.Алефельда и Ю.Херцбергера [1] и других. В этих работах было доказано, что метод (9)-(10) имеет квадратичную сходимость. Сравнительно медленная сходимость этого метода обусловила построение Г.Алефельдом [79] метода

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} \cap N(X^{(k)}), \; k=0,1,2,\ldots \qquad (11)$$

$$N(X^{(k)}) = m(X^{(k)}) - \frac{f(m(X^{(k)}))}{f'_m(X^{(k)}) \cap f'(X^{(0)})} \qquad (12)$$

$$f'_m(X^{(k)}) = f'(m(X^{(k)})) + f''(X^{(k)})(X^{(k)} - m(X^{(k)})),$$

$$m(X^{(k)}) \in X^{(k)}, \; k = 0,1,2, \ldots ,$$

который имеет кубический порядок сходимости. Метод такого порядка был также построен Кравчиком [97]

$$x^{(k)} = m(X^{(k)}) \in X^{(k)}, \; k=0,1,2,\ldots, \qquad (13)$$

$$X^{(k+1)} = (x^{(k)} - (1/f'(x^{(k)}))(f(x^{(k)}) +$$

$$+1/2!\, f''(X^{(k)})(X^{(k)} - x^{(k)})^2)) \cap X^{(k)}, \; k \geq 0 \qquad (14)$$

в предположении, что f дважды дифференцируема. В методах (II)-(I2), (I3)-(I4) мы должны на каждом шаге производить интервальное оценивание второй производной $f''(X^{(k)})$. Это значительно увеличивает объем вычислений, и поэтому использование этого метода на практике проблематично. Кроме того, интервальные методы (9)-(I0), (II)-(I2) требуют обращения интервальных матриц, что занимает тоже немало времени. Поэтому, Кравчиком [96] предложен такой метод:

$$X^{(k+1)} = K(X^{(k)}) \cap X^{(k)}, \qquad (15)$$

$$K(X^{(k)}) = x^{(k)} - yf(x^{(k)}) + (1 - yF'(X^{(k)}))\times$$

$$\times(X^{(k)} - x^{(k)}), \; x^{(k)} \in X^{(k)}, \; y \in R. \qquad (16)$$

Этот метод более детально был исследован для решения систем нелинейных уравнений в работах [86], [I05], [I08]. Очевидным кандидатом на роль y является $m(f'(X^{(k)}))^{-1}$. Нахождение этой матрицы требует обращения точечной матрицы. При реализации метода (15)-(16) мы производим некоторое число умножений матриц на матрицы и некоторое число умножений матриц на векторы для проверки включений. Существенную часть этих умножений можно сэкономить, если применить метод Гаусса к некоторой системе линейных уравнений, у которой матрица коэффициентов точечная y, а правая часть - интервальный вектор $f(x^{(k)}) \underset{r}{-} (y - F'(X^{(k)}))(X^{(k)} - x^{(k)})$. Этот подход рассматривается в работах [94],[98],[101].

Для ускорения сходимости интервальных методов вида (15)-(16) были построены методы, в которых участвует вычисление в интервальной арифметике второй производной. В [1] для $K(X^{(k)})$ предложены следующие варианты интервальных векторов

$$K_1(X^{(k)})=m(X^{(k)})-Yf(m(X^{(k)}))-Y(f''(X^{(k)})(X^{(k)}-m(X^{(k)}))\times$$
$$(X^{(k)}-m(X^{(k)}))),\quad Y=f'(m(X^{(k)}));$$

$$K_2(X^{(k)})=m(X^{(k)})-Yf(m(X^{(k)}))-1/2(Yf''(X^{(k)}))(X^{(k)}-m(X^{(k)}))\times$$
$$(X^{(k)}-m(X^{(k)}))),\quad Y=f'(m(X^{(k)}));$$

$$K_3(X^{(k)})=m(X^{(k)})-Yf(m(X^{(k)}))+(I-Y\,f'(m(X^{(k)}))\ -m(X^{(k)}))\times$$
$$-1/2(Yf''(X^{(k)}))(X^{(k)}-m(X^{(k)})))(X^{(k)}-m(X^{(k)}));$$

с произвольной невырожденной матрицей Y.

Эти методы хотя обладают более высокой сходимостью, чем метод (15)-(16), но наличие в них интервальной второй производной и возрастание объема вычислений уменьшает сферу их применения. Поэтому был рассмотрен иной подход к построению интервальных методов высокой сходимости. Так в работах П.С.Сеньо [59], [60] предложены алгоритмы интервальных методов, которые содержат интервальные расширения первых производных, вычисленных в разных точках.

Для нахождения решений уравнений и систем специального вида построены модификации интервального метода Ньютона, которые учитывают структуру уравнения или системы. В работе Хансена и Сенгупты [89] построен следующий метод:

$$X^{(k+1)} = Y^{(k)} \cap X^{(k)}, \tag{17}$$

$$Y^{(k)} = m(X^{(k)}) - D(X^{(k)})^{-1}(B(X^{(k)})(m(X^{(k)}) - X^{(k)}) +$$

$$+ f(m(X^{(k)})); \quad k \geq 0, \tag{18}$$

где $F'(X^{(k)}) = D(X^{(k)}) - B(X^{(k)})$;

$D(X^{(k)})$ – содержит диагональ матрицы $F'(X^{(k)})$,

в котором требуется вычисление обратной интервальной матрицы, но эта операция осуществляется достаточно просто. Модификация метода (17)-(18) рассмотрена в работе [1], где представлен следующий алгоритм

a) $F^{(k)} = f'(X^{(k)}) = D(X^{(k)}) - B(X^{(k)})$;

b) применение метода Гаусса к $F^{(k)}$ и $f(m(X^{(k)}))$ дает $W^{(k)}$;

c) $$\bar{X}^{(k)} = (m(X^{(k)}) - W^{(k)}) \cap X^{(k)}; \tag{19}$$

d) $$Y^{(k+1)} = (m(X^{(k)}) - D(X^{(k)})^{-1}(B(X^{(k)})(m(X^{(k)}) - \bar{X}^{(k)}) +$$

$$+ f(m(X^{(k)}))) \cap \bar{X}^{(k)}; \quad k \geq 0, \tag{20}$$

Шаг d) этого алгоритма требует $\sim n^2$ операций (интервальных умножений и делений) для неразреженной матрицы. Из того. что шаг b) требует $\sim n^3/3$ операций следует, что объем вычислений на d) несуществен при больших n. Методы этого вида применяются при решении многих задач. Известно, что решение дискретизированной граничной задачи классическим методом Ньютона не представляет проблем, когда функция правой части дифференциального уравнения выпукла. Однако в невыпуклом случае сходимость удается доказать лишь для начальных значений, достаточно близких к решению. Для методов (17)-(18), (19)-(20) не нужно условие выпуклости. Исследованию методов такого вида посвящены работы [85], [86], [105]. Разные модификации интервального метода (17)-(18), приведены в работах Корнелиуса [83],[84], где с помощью методов этого вида решались краевые задачи эллиптического типа.

Выше упомянутую дискретизированную граничную задачу более удобно решать методами, близкими к итерационным методам из [53], [83]. В [1] рассмотрен один из таких методов, а именно

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} - P^{(k)} f(y^{(k)}),$$
$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - P^{(k)} f(x^{(k)}),$$
$$P^{(k+1)} = P^{(k)} - P^{(k)}(B(x^{(k+1)}, y^{(k+1)})P^{(k)} - I), k \geq 0,$$

где $B(x^{(k+1)}, y^{(k+1)})$ - верхняя граница в интервальном вычислении производной $f'(x)$.

Исследованию методов такого вида посвящены работы Шмидта [113], [114], Шмидта и Леонардта [115]. Метод, представленный выше фактически использует интервальное вычисление только для оценки верхней границы матрицы производных, в остальном вычисления ведутся в действительном пространстве. Этот метод имеет квадратичную сходимость. Используя рекурсивные аналоги этого метода и проведя обращение матрицы $P^{(k)}$ с помощью метода более высокого порядка можна повысить порядок сходимости таких методов.

Учитывая затронутые выше вопросы, требующие дальнейшего исследования, дальнейшего развития, сформулируем основную цель настоящей работы.

Целью диссертационной работы является:
I) исследование особенностей реализации интервальных итерационных методов при решении систем нелинейных уравнений, применение различных подходов к введению действий в интервальном пространстве;
2) построение новых классов интервальных итерационных методов для решения систем нелинейных уравнений, исследование условий их сходимости, определение количества шагов для выяснения существования решений в начальных интервалах;
3) установление границ устойчивости интервальных методов данного класса, рассмотрение различных правил нахождения допустимых областей сходимости рассмотренных методов;
4) применение полученных интервальных итерационных методов к решению систем нелинейных алгебраических уравнений, граничных задач специального вида, к нахождению численных решений некоторых нелинейных краевых задач;
5) автоматизация выполнения интервальных вычислений на современных ЭВМ, создание библиотеки основных стандартных подпрограмм интервального анализа.

Преследуемые в работе цели с теоретической точки зрения и область применения результатов свидетельствуют об актуальности выбранной тематики.

Научная новизна. В работе получены следующие новые результаты:

- предложен новый способ определения интервальных операций, обладающий свойством дистрибутивности;
- рассмотрено специфику реализации разных модификаций интервального метода Ньютона, получены простые условия сходимости одной из них;
- предложен новый класс интервальных итерационных методов типа Рунге, обоснованы основы их построения;
- построены и исследованы разные модификации интервальных итерационных методов типа Рунге, доказана сходимость построенных методов, установлено количество шагов необходимых для выяснения принадлежности решения начальному интервалу;
- обоснованы условия устойчивости одного вида интервальных итерационых методов типа Рунге;
- исследован выбор наиболее эффективного правила вычисления допустимой области расcмотренного класса интервальных методов;
- предложенные методы применены для решения конкретных задач (систем нелинейных алгебраических уравнений, граничных задач специального вида, краевых задач эллиптического типа). На примерах проведено сравнение эффективности использования предложенных методов и известных;
- создан препроцессор интервальных вычислений, который позволяет использовать интервальные данные наравне с другими типами данных, не нарушая структуру применяемого языка программирования.

Достоверность основных научных результатов обеспечивается строгим математическим доказательством сформулированных теорем, путем решения тестовых примеров и сравнением полученных приближенных решений с точными, анализом и сравнением приближенных решений с расчетами по другим методам.

Практическая ценность. Построенные и исследованные вычислительные алгоритмы разных модификаций интервальных итерационных методов типа Рунге находят все действительные корни, в том числе и кратные, в наперед заданном произвольном начальном интервале. Эти методы можно эффективно применять для решения систем нелинейных алгебраических уравнений, систем нелинейных уравнений, полученных при решении граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, а также решении краевых задач в частных производных эллиптического типа. Рассмотренные методы учитывают погрешности всех типов, включая округление машинных операций. Значительное внимание в работе уделяется вопросам, связанным с реализацией предложенных методов на ЭВМ. Разработан препроцессор для автоматизации реализации интервальных вычислений на алгоритмическом языке Паскаль на компьютерах типа IBM PC/XT/AT. Составлена библиотека подпрограмм стандартных интервальных операций и интервальных расширений основных математических функций. Алгоритмы полученных интервальных методов реализованы в виде отдельных подпрограмм и могут быть использованы при решении задач рассмотренных типов для разных начальных данных. Результаты работы используются при чтении спецкурсов на кафедре теории оптимальных процессов Львовского госуниверситета.

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка цитируемой литературы.

В первой главе рассматриваются особенности реализации интервальных методов при решении систем нелинейных уравнений. Эта глава носит вспомагательный характер, но может представлять и самостоятельный интерес. В § I.I в сжатой форме изложены некоторые сведения из интервального анализа. Приведены основные свойства выполнения интервальных операций. Введено новое правило определения интервальных операций, благодаря которому справедливо свойство дистрибутивности. При выполнении операции деления, когда интервал - делитель содержит ноль, рекомендовано использовать расширенную интервальную арифметику. Для учета округлений машинных операций приведены направления округлений граничных значений интервалов и рассмотрены некоторые свойства машинных операций. Особое внимание в этом параграфе уделяется проблеме вычисления интервальных расширений функций, так как от этого зависит в конечном итоге ширина результируемого интервала. § I.2 посвящен исследованию интервальных методов ньютоновского типа. Рассмотрено основы построения интервальных методов Ньютона для решения систем нелинейных уравнений. Приведены разные модификации интервальных итерационных методов этого типа (в интерпретации Гаусса, Кравчика, Хансена). Доказана сходимость интервальной версии метода Ньютона за Кравчиком и в итоге получено простое условие, которое удобно проверять при использовании этого интервального метода. Исследованы вычислительные аспекты применения интервальных методов Ньютона. Указаны приемы уменьшения объема вычислений и сокращении времени счета при реализации алгоритмов этих методов на практике. Приведенный в первой главе экспериментальный и теоретический материал используется в дальнейшем для построения и исследования других интервальных методов решения систем нелинейных уравнений.

Вторая глава посвящена исследованию различных модификаций интервальных итерационных методов типа Рунге. В § 2.I дается обоснование и основные предпосылки построения интервальных методов такого класса. Построены некоторые виды интервальных методов типа Рунге, которые включают в себя итерации подобные интервальному методу Ньютона. В § 2.2 построена модификация одного типа интервальных методов типа Рунге в интерпретации Гаусса. Проведено исследование сходимости построенного интервального метода. Определены основные свойства методов, такого типа, получены условия применения этих методов для решения систем нелинейных уравнений. Рассчитано количество шагов метода , необходимых для определения наличия решения задачи в начальных интервалах. В § 2.3 приведено построение интервального метода типа Рунге, который не содержит обращений интервальных матриц. Исследуется также сходимость рассмотренного метода.Определен порядок сходимости этого вида интервальных методов типа Рунге. Отмечено возможность увеличения порядка сходимости метода при выполнении определенных условий. § 2.4 посвящен аспектам устойчивости интервальных методов типа Рунге. Проведено исследование влияния возмущений обратного оператора и начальных данных при сохранении порядка сходимости интервальных методов. Рассматриваются правила выбора начального вектора и начального обратного оператора. Построен рекурсивный аналог построенного метода, который при выполнении ранее налагаемых условий, сходится с более высоким порядком, чем метод в обычной форме.

В третьей главе предложенные интервальные итерационные методы применяются к решению конкретных нелинейных систем уравнений. Так в § 3.I рассмотрено применение различных модификаций интервальных методов типа Рунге § 2.I к решению систем нелинейных алгебраических уравнений разной размерности. Отображена динамика изменения границ интервала, включающих решение системы. Обсуждаются вопросы выбора параметра метода, вопросы целесообразности применения методов к решению систем различных типов. Проводится аппробация интервальных методов типа Рунге без обращений интервальных матриц при решении систем уравнений,которые содержат и кратные корни. Схема размещения корней систем и вид поверхностей этих систем подтверждают степень сложности решения этих систем. Приведены результаты расчетов, подтверждающие теоретические выводы. Проведено сравнение результатов рассмотренных методов и известной модификации интервального метода Ньютона. Для отдельно взятых корней системы найдены допустимые области используемых методов. Проведено сравнение размерности допустимых областей этих методов и интервального метода Ньютона. Анализируется сходимость этого типа интервальных методов и соответствующих классических методов. Полученные оценки дают возможность сделать вывод об эффективности интервальных итерационных методов типа Рунге. § 3.2 посвящен применению алгоритмов интервальных методов типа Рунге к решению систем нелинейных уравнений специального вида. Рассмотрен один класс таких систем, который удовлетворяет всем условиям применимости метода § 2.4. Показано, что к такому типу систем нелинейных уравнений сводятся граничные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Построены разностные схемы со вторым порядком аппроксимации этого вида граничных задач. Решены тестовые примеры. Анализируется сходимость интервальных методов при разном выборе начальных интервалов. Проведено сравнение результатов вычислений рассматриваемых методов и известных интервальных методов такого типа. В § 3.3 построен один вид интервальных методов типа Рунге, который учитывает структуру интервальной матрицы производных. Указано преимущества использования даного интервального метода при решении систем нелинейных уравнений из сильно доминирующей диагональю. Доказывается сходимость предложенного интервального метода к решению задачи. В качестве примера использования этого вида интервальных методов рассматривается краевая задача в частных производных эллиптического типа. Построена разностная схема аппроксимации этой задачи. Показано выполнение условий применимости построенного метода к решению полученной системы нелинейных уравнений. Решены конкретные краевые задачи. Проведено сравнение результатов вычислений предложенного интервального метода и подобной модификации интервального метода Ньютона. Обсуждаются преимущества применения этого интервального метода при задании начальных данных с большой мерой неопределенности.

В главе четвертой рассмотрено использование интервального типа данных при программировании вычислительных алгоритмов на стандартном языке Паскаль для IBM PC. Построен пфепроцессор, который дает возможность пользователю, не заботясь о внутренних операциях с интервалами, использовать их наряду с ранее известными данными. При этом расширена конструкция условного оператора, так как в реальности приходится иметь дело с множеством значений, выходящих за границы значений истинно и ложно. Расширено набор операций отношений, что вызвано дополнением стандарта типов отношений на арифметику чисел с плавающей точкой. Предусмотрен процесс ввода - вывода интервальных данных, что удобно при ведении диалога пользователя с программой. Предлагаемый препроцессор вместе с преобразованием программы осуществляет синтаксический и семантический анализ на уровне препроцессора. Создана специализированная библиотека стандартных подпрограмм интервального анализа. Для обработки препроцессором файлов с интервальными программами составлен набор командных файлов. Работа препроцессора иллюстрируется на примере отыскания действительных решений системы нелинейных уравнений интервальным методом Кравчика. Тексты программ и полученные по ним результаты помещены в приложении к работе.

В заключении приведены краткие выводы из диссертационной работы.

На защиту выносятся основные результаты, которые состоят в следующем.

1.Дается обоснование и приведены предпосылки построения интервальных итерационных методов типа Рунге.

2.Построены эффективные алгоритмы разных версий одного из видов интервальных методов типа Рунге, включающих итерации подобные интервальному методу Ньютона.

3.Предложен и исследован один из интервальных итерационных методов типа Рунге в интерпретации Гаусса.

4.Доказано утверждение о количестве шагов необходимых осуществить предложенным интервальным методом для определения наличия решения задачи в начальном интервале.

5.Построена и исследована модификация интервального метода типа Рунге, исключающая обращения интервальных матриц.

6.Рассмотрен вопрос об устойчивости интервальных методов типа Рунге при возмущениях обратного оператора и начальных данных.

7.Детально обсуждены вычислительные аспекты применения интервальных методов типа Рунге к нахождению всех действительных корней систем нелинейных алгебраических уравнений, к решению систем нелинейных уравнений специального вида, полученных из граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

8.Предложен и исследован интервальный метод, учитывающий доминирующую роль диагонали матрицы производных и показано эффективное применение его к решению систем нелинейных уравнений, выходящих из краевых задач в частных производных эллиптического типа.

9.Построен препроцессор для автоматизации реализации интервальных алгоритмов на персональных ЭВМ.

10.При помощи вычислительных экспериментов проведено сравнение результатов предложенных алгоритмов с алгоритмами известных интервальных методов.

Изложенные результаты работы докладывались на научных конференциях профессорско - преподавательского состава Львовского госуниверситета, семинарах кафедры теории оптимальных процессов Львовского госуниверситета (1986 - 1992 г.г.), на научно - технических конференциях по применению вычислительной техники и математических методов в научных и экономических исследованиях (1989 - 1991 г.г.), на Шестой Всесоюзной конференции по управлению в механических системах (1988 г.).

Основные результаты диссертационной работы изложены в 11 публикациях [20] - [26],[61] - [64].

Нумерация формул двойная. Первое число означает номер главы, второе - порядковый номер формулы в пределах данной главы.

В заключение автор выражает глубокую и искреннюю благодарность научному руководителю кандидату физико - математических наук, доценту Сеньо П.С. за постоянное внимание, оказываемое им в процессе выполнения данной работы.

Глава I. Специфика реализации интервальных методов ньютоновского типа при решении систем нелинейных уравнений.

При применении интервального анализа к решению разного рода задач важным является то, как обобщить арифметику вещественных чисел в интервальном пространстве. Существует много различных подходов к представлению интервалов и определению операций над ними [1],[81],[90],[92],[93],[100],[105],[111]. В этой работе помимо стандартного подхода, предложенного Р.Муром в [105], рассматривается нетрадиционный подход, в котором результатом интервальной операции является множество, полученное при соответствующей обычной операции над вещественными числами, выбранными из исходных интервалов за определенным законом. При этом изменяются свойства интервальных операций и интервальное оценивание множества значений вещественных функций. Для реализации операции деления, когда ноль принадлежит интервалу-делителю, рекомендуется использовать расширенную интервальную арифметику. В процессе реализации интервальных операций на вычислительной машине образуются погрешности округлений. Это требует замены границ интервалов машинными числами из сохранением всех правил интервального анализа.

В последнее время особенно интенсивно разрабатываются интервальные методы решения систем нелинейных уравнений. Классические итерационные методы решения нелинейных систем уравнений имеют ряд существенных недостатков, часто утрудняющих их применение. В частности, для их реализации необходимо "хорошее" начальное приближение. Кроме этого, в окрестности начального приближения должен быть лишь один корень системы. Если искомый корень кратный, то дополнительно нужно знать порядок кратности такого неизвестного корня. Большинство классических итерационных методов имеют локальную сходимость к искомому решению (при условии выполнения довольно жестких ограничений). Каждый реальный вычислительный процесс сопровождают погрешности метода, начальных данных, а также округлений (аппроксимаций). Совокупно все эти погрешности могут полностью нарушить сходимость метода (в частности, при его неустойчивости), и даже при получении предельного элемента нет уверенности в том, что найдено искомое решение. Решив аппроксимационную задачу, необходимо дополнительно выяснить степень близости полученного решения ее к искомому решению исходной, неаппроксимированной задачи.

Интервальные итерационные методы свободны от всех перечисленных выше недостатков. Кроме этого, они имеют ряд преимуществ, а именно:

1)интервальные методы находят все действительные корни системы на выделенном интервале, в том числе и кратные;

2)ограничения на применения этих методов (кроме естественных) отсутствуют;

3)не предполагается известной кратность и порядок кратности корней системы;

4)методы обладают глобальной сходимостью;

5)построенные методы учитывают действие всех типов погрешностей и они достаточно устойчивы.

Этим в первую очередь определяется целесообразность и эффективность использования интервальных итерационных методов.

В настоящей главе мы остановимся на анализе методов, которые являются обобщением в рамках интервального анализа известных итерационных методов Ньютона. Рассмотрим модификации интервальных методов Ньютона и способы их применения для разных типов систем нелинейных уравнений.

§ I.I Особенности реализации интервальных вычислений.

Далее мы будем использовать стандартные обозначения, принятые в [I]. Если $\underline{x},\bar{x} \in R$ $(\underline{x} \le x \le \bar{x})$, то множество $X=[\underline{x},\bar{x}]=\{x \in R,\ \underline{x} \le x \le \bar{x}\}$ является интервалом; при $x=\underline{x}=\bar{x}$ – X вырожденный интервал. Обозначим через $m(X)=1/2(\underline{x}+\bar{x}) \in R$ арифметическую среднюю точку интервала X; $w(X)=\bar{x}-\underline{x} \in R$ – ширину интервала X. Также будем обозначать $m(X)$ символом $\tilde{x}$. Множество всех замкнутых вещественных интервалов обозначим через $I(R)$. Всякое число $x \in R$ можно считать елементом с $I(R)$, имеющим вид $[x,x]$, и будем называть его точечным интервалом.

<u>Определение I.</u> (см.[I],[2]) Если $*$ - бинарная операция на множестве вещественных чисел; $X.Y \in I(R)$, тогда

$$X*Y=\{z \mid z=x*y, \forall x \in X,\ \forall y \in Y\} \qquad (1.1)$$

определяет бинарную операцию на $I(R)$.

Пусть $z=\varphi(x,y)=x*y$, где $* \in \{+,-,\cdot,/\}$ – непрерывная функция на компактном множестве. Следовательно, $\varphi(x,y)$ принимает как наименьшее и наибольшее значения, так и все прочие значения между ними. Границы результата интервальной операции (I.I) - это наименьшее и наибольшее значения функции $\varphi(x,y)$. Результат $X*Y$ - также замкнутый (в случае деления $0 \notin Y$) вещественный интервал. Из сказанного выше следует замкнутость множества $I(R)$ относительно введенных таким образом операций, а также изоморфизм между вещественными числами $x, y, \ldots$ и интервалами $[x,x], [y,y], \ldots$. Набор операций вида (I.I) может быть дополнен другими традиционными, в основном, унарными операциями.

Укажем наиболее важные свойства операций вида (I.I) в $I(R)$. Одним из них, является свойство монотонности по включению, т.е. если $A, B, C, D \subset I(R)$ и $A \subset C$, $B \subset D$, то

1) $A+B \subset C+D$;

2) $A-B \subset C-D$;

3) $A\ B \subset C\ D$;

4) $A / B \subset C / D$ (если $0 \notin D$).

Определение 2. Пусть $A=[a_1, a_2] \in I(R)$. Абсолютной величиной интервала A называем величину

$$|A| = \max \{ |a_1|, |a_2| \} = \max_{a \in A} |a|.$$

Если $A, B \in I(R)$, то

5) $A \subseteq B \Rightarrow |A| \leq |B|$;

6) $|A| \geq 0$ и $|A| = 0 \Leftrightarrow A=[0,0]$;

7) $|A+B| \leq |A| + |B|$;

8) $|x\ B| = |x|\ |B|$ при $x \in R$;

9) $|A\ B| = |A|\ |B|$.

Определение 3. Шириной интервала A называем величину

$$\omega(A) = a_2 - a_1 = \max_{a, b \in A} |\ a-b\ | \geq 0.$$

Для ширины имеем следующие свойства:

10) $A \subseteq B \to \omega(A) \le \omega(B)$ и $\omega(C-A) \le \omega(C-B)$, $C \in I(R)$;

11) $\omega(A \mp B) = \omega(A) + \omega(B)$;

12) $\omega(A\ B) \le \omega(A)\ |B| + \omega(B)\ |A|$;

13) $\omega(A\ B) \ge \max\ (\ |A|\ \omega(B),\ |B|\ \omega(A)\ )$;

14) $\omega(x\ B) = |x|\ \omega(B)$, $x \in R$;

15) $\omega(A^n) \le n\ |A|^{n-1}\omega(A)$, $n=1,2,3,\ldots$;

16) $\omega((A-a)^n) \le 2\ (\omega(A))^n$, $a \in A$.

Если $C \in I(R)$ и $0 \in C$, то

17) $|C| \le \omega(C) \le 2|C|$.

Если A - симметричный интервал, т.е. $A=-A$, то

18) $A\ B = |B|\ A$;

19) $\omega(A\ B) = |B|\ \omega(A)$.

Если $b_1 \ge 0$ или $b_2 \le 0 (B=[b_1,\ b_2])$, то свойство 19) выполняется и в случае, когда $0 \notin A$.

20) $\omega(A) = |A - A|$;

21) $0 \notin A \to \omega(1/A) \le 1/|A|^2\omega(A)$;

22) $0 \in A,\ 0 \in B \to \omega(A\ B) \le \omega(A)\ \omega(B)$.

<u>Определение 4.</u> Пересечением двух интервалов называют величину

$$A \cap B = \{\ c\ |\ c \in A,\ c \in B\ \}.$$

Если $A=[\ a_1,a_2\ ]$, $B=[\ b_1,b_2]$, то

23) $A \cap B = [\max\ (\ a_1,b_1),\min\ (\ a_2,b_2)\ ]$;

24) $A \subseteq C,\ B \subseteq D \to A \cap B \subseteq C \cap D$;

25) $\omega(A \cap B) \le \min\ (\omega(A),w(B))$.

Доказательства соотношений 1)-25) приведены в работах многих авторов (см., например, [1],[100],[105]).

Особо следует остановиться на случае деления интервалов. Когда интервал-делитель содержит нуль, тогда приходиться переходить к действиям с бесконечными интервалами (применять расширенную интервальную арифметику).

Пусть $A=[a_1,a_2]$, $B=[b_1,b_2]$, $0 \in B$. Тогда при делении интервалов получаем

$$A/B=\begin{cases} [a_2/b_1,\ +\infty], & \text{если } a_2\le 0 \text{ и } b_2=0;\\ [-\infty,\ a_2/b_2]\cup[a_2/b_1,\ +\infty], & \text{если } a_2<0, b_1<0 \text{ и } b_2>0;\\ [-\infty,\ a_2/b_2], & \text{если } a_2\le 0 \text{ и } b_1=0;\\ [-\infty,\ a_1/b_1], & \text{если } a_1\ge 0 \text{ и } b_2=0;\\ [-\infty,\ a_1/b_1]\cup[a_1/b_2,\ +\infty], & \text{если } a_1>0, b_1<0 \text{ и } b_2>0;\\ [a_1/b_2,\ +\infty], & \text{если } a_1\ge 0 \text{ и } b_1=0;\\ [-\infty,+\infty], & \text{если } a_1<0 \text{ и } a_2>0. \end{cases}$$

Результаты операции деления интервалов, например, при вычитании используются так:

$$x-[c,\ +\infty]=[-\infty,\ x-c];$$

$$x-[-\infty,\ d]=[x-d,\ +\infty];$$

$$x-[-\infty,+\infty]=[-\infty,\ +\infty];$$

$$x-[-\infty,d]\cup[c,\ +\infty]=[-\infty,x-c]\cup[x-d,\ +\infty].$$

При реализации интервальных операций на ЭВМ необходимо учитывать машинное округление чисел. Подобно тому, как вещественные числа приближаются с помощью машинных чисел, так и вещественные интервалы приближаются машинными интервалами. Для того, чтобы основные свойства интервальных операций были справедливы и для машинных интервальных операций, необходимо применять направленное округление. А именно, для получения интервала-результата надо левую и правую границы искомого интервала сдвинуть по ниже описанной схеме на единицу младшего разряда соответствующего числа в зависимости от знака и порядка этого числа.

Пусть R_m - множество машинных чисел. Если

$$A = [\underline{a}, \bar{a}] \in I(R),$$

то

$$\inf R_m \le \underline{a} \le \bar{a} \le \sup R_m .$$

Обозначим: $\downarrow x$ - число x, округленное вниз; $\uparrow x$ - число x, округленное вверх. Тогда интервальное число A в R_m можна записать следующим образом

$$\Diamond : I(R) \ni A \to \Diamond A = [\downarrow \underline{a}, \uparrow \bar{a}] = \{ x \in R_m \mid \downarrow \underline{a} \le x \le \uparrow \bar{a}, \downarrow \underline{a}, \uparrow \bar{a} \in R_m \}.$$

Для операции $\Diamond$ справедливы следующие свойства (см. [37]):

26) $A \subset \Diamond A$, $A \in I(R)$;

27) $A \subset B \to \Diamond A \subset \Diamond B$;

28) $A, B \in I(R_m)$, $* \in \{+, -, \cdot, /\} \to \Diamond(A * B) \subset I(R_m)$;

29) $A, B, C, D \subset I(R_m)$, $A \subset B, C \subset D \to \Diamond(A * C) \subset \Diamond(B * D)$;

Из свойств 26)-29) следует справедливость основной теоремы интервального анализа в $I(R_m)$[37]. Интервал получается наиболее узким, если правые положительные и левые отрицательные границы округлять по модулю вверх, а соответственно левые положительные и правые отрицательные - вниз. Все эти поправки следует учитывать при практической работе с интервальными величинами на ЭВМ [20].

Рассмотрим теперь понятие интервального расширения вещественной функции f. Пусть для f имеется аналитическое выражение. Заменив в этом выражении все вещественные операнды и операции, получим выражение $f(X)$. Если все операнды попадают в области, на которых заданы интервальные операции, то через $F(X) = f(X)$ будем обозначать интервальное расширение $f(x)$ (Многие авторы называют функцию $f(X)$ естественным интервальным расширением).

<u>Определение 5.</u> Интервальные функции $F: I(B) \to I(R^n)$, где $B \subset R^n$, называются интервальным замыканием f, если

$$f(X) \subset F(X), \quad X \in I(B), \tag{I.2}$$

Пусть $\underline{f}(x)$ и $\bar{f}(x)$ – функции, определенные на $B \subset R^n$, и известно, что $\underline{f}(x) \le - \bar{f}(x)$ для всех $x \in B$, тогда $F_s(x)=[\underline{f}(x), \bar{f}(x)]$, $s \in N$ называется функциональным штрафом на B. Область значений функции f на X обозначаем $W(f(X))=\{f(x) \mid x \in X\}$.

Заметим, что интервальное расширение функции существенно зависит от порядка проведения необходимых интервальных операций. Например, для функции

$$f(x)= x^3 - 6 x^2 + 11 x - 6$$

можем получить такие интервальные расширения:

$$F_1(X) = X^3 - 6 X^2 + 11 X - 6;$$

$$F_2(X) = ((X-6) X + 11) X - 6;$$

$$F_3(X) = (X - 1)(X - 2)(X - 3).$$

Пусть для определенности $X=[0,2]$. Тогда область значений данной функции $W(f(x)) = [- 2/9 \sqrt{3}, 2/9 \sqrt{3}]$, а значения соответствующих расширений равны:

$$F_1([0,2]) = [-30,24];$$

$$F_2([0,2]) = [-8,16];$$

$$F_3([0,2]) = [-6,6];$$

$$F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset W(f(x)).$$

Наряду с выше определенными операциями (I.I) при проведении интервальных вычислений будем использовать поточечные операции с выбранными по определенному закону точками из исходных интервалов.

Пусть $\bar{\varphi}$ – изоморфное отображение множества вещественных чисел в интервальное пространство и $\bar{\varphi}$ задано параметрически (параметр t). Тогда определим интервальную операцию следующего вида.

Определение 7. Пусть $*$ - бинарная операция на множестве вещественных чисел; $X, Y \in I(R)$. Тогда

$$X \bar{*} Y = \{ z \mid z = x*y,\ x = x(t),\ y = y(t),\ \forall x \in X,\ \forall y \in Y \} \qquad (1.3)$$

определяет бинарную операцию на $I(R)$.

С помощью операций вида (I.3) интервальное оценивание вещественной функции будет более естественным и более узким, чем при определении (I.I). Так используя (I.3), можем записать разложение Тейлора функции $G(z)$ на интервале Z

$$G(Z) = \{ G(z) \mid G(z) = G(y) + G'(y)(z-y) + 1/2!\, G''(y)(z-y)^2 + \ldots +$$
$$+ 1/(i+1)!\, G^{(i+1)}(y)(z-y)^{i+1} + 1/(i+2)!\, G^{(i+2)}(y + \theta^{o}_{i+2}(z-y)) \times$$
$$\times (z-y)^{i+2},\ z \in Z,\ \theta^{o}_{i+2} \in (0,1) \}.$$

В отличии от (I.I), из определения интервальных операций по (I.3), имеет место свойство дистрибутивности. В дальнейшем, используя интервальные операции, мы будем специально отмечать места, где проводятся операции этого вида, в остальных случаях, где по смыслу понятен вид операции, будем пользоваться операциями вида (I.3) наравне с другими интервальными операциями.

§ I.2 Вычислительные аспекты интервального метода Ньютона.

Решение систем нелинейных уравнений интервальными методами сводится к решению соответствующих линейных систем уравнений, коэффициенты которых не определены, но принадлежат известным интервалам. При сведении к системе линейных уравнений наиболее часто используется теорема о среднем значении. Поэтому основой при построении интервальных итерационных методов являются интервальные варианты теоремы о среднем значении.

Пусть отображение $f: D \subset R^n \to R$ непрерывно дифференцируемо в каждой точке выпуклого множества $D_0 \subset D$. Тогда для любых точек $x_1, x_2 \in D$ справедливо равенство

$$f(x_2) = f(x_1) + f'(\xi_1)(x_2 - x_1), \tag{1.4}$$

где

$$\xi_1 = x_1 + \theta_1(x_2 - x_1), \quad \theta_1 \in (0,1).$$

Если и производная отображения $f(x)$ также является непрерывно дифференцируемым отображением, то аналогично имеем

$$f'(\xi_1) = f'(x_1) + f''(\xi_2)(\xi_1 - x_1),$$

где

$$\xi_2 = x_1 + \theta_2(\xi_1 - x_1), \quad \theta_2 \in (0,1).$$

Тогда

$$f(x_2) = f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) + \theta_1 f''(\xi_2)(x_2 - x_1)^2.$$

Поэтому в случае соответствующей гладкости отображения

$$f(x_2) = f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) + \theta_1 f''(x_1)(x_2 - x_1)^2 + \ldots +$$
$$+ \theta_1 \theta_2 \ldots \theta_{n-1} f^{(n)}(\xi_n)(x_2 - x_1)^n,$$

где

$$\theta_i \in (0,1)(i = 1, 2, \ldots, n-1),$$
$$\xi_n = x_1 + \theta_n(\xi_{n-1} - x_1).$$

Как показано в работе [3], $\lim\limits_{x_1 \to x_2} \theta_1 = \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x_1 \to x_2} \theta_2 = \frac{1}{2}$.

Заметим, что теорема о среднем для отображений $f: R^n \to R^m$,

$m > 1$ уже не имеет места (см. [53]). Однако имеют место формула аналогичная (1.4):

$$f(x_2)=f(x_1)+ J(x_1,x_2,\theta_1)(x_2-x_1), \qquad (1.5)$$

где

$$J(x_1,x_2,\theta_1)= \begin{bmatrix} f_1'(x_1+ \theta_1^{(1)}(x_2-x_1)) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_m'(x_1+ \theta_1^{(m)}(x_2-x_1)) \end{bmatrix},$$

$$f=(f_1, \ \dots \ ,f_m)^T, \ x_1,x_2 \in D_0 \subset D \subset R^n,$$

$$\theta_1= (\theta_1^{(1)}, \ \dots \ ,\theta_1^{(m)}), \ f_i'(x_1+ \theta_1^{(i)}(x_2-x_1))=$$

$$=(\partial f_i/\partial x^{(1)}), \ \dots \ , (\partial f_i/\partial x^{(n)}))_{x=x_1+\theta_1^{(i)}(x_2-x_1)}, i=1,\dots,m .$$

Матрица $J(x_1,x_2,\theta_1) \subset L(R^n, R^m)$ не является производной Гато (Фреше) оператора f, взятой в некоторой промежуточной точке, потому что, вообще говоря, все $\theta_1^{(i)}$ различные между собой. Однако, аналогично одномерному случаю, можно получить соотношение

$$f(x_2)=f(x_1)+f'(x_1)(x_2-x_1)+ H(x_2,x_1,\theta_2) \ \theta_1 \ (x_2-x_1)^2, \qquad (1.6)$$

где

$$[H(x_2,x_1,\theta_2)h \ k \ ]^T=(k^TH_1(x_2,x_1,\theta_2)h, \ \dots \ ,k^TH_m(x_2,x_1,\theta_2)h);$$

$$H_i(x_2,x_1,\theta_2)= f_i''(x_1+ \theta_2^{(i)}\theta_1^{(i)}(x_2-x_1));$$

в котором $\lim\limits_{x_1\to x_2} \theta_1^{(i)}= \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x_1\to x_2} \theta_2^{(i)}= \frac{2}{3}$ $(i=1,2, \ \dots \ ,n)$.

Далее рассмотрим использование формулы о среднем значении для нахождения решений системы нелинейных уравнений.

Пусть дана следующая система нелинейных уравнений

$$f(x) = 0, \qquad (1.7)$$

где $f=(f_1, \ \dots \ ,f_n)^T, x=(x_1, \ \dots \ ,x_n)$. На основании (1.5) для $\bar{x} \in D_0$ имеем

$$f(x)=f(\bar{x}) + J(\xi_1)(x - \bar{x}). \qquad (1.8)$$

Обозначим через X интервальный вектор, содержащий в себе x и $\bar{x}$. Тогда и $\xi_1 \in X$. Заменив в (1.8) $J(\xi_1)$ на $J(X)$ получим уравнение

$$f(\bar{x}) + J(X)(z-\bar{x}) = 0 \qquad (1.9)$$

Тогда, очевидно, решение уравнения (I.7) принадлежит множеству Z, элементы которого $z \in Z$ являются решениями уравнения (I.9). Решая разными способами уравнение (I.9), получаем различные версии интервального метода Ньютона.

Вместо (I.8) можна также использовать аналог теоремы Тейлора в терминах обобщенной теоремы о среднем, например, в виде (I.6), тогда для определения множества Z получаем матричные уравнения высших порядков. Решение таких матричных уравнений при $n>1$ затруднительно. Это одна из главных причин использования для решения систем нелинейных уравнений (I.7), как правило, интервального метода Ньютона и его модификаций (см. [I],[88]-[90],[94],[95],[97],[105]).

Разные виды интервальных методов Ньютона отличаются между собой методикой решения уравнения (I.9) и способом аппроксимации $J(X)$. Максимальное сжатие последовательности полученных интервалов достигается учетом структуры матрицы $J(X)$, последовательным применением полученных промежуточных результатов в цепи дальнейших вычислений. Например, интервальный метод Ньютона можем получить, исходя из теоремы о среднем в виде(I.8) вдоль отрезка, соединяющего точки x и $\bar{x}$, или двигаясь по ребру n - мерного параллелепипеда, содержащего исходное решение, и теоремы о среднем по каждой координате. В обоих случаях получаем существенно более узкие интервалы, содержащие искомое решение, предварительно умножив (I.9) на матрицу B - приближенную обратную матрицу к J_c -

центру интервальной матрицы $J(X)$. Для ограничения ошибок разного типа произведения $Bf(x)$ и $BJ(X)$ вычисляем в терминах интервалов.

В общем случае интервальный метод Ньютона состоит в вычислении последовательности интервалов $X^{(k)}(k=0,1, \ldots)$ по формулам

$$Y^{(k+1)} = x^{(k)} - [J(X^{(k)})]^{-1} f(x^{(k)}); \qquad (1.10)$$

$$X^{(k+1)} = Y^{(k+1)} \cap X^{(k)}, \; x^{(k)} \in X^{(k)}, \; k = 0,1,2, \ldots \qquad (1.11)$$

Свойства последовательности итераций $(X^{(k)})_{k=0}^{\infty}$ метода (I.IO) - (I.II) обобщены в теоремах I и 2 (см. [2]).

Теорема I. Пусть f - вещественная функция от вещественного аргумента x, которая удовлетворяет условию Липшица, $f(x)$ - ее аналитическое выражение. Пусть определено интервальное расширение $f(X)$. Тогда для $X \in I(R)$ имеет место неравенство

$$\omega(f(X)) \le c\, \omega(X).$$

Соответствующее обобщение теоремы I на случай нескольких переменных выглядит так:

$$\omega(f(X^{(1)},X^{(2)}, \ldots ,X^{(n)}) \le \sum_{k=1}^{n} c^{(k)}\, \omega(X^{(k)}) \le c \max_{1 \le k \le n} \omega(X^{(k)}).$$

Теорема 2. Пусть $X^{(0)}$ - интервальный вектор, а $x^{*} \in X^{(0)}$ - корень функции $f(x)$. Пусть $V^{(0)}$ - интервальная матрица, содержащая все обращения J^{-1} матриц $J \in J^{(0)} = f'(X^{(0)})$. Допустим еще, что производная Фреше $f'(x)$ для значения аргумента $X^{(0)}$ удовлетворяет соотношениям теоремы I .

Тогда последовательность интервальных векторов, вычисленная по формулам (I.IO)-(I.II), обладает следующими свойствами:

а) каждое приближение $X^{(k)}(k \ge 0)$ содержит корень x^{*};

б) если матрица $V \in V^{(0)}$ неособенная, то $\lim\limits_{k \to \infty} X^{(k)} = x^{*}$;

в) если последовательность $\left\{X^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ сходится к x^*, то

$$\| \omega(X^{(k+1)}) \| \le \gamma \| \omega(X^{(k)}) \|^2, \ \gamma \ge 0,$$

т.е. R - порядок метода (I.10)-(I.11) удовлетворяет неравенству

$O_R((1.10)-(1.11), x^*) \ge 2$ (см.приложение А, теорема 2 из [I]).

Доказательства теорем I,2 приведены, в частности, в книге [I].

Множество Z решений уравнения (I.9) можно ограничить n - мерным параллелепипедом со сторонами, паралельными осям координат, что существенно упрощает вычисления. Этот параллелепипед называется коробкой Кравчика ([94],[95],[97],[99]) и определяется следующим образом:

$$K(X) = \tilde{x} - B f(\tilde{x}) + (I - BJ(X))(X - \tilde{x}), \qquad (I.12)$$

где I - единичная матрица.

Если $x^* \in X$, то и $x^* \in K(X)$. В результате получаем последовательность интервалов $X^{(k)}$ $(k=0,1, \dots)$, где

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} \cap K(X^{(k)}), \qquad (I.13)$$

которые имеют те же свойства, что и последовательность $X^{(k)}$, полученная по формулам (I.10)-(I.11). В формулах (I.12)-(I.13) интервалы по каждой координате определяются из

$$K = \tilde{x}_i - g_i + \sum_{j=1}^{i-1} R_{ij}(K'_j - \tilde{x}_j) + \sum_{j=i}^{n} R_{ij}(X_j - \tilde{x}_j), \ i=\overline{1,n}, \qquad (1.14)$$

где

$$g = Bf(\tilde{x}), \ R = I - BJ(X), \ K'_j = K_j \cap X_j.$$

Последовательность интервалов, полученная интервальным методом Ньютона в форме (I.12)-(I.13), исследовалась многими авторами (см. например, [I],[97],[102]). Мы сформулируем утверждение, доказанное нами в [22], где для метода (I.12)-(I.13) условия сходимости менее жесткие и более конкретные.

<u>Теорема 3.</u> Пусть в начальном интервале $X^{(0)}$ содержится единственное решение x^* системы (I.7). Если для некоторых $k=0,1,2,\dots$ выполняется условие $t^{(k)}< 1$, где $t^{(k)}= \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |R_{ij}^{(k)}|$, то $X^{(k)} \to x^*$.

<u>Доказательство.</u> Если интервальный вектор $X^{(k)}$ точечный, т.е. его компонентами являются вырожденные интервалы (точки), то $t^{(k)}= 0$. Условие, налагаемое на $t^{(k)}$ выполняется в случае достаточной малости величины $\omega(X^{(k)})$. Множество, полученное в результате замены в правой части равенства (I.14) K_j' на X_j, будет содержать $K(X^{(k)})$.

Поскольку $\tilde{x}^{(k)}$ является срединной точкой интервала $X^{(k)}$, то

$$X_j^{(k)} - \tilde{x}_j^{(k)} = 1/2\ \omega(X_j^{(k)})\ [-1,1] \subset 1/2\ \alpha^{(k)}[-1,1], \qquad (I.15)$$

где $\alpha_j^{(k)} = \omega(X_j^{(k)})$.

Учитывая (I.13)-(I.15), последовательно имеем

$$K_i^{(k)}\subset \tilde{x}_i^{(k)}- g_i^{(k)}+ 1/2\alpha_j^{(k)}\sum_{j=1}^{n} |R_{ij}^{(k)}|[-1,1] \subset \tilde{x}_i^{(k)}-g_i^{(k)}+1/2\alpha_j^{(k)}t^{(k)}\times$$

$$\times[-1,1].$$

Поэтому $\omega(K_i^{(k)}) < \alpha_i^{(k)}t^{(k)}$. Отсюда, используя условие теоремы, получим $\omega(K_i^{(k)}) < \alpha_i^{(k)}$. Так как интервальные операции для интервальных векторов выполняются покомпонентно, то

$$\omega(K^{(k)})<\alpha^{(k)} \text{ или } \omega(K^{(k)}) < \omega(X^{(k)}).$$

Учитывая (I.12) - (I.13), имеем

$$\omega(X^{(k+1)}) < \omega(X^{(k)}).$$

Следовательно, при реализации алгоритма (I.12) - (I.13) получаем последовательность вложенных интервалов

$$X^{(0)} \supset X^{(1)} \supset X^{(2)} \supset X^{(3)} \supset \dots .$$

Из построения алгоритма (I.12) следует, что $x^* \in X^{(k)}$ ($k=1,2,\dots$), если $x^* \in X^{(0)}$. Поэтому $X^{(k)} \to x^*$, что и требовалось доказать.

Вычисленная согласно (I.2) коробка $K(X)$ не является наименьшей, ограничивающей решение системы (I.7). Результаты существенно улучшаются при проведении вычислений по схеме, предложенной Е. Хансеном (см. [88]-[90]):

$$Y = \tilde{x} - D^{-1}[\, g + L(X' - x) + U(X - x)\,];\quad X' = Y \cap X, \qquad (1.16)$$

где

$BJ(X) = P = L+D+U$; L, D, U – соответственно нижняя треугольная, диагональная и верхняя треугольная матрицы.

Для последовательности интервалов, полученной по формулам (I.16), имеет место теорема (см. [94]).

<u>Теорема 4.</u> Пусть в начальном интервале $X^{(0)}$ содержится единственное решение x^* системы (I.7). Если для некоторых $k=0,1,2,\dots$ выполняются условия

$$\delta^{(k)} < 2/\sqrt{3} - 1,\quad \rho^{(k)} < (1 - \delta)/2,$$

где

$$\delta^{(k)} = \max |\, D_{ii}^{(k)} - 1\,|,\quad \rho^{(k)} = \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} |P_{ij}^{(k)}| \quad (i=1,2,\dots),$$

то $X^{(k)} \to x^*$.

Доказательство этой теоремы приведено в работе [94].

Глава 2. Построение и исследование интервальных итерационных методов типа Рунге.

Использование для построения интервальных итерационных методов высших порядков сходимости аналога теоремы Тейлора в терминах обобщенной теоремы о среднем значении [102] требует решения матричных уравнений высших степеней с интервальными коэффициентами, что вызывает большие затруднения. В этих случаях нами применяются линейные аппроксимации производных высших порядков значениями производной первого порядка, вычисленными в определенных точках.

В основу построения интервальных итерационных методов решения систем нелинейных уравнений нами положены следующие основные идеи:

а) идею Рунге, примененную им при построении численных методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Она состоит в аппроксимации с наибольшей возможной точностью производных высших порядков линейными комбинациями значений первой производной в соответствующих точках;

б) поведение "средних" точек остаточных членов в форме Лагранжа обобщенных рядов Тейлора [105] функции $f(x)$ при сжатии промежутка разложения в точку и соотношения между этими точками при разложении в ряды Тейлора функции $f(x)$ и ее первой производной [1].

§ 2.I Обоснование и предпосылки построения интервальных методов типа Рунге.

Пусть x^* - решение системы нелинейных уравнений (I.7). Будем также предполагать, что выполняются все необходимые условия, позволяющие разлагать до нужного члена в ряды Тейлора функции $f(x)$ и $f'(x)$ в окрестности точки $x^{(k)}$. Тогда

$$f(x)=f(x^{(k)})+f'(x^{(k)})(x-x^{(k)})+\frac{1}{2!}f''(x^{(k)})(x-x^{(k)})^2+ + \frac{1}{3!}f'''(x^{(k)})(x-x^{(k)})^3+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x^{(k)})(x-x^{(k)})^n + + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x^{(k)}+\theta^0_{n+1}(x-x^{(k)}))(x-x^{(k)})^{n+1}, \qquad (2.1)$$

и в частности,

$$f(x^*)=f(x^{(k)})+f'(x^{(k)})(x^*-x^{(k)})+\frac{1}{2!}f''(x^{(k)})(x^*-x^{(k)})^2+ + \frac{1}{3!}f'''(x^{(k)})(x^*-x^{(k)})^3+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x^{(k)})(x^*-x^{(k)})^n + + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x^{(k)}+\theta^0_{n+1}(x^*-x^{(k)}))(x^*-x^{(k)})^{n+1}=0, \qquad (2.1')$$

где $x^*, x^{(k)} \in D \subset R^n$, $\theta^0_{n+1} \in (0,1)$, $n \in N$.

Для аппроксимации производных высших порядков в (2.I) значениями первой производной в определенных точках рассмотрим линейную по x комбинацию значений функции $f(x)$ и значений ее производной $f'(x)$:

$$G(x,z)=f(x^{(k)})+(\alpha_1 f'(x^{(k)})+\alpha_2 f'(x^{(k)}+\beta(z-x^{(k)})))(x-x^{(k)}), \qquad (2.2)$$

где

$\alpha_1, \alpha_2, \beta$ - некоторые вещественные коэффициенты.

Значения $\alpha_1, \alpha_2, \beta, z$ будем выбирать такими, чтобы выполнялись условия:

I) $G(x,z)$ аппроксимирует $f(x)$ на D с максимально возможной точностью;

2) множество пар точек

$$K \stackrel{def}{=} \{(x',z') \mid G(x',z') = 0\},\ x',\ z' \in R,$$

должно содержать пару точек $(x^*,\bar z)$, т.е. решение x^* уравнения (I.7) при $z' = \bar z$ удовлетворяет равенство $G(x^*,\bar z) = 0$;

3) множество X' точек x' включается в Z, где Z получаем решением уравнения (I.9);

Разложим в ряд Тейлора функцию $f'(x^{(k)} + \beta(z-x^{(k)}))$ в окрестности точки $x^{(k)}$. Тогда $G(x,z)$ запишется так:

$$G(x,z)=f(x^{(k)})+(\alpha_1 f'(x^{(k)})+ \alpha_2(f'(x^{(k)})+ \beta f''(x^{(k)})(z-x^{(k)})+$$
$$+ \frac{1}{2!}\beta^2 f'''(x^{(k)})(z-x^{(k)})^2 + \frac{1}{3!}\beta^3 f^{(iv)}(x^{(k)})(z-x^{(k)})^3+ \dots$$
$$\dots + \frac{1}{(n-1)!}\beta^{n-1} f^{(n)}(x^{(k)})(z-x^{(k)})^{n-1}+ \frac{1}{n!}\beta^n f^{(n+1)}(x^{(k)}+ \beta\,\theta_n^1 \times$$
$$\times(z-x^{(k)}))(z-x^{(k)})^n)(x-x^{(k)})=f(x^{(k)})+(\alpha_1+ \alpha_2)f'(x^{(k)})(x-x^{(k)}) +$$
$$+ \alpha_2\beta f''(x^{(k)})(z-x^{(k)})(x-x^{(k)})+ \frac{1}{2!}\alpha_2\beta^2 f'''(x^{(k)})(z-x^{(k)})^2(x-x^{(k)})+$$
$$+ \frac{1}{3!}\alpha_2\beta^3 f^{(iv)}(x^{(k)})(z-x^{(k)})^3(x-x^{(k)})+ \dots +\frac{1}{(n-1)!}\alpha_2\beta^{n-1}f^{(n)}(x^{(k)})\times$$
$$\times(z-x^{(k)})^{n-1}(x-x^{(k)})+ \frac{1}{n!}\alpha_2\beta^n f^{(n+1)}(x^{(k)}+ \beta\,\theta_n^1(z-x^{(k)}))\times$$
$$\times(z-x^{(k)})^n (x-x^{(k)}), \qquad (2.3)$$

где

$$\theta_n^1 \in (0,1).$$

Для нахождения коэффициентов α_1,α_2,β воспользуемся методом неопределенных коэффициентов. Но β входит еще и в определения промежуточной точки остаточного члена разложения (2.3). Кроме того, для приближения (2.I), мы укажем способ изменения переменной z и тогда вместе с выбором α_1, α_2, β достигнем того, что для решения x^* уравнения (I.7) при некотором $\bar z$ разложение (2.3) совпадает с (2.I). Для определения α_1, α_2, β мы ограничимся разложением $G(x,z)$ до производной второго порядка. Тогда (2.3) перепишется в виде

$$G(x,z)=f(x^{(k)})+(\alpha_1+ \alpha_2)f'(x^{(k)})(x-x^{(k)})+$$

$$+ \alpha_2\beta f''(x^{(k)} + \beta\, \theta_1^1 (z-x^{(k)}))(z-x^{(k)})(x - x^{(k)}),$$

где

$$\theta_1^1 \in (0,1).$$

Как показано в работе [59], при сжатии промежутков разложения в точку, в (2.1) и (2.3$'$) будем иметь соответственно $\theta_2^0 \to 1/3$, $\theta_1^1 \to 1/2$. Так как (2.3$'$) и (2.1) должны совпадать при x^* и $\bar{z}$, то и граничные значения промежуточных точек должны быть одинаковыми. Поэтому, исходя из граничных значений θ, сравнивая промежуточные точки в (2.3$'$) и (2.1), получим

$$\beta = 2/3. \tag{2.4}$$

Дальше, приравнивая коэффициенты при соответствующих показателях степеней, будем иметь

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \tag{2.5}$$

$$\alpha_2\, \beta = 1/2!. \tag{2.6}$$

Учитывая значения β в (2.4), найдем значения коэффициентов α_1, α_2:

$$\alpha_1 = 1/4, \quad \alpha_2 = 3/4. \tag{2.7}$$

При найденных значениях параметров α_1, α_2, β в разложении (2.3) совпадают коэффициенты при первой, второй и третьей производных. Далее следует учитывать, что в G, кроме переменной x, входит еще и z.

Многое, при решении задачи аппроксимации мы возлагаем на переменную z. С помощью аппроксимации этой переменной мы хотим достигнуть совпадения и коэффициентов при производных высших порядков, и промежуточной точки остаточного члена Тейлора, т.е. совпадения (2.1$'$) и G. Поэтому целесообразно аппроксимировать z

множеством точек Z. Причем множество, аппроксимирующее z, должно по возможности быть наиболее узким, но обязательно содержать решение x^* уравнения (I.7). В роли этого множества, может выступать множество точек, полученное по интервальному методу Ньютона, которое, как мы знаем из предыдущей главы, содержит x^*. В дальнейшем рассмотрим интервальные итерационные методы, которые на одной итерации выполняют вычисления по интервальному методу Ньютона с параметром $2/3$.

Предположим, что X - интервальный вектор, содержащий в себе x^* и $x^{(k)}$. Тогда множество $Y^{(k)}$ $(k=0,1,\ldots)$ точек $y^{(k)}$ - решений уравнения

$$f(x^{(k)})+(1/4f'(x^{(k)})+3/4f'(\tilde{\Omega}^{(k)}))(y^{(k)}-x^{(k)})=0, \qquad (2.8)$$

где

$$\tilde{\Omega}^{(k)}=\Omega^{(k)}\cap X^{(k)},\ x^{(k)}\in X^{(k)},$$

$$\Omega^{(k)}=\{\, z^{(k)} \mid 2/3\, f(x^{(k)})+f'(X^{(k)})(z^{(k)}-x^{(k)})=0 \,\},$$

также содержит решение x^*.

Таким образом, интервальный метод типа Рунге состоит в вычислении последовательности интервалов $X^{(k)}(k=0,1,2,\ldots)$ по формулам

$$Y^{(k)}=x^{(k)}-[1/4f'(x^{(k)})+3/4f'(\tilde{\Omega}^{(k)})]^{-1}f(x^{(k)}), \qquad (2.9)$$

$$X^{(k+1)}=Y^{(k)}\cap X^{(k)},\ k=0,1,2,\ldots, \qquad (2.10)$$

где соответствующие величины те же, что и в (2.8).

Для облегчения вычислений и упрощения структуры области $Z^{(k)}$, аналогично (I.12)-(I.13), можно вычислить последовательность аналогов коробок Кравчика по формулам

$$K(\bar{X}^{(k)})=\bar{x}^{(k)}-C^{(k)}f(\bar{x}^{(k)})+(I-C^{(k)}J(\bar{X}^{(k)}))(\bar{X}^{(k)}-\bar{x}^{(k)}), \qquad (2.11)$$

$$X^{(k+1)}=K(\bar{X}^{(k)})\cap\bar{X}^{(k)},\ k=0,1,2,\ldots, \qquad (2.12)$$

где

$\bar{x}^{(k)} \in \bar{X}^{(k)}$,

$c^{(k)}$ - приближение инверсии $1/4f'(x^{(k)})+3/4f'(x^{(k)}-2/3B^{(k)}f'(x^{(k)}))$,

$J(\bar{X}^{(k)})=1/4f'(\bar{x}^{(k)})+3/4f'(\bar{X}^{(k)})$, I - единичная матрица,

$\bar{X}^{(k)} = K(X^{(k)}) \cap X^{(k)}$,

$K(X^{(k)})=x^{(k)}-2/3B^{(k)}f(x^{(k)})+(I-2/3B^{(k)}f'(X^{(k)}))(X^{(k)}-x^{(k)})$,

$B^{(k)}$ - приближение инверсии центра $f'(X^{(k)})$, $x^{(k)} \in X^{(k)}$.

Если диагональ матрицы $CJ(X)$ является сильно доминирующей (ее можно сделать такой всегда с помощью преобразования, предложенного Е. Хансеном [22],[74]), то исходя из (2.8), аналогично (I.16), получаем следующую вычислительную схему:

$$\bar{Y} = \bar{x} - \bar{D}^{-1} [Cf(\bar{x}) + \bar{L}(\bar{Y} - \bar{x}) + \bar{U}(\bar{X} - \bar{x})], \qquad (2.13)$$

где

$CJ(\bar{X}) = \bar{L} + \bar{D} + \bar{U}$,

$\bar{L}, \bar{D}, \bar{U}$ - соответственно строго нижняя треугольная, диагональная, строго верхняя треугольная матрицы $CJ(X)$,

$X = \bar{Y} \cap \bar{X}$, $\bar{x} \in \bar{X}$,

$Y = x - D^{-1}[2/3\, Bf(x) + L(Y - x) + U(X - x)]$,

$B f'(X) = L + D + U$,

L, D, U - соответственно строго нижняя треугольная, диагональная, строго верхняя треугольная матрицы $B f'(X)$,

$\bar{X} = Y \cap X$, $x \in X$.

§ 2.2 Исследование сходимости одного из интервальных методов типа Рунге решения систем нелинейных уравнений.

В связи с тем, что построенные методы содержат итерации подобные интервальному методу Ньютона, исследуем один из интервальных методов типа Рунге, в котором отсутствуют эти итерации. Вычисления в многомерном пространстве выполняются отдельно по каждой координате и эти вычисления аналогичны друг другу, рассмотрим сначала предложенный метод в одномерном случае. Он будет иметь следующий вид:

$$V^{(k)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{1/4\, f'(x^{(k)}) + 3/4\, f'(x^{(k)} + 2/3\,(X^{(k)} - x^{(k)}))}, \tag{2.14}$$

$$X^{(k+1)} = V^{(k)} \cap X^{(k)},\ x^{(k)} \in X^{(k)},\ k=0,1,2,\ \ldots \tag{2.15}$$

Точечный вариант этого метода был исследован в работе М.Я.Бартиша и П.С.Сеньо [8]. Из (2.14) следует что, вместо z в $(2.3')$ мы использовали интервал $X^{(k)}$, который, априори известно, содержит x^*. При использовании метода (2.14)-(2.15) будем выбирать в качестве $x^{(k)}$ середину интервала $X^{(k)}$, т.е. $x^{(k)} = m(X^{(k)})$, так как это гарантирует уменьшение ширины локализующего интервала по крайней мере вдвое (см. теорему 3 главы 7 из [1]). Этот метод аппробировался при решении систем разной размерности и при различном размещении корней во входных интервалах (множество корней в начальных интервалах, один корень, корень системы является кратным, корни размещены внутри интервала, корни находятся близко один от другого, корни лежат на границе интервала). Исходя из проведенных опытов, для решения x^* уравнения

$$f(x)=0 \tag{2.16}$$

были сформулированы условия, при выполнении которых $x^* \in V^{(k)}$. Эти условия проверяются предыдуще на каждой итерации в процессе реализации метода. Теоретические обоснования сформулированных условий обобщены в следующем утверждении.

<u>Лемма I.</u> Пусть функция $f: R \to R$ дважды непрерывно дифференцируема, $f(x)$ – ее аналитическое выражение. Пусть определено интервальное расширение $f(X)$ и x^* – решение уравнения (2.I6), такое что $x^{(0)}<x^*$.

Если $Y^{(0)} \supset [x^{(0)}, x^{(0)}+3/2\,(x^* - x^{(0)})]$, то

$$f''(x^{(0)}+\theta_2^0(x^*-x^{(0)}))(x^*-x^{(0)})^2 \subset f''(x^{(0)}+2/3[\theta_1^1](Y^{(0)}-x^{(0)}))\times$$
$$\times(Y^{(0)}-x^{(0)})^2, \qquad (2.17)$$

где $x^{(0)}+\theta_2^0(x-x^{(0)}),\ x^{(0)}+2/3[\theta_1^1](x-x^{(0)})$ – промежуточные точки остаточных членов разложений в ряды Тейлора до второй производной в окрестности точки $x^{(0)}$ соответственно функций $f(x)$ и $f'(x^{(0)}+2/3(x-x^{(0)}))$.

<u>Доказательство</u>. Так как x^* - решение уравнения (2.I6), то

$$0 = f(x^*) = f(x^{(0)})+f'(x^{(0)})(x^*-x^{(0)}) + \frac{1}{2!}f''(x^{(0)}+\theta_2^0(x^*-x^{(0)}))\times$$
$$\times(x^*-x^{(0)})^2.$$

Отсюда последовательно получаем

$$f(x^*)-f(x^{(0)}) = f'(x^{(0)})(x^*-x^{(0)})+\frac{1}{2!}f''(x^{(0)}+\theta_2^0(x^*-x^{(0)}))\times$$
$$\times(x^*-x^{(0)})^2;$$

$$\int_{x^{(0)}}^{x^*} f'(t)dt = f'(x^{(0)})(x^*-x^{(0)})+\frac{1}{2!}f''(x^{(0)}+\theta_2^0(x^*-x^{(0)}))\times$$
$$\times(x^*-x^{(0)})^2;$$

$$\int_{x^{(0)}}^{x^*}(f'(t)-f'(x^{(0)}))dt=\frac{1}{2!}f''(x^{(0)}+\theta_2^0(x^*-x^{(0)}))(x^*-x^{(0)})^2. \qquad (2.18)$$

Произведем замену переменных $t=x^{(0)}+\frac{2}{3}(z-x^{(0)})$. Тогда получим

$$dt=\frac{2}{3}dz,\ x^*=x^{(0)}+\frac{2}{3}(z^{(2)}-x^{(0)}),\ \frac{2}{3}(z^{(2)}-x^{(0)})=x^*-x^{(0)},$$
$$z^{(2)}=x^{(0)}+\frac{3}{2}(x^*-x^{(0)}),\ x^{(0)}=x^{(0)}+\frac{2}{3}(z^{(1)}-x^{(0)}), z^{(1)}=x^{(0)}.$$

Поэтому (2.18) будет иметь вид

$$\frac{1}{2!} f''(x^{(0)}+\theta_2^0(x^*- x^{(0)}))(x^*-x^{(0)})^2=\frac{2}{3}\int_{x^{(0)}}^{x^{(0)}+\frac{3}{2}(x^*-x^{(0)})}(f'(x^{(0)}+\frac{2}{3}(z-x^{(0)}))-$$

$$-f'(x^{(0)}))dz;$$

$$f''(x^{(0)}+\theta_2^0(x^*-x^{(0)}))(x^*-x^{(0)})^2=\frac{4}{3}\int_{x^{(0)}}^{x^{(0)}+\frac{3}{2}(x^*-x^{(0)})}(f'(x^{(0)}+\frac{2}{3}(z-x^{(0)}))-$$

$$-f'(x^{(0)}))dz.$$

Согласно формулы Тейлора

$$f'(x^{(0)}+\frac{2}{3}(z-x^{(0)}))=f'(x^{(0)})+\frac{2}{3} f''(x^{(0)}+\frac{2}{3}\theta_1^1(z-x^{(0)}))(z-x^{(0)}),$$

$$z \in X^{(0)}.$$

Поэтому

$$\frac{4}{3}\int_{x^{(0)}}^{x^{(0)}+\frac{3}{2}(x^*- x^{(0)})}(f'(x^{(0)})+ \frac{2}{3}(z-x^{(0)})) - f'(x^{(0)})) dz =$$

$$= \frac{8}{9}\int_{x^{(0)}}^{x^{(0)}+\frac{3}{2}(x^*-x^{(0)})} f''(x^{(0)}+ \frac{2}{3}\theta_1^1 (z-x^{(0)}))(z-x^{(0)}) dz.$$

Используя теорему о среднем значении для интеграла, имеем

$$\frac{8}{9}\int_{x^{(0)}}^{x^{(0)}+\frac{3}{2}(x-x^{(0)})} f''(x^{(0)}+\frac{2}{3}\theta_1^1(z-x^{(0)}))(z-x^{(0)})dz=\frac{8}{9}f''(x^{(0)}+\frac{2}{3}\theta_1^1(\xi-x^{(0)}))\times$$

$$\times \frac{(z-x^{(0)})^2}{2}\Bigg|_{x^{(0)}}^{x^{(0)}+3/2(x^*-x^{(0)})}=f''(x^{(0)}+\frac{2}{3}\theta_1^1(\xi-x^{(0)}))(x^*-x^{(0)})^2\subset$$

$$\subset f''(x^{(0)}+\frac{2}{3}[\theta_1^1](Y^{(0)}-x^{(0)}))(Y^{(0)}-x^{(0)}),\ \xi \in Y^{(0)}= [x^{(0)},x^{(0)}+$$

$$+\frac{3}{2}(x^*- x^{(0)})].$$

Таким образом, лемма I доказана.

Очевидно, что лемма I легко обобщается и на случай $x^*<x^{(0)}$, тогда

$Y^{(0)}$ должен содержать интервал $[x^{(0)}+\frac{3}{2}(x^{*}-x^{(0)}), x^{(0)}]$.

Замечание I. При реализации метода (2.14)-(2.15) результаты леммы I используются следующим образом. Сначала находим интервал $[a,b]$, в котором имеется единственный корень уравнения (2.16). Если $0 \notin f(m([a,b])+\frac{2}{3}([a,b]-m([a,b])))$, то текущий интервал надо "расширить" в обоих направлениях на величину, равную $\omega([a,b])/4$. Действительно, пусть, например, x^{*} является граничной точкой интервала $[a,b]$. Тогда для выполнения условия леммы I необходимо, чтобы $m([a,b])+ \frac{3}{2}[-1,1](x^{*}-m([a,b])) \in Y_{[a,b]}$. Интервал $[a,b]$ увеличиваем на величину $\frac{\omega([a,b])}{4}$ потому, что

$$m([a,b]) + \frac{3}{2}[-1,1](x^{*}-m([a,b]))= m([a,b])+[-1,1](x^{*}-m([a,b]))+$$

$$+\frac{1}{2}[-1,1](x^{*}-m([a,b]))= m([a,b])+[-1,1]\frac{\omega([a,b])}{2} + \frac{1}{2}[-1,1]\times$$

$$\times \frac{\omega([a,b])}{2} = [a,b]+[-1,1]\frac{\omega([a,b])}{4} = [a - \frac{\omega([a,b])}{4},$$

$$b + \frac{\omega([a,b])}{4}].$$

Если $x^{*} \in m([a,b])+ \frac{2}{3}([a,b]-m([a,b]))$, то условие (2.17) выполняется автоматически. При локализации методом (2.14)-(2.15) решения уравнения (2.16) после начальных итераций это условие справедливо почти всегда и никакой коррекции интервала не требуется.

Замечание 2. Если $0 \notin f(m([a,b])+ \frac{2}{3}([a,b]-m([a,b])))$, но функция $f(x)$ не определена на более широком интервале, который получается при коррекции, тогда следует поступать следующим образом. Находится один из подинтервалов оставшихся поза интервалом $m([a,b])+\frac{2}{3}([a,b]-m([a,b])$, который содержит корень. С этим подинтервалом проделываем проверки аналогичные предыдущим, пока не выполнится включение $0 \in f(m([a,b])+\frac{2}{3}([a,b]-m([a,b]))$.

<u>Замечание 3.</u> Пусть для функции $f(x)$ не существует интервального расширения на интервале $X^{(0)}$, тогда необходимо сделать следующее.

Разбить интервал $X^{(0)}$ на подинтервалы, на которых существует интервальное расширение функции $f(x)$, и применить метод отдельно для каждого подинтервала.

Обсудим теперь свойства алгоритма, заданного формулами (2.14)-(2.15). Они синтезированы в следующих теоремах 5-7. В частности, в теореме 5 рассмотрены условия сходимости предложенного метода.

<u>Теорема 5.</u> Пусть выполняются условие леммы 1. Тогда последовательность интервалов $\left\{X^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$, вычисленная по формулам (2.14)-(2.15), обладает следующими

свойствами:

a) $x^{*} \in \hat{X}^{(k)}$, где $\hat{X}^{(k)}$ равняется $X^{(k)}$, если выполняются соотношения леммы I или в противном случае - это скорректированный согласно замечания I интервал $X^{(k)}$, $k=0,1,2, \ldots$;

b) $Z^{(0)} \supset Z^{(1)} \supset Z^{(2)} \supset \ldots$, где $Z^{(0)}=\hat{X}^{(0)}$, $Z^{(k)}=Z^{(k-1)} \cap \hat{X}^{(k)}$, $k=1,2, \ldots$

Если $0 \notin \frac{1}{4}f'(x^{(0)})+\frac{3}{4}\,f'(x^{(0)}+\frac{2}{3}(\hat{X}^{(0)}-x^{(0)}))$ и ни один из элементов матрицы $\frac{1}{4}\,f'(x^{(0)})+\frac{3}{4}\,f'(x^{(0)}+\frac{2}{3}(\bar{x}-x^{(0)}))$, $\bar{x} \in \hat{X}^{(0)}$ не равен бесконечности, то $\lim\limits_{k \to \infty} \hat{X}^{(k)}=x^{*}$.

<u>Доказательство.</u> Мы рассмотрим более сложный случай, когда интервал $X^{(k)}$ скорректированный согласно замечания I, в инном случае доказательство проводится аналогичным образом.

а) Воспользуемся методом математической индукции. Из формул (2.I4)-(2.I5) при $k=0$ следует, что

$$X^{(1)}=\left(x^{(0)}-\frac{f(x^{(0)})}{1/4\,f'(x^{(0)})+3/4\,f'(x^{(0)}+2/3(X^{(0)}-x^{(0)}))}\right) \cap \hat{X}^{(0)}=$$

$$=\left(x^{(0)}-\frac{f(x^{(0)})}{f'(x^{(0)})+1/2f''(x^{(0)}+2/3\theta_1^{1}(\hat{X}^{(0)}-x^{(0)}))(\hat{X}^{(0)}-x^{(0)})}\right)\cap\hat{X}^{(0)}.$$

Исходя из того, что $x^{*} \in \hat{X}^{(0)}$ и в силу леммы I, имеем

$$x^{*}=x^{(0)}-\frac{f(x^{(0)})}{f'(x^{(0)})+1/2f''(x^{(0)}+\theta_2^{0}(x^{*}-x^{(0)}))(x^{*}-x^{(0)})} \in$$

$$\in\left(x^{(0)}-\frac{f(x^{(0)})}{f'(x^{(0)})+1/2f''(x^{(0)}+2/3[\theta_1^{1}](\hat{X}^{(0)}-x^{(0)}))(\hat{X}^{(0)}-x^{(0)})}\right)\cap\hat{X}^{(0)}$$

$$=X^{(1)} \subset \hat{X}^{(1)}.$$

Пусть при $k=n-1$ условие а) выполняется. Тогда

$$x^{*}=x^{(n-1)}-\frac{f(x^{(n-1)})}{f'(x^{(n-1)})+1/2f''(x^{(n-1)}+\theta_2^0(x^{*}-x^{(n-1)}))(x^{*}-x^{(n-1)})}\in$$

$$\in\left(x^{(n-1)}-\frac{f(x^{(n-1)})}{f'(x^{(n-1)})+1/2f''(x^{(n-1)}+2/3[\theta_1^1](\hat{X}^{(n-1)}-x^{(n-1)}))(\hat{X}^{(n-1)}-x^{(n-1)})}\right)$$

$$\cap\ \hat{X}^{(n-1)}=X^{(n)}\subset\hat{X}^{(n)}.$$

Таким образом, условие а) выполняется при любых к.

б)Первая часть этого пункта следует из процесса построения итерационной последовательности интервалов $\hat{X}^{(k)}$. В силу определения $\hat{X}^{(k)}$, имеем

$$X^{(0)}\subset\hat{X}^{(0)},X^{(1)}\subset\hat{X}^{(1)}.$$

Далее получим

$$Z^{(1)}=\hat{X}^{(0)}\cap\hat{X}^{(1)}=Z^{(0)}\cap\hat{X}^{(1)}. \qquad (2.19)$$

Согласно леммы I

$$x^{*}\in X^{(1)}\subset\hat{X}^{(1)}.$$

Отсюда, учитывая то, что $x^{*}\in X^{(0)}\subset\hat{X}^{(0)}$, имеем

$$x^{*}\in Z^{(1)}.$$

При к=2 получаем

$$X^{(2)}\subset\hat{X}^{(2)} \text{ и } Z^{(2)}=Z^{(1)}\cap\hat{X}^{(2)}. \qquad (2.20)$$

Теперь, аналогично сказанному выше, имеем

$$x^{*}\in X^{(2)}\subset\hat{X}^{(2)}.$$

Откуда следует

$$x^{*}\in Z^{(2)}. \qquad (2.21)$$

Таким образом, из (2.19)-(2.21) получаем

$$Z^{(1)}\subset Z^{(2)}.$$

Дальнейшее доказательство проводится методом математической индукции.

Докажем вторую часть условия б). Для итерационного интервального метода (2.14)-(2.15) выполняется соотношение (7.8) из [1]. Поэтому

$$\omega(X^{(k+1)}) \le \frac{\omega(X^{(k)})}{2}, \quad k=0,1,2,\ \ldots\ . \tag{2.22}$$

В нашем случае, для $X^{(k+1)}$, определенной по (2.15), имеем

$$\omega(X^{(k+1)}) < \frac{\omega(\hat{X}^{(k)})}{2}.$$

В силу замечания 1, получим

$$\omega(\hat{X}^{(k+1)}) < \frac{3}{4}\,\omega(\hat{X}^{(k)}). \tag{2.23}$$

Согласно (2.22), (2.23) и условия а) локализующая последовательность $\hat{X}^{(k)}$ сходится к некоторому интервальному вектору X^*. Мы покажем, что $\omega(X^*)=0$, а вместе с условием а) это даст, что $\lim \hat{X}^{(k)}=x^*$. Доказательство проведем методом сведения к противоречию.

Пусть $\omega(X^*) \neq 0$. Из непрерывности отображения (2.14)-(2.15) имеем равенство:

$$X^* = \left(m(X^*) - \frac{f(m(X^*))}{1/4f'(m(X^*))+3/4f'(m(X^*)+\frac{2}{3}(X^*-m(X^*)))}\right) \cap X^*.$$

Из того, что $m(X^*) \in X^*$, следует $m(X^*) \neq X^*$, так как $\omega(X^*) \neq 0$. С другой стороны

$$m(X^*) \in m(X^*) - \frac{f(m(X^*))}{1/4f'(m(X^*))+3/4f'(m(X^*)+\frac{2}{3}(X^*-m(X^*)))}.$$

Интервальная матрица

$$1/4\, f'(m(X^*))+3/4\, f'(m(X^*)+2/3\,(X^*-m(X^*)))$$

содержит вещественную матрицу, для которой имеем

$$m(X^*) = m(X^*) - \frac{f(m(X^*))}{1/4 f'(m(X^*)) + 3/4 f'(m(X^*) + \frac{2}{3}(x_{m(X^*)} - m(X^*)))},$$

где $x_{m(X^*)} \in X^*$.

В силу выполнения условий второй части пункта б), имеем противоречие, так как ранее предполагалось, что $m(X^*) \neq X^*$.

Таким образом, теорема 5 доказана.

Следует заметить, что условие $0 \notin 1/4\, f'(X^{(0)}) + 3/4\, f'(X^{(0)} + \frac{2}{3}(X^{(0)} - x^{(0)}))$ гарантирует уменьшение интервала на каждом шаге метода. Очевидно, что оно обязательно выполняется для малых по ширине интервалов $\hat{X}^{(k)}$. Методика локализации нулей функции, описанная в [1], обеспечивает выполнение этого условия.

Оценим теперь порядок сходимости метода (2.14)-(2.15). Для этого в интервальном пространстве $I(R)$ определим две последовательности:

$$h^{(k)} \stackrel{def}{=} \omega(\hat{X}^{(k)}),$$

что представляет собой расстояние между границами и

$$e^{(k)} = q(\hat{X}^{(k)}, x^*) \stackrel{def}{=} \max(|\hat{x}_1^{(k)} - x^*|, |\hat{x}_2^{(k)} - x^*|)$$

- максимальное отклонение элемента $\hat{x}^{(k)}$ из $\hat{X}^{(k)}$ от x^*.

Предположим, что последовательность $\{\hat{X}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$, порожденная итерационными формулами (2.14)-(2.15), сходится к x^*, т.е. удовлетворяет всем соотношениям теоремы 5. Тогда соответствующие ей последовательности $\{e^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{h^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ сходятся к нулю. К ним можно применить понятие порядка сходимости, рассмотренное в работе Ортеги Дж. и Рейнболдта В. [53].

ним можно применить понятие порядка сходимости, рассмотренное в работе Ортеги Дж. и Рейнболдта В. [53].

Сформулируем следующее утверждение о порядке сходимости метода (2.14)-(2.15).

Теорема 6. Пусть функция $f(x)$ трижды непрерывно дифференцируема на $X^{(0)}$.

Тогда последовательность $\{\hat{X}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$, удовлетворяющая условиям теоремы 5, сходится к x^* и

$$O_R((2.14)-(2.15),\ x^*) \geq 3, \qquad (2.24)$$

где R - порядок сходимости итерационного метода (2.14)-(2.15), т.е.

$$\omega(\hat{X}^{(k+1)}) \leq c\,(\omega(\hat{X}^{(k)}))^3, \text{ где } c \geq 0. \qquad (2.24')$$

Доказательство. Согласно свойству интервальных вычислений 25), имеем

$$\omega(\hat{X}^{(k+1)}) \leq \min(\omega(x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{1/4f'(x^{(k)}) + 3/4f'(x^{(k)} + \frac{2}{3}(\hat{X}^{(k)} - x^{(k)}))}),$$

$$\omega(\hat{X}^{(k)})).$$

Исходя из того, что $0 \notin 1/4f'(x^{(k)}) + 3/4f'(x^{(k)} + 2/3(\hat{X}^{(k)} - x^{(k)}))$, имеем

$$\omega(\hat{X}^{(k+1)}) \leq \omega(x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{1/4f'(x^{(k)}) + 3/4f'(x^{(k)} + \frac{2}{3}(\hat{X}^{(k)} - x^{(k)}))}).$$

Используя свойство 11), получаем

$$\omega(x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{1/4f'(x^{(k)}) + 3/4f'(x^{(k)} + \frac{2}{3}(\hat{X}^{(k)} - x^{(k)}))}) \leq$$

$$\leq \omega(x^{(k)} - \hat{X}^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{1/4f'(x^{(k)}) + 3/4f'(x^{(k)} + \frac{2}{3}(\hat{X}^{(k)} - x^{(k)}))}) \leq$$

$$\leq \omega\left(\frac{-f(x^{(k)})-(1/4f'(x^{(k)})+3/4f'(x^{(k)}+2/3(\hat{X}^{(k)}-x^{(k)})))(\hat{X}^{(k)}-x^{(k)})}{1/4f'(x^{(k)})+3/4f'(x^{(k)}+\frac{2}{3}(\hat{X}^{(k)}-x^{(k)}))}\right).$$

Последнее неравенство справедливо в силу того, что $1 \in A/A, A \subset I(R)$. По условию теоремы, функция $f(x)$ трижды непрерывно дифференцируема. Поэтому, учитывая определения интервальных операций (I.3) будем применять формулу Тейлора для интервального расширения первой производной функции $f(x)$ и получим

$$1/4f'(x^{(k)})+3/4f'(x^{(k)}+2/3(\hat{X}^{(k)}-x^{(k)}))=1/4f'(x^{(k)})+3/4(f'(x^{(k)})+$$

$$+2/3f''(x^{(k)})(\hat{X}^{(k)}-x^{(k)})+2/9f'''(x^{(k)}+2/3[\theta_2^1](\hat{X}^{(k)}-x^{(k)}))\times$$

$$\times(\hat{X}^{(k)}-x^{(k)}))=f'(x^{(k)})+\frac{1}{2!}f''(x^{(k)})(\hat{X}^{(k)}-x^{(k)})+\frac{1}{3!}\times$$

$$\times f'''(x^{(k)}+\frac{2}{3}[\theta_2^1](\hat{X}^{(k)}-x^{(k)}))(\hat{X}^{(k)}-x^{(k)})^2,$$

где $[\theta_2^1]$ - интервал значений срединных точек формулы Тейлора, соответствующий всем точкам интервала $\hat{X}^{(k)}$.

Поэтому

$$\omega(\hat{X}^{(k+1)})\leq\omega\left(\frac{-(f(x^{(k)})+f'(x^{(k)})(\hat{X}^{(k)}-x^{(k)})+1/2!f''(x^{(k)})(\hat{X}^{(k)}-x^{(k)})^2)}{1/4f'(x^{(k)})+3/4f'(x^{(k)}+\frac{2}{3}(\hat{X}^{(k)}-x^{(k)}))}-\right.$$

$$\left.-\frac{\frac{1}{3!}f'''(x^{(k)}+\frac{2}{3}[\theta_2^1](\hat{X}^{(k)}-x^{(k)}))(\hat{X}^{(k)}-x^{(k)})^3}{1/4f'(x^{(k)})+3/4f'(x^{(k)}+\frac{2}{3}(\hat{X}^{(k)}-x^{(k)}))}\right).$$

В правой части этого неравенства в числителе прибавим нуль-интервал

$$\omega(\hat{X}^{(k+1)})\leq\omega\left(\frac{[0,0]-(f(x^{(k)})+f'(x^{(k)})(\hat{X}^{(k)}-x^{(k)})}{1/4f'(x^{(k)})+3/4f'(x^{(k)}+\frac{2}{3}(\hat{X}^{(k)}-x^{(k)}))}\right.+$$

$$\frac{+\frac{1}{2!}f''(x^{(k)})(\hat{X}^{(k)}-x^{(k)})^2+\frac{1}{3!}f'''(x^{(k)}+\frac{2}{3}[\theta_2^1](\hat{X}^{(k)}-x^{(k)}))(\hat{X}^{(k)}-x^{(k)})^3)}{1/4f'(x^{(k)})+3/4f'(x^{(k)}+\frac{2}{3}(\hat{X}^{(k)}-x^{(k)}))}).$$

Выполнение условий леммы I обеспечивает включение

$$[0,0]\in f(x^{(k)})+f'(x^{(k)})(\hat{X}^{(k)}-x^{(k)})+\frac{1}{2!}f''(x^{(k)})(\hat{X}^{(k)}-x^{(k)})^2+$$

$$+\frac{1}{3!}f'''(x^{(k)}+[\theta_3^0](\hat{X}^{(k)}-x^{(k)}))(\hat{X}^{(k)}-x^{(k)})^3.$$

В силу свойства 10) и учитывая предыдущее включение, имеем оценку

$$\omega(\hat{X}^{(k+1)})\le\omega((\frac{f'''(x^{(k)}+[\theta_3^0](\hat{X}^{(k)}-x^{(k)}))}{3!(1/4f'(x^{(k)})+3/4f'(x^{(k)}+2/3(\hat{X}^{(k)}-x^{(k)})))}-$$

$$-\frac{f'''(x^{(k)}+2/3[\theta_2^1](\hat{X}^{(k)}-x^{(k)}))}{3!(1/4f'(x^{(k)})+3/4f'(x^{(k)}+2/3(\hat{X}^{(k)}-x^{(k)})))})(X^{(k)}-x^{(k)})^2).$$

Отсюда, с помощью свойства 16), имеем

$$\omega(X^{(k+1)})\le\frac{1}{3}\left|\frac{f'''(x^{(k)}+[\theta_3^0](\hat{X}^{(k)}-x^{(k)}))-f'''(x^{(k)}+2/3[\theta_2^1](\hat{X}^{(k)}-x^{(k)}))}{1/4f'(x^{(k)})+3/4f'(x^{(k)}+2/3(\hat{X}^{(k)}-x^{(k)}))}\right|\times$$

$$\times(\omega(X^{(k)}))^2.$$

Так как $[\theta_2^1]$, $[\theta_3^0]\in(0,1)$, то $x^{(k)}+\frac{2}{3}[\theta_2^1](\hat{X}^{(k)}-x^{(k)})$, $x^{(k)}+[\theta_3^0](\hat{X}^{(k)}-x^{(k)})\in\hat{X}^{(k)}\subseteq\hat{X}^{(0)}$. Поэтому

$$\omega(X^{(k+1)})\le\frac{1}{3}\left|\frac{f'''(x^{(k)}+[\theta_3^0](\hat{X}^{(k)}-x^{(k)}))-f'''(x^{(k)}+2/3[\theta_2^1](\hat{X}^{(k)}-x^{(k)}))}{1/4f'(x^{(k)})+3/4f'(x^{(k)}+2/3(\hat{X}^{(k)}-x^{(k)}))}\right|\times$$

$$\times(\omega(X^{(k)}))^2\le\frac{1}{3}\,\frac{\omega(f'''(\hat{X}^{(0)}))}{|1/4f'(x^{(k)})+3/4f'(x^{(k)}+2/3(\hat{X}^{(k)}-x^{(k)}))|}(\omega(\hat{X}^{(k)}))^2.$$

Применяя основную теорему интервального анализа, получаем

$$\omega(X^{(k+1)})\le \frac{1}{3}\,\frac{\omega(f'''(\hat{X}^{(0)}))}{|\,1/4f'(x^{(k)})+3/4f'(x^{(k)}+2/3(\hat{X}^{(k)}-x^{(k)}))|}\,(\omega(\hat{X}^{(k)}))^{3}\le$$

$$\le \frac{1}{3}\,\frac{\omega(f'''(\hat{X}^{(0)}))}{|\,1/4\underline{f'(\hat{X}^{(0)})}+3/4\underline{f'(\hat{X}^{(0)})}|}\,(\omega(\hat{X}^{(k)}))^{3} =$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{\omega(f'''(\hat{X}^{(0)}))}{|\,\underline{f'(\hat{X}^{(0)})}\,|}\,(\omega(\hat{X}^{(k)}))^{3},$$

где $\underline{f'(\hat{X}^{(0)})}$ - нижняя граница интервала $f'(\hat{X}^{(0)})$.

Таким образом, имеет место (2.24)(т.е. (2.24$'$)), в котором в качестве c можно взять $\frac{1}{3}\,\frac{\omega(f'''(X^{(0)}))}{|\underline{f'(\hat{X}^{(0)})}\,|}$, причем постоянная c не зависит от k .

Теорема 6 доказана.

Если не производить поправок интервалов, то можем получить более высокий порядок сходимости метода (2.14)-(2.15). Следует заметить, что тогда метод (2.14)-(2.15) имеет порядок сходимости не ниже четырех, хотя при реализации его используем значения только самой функции и ее первой производной. Справедливо следующее утверждение.

<u>Следствие I.</u> Пусть функция $f\ :\ R \to R$ четырежды непрерывно дифференцируема или ее третья производная принадлежит классу липшицевых функций.

Если интервал $X^{(k)}(k=0,1,2,\ \dots\ ,n)$ обеспечивает выполнение включения леммы I, то итерационный процесс (2.14)-(2.15) имеет порядок сходимости не ниже четырех.

<u>Доказательство.</u> Начальные оценки ипользуются те же, что и при доказательстве теоремы 6. Далее при оценке $\omega(\hat{X}^{(k)})$, используя

условия следствия I, получим

$$\omega(\hat{X}^{(k+1)})\le\omega\Big(\Big(\frac{f'''(x^{(k)}+[\theta_3^0](\hat{X}^{(k)}-x^{(k)}))}{3!(1/4f'(x^{(k)})+3/4f'(x^{(k)}+2/3(\hat{X}^{(k)}-x^{(k)})))}-$$

$$-\frac{f'''(x^{(k)}+2/3[\theta_2^1](\hat{X}^{(k)}-x^{(k)}))}{3!(1/4f'(x^{(k)})+3/4f'(x^{(k)}+2/3(\hat{X}^{(k)}-x^{(k)})))}\Big)(X^{(k)}-x^{(k)})^3\Big)\le$$

$$\le\omega\Big(\frac{f^{(iv)}(\hat{X}^{(k)})(\hat{X}^{(k)}-x^{(k)})^4([\theta_3^0]-2/3[\theta_2^1])}{3!(1/4f'(x^{(k)})+3/4f'(x^{(k)}+2/3(\hat{X}^{(k)}-x^{(k)})))}\Big)\le$$

$$\le\frac{|f^{(iv)}(\hat{X}^{(k)})|\,\omega((\hat{X}^{(k)}-x^{(k)})^4)\,|[\theta_3^0]-2/3[\theta_2^1]|}{3!\,|1/4f'(x^{(k)})+3/4f'(x^{(k)}+2/3(\hat{X}^{(k)}-x^{(k)}))|}\le$$

$$\le\frac{1}{3}\;\frac{|f^{(iv)}(\hat{X}^{(k)})|}{|1/4f'(x^{(k)})+3/4f'(x^{(k)}+2/3(\hat{X}^{(k)}-x^{(k)}))|}(\omega(\hat{X}^{(k)}))^4\le$$

$$\le\frac{1}{3}\;\frac{|f^{(iv)}(\hat{X}^{(o)})|}{|1/4f'(x^{(k)})+3/4f'(x^{(k)}+2/3(\hat{X}^{(k)}-x^{(k)}))|}(\omega(\hat{X}^{(k)}))^4\le$$

$$\le\frac{1}{3}\;\frac{\omega(f^{(iv)}(\hat{X}^{(o)}))}{|\,1/4\underline{f'(\hat{X}^{(o)})}+3/4\underline{f'(\hat{X}^{(o)})}|}(\omega(\hat{X}^{(k)}))^4=$$

$$=\frac{1}{3}\;\frac{\omega(f^{(iv)}(\hat{X}^{(o)}))}{|\,\underline{f'(\hat{X}^{(o)})}\,|}(\omega(\hat{X}^{(k)}))^4.$$

Вместо константы можем выбирать значение

$$1/3\;|f^{(iv)}(\hat{X}^{(o)})/\underline{f'(\hat{X}^{(o)})}|\;.$$

Аналогично проводится доказательство следствия в случае, если третья производная функции $f(x)$ принадлежит классу липшицевых функций. Тогда роль константы будет играть значение $K\;/\;(3|\underline{f'(\hat{X}^{(o)})}|)$, где K - константа Липшица функции

$f'''(x)$ на интервале $\hat{X}^{(0)}$.

При реализации интервального итерационного метода (2.14)-(2.15) может иметь место случай, когда интервал $X^{(k+1)}$ пуст. Это следствие того, что в начальном интервале $X^{(0)}$ нет корней уравнения (2.16). Ниже приведена теорема, в которой оценено необходимое количество шагов метода (2.14)-(2.15) для выяснения этого факта.

Теорема 7. Пусть функция $f : R \to R$ удовлетворяет следующим условиям:

а) $|f(x)| \ge \delta > 0$ для всех $x \in \hat{X}^{(i)}=[a^{(i)},b^{(i)}], i=0,1,2, \dots$;

б) $f(x)$ - трижды непрерывно дифференцируемая и знакопостоянная функция на $\hat{X}^{(i)}$, причем $|f^{(k)}(x^{(i)})| \le K$, $k=1,2,3$, $x^{(i)}=m(\hat{X}^{(i)})$.

Тогда интервал $\hat{X}^{(i)}$, который не содержит нулей функции $f(x)$ может быть исключен в m шагах интервального итерационного метода (2.14)-(2.15), где

$$m \le \log_2 \left(\frac{K\,\omega(\hat{X}^{(i)})(1+1/4\,\omega(\hat{X}^{(i)})+1/24\,(\omega(\hat{X}^{(i)}))^2}{2\delta} + 1\right).$$

Доказательство. Рассмотрим два случая.

Первый случай. Не умаляя общности, можем предполагать, что интервальное расширение $1/4f'(x^{(i)})+3/4f'(x^{(i)}+2/3(\hat{X}^{(i)}-x^{(i)}))=$ $=[0,e^{(i)}]$, $e^{(i)} > 0$ и $f(x)>0$, так как случай $f(x)<0$ подобен. В этом случае имеем

$$V^{(i)}= x^{(i)}- \frac{f(x^{(i)})}{1/4f'(x^{(i)})+3/4f'(x^{(i)}+2/3(\hat{X}^{(i)}-x^{(i)}))} =$$

$$= x^{(i)} - \frac{f(x^{(i)})}{[0,\ e^{(i)}]} = [-\infty,\ x^{(i)} - \frac{f(x^{(i)})}{e^{(i)}}] = [-\infty,\ c^{(i)}].$$

Второй случай. Предположим теперь, что $0 \notin 1/4f'(x^{(i)})+3/4f'(x^{(i)}+2/3\ (\hat{X}^{(i)}-x^{(i)}))$ и выходной интервал комбинации производных функции $f(x)$ положительный. Обозначим правую границу интервала $V^{(i)}$ через $x^{(i)} - \dfrac{f(x^{(i)})}{e^{(i)}}$.

Поскольку, в обоих случаях $f(x^{(i)})/e^{(i)}>0$, то $V^{(i)}> x^{(i)}$ и правая часть интервала может быть исключена за один шаг метода (2.I4)-(2.I5). Также исключается либо левая часть, либо подинтервал $Z^{(i)}= [\ x^{(i)}- \dfrac{f(x^{(i)})}{e^{(i)}}\ ,\ x^{(i)}]$. Этот подинтервал имеет ширину $\omega(Z^{(i)})=f(x^{(i)})/e^{(i)}$. Используя условия а) и б) теоремы 7 и определение центрированной формы интервальной функции [3] имеем

$$f'(x^{(i)}+2/3(\hat{X}^{(i)}-x^{(i)}))=f'(x^{(i)})+f''(x^{(i)})\frac{2}{3}(\hat{X}^{(i)}-x^{(i)})+f'''(x^{(i)})\times$$

$$\times(2/3)^2(\hat{X}^{(i)}-x^{(i)})^2/2=f'(x^{(i)})+\frac{2}{3}f''(x^{(i)})(\hat{X}^{(i)}-x^{(i)})+\frac{2}{9}f'''(x^{(i)})\times$$

$$\times(\hat{X}^{(i)}-x^{(i)})^2.$$

Откуда

$$|\ f'(x^{(i)}+2/3(\hat{X}^{(i)}-x^{(i)}))|=|f'(x^{(i)})|+\frac{1}{3}\ |f''(x^{(i)})|\ \omega(\hat{X}^{(i)})+$$

$$+\frac{1}{18}\ |f'''(x^{(i)})|\ (\omega(\hat{X}^{(i)}))^2.$$

Оценим следующее выражение

$$|\ 1/4f'(x^{(i)})+3/4f'(x^{(i)}+2/3\ (\hat{X}^{(i)}-x^{(i)}))|\ \le 1/4\ |\ f'(x^{(i)})|+$$

$$+3/4\ |f'(x^{(i)}+2/3\ (\hat{X}^{(i)}-x^{(i)}))|\ =\ |\ f'(x^{(i)})\ |\ +1/4|f''(x^{(i)})|\times$$

$$\times\ \omega(\hat{X}^{(i)})\ +1/24\ |f'''(x^{(i)})|\ (\omega(\hat{X}^{(i)}))^2\ \le K\ (1+1/4\ \omega(\hat{X}^{(i)})+$$

$$+\ 1/24\ (\omega(\hat{X}^{(i)}))^2\ ).$$

Используя эту оценку для $\omega(Z^{(i)})$, запишем

$$\omega(Z^{(i)}) \geq \delta / (K(1+1/4\,\omega(\hat{X}^{(i)})+1/24\,(\omega(\hat{X}^{(i)}))^2)).$$

На первом шаге метода (2.14)-(2.15) для дальнейших исследований осталоя подинтервал шириной

$$\frac{b^{(i)} - a^{(i)}}{2} - \frac{\delta}{K(1+1/4\omega(\hat{X}^{(i)})+1/24(\omega(\hat{X}^{(i)}))^2)} = \frac{\omega(\hat{X}^{(i)})}{2} -$$

$$- \frac{\delta}{K(1+1/4\omega(\hat{X}^{(i)})+1/24(\omega(\hat{X}^{(i)}))^2)}.$$

Для второго шага подинтервал уменьшится на ширину

$$\frac{\omega(\hat{X}^{(i)})/2-\delta/(K(1+1/4\omega(\hat{X}^{(i)})+1/24(\omega(\hat{X}^{(i)}))^2))}{2} - \delta/(K(1+1/4\omega(\hat{X}^{(i)})+$$

$$+1/24(\omega(\hat{X}^{(i)}))^2) = \frac{\omega(\hat{X}^{(i)})}{2^2} - \frac{1+2}{2}\,\frac{\delta}{K(1+1/4\omega(\hat{X}^{(i)})+1/24(\omega(\hat{X}^{(i)}))^2)}.$$

Аналогично на m-ом шаге получим

$$\frac{\omega(\hat{X}^{(i)})}{2^m} - \frac{2^m - 1}{2^{m-1}}\,\frac{\delta}{K(1+1/4\omega(\hat{X}^{(i)})+1/24(\omega(\hat{X}^{(i)}))^2)}.$$

Таким образом, интервал $\hat{X}^{(i)}$ будет полноотью иочерпан на m -ом шаге метода (2.14)-(2.15), еоли

$$\frac{\omega(\hat{X}^{(i)})}{2^m} - \frac{2^m - 1}{2^{m-1}}\,\frac{\delta}{K(1+1/4\omega(\hat{X}^{(i)})+1/24(\omega(\hat{X}^{(i)}))^2)} = 0.$$

Откуда получаем

$$m=\log_2\left(\frac{K\omega(\hat{X}^{(i)})(1+1/4\omega(\hat{X}^{(i)})+1/24(\omega(\hat{X}^{(i)}))^2)}{2\,\delta} + 1\right).$$

Это и завершает доказательство теоремы 7.

Утверждения аналогичные сформулированным выше, можно доказать в многомерном случае.

Лемма 2. Пусть функция $f : D \subset R^n \to R^n$ дважды непрерывно дифференцируема по Фреше в каждой точке выпуклого множества $D_0 \subset D$, $f(x)$ - ее аналитическое выражение. Пусть определено интервальное расширение $f(X)$ и x^* -решение системы уравнений (I.7) и $x^{(0)} < x^*$ $(x_i^{(0)} < x_i^*, i=1,2, \ldots n)$, где $x^* \in X^{(0)}$.

Если $Y^{(0)} \supset [x^{(0)}, x^{(0)} + 3/2\,(x^* - x^{(0)})]$, то

$$f''(x^{(0)} + \theta_2^0 (x^* - x^{(0)}))(x^* - x^{(0)})^2 \subset f''(x^{(0)} + 2/3[\theta_1^1](Y^{(0)} - x^{(0)}) \times$$
$$\times (Y^{(0)} - x^{(0)})^2,$$

где $x^{(0)} + \theta_2^0 (x - x^{(0)}),\ x^{(0)} + 2/3[\theta_1^1](x - x^{(0)})$ - промежуточные точки остаточных членов разложений в ряды Тейлора до второй производной в точке $x^{(0)}$ соответственно функций $f(x)$ и $f'(x^{(0)} + 2/3\,(x - x^{(0)}))$.

Доказательство. Из формулы Тейлора имеем

$$0 = f(x^*) = f(x^{(0)}) + f'(x^{(0)})(x^* - x^{(0)}) + \frac{1}{2!} f''(x^{(0)} + \theta_2^0 (x^* - x^{(0)})) \times$$
$$\times (x^* - x^{(0)})^2.$$

После простых преобразований, согласно (II.XVII.1.18) из [41] получим

$$\int_{x^{(0)}}^{x^*} (f'(t) - f'(x^{(0)}))dt = \frac{1}{2!} f''(x^{(0)} + \theta_2^0 (x^* - x^{(0)}))(x^* - x^{(0)})^2.$$

Введем новую переменную t, положив

$$x = x^{(0)} + 2/3\ t\ (x^* - x^{(0)}).$$

Подставив значение x в функцию $f'(x)$, согласно (I.7) из [19], получим функцию от одной переменной t:

$$\frac{2}{3} \int_0^{3/2} (f'(x^{(0)} + 2/3t(x^* - x^{(0)})) - f'(x^{(0)}))(x^* - x^{(0)})dt =$$

$$= \frac{1}{2!} f''(x^{(0)} + \theta_2^0(x^* - x^{(0)}))(x^* - x^{(0)})^2. \qquad (2.25)$$

Применим теорему о среднем значении по каждой компоненте функции, тогда получим

$$f'(x^{(0)} + \frac{2}{3}(x - x^{(0)})) = f'(x^{(0)}) + \frac{2}{3} f''(x^{(0)} + \frac{2}{3}\theta_1^1(x - x^{(0)}))(x - x^{(0)}), \quad (2.26)$$

где

$\theta^1_{1_{ij}}$ $(i, j = 1, 2, 3, \ldots, n)$, вообще говоря разные, и поэтому $f''(x^{(0)} + 2/3\ \theta_1^1(x - x^{(0)}))$ не является второй производной Гато в некоторой промежуточной точке.

Ввиду того, что $x \in [x^{(0)}, x^*]$ $(x_i^{(0)} \le x_i \le x_i^*,\ i = \overline{1,n})$ сделаем замену переменных

$$x - x^{(0)} = t(x^* - x^{(0)}).$$

Тогда имеем

$$f'(x^{(0)} + \frac{2}{3}t(x^* - x^{(0)})) = f'(x^{(0)}) + \frac{2}{3} t f''(x^{(0)} + \frac{2}{3} t \theta_1^1(x - x^{(0)}))(x^* - x^{(0)}).$$

Подставив (2.26) в (2.25), получим

$$\frac{4}{9}\int_0^{3/2} t f''(x^{(0)} + \frac{2}{3} t\theta_1^1(x^* - x^{(0)}))(x^* - x^{(0)})\, dt =$$

$$= \frac{1}{2!} f''(x^{(0)} + \theta_2^0(x^* - x^{(0)}))(x^* - x^{(0)})^2;$$

$$\frac{8}{9}\int_0^{3/2} t f''(x^{(0)} + \frac{2}{3} t\ \theta_1^1(x^* - x^{(0)}))(x^* - x^{(0)})^2 dt =$$

$$= f''(x^{(0)} + \theta_2^0(x^* - x^{(0)}))(x^* - x^{(0)})^2.$$

В силу того, что $f''_i(x^{(0)} + \frac{2}{3}\ t\ \theta^1_{1_{ij}}(x^* - x^{(0)}))$ $(i, j = \overline{1,n})$, как функции от t интегрируемы по Риману на отрезке $[0,\ 3/2]$, то воспользуемся теоремой о среднем для интеграла (II.XVII.1.1) из [41].

$$\frac{8}{9}\int\limits_0^{3/2} t f''(x^{(0)}+\frac{2}{3}t\,\theta_1^1(x^*-x^{(0)}))(x^*-x^{(0)})^2 dt=$$

$$=\frac{8}{9}f''(x^{(0)}+\frac{2}{3}\xi\,\theta_1^1(x^*-x^{(0)}))(x^*-x^{(0)})^2\,\frac{t^2}{2}\Big|_0^{\frac{3}{2}}=$$

$$=f''(x^{(0)}+\frac{2}{3}\xi\,\theta_1^1(x^*-x^{(0)}))\,(x^*-x^{(0)})^2,$$

где ξ - вектор некоторых промежуточных точек интервала [0,3/2]. Откуда последовательно имеем

$$f''(\,x^{(0)}+\frac{2}{3}\xi\,\theta_1^1(x^*-x^{(0)}))(x^*-x^{(0)})^2=$$

$$=f''(\,x^{(0)}+\frac{2}{3}\theta_1^1(x^{(0)}+\xi\,(x^*-x^{(0)})-x^{(0)}))(x^*-x^{(0)})^2=$$

$$=f''(\,x^{(0)}+\frac{2}{3}\theta_1^1(x^{(0)}+[0,3/2]\,(x^*-x^{(0)})-x^{(0)}))(x^*-x^{(0)})^2=$$

$$=f''(\,x^{(0)}+\frac{2}{3}\theta_1^1([x^{(0)},x^{(0)}+3/2(x^*-x^{(0)})]-x^{(0)}))(x^*-x^{(0)})^2\subset$$

$$\subset f''(\,x^{(0)}+\frac{2}{3}[\theta_1^1](Y^{(0)}-x^{(0)}))(Y^{(0)}-x^{(0)})^2.$$

Таким образом, лемма 2 доказана.

Очевидно, что лемма I легко обобщается и на случай $x^*<x^{(0)}$, тогда $Y^{(0)}$ должен содержать интервал $[x^{(0)}+\frac{3}{2}(x^*-x^{(0)}),x^{(0)}]$.

<u>Замечание 4.</u> Учитывая результаты леммы 2, как и в одномерном случае, делаем проверку условий леммы и если они не выполняются для функции $f_i(i=1,2,3,\ \ldots\ ,n)$ " расширяем " интервалы по всем координатам данной функции отображения $f(x)$. Аналогично одномерному варианту поступаем в случаях предусмотренных в замечаниях 2 и 3.

Остальные утверждения в многомерном пространстве, доказываются аналогично соответствующим утверждениям в $I(R)$ и поэтому ограничимся лишь формулировкой этих теорем.

Теорема 8. Пусть выполняются условия леммы 2. Тогда последовательность интервалов $\{X^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$, вычисленная по формулам (2.14)-(2.15), обладает следующими свойствами:

a) $x^* \in \hat{X}^{(k)}$, где $\hat{X}^{(k)}$ равняется $X^{(k)}$, если выполняются соотношения леммы 2 или в противном случае - это скорректированный согласно замечания 2 интервал $X^{(k)}$, $k=0,1,2,\ldots$;

b) $Z^{(0)} \supset Z^{(1)} \supset Z^{(2)} \supset \ldots$, где $Z^{(0)} = \hat{X}^{(0)}$, $Z^{(k)} = Z^{(k-1)} \cap \hat{X}^{(k)}$, $k=1,2,\ldots$

Если $0 \notin \frac{1}{4}f'(x^{(0)}) + \frac{3}{4}f'(x^{(0)} + \frac{2}{3}(\hat{X}^{(0)} - x^{(0)}))$ и ни один из элементов матрицы $\frac{1}{4}f'(x^{(0)}) + \frac{3}{4}f'(x^{(0)} + \frac{2}{3}(\bar{x} - x^{(0)}))$, $\bar{x} \in \hat{X}^{(0)}$ не равен бесконечности, то $\lim\limits_{k \to \infty} \hat{X}^{(k)} = x^*$.

Теорема 9. Пусть отображение $f: D \subset R^n \to R^n$ трижды непрерывно дифференцируемо по Фреше в каждой точке выпуклого множества $D_0 \subset D$ и x^* - решение системы уравнений (1.7).

Тогда последовательность $\{\hat{X}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$, вычисленная по формулам (2.14)-(2.15) и удовлетворяющая условиям теоремы 8, сходится к x^*, причем

$$O_R((2.13)-(2.14), x^*) \geq 3,$$

где R - порядок сходимости итерационного метода (2.14)-(2.15), т.е.

$$\omega(\hat{X}^{(k+1)}) \leq c\,(\omega(\hat{X}^{(k)}))^3, \text{ где } c \geq 0.$$

Следствие 2. Пусть функция $f : R^n \to R^n$ четырежды непрерывно дифференцируема по Фреше в каждой точке выпуклого множества $D_0 \subset X^{(0)}$ или ее третья производная принадлежит классу липшицевых функций.

Если интервал $X^{(0)}$ обеспечивает выполнение включения леммы 2, то итерационный процесс (2.14)-(2.15) имеет порядок сходимости не ниже четырех.

<u>Теорема 10.</u> Пусть функция $f \; : \; R^n \to R^n$ удовлетворяет следующим условиям:

а) $|f(x)| \geq \delta > 0$ для всех $x \in \hat{X}^{(i)} = [a^{(i)}, b^{(i)}], i=0,1,2, \ldots$;

б) $f(x)$ – трижды непрерывно дифференцируема по Фреше в каждой точке выпуклого множества $D_o \subset D$ и $f_j(j=\overline{1,n})$ знакопостоянные функции на $\hat{X}^{(i)}$, причем $|f^{(k)}(x^{(i)})| \leq K$, $k=1,2,3; K=const; i=0,1,\ldots$ $x^{(i)} = m(\hat{X}^{(i)})$.

Тогда интервал $\hat{X}^{(i)}$, который не содержит нулей функции $f(x)$ может быть исключен в m шагах интервального итерационного метода (2.14)-(2.15), где

$$m \leq \log_2 \left(\frac{K\,\omega(\hat{X}^{(i)})(1+1/4\omega(\hat{X}^{(i)})+1/24\,(\omega(\hat{X}^{(i)}))^2}{2\delta} + 1 \right).$$

§ 2.3 Модификация интервального метода типа Рунге, не использующая обращений интервальных матриц.

Метод (2.14)-(2.15) можна модифицировать, используя идею Кравчика [99], следующим образом:

$$K(X^{(k)}) = x^{(k)} - C^{(k)} f(x^{(k)}) + (I - C^{(k)} F'(X^{(k)}))(X^{(k)} - x^{(k)}), \qquad (2.27)$$

$$X^{(k+1)} = K(X^{(k)}) \cap X^{(k)}; \; k=0,1,2, \ldots, \qquad (2.28)$$

где

$X^{(o)}$ – начальный интервал;

$C^{(k)}$ – приближенная инверсия центра матрицы $F'(X^{(k)})$;

I - единичная матрица; $x^{(k)} = m(X^{(k)})$;

$F'(X^{(k)}) = 1/4f'(x^{(k)}) + 3/4f'(x^{(k)} + 2/3(X^{(k)} - x^{(k)}))$.

Как будет показано в дальнейшем, интервальный метод (2.27)-(2.28) находит все действительные корни системы нелинейных уравнений (1.4) в наперед заданном начальном интервале. Причем он не содержит обращений интервальных матриц, что существенно уменьшает время вычислений. Свойства даного метода (2.27)-(2.28) обобщим в следующей теореме.

<u>Теорема II.</u> Пусть отображение $f: D \subset R^n \to R^n$ дважды непрерывно дифференцируемо по Фреше на $X^{(0)} \subset D$; x^* - нуль $f(x)$ на $X^{(0)}$.

Тогда последовательность интервалов $\{X^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$, вычисленная по формулам (2.27)-(2.28), удовлетворяет следующие соотношения:

а) $x^* \in K(X^{(k)}), k=0,1, \ldots$,

где

$$X^{(k)} \supseteq [x^{(k)}; x^{(k)} + \frac{3}{2}(x^* - x^{(k)})], x^* \geq x^{(k)}; \tag{2.29}$$

б) если для отображения $f(x)$ выполняется условие

$$|I - C(X^{(0)})F'(X^{(0)})| < 1, \tag{2.30}$$

где $C(X^{(0)}) = (F'(X^{(0)}))^{-1}$,

тогда $\lim\limits_{k \to \infty} X^{(k)} = x^*$;

в) если, кроме а) и б), $f(x)$ трижды непрерывно дифференцируема по Фреше, тогда имеет место

$$\omega(X^{(k+1)}) \leq c\,(\omega(X^{(k)}))^3,\ c \geq 0, \tag{2.31}$$

т.е.

$$O_R(X^{(k)}, x^*) \geq 3, \tag{2.31'}$$

где R - порядок итерационного метода (2.27)-(2.28).

<u>Доказательство.</u> а) Из теоремы Тейлора

$$f(x^{*})=f(x^{(k)})+f'(x^{(k)})(x^{*}-x^{(k)})+\frac{1}{2!}f''(x^{(k)}+\theta_2^{o}(x^{*}-x^{(k)}))(x^{*}-x^{(k)})^2.$$

Согласно (2.29), получим

$$f(x^{(k)})+f'(x^{(k)})(x^{*}-x^{(k)})+\frac{1}{2!}f''(x^{(k)}+\theta_2^{o}(x^{*}-x^{(k)}))(x^{*}-x^{(k)})^2 \le$$

$$\le f(x^{(k)})+f'(x^{(k)})(x^{*}-x^{(k)})+\frac{1}{2!}f''(x^{(k)}+\frac{2}{3}[\theta_1^{1}](X^{(k)}-x^{(k)}))\times$$

$$\times(x^{*}-x^{(k)})^2. \qquad (2.32)$$

Поэтому, используя (2.32), имеем

$$x^{*}-x^{(k)}-c^{(k)}(f(x^{*})-f(x^{(k)})) \le x^{*}-x^{(k)}-c^{(k)}(f'(x^{(k)})(x^{*}-x^{(k)})+$$
$$+\frac{1}{2!}f''(x^{(k)}+\frac{2}{3}[\theta_1^{1}](X^{(k)}-x^{(k)}))(x^{*}-x^{(k)})^2=x^{*}-x^{(k)}-c^{(k)}(f'(x^{(k)})+$$
$$+\frac{1}{2!}f''(x^{(k)}+\frac{2}{3}[\theta_1^{1}](X^{(k)}-x^{(k)}))(x^{*}-x^{(k)}))(x^{*}-x^{(k)}).$$

Используя свойство монотонности интервальных операций, получим

$$x^{*}-x^{(k)}-c^{(k)}(f'(x^{(k)})+\frac{1}{2!}f''(x^{(k)}+\frac{2}{3}[\theta_1^{1}](X^{(k)}-x^{(k)}))(x^{*}-x^{(k)})\times$$
$$\times(x^{*}-x^{(k)})=(I-(f'(x^{(k)})+\frac{1}{2!}f''(x^{(k)}+\frac{2}{3}[\theta_1^{1}](X^{(k)}-x^{(k)}))(X^{(k)}-x^{(k)}))\times$$
$$\times(x^{*}-x^{(k)})\subset(I-(f'(x^{(k)})+\frac{1}{2!}f''(x^{(k)}+\frac{2}{3}[\theta_1^{1}](X^{(k)}-x^{(k)}))\times$$
$$\times(X^{(k)}-x^{(k)}))(X^{(k)}-x^{(k)}).$$

Из условия теоремы $f(x^{*})=0$. Тогда

$$x^{*}\in x^{(k)}-c^{(k)}f(x^{(k)})+(I-c^{(k)}(f'(x^{(k)})+$$
$$+\frac{1}{2!}f''(x^{(k)}+\frac{2}{3}[\theta_1^{1}](X^{(k)}-x^{(k)}))(X^{(k)}-x^{(k)}))(X^{(k)}-x^{(k)}).$$

Согласно правил поточечных интервальных операций, имеем

$$x^{(k)}-c^{(k)}f(x^{(k)})+(I-c^{(k)}(f'(x^{(k)})+$$
$$+\frac{1}{2!}f''(x^{(k)}+\frac{2}{3}[\theta_1^{1}](X^{(k)}-x^{(k)}))(X^{(k)}-x^{(k)}))(X^{(k)}-x^{(k)})=$$
$$=x^{(k)}-c^{(k)}f(x^{(k)})+(I-c^{(k)}(1/4f'(x^{(k)})+3/4f'(x^{(k)}+\frac{2}{3}(X^{(k)}-x^{(k)}))))\times$$
$$\times(X^{(k)}-x^{(k)})=K(X^{(k)}). \qquad (2.33)$$

Дальше методом математической индукции можно доказать, что $x^{*}\in K(X^{(k)})$ для всех k, где $k=0,1,2,\ \dots$.

б) Из построения метода (2.27)-(2.28) следует, что

$$\omega(X^{(k+1)})\le \omega(X^{(k)}\cap K(X^{(k)}))\le \omega(K(X^{(k)})). \qquad (2.34)$$

Дальше имеем

$$\omega(K(X^{(k)}))=\omega((I-C^{(k)}F'(X^{(k)}))(X^{(k)}-x^{(k)}))=$$

$$\omega((I-(m(F'(X^{(k)})))^{-1}F'(X^{(k)}))(X^{(k)}-x^{(k)})). \qquad (2.35)$$

Так как $0\in(X^{(k)}-x^{(k)})$, получим

$$\omega((I-C^{(k)}F'(X^{(k)}))(X^{(k)}-x^{(k)}))\le |I-C^{(k)}F'(X^{(k)})|\omega(X^{(k)})\le$$

$$\le|I-C^{(k)}F'(X^{(0)})|\omega(X^{(k)})\le |I-C(X^{(k)})\ F'(X^{(k)})|\omega(X^{(k)}).$$

Учитывая соотношения теоремы 5, имеем

$$|I-C(X^{(k)})F'(X^{(0)})|\le |I-C(X^{(0)})F(X^{(0)})|, \qquad (2.36)$$

потому что $X^{(k)}\subseteq X^{(k-1)}\subseteq X^{(k-2)}\subseteq\ldots\subseteq X^{(0)}$ и $C(X^{(k)})\le$

$\le C(X^{(k-1)})\le C(X^{(k-2)})\le\ldots\le C(X^{(0)})$.

Согласно (2.29), (2.34)-(2.36), получим

$\omega(X^{(k+1)})\le\alpha\,\omega(X^{(k)})$, где $\alpha<1$.

Откуда следует, что $\omega(X^{(k)})\to 0$. Согласно (2.33), имеем

$x^{*}\in X^{(k)}=K(X^{(k-1)})\cap X^{(k-1)}$, поэтому $\lim\limits_{k\to\infty}X^{(k)}=x^{*}$.

Теперь докажем (2.31) (т.е. (2.31$'$)). Из построения метода (2.27)-(2.28) получим

$$K(X^{(k)})=x^{(k)}-C^{(k)}f(x^{(k)})+(I-C^{(k)}F'(X^{(k)}))(X^{(k)}-x^{(k)})=$$

$$=x^{(k)}-C^{(k)}f(x^{(k)})+(I-C^{(k)}(1/4f'(x^{(k)})+3/4f'(x^{(k)}+\tfrac{2}{3}(X^{(k)}-x^{(k)}))))\times$$

$$\times(X^{(k)}-x^{(k)})=x^{(k)}-C^{(k)}f(x^{(k)})+(I-C^{(k)}(f'(x^{(k)})+\frac{1}{2!}f''(x^{(k)}+\frac{2}{3}[\theta_1^1]\times$$

$$\times(X^{(k)}-x^{(k)}))(X^{(k)}-x^{(k)})))(X^{(k)}-x^{(k)}).$$

Следует заметить, что выше мы использовали разложение Тейлора функции $f'(x^{(k)}+\frac{2}{3}(X^{(k)}-x^{(k)}))$:

$$f'(x^{(k)}+\frac{2}{3}(X^{(k)}-x^{(k)}))=f'(x^{(k)})+\frac{2}{3}f''(x^{(k)}+\frac{2}{3}[\theta_1^1](X^{(k)}-x^{(k)}))\times$$

$$\times(X^{(k)}-x^{(k)}),$$

которое имеет место согласно определению 2 интервальных операций. Тогда при оценке ширины интервала $X^{(k+1)}$ получим

$$\omega(X^{(k)})=\omega(K(X^{(k)})\cap X^{(k)})\le\omega(K(X^{(k)}))=\omega(x^{(k)}-C^{(k)}f(x^{(k)})+$$
$$+(I-C^{(k)}(f'(x^{(k)})+\frac{1}{2!}f''(x^{(k)}+\frac{2}{3}[\theta_1](X^{(k)}-x^{(k)}))(X^{(k)}-x^{(k)})))\times$$
$$\times(X^{(k)}-x^{(k)}))=\omega(x^{(k)}+C^{(k)}(f(x^{*})-f(x^{(k)}))+(I-C^{(k)}(f'(x^{(k)})+\frac{1}{2!}\times$$
$$f''(x^{(k)}+\frac{2}{3}[\theta_1](X^{(k)}-x^{(k)}))(X^{(k)}-x^{(k)})))(X^{(k)}-x^{(k)})=\omega(x^{(k)}+C^{(k)}\times$$
$$\times(f'(x^{(k)})(x^{*}-x^{(k)})+\frac{1}{2!}f''(x^{(k)}+\theta_2^{0}(x^{*}-x^{(k)}))(x^{*}-x^{(k)})^{2})+$$
$$+(I-C^{(k)}(f'(x^{(k)})+\frac{1}{2!}f''(x^{(k)}+\frac{2}{3}[\theta_1](X^{(k)}-x^{(k)}))(X^{(k)}-x^{(k)})))\times$$
$$\times(X^{(k)}-x^{(k)}))=\omega(x^{(k)}+C^{(k)}(f'(x^{(k)})+\frac{1}{2!}f''(x^{(k)}+\theta_2^{0}(x^{*}-x^{(k)}))\times$$
$$\times(x^{*}-x^{(k)}))(x^{*}-x^{(k)})+(I-C^{(k)}(f'(x^{(k)})+\frac{1}{2!}f''(x^{(k)}+\theta_2^{0}(x^{*}-x^{(k)}))\times$$
$$\times(x^{*}-x^{(k)}))(x^{*}-x^{(k)})+(I-C^{(k)}(f'(x^{(k)})+\frac{1}{2!}f''(x^{(k)}+\frac{2}{3}[\theta_1](X^{(k)}-x^{(k)}))\times$$
$$\times(X^{(k)}-x^{(k)})))(X^{(k)}-x^{(k)}))=\omega(x^{(k)}-x^{*}+C^{(k)}(f'(x^{(k)})+\frac{1}{2!}\times$$
$$\times f''(x^{(k)}+\theta_2^{0}(x^{*}-x^{(k)}))(x^{*}-x^{(k)}))(x^{*}-x^{(k)})+(I-C^{(k)}(f'(x^{(k)})+$$
$$+\frac{1}{2!}f''(x^{(k)}+\frac{2}{3}[\theta_1](X^{(k)}-x^{(k)}))(X^{(k)}-x^{(k)})))(X^{(k)}-x^{(k)}))=$$
$$\omega((-I+C^{(k)}(f'(x^{(k)})+\frac{1}{2!}f''(x^{(k)}+\theta_2^{0}(x^{*}-x^{(k)}))(x^{*}-x^{(k)})))(x^{*}-x^{(k)})+$$
$$+(I-C^{(k)}(f'(x^{(k)})+\frac{1}{2!}f''(x^{(k)}+\frac{2}{3}[\theta_1](X^{(k)}-x^{(k)}))(X^{(k)}-x^{(k)})))\times$$
$$\times(X^{(k)}-x^{(k)}))\le\omega((-I+C^{(k)}(f'(x^{(k)})+\frac{1}{2!}f''(x^{(k)}+\theta_2^{0}(x^{*}-x^{(k)}))\times$$
$$\times(x^{*}-x^{(k)})))(X^{(k)}-x^{(k)})+(I-C^{(k)}(f'(x^{(k)})+\frac{1}{2!}\times$$
$$\times f''(x^{(k)}+\frac{2}{3}[\theta_1](X^{(k)}-x^{(k)}))(X^{(k)}-x^{(k)})))(X^{(k)}-x^{(k)})).$$

Так как $(-I+C^{(k)}(f'(x^{(k)})+\frac{1}{2!}f''(x^{(k)}+\theta_2^{0}(x^{*}-x^{(k)}))(x^{*}-x^{(k)})))$ и $(I-C^{(k)}(f'(x^{(k)})+\frac{1}{2!}f''(x^{(k)}+\frac{2}{3}[\theta_1](X^{(k)}-x^{(k)}))(X^{(k)}-x^{(k)})))$ симметричные матрицы и воспользовавшись свойством дистрибутивности, запишем

$$\omega((-I+C^{(k)}(f'(x^{(k)})+\frac{1}{2!}f''(x^{(k)}+\theta_2^{0}(x^{*}-x^{(k)}))(x^{*}-x^{(k)})))(X^{(k)}-x^{(k)})+$$
$$+(I-C^{(k)}(f'(x^{(k)})+\frac{1}{2!}f''(x^{(k)}+\frac{2}{3}[\theta_1](X^{(k)}-x^{(k)}))(X^{(k)}-x^{(k)})))\times$$
$$\times(X^{(k)}-x^{(k)}))=\omega(\frac{1}{2!}C^{(k)}(f''(x^{(k)}+\theta_2^{0}(x^{*}-x^{(k)}))(x^{*}-x^{(k)})-$$
$$-f''(x^{(k)}+\frac{2}{3}[\theta_1](X^{(k)}-x^{(k)}))(X^{(k)}-x^{(k)}))(X^{(k)}-x^{(k)}))\le$$
$$\le\omega(\frac{1}{2!}C^{(k)}(f''(x^{(k)}+\theta_2^{0}(X^{(k)}-x^{(k)}))(X^{(k)}-x^{(k)})-$$
$$-f''(x^{(k)}+\frac{2}{3}[\theta_1](X^{(k)}-x^{(k)}))(X^{(k)}-x^{(k)}))(X^{(k)}-x^{(k)}))=\frac{1}{2!}|C^{(k)}|\times$$

$$\times\omega((f''(x^{(k)}+\theta_2^0(X^{(k)}-x^{(k)}))-f''(x^{(k)}+\frac{2}{3}[\theta_1^1](X^{(k)}-x^{(k)})))\times$$
$$\times(X^{(k)}-x^{(k)})^2)\leq|C(X^{(0)})|\,|\theta_2^0-\frac{2}{3}[\theta_1^1]|\,|f'''(X^{(k)})|\,\omega(X^{(k)}-x^{(k)})\times$$
$$\times(\omega(X^{(k)}))^2\leq|C(X^{(0)})|\,|f'''(X^{(k)})|\,(\omega(X^{(k)}))^3\leq|C(X^{(0)})|\,|f'''(X^{(0)})|\times$$
$$\times(\omega(X^{(k)}))^3.$$

Таким образом, имеем (2.3I) или (2.3I$'$), где в роли константы c можна выбрать матрицу $|C(X^{(0)})f'''(X^{(0)})|$.

<u>Следствие 3.</u> Пусть отображение $f : R^n \to R^n$ четырежды непрерывно дифференцируемо по Фреше на $X^{(0)} \subset D$ или его третья производная принадлежит классу липшицевых функций.

Тогда последовательность интервалов $\{X^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$, вычисленная по формулам (2.27)-(2.28), удовлетворяет соотношениям а)-б) теоремы II и имеет порядок сходимости не ниже четырех.

<u>Следствие 4.</u> Если третья производная по Фреше отображения $f(x)$ удовлетворяет условию Гельдера с параметром α $(0 < \alpha \leq 1)$, тогда последовательность интервалов $\{X^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$, вычисленная по формулам (2.27)-(2.28), удовлетворяет соотношениям а)-б) теоремы II и имеет порядок сходимости не ниже $3+\alpha$.

Доказательства следствий 3 и 4 проводятся аналогично доказательству следствия I из теоремы 6.

§ 2.4 Устойчивость интервального итерационного метода типа Рунге.

В данном параграфе рассматриваются вопросы сходимости методов близких в смысле операторной нормы к методу (2.14)-(2.15). Близкими будем считать методы, порожденные аппроксимацией обратного оператора $(1/4f'(x^{(k)})+3/4f'(x^{(k)}+2/3(X^{(k)}-x^{(k)})))^{-1}$ и выбором начальных операторов в аппроксимациях. Устойчивость метода (2.14)-(2.15) состоит, во-первых, в сходимости к одному и тому же предельному элементу при описанных выше возмущениях, во-вторых, в сохранении порядка сходимости метода . Диапазон устойчивости метода (2.14)-(2.15) по двум выше указанным критериям указан в виде условий теоремы 12. Результаты этой раздела естественным образом обобщаются на возмущения более общего вида, порожденные так называемыми, итерационными рекурсиям построенными на основании метода (2.14) - (2.15) (см.[11]). В главе 3 рассмотрены варианты выбора начального оператора аппроксимации, решение частных типов систем нелинейных уравнений, численные решения некоторых граничных задач для обычных дифференциальных уравнений.

Устойчивость метода (2.14)-(2.15) обобщена в следующей теореме.

<u>Теорема 12.</u> Пусть для точек $x,y \in [x^{(0)},y^{(0)}] \subset D \subset R^n, (x\le y)$ выполнены условия:

1) отображение $f: D \subset R^n \to R^n$ дважды непрерывно дифференцируемо по Фреше и

$$f(x^{(0)}) \le 0 \le f(y^{(0)}); \qquad (2.37)$$

2) отображение

$$A: \langle (x,y) \mid [x^{(0)},y^{(0)}]\times[x^{(0)},y^{(0)}] \rangle \to R^n \times R^n, \qquad (2.38)$$

где

$$f(x)-f(y)=A(x,y)(x-y); \qquad (2.39)$$

3) непрерывное отображение

$$B: \langle (x,y) \mid [x^{(0)},y^{(0)}]\times[x^{(0)},y^{(0)}] \rangle \to R^n \times R^n, \qquad (2.40)$$

где

$$B=B(x,y)=1/4f'(y)+3/4\, f'(y+2/3(x-y)), \qquad (2.41)$$

удовлетворяет соотношениям:

а) $B(\bar{x},\bar{y}) \le B(x,y)$,

если $x \le \bar{x} \le \bar{y} \le y$;

б) $A(x,y) \le B(x,y)$;

в) существует $B(x,y)^{-1}$ и $B(x,y)^{-1} \ge 0$; (2.42)

4) матрица $P^{(0)} \in R^n \times R^n$ невырождена и:

а) $B(x^{(0)},y^{(0)})\,P^{(0)} \le I$ (I – единичная матрица);

б) $P^{(0)}B(x^{(0)},y^{(0)}) \le I$;

в) $P^{(0)} \ge 0$.

Тогда последовательности $\langle x^{(k)} \rangle_{k=0}^{\infty}$, $\langle y^{(k)} \rangle_{k=0}^{\infty}$, $\langle P^{(k)} \rangle_{k=0}^{\infty}$, определяемые по формулам

$$\begin{cases} y^{(k+1)}=y^{(k)}-P^{(k)}f(y^{(k)}); \\ x^{(k+1)}=x^{(k)}-P^{(k)}f(x^{(k)}); \\ P^{(k+1)}=P^{(k)}(I+(I-B(x^{(k+1)},y^{(k+1)})P^{(k)})(2I-B(x^{(k+1)},y^{(k+1)})P^{(k)})); \end{cases} \qquad (2.43)$$

удовлетворяют соотношениям:

$$x^{(0)}\le x^{(1)}\le \dots\ x^{(k)}\le x^{(k+1)}\le y^{(k+1)}\le y^{(k)}\le \dots \le y^{(1)}\le y^{(0)}; \qquad (2.44)$$

$$f(x^{(k)}) \le 0 \le f(y^{(k)}); \qquad (2.45)$$

$$P^{(0)}\le P^{(1)}\le \dots \le P^{(k)}\le P^{(k+1)}\le \dots ; \qquad (2.46)$$

$P^{(k)}$ невырождены; (2.47)

$$B(x^{(k)},y^{(k)})\,P^{(k)} \le I; \qquad (2.48)$$

$$P^{(k)} B(x^{(k)}, y^{(k)}) \le I; \qquad (2.49)$$

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^{*}, \ \lim_{k\to\infty} y^{(k)} = y^{*} \text{ и } x^{*} = y^{*}; \qquad (2.50)$$

$$P^{*} = \lim_{k\to\infty} P^{(k)} = B(x^{*}, y^{*})^{-1}; \qquad (2.51)$$

$$\lim_{k\to\infty} P^{(k)} = f'(x^{*})^{-1}; \qquad (2.52)$$

$$f(x^{*}) = f(y^{*}) = 0. \qquad (2.53)$$

Все решения $\tilde{z}^{*}$ системы $f(x)=0$, принадлежащие интервалу $[x^{(0)}, y^{(0)}]$, удовлетворяют условию

$$x^{*} \le \tilde{z}^{*} \le y^{*}. \qquad (2.54)$$

Если для $f(x)$, кроме этого, существует третья производная по Фреше и она удовлетворяет условию Липшица:

$$\| f'''(x) - f'''(y) \| \le c \| x - y \| \ (c - \text{const}), \qquad (2.55)$$

то последовательности

$$\{ [x^{(k)}, y^{(k)}] \}_{k=0}^{\infty}, \ \{ P^{(k)} \}_{k=0}^{\infty} \in I(R^{n})$$

сходятся соответственно к $[x^{*}, y^{*}], P^{*}$, причем порядок сходимости не ниже 3.

<u>Доказательство</u>. Соотношения (2.44)-(2.54) доказываются методом математической индукции по аналогии с доказательством соотношений (9)-(19) теоремы I главы 21 из [1].

Оценим порядок сходимости метода (2.43). Учитывая (2.44) и (2.45),

$$f(x^{(k)}) \le 0 \text{ и } x^{(k)} \le x^{*}.$$

Поэтому

$$\| y^{(k+1)} - x^{*} \| = \| y^{(k)} - x^{*} - P^{(k)} f(y^{(k)}) \| \le$$

$$\le \| y^{(k)} - x^{(k)} - P^{(k)} f(y^{(k)}) \| = \| x^{(k)} - y^{(k)} + P^{(k)} f(y^{(k)}) \| \le$$

$$\le \| P^{(k)} (B(x^{(k)}, y^{(k)})(x^{(k)} - y^{(k)}) - (f(x^{(k)}) - f(y^{(k)}))) +$$

$$+ (B(x^{(k)}, y^{(k)})^{-1} - P^{(k)}) B(x^{(k)}, y^{(k)})(x^{(k)} - y^{(k)}) \|;$$

Очевидно, что

$$A(x,y)=f'(y)+\frac{1}{2!}f''(y)(x-y)+\frac{1}{3!}f'''(y+\theta_3^0(x-y))(x-y)^2,$$

где $\theta_3^0\in(0,1)$.

Поэтому далее имеем

$$\|B(x^{(k)},y^{(k)})-A(x^{(k)},y^{(k)})\|=\|1/4f'(y)+3/4f'(y+2/3(x-y))-$$
$$-(f'(y)+1/2!f''(y)(x-y)+1/3!f'''(y+\theta_3^0(x-y))(x-y)^2)\|=$$
$$=\|1/4f'(y)+3/4(f'(y)+1/2!f''(y)(x-y)+1/2!\;3/4\;(2/3)^2\times$$
$$\times f'''(y+2/3\,\theta_2^1(x-y))(x-y)^2)-(f'(y)+1/2!\;f''(y)(x-y)+$$
$$+1/3!\;f'''(y+\theta_3^0(x-y))(x-y)^2\|=\|1/3!\;f'''(y+2/3\theta_2^1(x-y))\times$$
$$\times(x-y)^2-1/3!f'''(y+\theta_3^0(x-y))(x-y)^2\|=\|1/3!(f'''(y+2/3\theta_2^1(x-y))-$$
$$-f'''(y+\theta_3^0(x-y))(x-y)^2\|. \qquad (2.56)$$

Согласно (2.55) имеем

$$1/3!\|(f'''(y+2/3\theta_2^1(x-y))-f'''(y+\theta_3^0(x-y))\|\;\|x-y\|^2\le$$
$$\le 1/3!\;c\;\|2/3\;\theta_2^1-\theta_3^0\|\;\|x-y\|^3=C\;\|x-y\|^3.$$

Учитывая это, (I9) имеет вид:

$$\|P^{(k)}(B(x^{(k)},y^{(k)})-A(x^{(k)},y^{(k)}))(x^{(k)}-y^{(k)})+$$
$$+(B(x^{(k)},y^{(k)})^{-1}-P^{(k)})B(x^{(k)},y^{(k)})(x^{(k)}-y^{(k)})\|\le$$
$$\le\|P^{(k)}\|\;\|B(x^{(k)},y^{(k)})-A(x^{(k)},y^{(k)})\|\;\|x^{(k)}-y^{(k)}\|+$$
$$+\|(B(x^{(k)},y^{(k)})^{-1}-P^{(k)})B(x^{(k)},y^{(k)})(x^{(k)}-y^{(k)})\|\le$$
$$\le\|P^{(k)}\|\;C\;\|x^{(k)}-y^{(k)}\|^4+\|(B(x^{(k)},y^{(k)})^{-1}-P^{(k)})B(x^{(k)},y^{(k)})\times$$
$$\times(x^{(k)}-y^{(k)})\|.$$

Из определения $P^{(k)}$ последовательно получаем

$$\|P^{(k)}\|\;C\;\|x^{(k)}-y^{(k)}\|^4+\|(B(x^{(k)},y^{(k)})^{-1}-P^{(k)})B(x^{(k)},y^{(k)})\times$$
$$(x^{(k)}-y^{(k)})\|=\|P^{(k)}\|\;C\;\|x^{(k)}-y^{(k)}\|^4+\|(B(x^{(k)},y^{(k)})^{-1}-$$
$$-P^{(k-1)}(2I-B(x^{(k)},y^{(k)})P^{(k-1)}+(I-B(x^{(k)},y^{(k)})P^{(k-1)})^2))B(x^{(k)},y^{(k)})\times$$
$$(x^{(k)}-y^{(k)})\|=C\;\|P^{(k)}\|\;\|x^{(k)}-y^{(k)}\|^4+\|\;B(x^{(k)},y^{(k)})^{-1}-$$
$$-P^{(k-1)}-P^{(k-1)}+P^{(k-1)}B(x^{(k)},y^{(k)})\;P^{(k-1)}-$$
$$-P^{(k-1)}(I-B(x^{(k)},y^{(k)})P^{(k-1)})^2)B(x^{(k)},y^{(k)})(x^{(k)}-y^{(k)})\|=$$

$$= C \, \|P^{(k)}\| \|x^{(k)} - y^{(k)}\|^4 + \|((B(x^{(k)}; y^{(k)})^{-1} - P^{(k-1)}) -$$

$$-(B(x^{(k)}; y^{(k)})^{-1} - P^{(k-1)}) \, B(x^{(k)}, y^{(k)}) \, P^{(k-1)} -$$

$$- P^{(k-1)}(I - B(x^{(k)}, y^{(k)}) P^{(k-1)})^2 \,) \, B(x^{(k)}; y^{(k)})(x^{(k)} - y^{(k)})\| =$$

$$= C \, \|P^{(k)}\| \|x^{(k)} - y^{(k)}\|^4 + \|((B(x^{(k)}; y^{(k)})^{-1} - P^{(k-1)}) \times$$

$$\times (I - B(x^{(k)}, y^{(k)}) P^{(k-1)}) - P^{(k-1)}(I - B(x^{(k)}, y^{(k)}) P^{(k-1)})^2 \,) \times$$

$$\times B(x^{(k)}, y^{(k)})(x^{(k)} - y^{(k)})\| = C \, \|P^{(k)}\| \|x^{(k)} - y^{(k)}\|^4 +$$

$$+ \|((B(x^{(k)}; y^{(k)})^{-1} - P^{(k-1)}) - P^{(k-1)}(I - B(x^{(k)}, y^{(k)}) P^{(k-1)}))\times$$

$$\times (I - B(x^{(k)}, y^{(k)}) P^{(k-1)}) \, B(x^{(k)}, y^{(k)})(x^{(k)} - y^{(k)}) \, \| =$$

$$= C \, \|P^{(k)}\| \, \|x^{(k)} - y^{(k)}\|^4 + \| \, ((B(x^{(k)}; y^{(k)})^{-1} - P^{(k-1)}) -$$

$$-P^{(k-1)} B(x^{(k)}; y^{(k)})(B(x^{(k)}; y^{(k)})^{-1} - P^{(k-1)}))(I - B(x^{(k)}, y^{(k)}) P^{(k-1)})\times$$

$$\times (I - B(x^{(k)}, y^{(k)}) P^{(k-1)}) B(x^{(k)}, y^{(k)})(x^{(k)} - y^{(k)}) \, \| =$$

$$= C \, \|P^{(k)}\| \, \|x^{(k)} - y^{(k)}\|^4 + \| \, ((B(x^{(k)}; y^{(k)})^{-1} - P^{(k-1)}) -$$

$$-P^{(k-1)} B(x^{(k)}; y^{(k)})(B(x^{(k)}; y^{(k)})^{-1} - P^{(k-1)}))(I - B(x^{(k)}, y^{(k)}) P^{(k-1)})\times$$

$$\times B(x^{(k)}, y^{(k)})(x^{(k)} - y^{(k)}) \, \| = C \, \|P^{(k)}\| \, \|x^{(k)} - y^{(k)}\|^4 +$$

$$+ \| \, (I - P^{(k-1)} B(x^{(k)}, y^{(k)}))(B(x^{(k)}; y^{(k)})^{-1} - P^{(k-1)}) \times$$

$$\times (I - B(x^{(k)}, y^{(k)}) P^{(k-1)}) B(x^{(k)}, y^{(k)})(x^{(k)} - y^{(k)}) \, \| =$$

$$= C \, \|P^{(k)}\| \, \|x^{(k)} - y^{(k)}\|^4 + \|(B(x^{(k)}; y^{(k)})^{-1} - P^{(k-1)}) B(x^{(k)}; y^{(k)})\times$$

$$\times (B(x^{(k)}; y^{(k)})^{-1} - P^{(k-1)}) B(x^{(k)}; y^{(k)})(B(x^{(k)}; y^{(k)})^{-1} - P^{(k-1)}) \times$$

$$\times B(x^{(k)}, y^{(k)})(x^{(k)} - y^{(k)})\| = C \, \|P^{(k)}\| \, \|x^{(k)} - y^{(k)}\|^4 +$$

$$+ \|B(x^{(k)}; y^{(k)})^{-1} - P^{(k-1)}\|^2 \|B(x^{(k)}, y^{(k)})\|^2 \, \| x^{(k)} - y^{(k)}\|.$$

Из (2.53) следует, что существует константа s, такая что

$$\| P^{(k)} \| \le s \, , \quad k \ge 0.$$

Поэтому

$$C \, \|P^{(k)}\| \, \|x^{(k)} - y^{(k)}\|^4 + \|B(x^{(k)}; y^{(k)})^{-1} - P^{(k-1)}\|^2 \|B(x^{(k)}, y^{(k)})\|^2 \times$$

$$\times \|x^{(k)} - y^{(k)}\| \le C \, s \, \|x^{(k)} - y^{(k)}\|^4 + \|B(x^{(k)}; y^{(k)})^{-1} - P^{(k-1)}\|^2 \times$$

$$\times \|B(x^{(k)}, y^{(k)})\|^2 \, \| x^{(k)} - y^{(k)}\|. \tag{2.57}$$

Обозначим

$$B(x^{(0)},y^{(0)}) = M \ (M - \text{const}). \qquad (2.58)$$

Используя свойство монотонности включения, имеем

$$B(x^{(k)},y^{(k)}) \le B(x^{(0)},y^{(0)}). \qquad (2.59)$$

Тогда, согласно (2.58), (2.59) имеет вид

$$B(x^{(k)},y^{(k)}) \le M.$$

Теперь (2.57) можно оценить так:

$$C s \|x^{(k)}- y^{(k)}\|^4+ \|B(x^{(k)}; y^{(k)})^{-1}- P^{(k-1)}\|^2 \|B(x^{(k)},y^{(k)})\|^2 \times$$
$$\times \| x^{(k)}- y^{(k)}\| \le C s \|x^{(k)}- y^{(k)}\|^4+ \|B(x^{(k)}; y^{(k)})^{-1}- P^{(k-1)}\|^2 \times$$
$$\times M^2\|x^{(k)}- y^{(k)}\| = \gamma_1\|x^{(k)}- y^{(k)}\|^4+ \gamma_2\|B(x^{(k)}; y^{(k)})^{-1}- P^{(k-1)}\|^2 \times$$
$$\times \|x^{(k)}- y^{(k)}\|,$$

где $\gamma_1 = C s$, $\gamma_2 = M^2$.

Далее на основании (2.42) имеем

$$B(x^{(k)},y^{(k)})^{-1} \le B(x^{*},y^{*})^{-1},$$

т.е. верно

$$B(x^{(k)},y^{(k)})^{-1} \le P^{*}.$$

Поэтому

$$\gamma_1 \|x^{(k)}- y^{(k)}\|^4+ \gamma_2\|B(x^{(k)}; y^{(k)})^{-1}- P^{(k-1)}\|^2 \|x^{(k)}- y^{(k)}\| \le$$
$$\le \gamma_1 \|x^{(k)}- y^{(k)}\|^4+ \gamma_2 \|P^{*} - P^{(k-1)}\|^2 \|x^{(k)}- y^{(k)}\|. \qquad (2.60)$$

Используя свойства нормы, аналогично получаем

$$\|x^{(k+1)}-x^{*}\|\le\gamma_3\|x^{(k)}- y^{(k)}\|^4+\gamma_4\|P^{*}-P^{(k-1)}\|^2\|x^{(k)}-y^{(k)}\|, \qquad (2.61)$$

где γ_3, γ_4 - константы, которые соответствуют γ_1, γ_2 в предыдущих оценках.

Введем норму для матриц типа $A = (b, B) \in R^n \times R^{n+1}$

$$\| A \| = \max (\|b\|, \|B\|)$$

и положим

$$d^{(k)} = \| (x^{(k)}- y^{(k)}, P^{*} - P^{(k-1)})\|.$$

Из (2.60) и (2.6I) получим

$$\|x^{(k+1)} - y^{(k+1)}\| \le \sum_{i=1}^{4} \gamma_i\, d^{(k)^4}.$$

Выше, при доказательстве соотношений (2.58)-(2.59), мы получили неравенство

$$\|P^* - P^{(k)}\| \le \gamma \,\| P^* - P^{(k-1)}\|^2,\ \gamma - \text{const}.$$

Тогда

$$d^{(k+1)} = \|(x^{(k+1)} - y^{(k+1)}, P^* - P^{(k)})\| =$$

$$= \max \{\|x^{(k+1)} - y^{(k+1)}\|,\ \|P^* - P^{(k)}\| \} \le$$

$$\le \max \{ \sum_{i=1}^{4} \gamma_i\, d^{(k)^4},\ \gamma \,\| P^* - P^{(k-1)}\|^2 \} \le \eta\, d^{(k)^2},$$

где

$$\eta = \max \{ \sum_{i=1}^{4} \gamma_i,\ \eta \}.$$

Таким образом, теорема доказана.

Метод (2.43) легко модифицировать в метод с более высокой скоростью сходимости [116]. Для этого мы сохраняем матрицу $P^{(k)}$ неизменной в течении нескольких шагов. Таким образом, получим следующий алгоритм:

$$\begin{cases} y^{(k,0)} = y^{(k)}, \\ y^{(k,r+1)} = y^{(k,r)} - P^{(k)} f(y^{(k,r)}),\ 0 \le r \le m, \\ y^{(k+1)} = y^{(k,m+1)}, \\ x^{(k,0)} = x^{(k)}, \\ x^{(k,r+1)} = x^{(k,r)} - P^{(k)} f(x^{(k,r)}),\ 0 \le r \le m, \\ x^{(k+1)} = x^{(k,m+1)}, \\ P^{(k+1)} = P^{(k)} + P^{(k)} \sum (-1)^{\mu} [B(x^{(k+1)}, y^{(k+1)}) P^{(k)} - I]^{\mu}, \\ k \ge 0. \end{cases}$$

Этот метод сходится в условиях теоремы I2, и порядок сходимости его равен не ниже $m + 3$.

Глава 3. Некоторые применения интервальных итерационных методов типа Рунге.

В настоящее время методы интервального анализа широко применяются в различных областях вычислительной и прикладной математики. Вначале они строились как продолжение классических методов вычислений в интервальное пространство. Преимущество использования таким образом интервальных методов заключалось в том, что проводился учет погрешностей всех типов. Далее специфика интервального пространства позволяла конструировать интервальные методы, которые строились именно в нем,т.е. эти методы нельзя было автоматически перенести в действительное пространство. Кроме выше указанного преимущества, эти методы обладали своеобразными особенностями, учитывающими свойства интервального пространства. К таким методам относятся, в частности и интервальные итерационные методы типа Рунге. Сфера применения такого рода методов широкая.

В настоящей главе рассмотрим некоторые прикладные задачи, решаемые особенно эффективно с их помощью. Здесь будет показано применение выше указанных методов к решению систем нелинейных уравнений. Это важно потому, что многие задачи вычислительной математики сводятся к решению таких систем. Так нами рассмотрено применение интервального метода типа Рунге и его модификаций к решению частных типов граничных задач, к нахождению численных решений некоторых нелинейных краевых задач . Проведено также сравнение результатов этого метода и ранее известных других интервальных методов.

§ 3.I Правила нахождения допустимой области сходимости интервальных методов типа Рунге.

При практическом применении любых интервальных итерационных методов возникает проблема выбора начального интервального вектора, с которого данный метод сходится к решению задачи (I.7). Одной из главных причин решения этой проблемы является то, что начиная с этого вектора мы можем проследить скорость сходимости того или иного интервального метода.

<u>Определение 6.</u> Если существует решение задачи (I.7) в n-мерном прямоугольнике $X \subset B \subset R^n$ и интервальный метод сходится к этому решению, то область X будем называть допустимой областью этого метода.

Классические итерационные методы предполагают хорошее начальное приближение, которое выбирается часто методом перебора. В интервальных методах для нахождения допустимой области часто используют методы деления интервалов пополам (см. [9I],[I02]-[I04]). Опишем кратко основные этапы этих методов.

Область X сначала выбираем большой, чтобы она содержала решение задачи. Пусть $X = B$. Далее для улучшения локализации решения задачи делим X пополам. При делении пополам области X возникает две подзадачи, состоящие в следующем:

I) как координировать направления, на которых происходит деления пополам области X;

2)какую половину исследовать дальше, а какую уже можно выбрать для использования.

<u>Определение 7.</u> Под делением области X пополам в направлении i, будем подразумевать, деление X пополам в координатном направлении x_i и представление X, как объединение двух половинных областей $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$, т.е.

$$X = X^{(1)} \cup X^{(2)},$$

где $X^{(1)} = (X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, \ldots, X_n^{(1)})$, $X^{(2)} = (X_1^{(2)}, X_2^{(2)}, \ldots, X_n^{(2)})$,

$X_j^{(1)} = X_j^{(2)} = X_j$ для любых j $(1 \le j \le n)$ за исключением $j=i$.

i – ая компонента интервала X разделена пополам, поэтому

$$X_i = [\underline{X}_i, m(X_i)] \cup [m(X_i), \overline{X}_i] = X_i^{(1)} \cup X_i^{(2)}.$$

При выборе одной из половинок интервала X мы проверяем условие существование в подинтервале решения задачи (I.7). Если оно выполняется, то исследуем интервальный метод на сходимость к этому решению. В зависимости от этого мы заканчиваем деление интервала X или переходим к следующему подинтервалу. Схема процедуры нахождения допустимой области изображена на следующем рисунке.

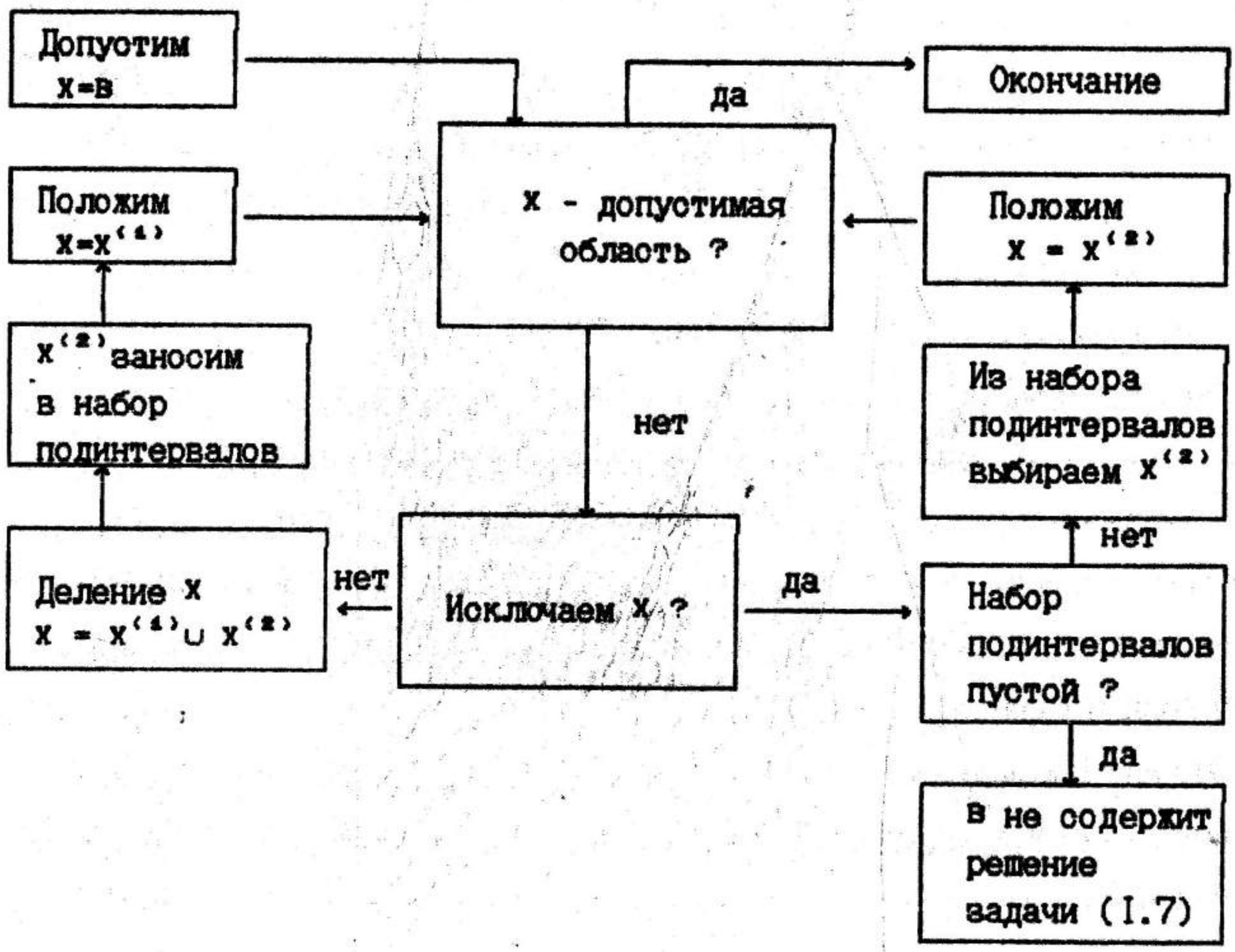

Рис. I.

Приведем некоторые правила деления пополам, существенно использующие специфику методов типа Рунге.

Правило I. При делении делаем циклический перебор координатных направлений и выбираем в роли $x^{(1)}$ левую половину интервала x. Под левой половиной мы подразумеваем интервал $[\underline{x}_i, m(x_i)]$. Циклический перебор направлений - это значит, что рассматривается следующая последовательность координат 1,2,3, ... ,n,1,2,3, ...,n и т.д. .

Правило 2. Деление производим в координатном напрвлении x_i, по которому интервал x имеет наибольшую ширину. Выбираем подинтервал, на который указывает метод (2.14) - (2.15). В зависимости от знака выражения $([1/4\, \dot{f}(x)+3/4\, \dot{f}(x+2/3(X-x))]^{-1} \times$ $\times f(x))_i$ мы получаем сдвиг интервала- результата влево или вправо от середины $x_i^{(k)}$, поэтому выбираем соответствующий подинтервал исходного интервала.

<u>Правило 3.</u> Чтобы определить существование решения задачи (1.7) в X вычисляем с помощью формулы (2.27) выражение $K(X)$ и из (2.28) непустое пересечение указывает на то, что возможно решение задачи (1.7) принадлежит интервалу X. Тогда, используя правило 2, выбираем в качестве $X^{(1)}$ пересечение $X^{(1)} \cap K(X)$ и, соответственно, в качестве $X^{(2)} - X^{(2)} \cap K(X)$.

<u>Правило 4.</u> Деление осуществляется в координатном направлении x_i, в котором выражение $|[1/4\dot{f}(x) + 3/4\, \dot{f}(x+2/3(X-x))]^{-1} f(x))_i|$ является максимальным и выбираем подинтервал, на который указывает метод (2.14) - (2.15)(см. правило 2).

Другие правила деления были предложены в работах [1],[94],но они менее важны при использовании интервальных методов типа Рунге и мы на их рассмотрении останавливаться не будем.

При применении интервальных методов типа Рунге целесообразно использовать правило деления 2 с тем лишь отличием что, при выборе в роли $X^{(1)}$ можна брать левый подинтервал, как указано в правиле деления 1. Это совместное использования правила деления 2 и правила деления 1 дает простое и довольно удобное средство отыскивания допустимой области для этого вида интервальных методов. Хотя использование других правил деления не приводит сравнительно к большому увеличению количества итераций и возрастанию объема вычислений.

§ 3.2 Решение систем нелинейных уравнений интервальными методами типа Рунге.

Опишем алгоритм реализации одного метода из рассмотренного вида интервальных методов типа Рунге, а именно метода (2.14)-(2.15).

Алгоритм.

1.Пусть задан начальный интервал $X^{(0)}$ и точность ε.

2.Положить $k = 0$.

3.Вычислить среднюю точку интервала $X^{(k)}$,т.е. $x^{(k)} = (\underline{X}^{(k)} + \overline{X}^{(k)})/2$.

4.Вычислить $f(x^{(k)})$, $f'(x^{(k)})$.

5.Найти интервал $x^{(k)} + 2/3\,(X^{(k)} - x^{(k)})$.

6. Если $0 \in f(x^{(k)} + 2/3\,(X^{(k)} + x^{(k)}))$, то перейти к шагу 7. В противном случае провести коррекцию интервала $X^{(k)}$, как описано в замечаниях I или 2 к лемме I, если функция $f(x)$ дифференцируема определенное число раз на $X^{(k)}$, а если нет, то разбить интервал $X^{(k)}$ на подинтервалы, как описано в замечании 3 к лемме I,и выбрав один из них перейти к шагу 3.

7.Вычислить $f'(x^{(k)} + 2/3\,(X^{(k)} + x^{(k)}))$, как интервальное расширение функции f' на интервале $x^{(k)} + 2/3\,(X^{(k)} + x^{(k)})$.

8.Найти

$$V^{(k)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{1/4\, f'(x^{(k)}) + 3/4\, f'(x^{(k)} + 2/3\,(X^{(k)} - x^{(k)}))} .$$

9.Вычислить $X^{(k+1)} = V^{(k)} \cap X^{(k)}$.

10.Если $X^{(k+1)} = X^{(k)}$, то переходим на деление интервала (Этап деления интервалов в работе детально описан в § 3.I . Там рассмотрены разные правила деления интервалов, анализируются какое из них наилучше использовать для рассмотренного вида интервальных методов, приведена блок-схема деления интервалов (см. рис.I)). Разбив интервал $X^{(k)}$, выбираем один из подинтервалов и переходим на шаг I3.

Если $X^{(k+1)} = \langle \emptyset \rangle$, тогда в текущем интервале $X^{(k)}$ нету корней уравнения (I). Далее следует посмотреть, если набор интервалов предложенных для рассмотрения пуст, то конец алгоритма, иначе выбираем следующий интервал за $X^{(k+1)}$ и переходим на шаг I3.

II.Вычислить ширину интервала $X^{(k+1)}$, т.е. $\omega\,(X^{(k+1)})$.

I2.Проверить, если $\omega(X^{(k+1)}) \le \varepsilon$, то заканчиваем, в противном случае переходим на шаг I3.

I3.Положить $k=k+1$ и перейти на шаг 3.

При реализации других модификаций интервального итерационного метода типа Рунге изменяется только шаг 8, остальные остаются без изменений.

Покажем применение интервальных методов типа Рунге к нахождению решений систем нелинейных алгебраических уравнений. Рассмотрим следующие системы уравнений

$$\begin{cases} x y - y - 1 = 0; \\ x^2 - y^2 - 1 = 0; \end{cases} \tag{3.1}$$

$$\begin{cases} 3 x^2 + 3/2\, y^2 + z^2 - 5 = 0; \\ 6 x y z - x + 5 y + 3 z = 0; \\ 5 x z - y z - 1 = 0; \end{cases} \tag{3.2}$$

$$\begin{cases} 0.6 x - 2 + 0.49 x (x^2 + y^2) = 0; \\ 0.6 y - 2 + 0.49 y (x^2 + y^2) = 0; \end{cases} \tag{3.3}$$

$$
\begin{cases}
6\,x^{5} - 25.2\,x^{3} + 24\,x - 6\,y = 0; \\
12\,y - 6\,x = 0;
\end{cases}
\qquad (3.4)
$$

Эти системы уравнений были решены интервальным итерационным методом Ньютона в форме (I.I2) - (I.I3) и (I.I6) и интервальным итерационным методом типа Рунге в форме (2.II) - (2.I2) и (2.I3). Проведенные вычисления подтверждают теоретические выводы о том, что наиболее эффективным среди перечисленных выше является метод (2.I3). Динамика изменения промежуточных интервалов при решении системы (3.3) методом (I.I2) -(I.I3) при фиксированном β = 2/3 отражена в таблице I.

Таблица I. (ε=10^{-2})

Итерация	Границы входных интервалов по каждой координате	Границы вычисляемых интервалов по каждой координате
1	0.100000e+01 0.300000e+01 0.100000e+01 0.300000e+01	-0.438466e+00 0.910520e+01 -0.438465e+01 0.910520e+01
2	0.100000e+01 0.200000e+01 0.100000e+01 0.300000e+01	-0.162607e+02 0.109523e+02 -0.100000e+08 0.191786e+01
3	0.100000e+01 0.200000e+01 0.100000e+01 0.191786e+01	-0.127907e+01 0.149756e+01 -0.115791e+01 0.172113e+01
4	0.100000e+01 0.149756e+01 0.100000e+01 0.172113e+01	0.643368e+00 0.134183e+01 0.620775e+00 0.129412e+01
5	0.100000e+01 0.134183e+01 0.100000e+01 0.129412e+01	0.103244e+01 0.115255e+01 0.104456e+01 0.114498e+01
6	0.103244e+01 0.115255e+01 0.104456e+01 0.114498e+01	0.110319e+01 0.111562e+01 0.110545e+01 0.111262e+01
7	0.110319e+01 0.111562e+01 0.110545e+01 0.111262e+01	0.110848e+01 0.110855e+01 0.110850e+01 0.110852e+01

Результаты решения систем (3.I) - (3.4) выше отмеченными методами, исходя из разных начальных интервалов, даны в таблице 2. В даной таблице начальные интервалы взяты одинаковыми по каждой координате.

Таблица 2.($\varepsilon=10^{-2}$; $\beta=2/3$)

Система	Начальный интервал	Количество решений в начальных интервалах	Количество итераций при реализации метода			
			(1.12)-(1.13)	(2.11)-(2.12)	(1.15)-(1.16)	(2.13)
(3.1)	[0.6;2.9]	1	41	30	6	4
	[0.5; 5]	1	51	22	25	17
	[-5;-0.1]	1	50	21	25	16
(3.2)	[0; 2]	1	27	10	15	6
	[2; 5]	нет корней	5	3	3	1
(3.3)	[1; 3]	1	24	16	7	4
	[0.6;2.9]	1	18	12	5	3
	[-1; 4]	1	94	56	56	43
(3.4)	[0.6;2.9]	1	33	24	5	3
		нет корней	15	12	10	5

Если начальные интервалы имеют небольшую ширину, то при реализации методов (2.11) - (2.12) и (2.13) целесообразно брать фиксированное $\beta = 2/3$, хотя в общем случае β при необходимости надо менять на каждом шаге итерации. Следует провести три пробных итерации (они учтены при подсчете общего количества итераций) при $\beta = 1,\ 2/3,\ 1/100$ и в качестве β выбрать члены соответствующих последовательностей, сходящихся к 2/3.

Нахождение решений системы нелинейных уравнений продемонстрируем на более сложном примере:

$$
\begin{cases}
x^4 - 2x^3y + 2xy^3 - y^4 + x^3 + x^2y - 5xy^2 + 3y^3 - \\
- 87x^2 + 4xy + 83y^2 - 265x - 435y + 350 = 0; \\
x^7 + 3x^6y - 2x^5y^2 - 10x^4y^3 + x^3y^4 + 11x^2y^5 - 4y^7 - \\
- 4x^6 - 11x^5y + 10x^4y^2 + 30x^3y^3 - 16x^2y^4 - 19x \times \\
\times y^5 + 10y^6 - 35x^5 - 20x^4y + 16x^3y^2 - 58x^2y^3 - \\
- xy^4 + 98y^5 + 140x^4 + 30x^3y + 164x^2y^2 + 102xy^3 - \\
- 112y^4 + 259x^3 + 23x^2y - 94xy^2 - 728y^3 - 1036x^2 - \\
- 403xy + 98y^2 - 225x + 1530y + 900 = 0.
\end{cases}
\qquad (3.5)
$$

Изображение поверхностей левых частей уравнений, входящих в систему уравнений (3.5), нарисованы с помощью графической системы PLOTCALL соответственно на рис 3. и рис. 4.Эта система имеет 16 разных действительных корней на интервале [-10, 10], причем корень (-2, 3) является кратным. Схема размещения корней системы уравнений (3.5) изображена на рис. 4.

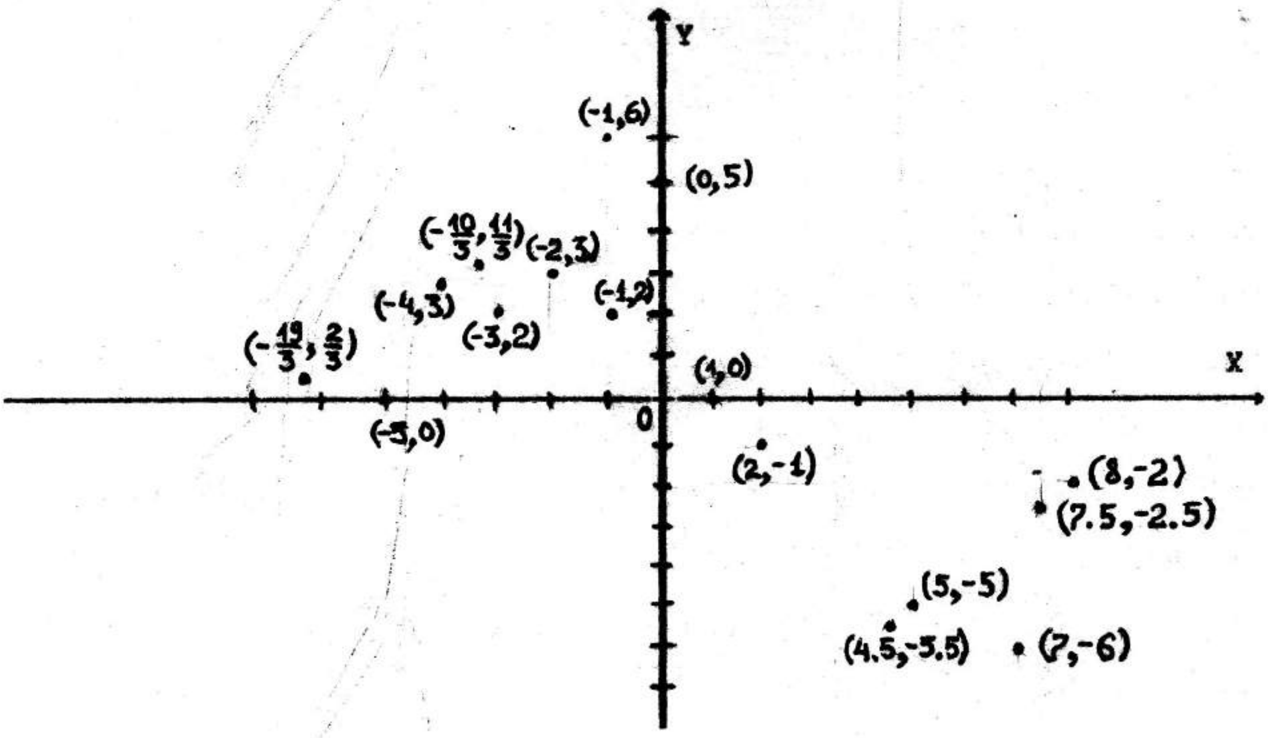

Рис. 2

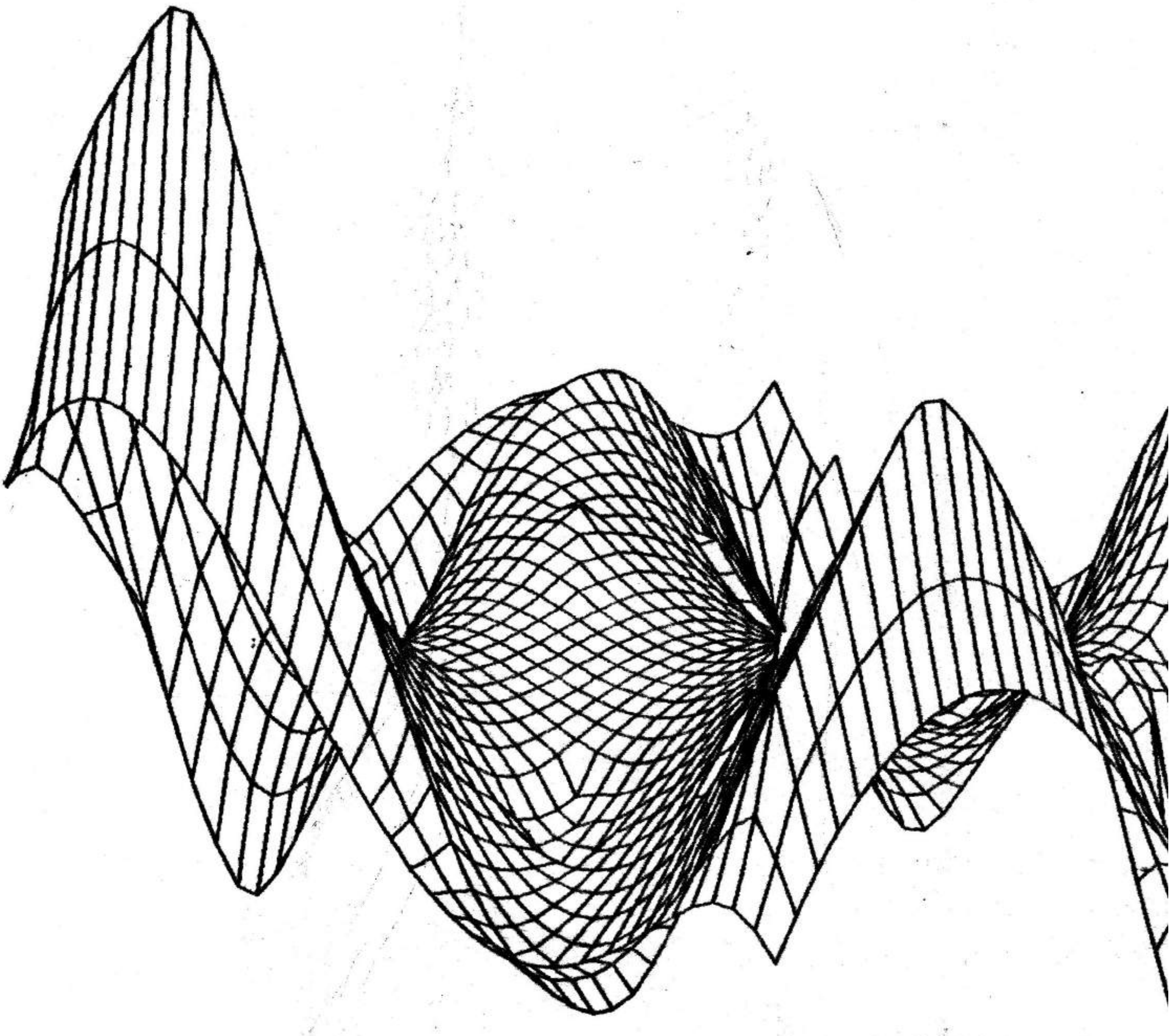

Рис. 3. Изображение поверхности первого уравнения системы (3.5).

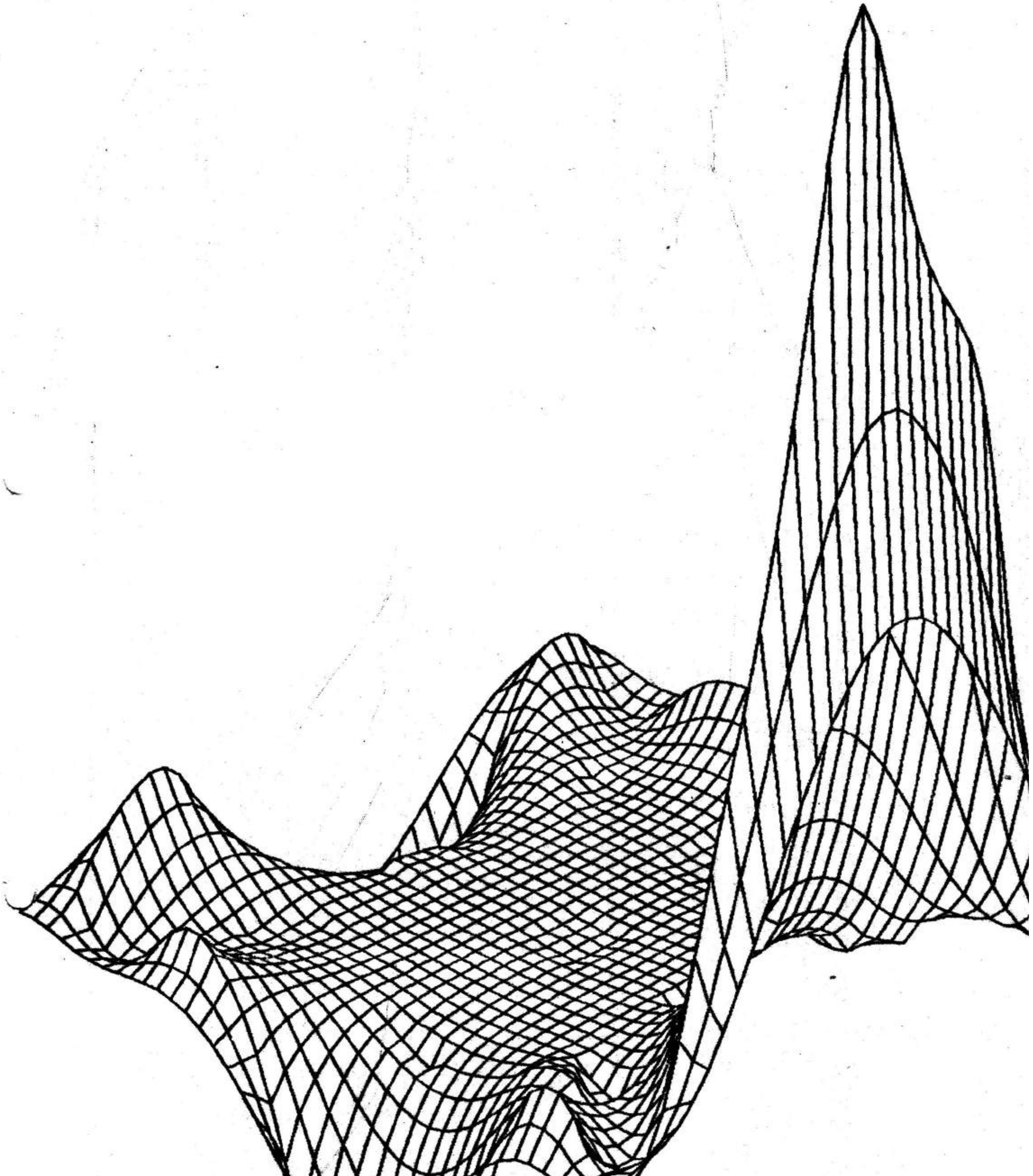

Рис.4.Изображение поверхности второго уравнения системы (3.5).

При решении этой системы использовался интервальный итерационный метод типа Рунге вида (2.27) - (2. 28). Следует заметить, что в формуле (2.27) вычисление интервального расширения линейной комбинации матриц производных осуществляется обычным образом (подстановкой вместо аргумента соответствующего интервала и проведения определенных интервальных операций), другие правила вычисления интервальных расширений требуют дальнейших исследований.

Для вычислений в большинстве случаев выбраны входные интервалы с корнями, размещенными на их границах, так как, в связи с замечаниями I и 2, эти случаи наиболее сложны при реализации этих интервальных методов. Для сравнения, вычисления с заданными входными интервалами проводились интервальным методом Ньютона в виде (I.I2) - (I.I3). Результаты вычислений получены на компьютере серии IBM PC/AT(без сопроцессора)и занесены в таблицу 3.

Таблица 3.($\varepsilon = 10^{-6}$)

N п/п	Входные интервалы(раздельно по каждой переменной)	Количество корней во входных интервалах	Корни	Интервальный метод Ньютона (I.I2)-(I.I3)		Интервальный метод типа Рунге (2.27)-(2.28)	
				Время (мин сек. сот)	Количество итераций	Время (мин сек. сот)	Количество итераций
I	2	3	4	5	6	7	8
1	[-1; 0] [2; 6]	3	(-1,2), (-1,6), (0, 5);	01. 01. 51	199	00. 45. 20	116
2	[-2.5; -2] [2; 3]	1	(-2,3);	02. 26. 21	445	01. 43. 15	260
3	[-1.5;-1] [2; 6]	2	(-1,6), (-1,2);	00. 41. 79	113	00. 28. 89	74
4	[5; 8] [-5; -2]	3	(6,-5), (8,-2), (7.5,-2.5)	03. 40. 52	703	02. 07. 92	360
5	[-3; 1] [0; 2]	2	(-3, 2), (1, 0);	00. 48. 22	153	00. 34. 87	87
6	[1.5; 2] [-1; 1]	1	(2,-1)	00. 11. 86	38	00. 09. 33	24
7	[-10; 10] [-10; 10]	16	(1,0), (-5,0), (0,5), (-1,2), (-1,6), (2,-1), (-3,2), (-2,3), (8,-2),		11464		6236

I	2	3	4	5	6	7	8
			$(-4,3)$, $(5,-5)$, $(7,-6)$, $(\frac{15}{2},-\frac{5}{2})$, $(\frac{9}{2},-\frac{11}{2})$, $(-\frac{10}{3},\frac{11}{3})$ $(-\frac{19}{3},\frac{2}{3})$				

Результаты вычислений в таблице 3 подтверждают все теоретические выводы, полученные нами в § 2.2. Следует иметь в виду, что количество итераций приведенное в таблице 3, отображает лишь общую тенденцию сходимости метода (2.27) - (2.28). Порядок сходимости этого метода отображен лишь косвенно, так как суммарное число итераций в каждом случае содержит и количество итераций, необходимое для нахождения интервала, локализующего один корень системы (3.5). Поэтому найдем допустимые области сходимости (когда деление интервалов не происходит) интервального метода типа Рунге и интервального метода Ньютона. Результаты нахождения допустимых областей для интервального метода типа Рунге занесены в следующую таблицу (Вычисления проведены с помощью препроцессора TPINT [23] на компьютере серии IBM PC/AT (без сопроцессора) с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$).

Таблица 4.

N п/п	Начальный интервал	Корень	Количество итераций	Время счета (мин.сек. сот)
1	[6.98,7.009] [-6.024,-5.992]	(7,-6)	8	0.03.57
2	[-1.1,-0.86] [1.89,2.03]	(-1,2)	9	0.03.95
3	[-0.16,0.16] [4.9,5.16]	(0,5)	13	0.05.65
4	[0.3, 1.4] [-0.22,0.62]	(1,0)	11	0.04.77

Те же корни выбраны и для интервального метода Ньютона и из многочисленных экспериментов выяснилось, что допустимая область по интервальному методу типа Рунге шире, чем по интервальному методу Ньютона. Для сравнения в таблице 5 приведено также количество итераций, полученное по интервальному методу типа Рунге с допустимой областью интервального метода Ньютона.

Таблица 5.($\varepsilon = 10^{-6}$)

N п/п	Начальный интервал	Корень	Метод Ньютона		Метод типа Рунге	
			Кол-во итер.	Время счета (м.с.ст)	Кол-во итер.	Время счета (м.с.ст)
1	[6.99,7.001] [-6.01 ,-5.991]	(7,-6)	10	0.04.00	4	0.01.81
2	[-1.03,-0.97] [1.97,2.03]	(-1,2)	7	0.02.74	4	0.01.86
3	[-0.12,0.13] [4.97,5.1]	(0,5)	9	0.03.61	5	0.02.25
4	[0.65,1.2] [-0.1, 0.3]	(1,0)	9	0.03.57	5	0.02.19

Исходя из результатов вычислений, которые представлены в таблицах 4 и 5, мы можем проследить порядок сходимости интервального метода типа Рунге. Преимущества в количестве итераций и времени счета дает основание утверждать о подтверждении теоретических выводов § 2.3.

Для нахождения допустимых областей сходимости интервальных методов типа Рунге и метода Ньютона, а также для исследования поведения методов в этих областях рассмотрим систему уравнений следующего вида

$$\begin{cases} x^2 - xy - 3y^2 - 15x - 14y + 29 = 0; \\ x^3 + x^2 y - xy^2 + 2y^3 + 2x^2 + 3xy + 10y^2 + 2x - 36y - 44 = 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Графики поверхностей левых частей уравнений системы (3.6) изображены с помощью пакета PLOTCALL на рис. 6 и 7. Схема размещения корней системы (3.6) приведена на рис. 5.

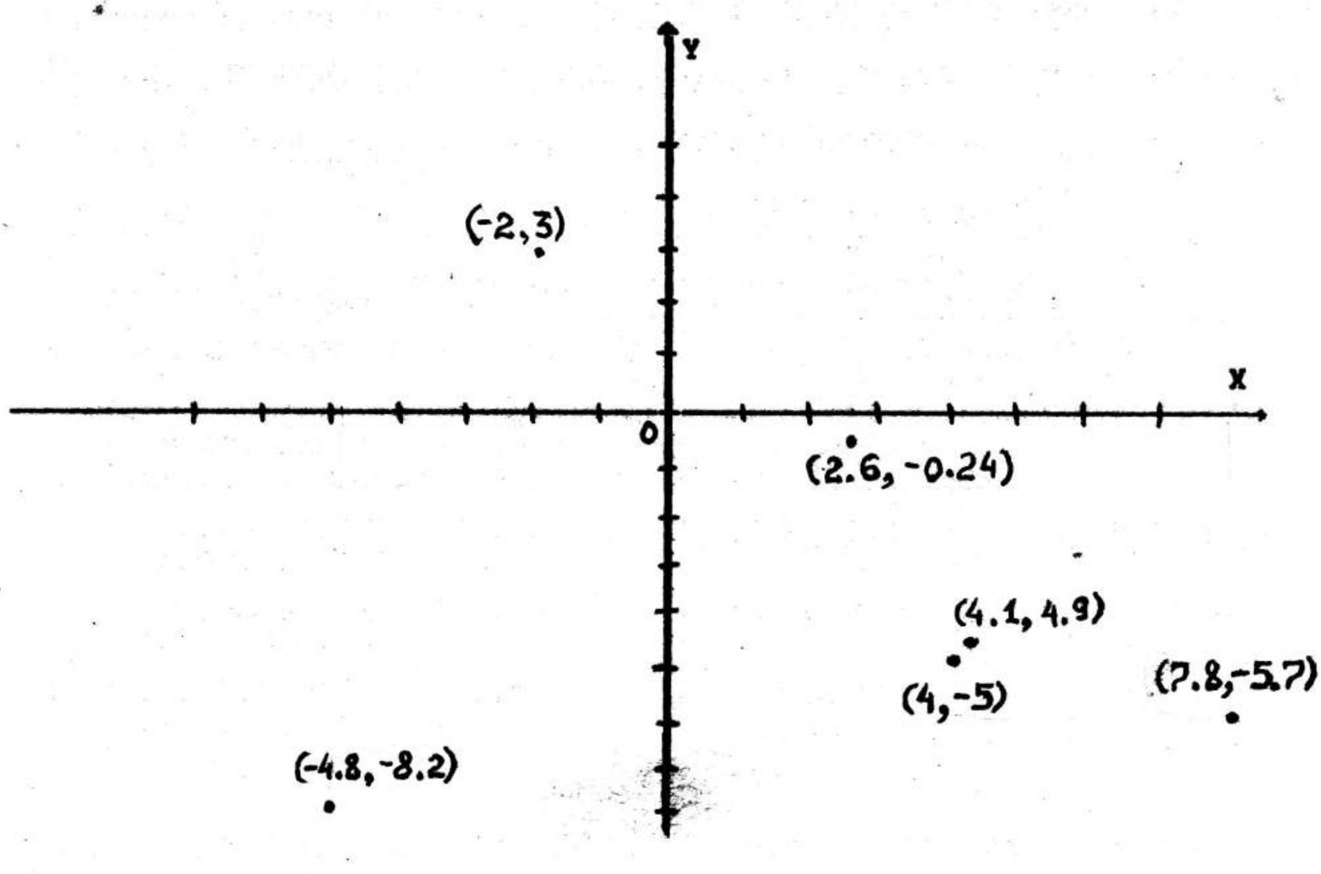

Рис. 5

Для нахождения корней системы (3.6) использовался препроцессор интервального анализа TPINT [23], который применялся на компьютере серии IBM PC/XT. Результаты вычислений занесены в таблицу 6.

Таблица 6. ($\varepsilon = 10^{-6}$)

N п/п	Входные интервалы (раздельно по каждой переменной)	Количество корней во входных интервалах	Корни	Интервальный метод Ньютона (I.12)-(I.13)		Интервальный метод типа Рунге (2.27)-(2.28)	
				Время (мин сек. сот)	Количество итераций	Время (мин сек. сот)	Количество итераций
I	2	3	4	5	6	7	8
1	[-5; 0] [0; 7]	1	(-2,3)	00. 06. 37	32	00. 04. 39	16
2	[-10; 10] [-10; 10]	6	(-4.864, -6.17); (-2,3); (2.6, -2.43e-1) (7.814, -5.677); (4,-5); (4.0498, -4.991)	02. 04. 13	637	01. 39. 08	374
3	[-1; 7] [-6; 5]	3	(2.6, -2.43e-1) (4,-5); (4.0498, -4.991)	01. 25. 35	429	00. 54. 92	212

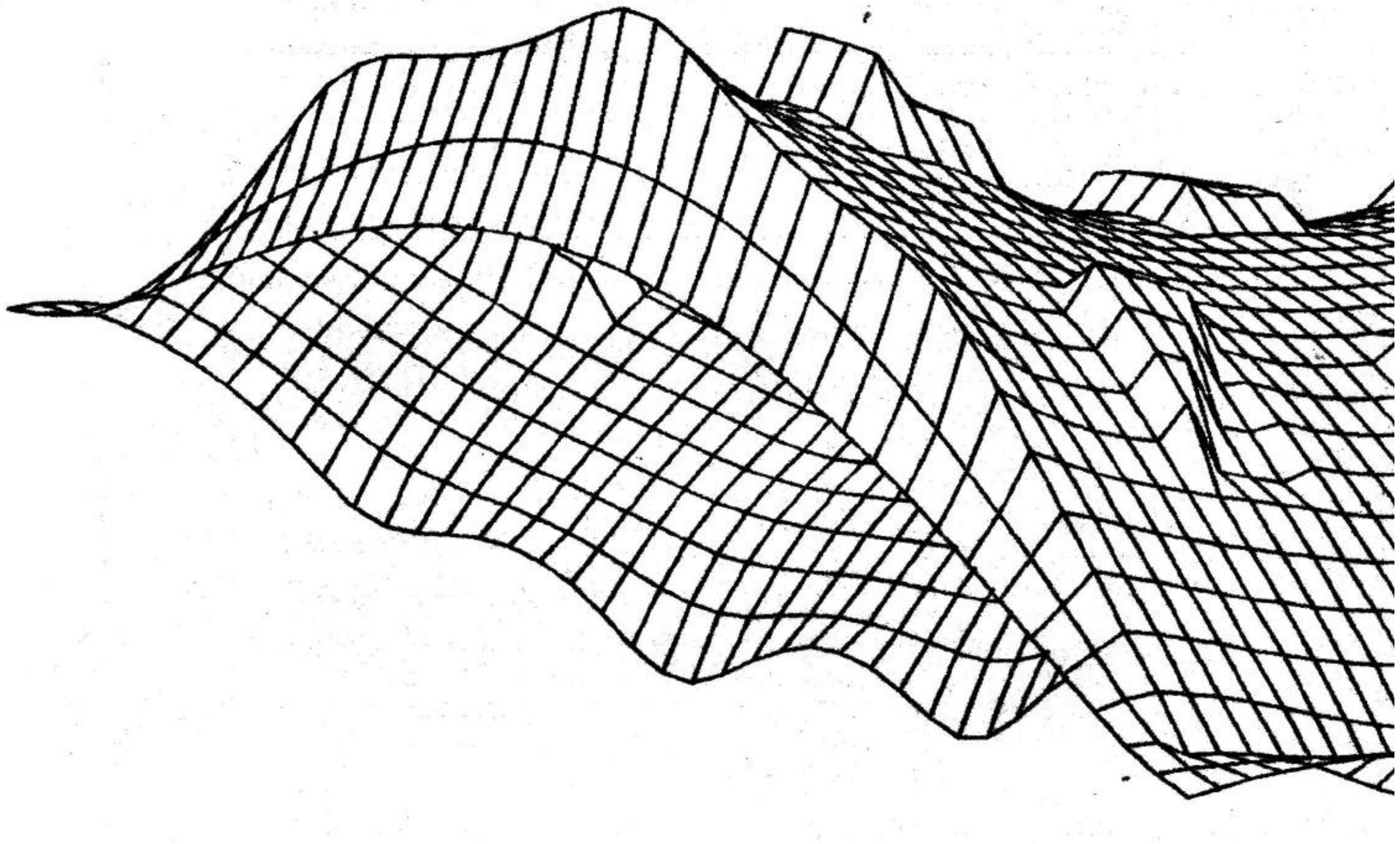

Рис.6.Изображение поверхности первого уравнения системы (3.6).

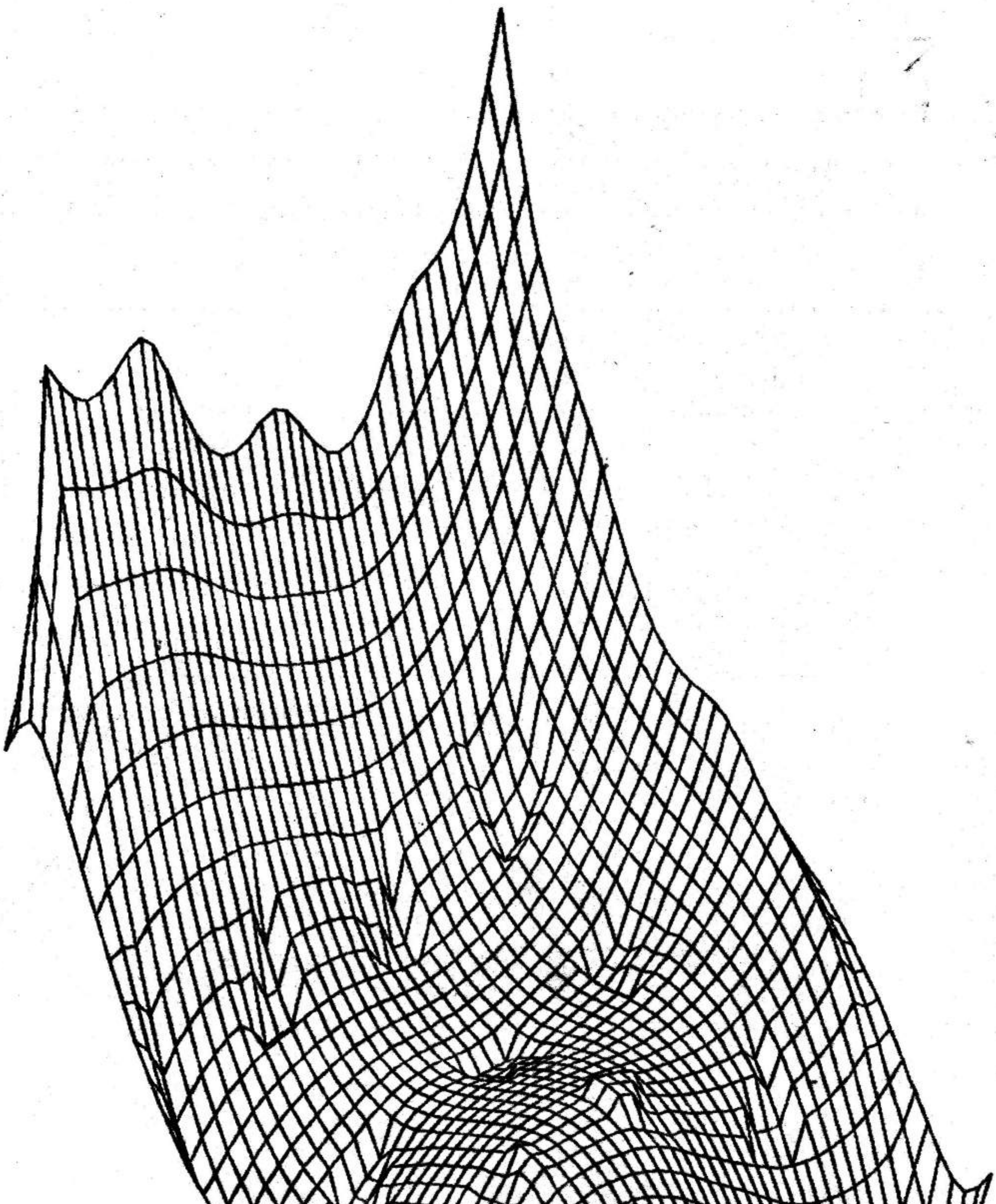

Рис.7.Изображение поверхности второго уравнения системы (3.6).

В ранее рассматриваемой системе (3.5) допустимые области для интервального метода типа Рунге (2.27) - (2.28) шире по сравнению с интервальным методом Ньютона (I.12) - (I.13). Вычислим с помощью интервального метода типа Рунге допустимые области для отдельно взятых корней системы (3.6). Результаты вычислений приведены в таблице 7.(Реализация с помощью интервального препроцессора TPINT на компьютере серии IBM PC/XT с выводом результатов на каждой итерации)

Таблица 7.($\varepsilon = 10^{-6}$)

N п/п	Начальный интервал	Корень	Количество итераций	Время счета (мин.сек. сот)
1	[-3.5,3.4] [2, 5.6]	(-2,3)	16	0.04.88
2	[-5, -2.4] [-9, -7]	(-4.8, -8.17)	8	0.02.52
3	[2, 5.5] [-2.9, 0.1]	(2.6, -2.43e-1)	10	0.03.24

При нахождении допустимых областей по интервальному методу типа Рунге подтверждается вывод, сделанный нами для предыдущей системы. Эти допустимые области больше по ширине, чем допустимые области соответствующих корней метода (I.12) - (I.13). Для сравнения приведем результаты вычислений по интервальному методу Ньтона и по методу (2.27)-(2.28), так как скорость сходимости в этих областях в какой то мере должна соответствовать порядку сходимости названных методов. Полученные результаты занесены в таблицу 8.

Таблица 8.($\varepsilon = 10^{-6}$)

N п/п	Начальный интервал	Корень	Метод Ньютона		Метод типа Рунге	
			Кол-во итер.	Время счета (м.с.ст)	Кол-во итер.	Время счета (м.с.ст)
1	[-2.5, -0.2] [2.3 , 3.5]	(-2,3)	8	0.02.03	5	0.01.59
2	[-5, -2.8] [-8.5, -7.4]	(-4.8, -8.17)	10	0.02.52	5	0.01.59
3	[2, 4] [-1.3,0.1]	(2.6, -0.24)	13	0.03.29	5	0.01.59

Далее к системе (3.6) применялся классический метод Ньютона, в котором за начальное приближение выбирались граничные значения начальных интервалов таблицы 8.

Таблица 9.

N п/п	Начальные приближения	Сходится "+", не сходится "-"
1	(3.4, 5.6)	-
2	(3.4, 2)	-
3	(-3.5, 2)	+
4	(-3.5, 5.6)	+
5	(-5, -9)	+
6	(-6, -7)	+
7	(-2.4, -9)	+
8	(-2.4, -7)	+
9	(2, -2.9)	+
10	(2., 0.1)	+
11	(5.5, -2.9)	-
12	(5.5, 0.1)	+

Как видно из таблицы 7, обычный метод Ньютона не всегда сходится к выбранному решению системы (3.6), хотя в некоторых случаях классический метод стремится к корню, который размещен ближе к начальному приближению, а не к корню включенному в начальный интервал.

Таким образом, как следует из многочисленных экспериментов, в большинстве случаев, интервальный метод типа Рунге (2.27)-(2.28) сходится за меньшее количество итераций и время счета в сравнении с соответствующей модификацией интервального метода Ньютона. Преимущества в количестве итераций и времени счета дает основание утверждать о подтверждении теоретических выводов § 2.2 и § 2.3.

§ 3.3 Применение интервальных методов типа Рунге к решению частных типов граничных задач.

Теорема 7 из § 2.4 содержит теоретические предпосылки учета возмущений базисного метода (2.14)-(2.15). Здесь мы покажем как метод (2.43) можна применить к решению систем нелинейных уравнений специального вида. Рассмотрим один из классов таких систем.

Пусть

$$F : D \subset R^n \to R^n, \; F = Hx + \varepsilon\,\omega(x) + b, \tag{3.7}$$

где

$\varepsilon \geq 0$, $b \in R^n$ и H является M - матрицей, т.е. $h_{ij} \leq 0$ для $i \neq j$ и $H^{-1} \geq 0$.

Отображение

$$\omega : D \subset R^n \to R^n, \; \omega(x) = (\omega_1(x),\ \omega_2(x),\ \ldots,\ \omega_n(x))$$

непрерывно дифференцируемо и

$$\omega_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, f(x_j), \quad i = \overline{1,n}\,.$$

где

$$\frac{d^2}{dx_j^2} f(x_j) \geq 0, \; i=\overline{1,n}$$

и выполнено

$$\alpha_{ij} \geq 0, i = \overline{1,n}\;, \; j = \overline{1,n}.$$

Из представления $f(x)$ имеем

$$f'_i(\bar{y} + \frac{2}{3}(\bar{x} - \bar{y})) = (h_{i1} + \varepsilon\, \alpha_{i1} \frac{d}{dx_1} g_1(\bar{y}_1 + \frac{2}{3}(\bar{x}_1 - \bar{y}_1)), \ldots,$$

$$h_{in} + \varepsilon\, \alpha_{in} \frac{d}{dx_n} g_n(\bar{y}_n + \frac{2}{3}(\bar{x}_n - \bar{y}_n))).$$

для $1 \leq i \leq n$.

Используя свойство интервального расширения функции, получим

$$\frac{d}{dx_j} g_j(\bar{y}_j + \frac{2}{3}(\bar{x}_j - \bar{y}_j)) \in \frac{d}{dx_j} g_j(\bar{z}_j + \frac{2}{3}(\bar{Z}_j - \bar{z}_j)), \quad j=\overline{1,n}$$

$\bar{Z}_j = [\bar{x}_j, \bar{y}_j]$, $\bar{z}_j = \mathrm{mid}(\bar{Z}_j)$, потому что

$$\bar{z}_j + \frac{2}{3}(\bar{Z}_j - \bar{z}_j) = \bar{z}_j + \frac{2}{3}([\bar{x}_j, \bar{y}_j] - \bar{z}_j) =$$

$$= [\bar{z}_j + \frac{2}{3}(\bar{x}_j - \bar{z}_j), \; \bar{z}_j + \frac{2}{3}(\bar{y}_j - \bar{z}_j)];$$

$$\bar{z}_j + \frac{2}{3}(\bar{x}_j - \bar{z}_j) = \bar{z}_j + \frac{2}{3}\frac{1}{2}(\bar{x}_j - \bar{y}_j) = \bar{z}_j + \frac{1}{3}(\bar{x}_j - \bar{z}_j) \leq$$

$$\leq \bar{y}_j + \frac{1}{3}(\bar{x}_j - \bar{y}_j) + \frac{1}{3}(\bar{x}_j - \bar{y}_j) = \bar{y}_j + \frac{2}{3}(\bar{x}_j - \bar{y}_j);$$

$$\bar{z}_j + \frac{2}{3}(\bar{y}_j - \bar{z}_j) \geq \bar{y}_j + \frac{1}{2}(\bar{x}_j - \bar{y}_j) + \frac{2}{3}(\bar{y}_j - \bar{z}_j) \geq$$

$$\geq \bar{y}_j + \frac{1}{2}(\bar{x}_j - \bar{y}_j) \geq \bar{y}_j + \frac{2}{3}(\bar{x}_j - \bar{y}_j);$$

Далее, из условия 3а) имеем

$$\frac{d}{dx_j} g_j(\bar{z}_j + \frac{2}{3}(\bar{Z}_j - \bar{z}_j)) \subseteq \frac{d}{dx_j} g_j(z_j + \frac{2}{3}(Z_j - z_j)),$$

$Z_j = [x_j, y_j]$, $z_j = \mathrm{mid}(Z_j)$, $\bar{Z}_j \subseteq Z_j$.

Поэтому

$$\frac{1}{4}\ \frac{d}{dx}g_j(\bar{z}_j) + \frac{3}{4}\ \frac{d}{dx}g_j(\bar{z}_j + \frac{2}{3}(\bar{Z}_j - \bar{z}_j)) \le$$

$$\le \frac{1}{4}\ \frac{d}{dx}g_j(z_j) + \frac{3}{4}\ \frac{d}{dx}g_j(z_j + \frac{2}{3}(Z_j - z_j)).$$

Пусть $v_j(x_j, y_j)$ – верхняя граница в интервальном вычислении комбинации производных $\frac{1}{4}\ \frac{d}{dx}g_j(z_j) + \frac{3}{4}\frac{d}{dx}g_j(z_j + \frac{2}{3}(Z_j - z_j))$.

Тогда

$$v_j(x_j, y_j) \ge \frac{1}{4}\ \frac{d}{dx}g_j(\bar{y}_j) + \frac{3}{4}\ \frac{d}{dx}g_j(\bar{y}_j + \frac{2}{3}(\bar{x}_j - \bar{y}_j)) \ge 0.$$

В новых обозначениях матрица B(x,y) запишется

$$B(x,y) = (h_{ij} + \varepsilon\, \alpha_{ij}\, v_j(x_j, y_j)).$$

Важно отметить, что для матрицы $B(x,y)$ должно выполняться условие

$$A(x,y) \le B(x,y).$$

Как отмечено в [24],это условие выполняется когда $0 \in f(z^{(k)} + \frac{2}{3}(Z^{(k)} - z^{(k)}))$, $Z^{(k)} = [x^{(k)}, y^{(k)}]$, $z^{(k)} = \mathrm{mid}(Z^{(k)})$, $k > 0$, поэтому в процессе вычислений при невыполнении соотношения

$$f(z^{(k)} + \frac{2}{3}(x^{(k)} - z^{(k)})) \le 0 \le f(z^{(k)} + \frac{2}{3}(y^{(k)} - z^{(k)}))$$

расширяем интервал $[x^{(k)}, y^{(k)}]$ в обоих направлениях на величину $(y^{(k)} - x^{(k)})/4$. Но в большинстве случаев условия леммы 2 почти всегда выполняются и никакой корректировки не требуется.

При применении метода (2.43) необходим выбор начальных приближений $P^{(0)}$ и $x^{(0)}$, $y^{(0)}$. Как указано в [1], в роли возможного кандидата на $P^{(0)}$ может выступать матрица обратная к диагональной части матрицы $B(x^{(0)}, y^{(0)})$, а если матрица $B(x^{(0)}, y^{(0)})$ представима в виде $D - L - R$, где D - диагональная матрица, а L и

R - строгие соответственно нижняя и верхняя треугольные матрицы, то $P^{(0)} = (D^{(0)} - L^{(0)})^{-1}$. Начальные векторы $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$ выбираются согласно п. 13.4.6 из [53].

Системы нелинейных уравнений такого типа получаются при численном решении граничных задач вида

$$y'' = f(t,y), \quad y(0) = \bar{a}, \; y(1) = \bar{b}.$$

Применяя метод конечных разностей к такой системе, получим n уравнений

$$x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1} - h^2 (\alpha f(t_{i-1}, x_{i-1}) +$$
$$+ \beta f(t_i, x_i) + \gamma f(t_{i+1}, x_{i+1})) = 0, \; 1 \le i \le n,$$

где

$$t_j = j\,h, \; 0 \le j \le n+1, \; (n+1)\,h = 1 \text{ и } x_0 = \bar{a}, \; x_{n+1} = \bar{b},$$

x_j – приближенные значения $y(t_j)$.

При $\alpha = \gamma = 0$, $\beta = 1$ получается стандартный метод конечных разностей, а при $\alpha = \gamma = 1/12$, $\beta = 10/12$ – эрмитовский метод [115].

Эту систему n нелинейных уравнений можем записать в виде

$$f(x) = H\,x + \varepsilon\,U\,g(x) + b,$$

где $\varepsilon = h^2$,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} f(t_1, x_1) \\ f(t_2, x_2) \\ \vdots \\ f(t_n, x_n) \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -\bar{a} + \alpha h^2 f(0, \bar{a}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\bar{b} + \gamma h^2 f(1, \bar{b}) \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} \beta & \gamma & & & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & & & \alpha & \beta \end{bmatrix}.$$

Из предположения $\partial f/\partial y \ge 0$ для $t \in (0,1)$ следует, что $f(x)$ удовлетворяет всем условиям, налагаемым на системы вида (3.7). В случае эрмитовского метода нужно еще выбрать h достаточно малым.

В качестве конкретного примера рассматривалась задача из [1]. Она записывается в форме

$$y'' = \sin y + y, \qquad y(0)=0, \quad y(1) = 1.$$

Интервальные вычисления проводились с использованием препроцессора TPINT (см.[23]). Приведено сравнение результатов, полученных по методу (8) главы 21 из [1] и ранее указанным методом (2.43). Вычисления проводились для метода конечных разностей и эрмитовского метода при $n = 5, 25$ и при разных выборах матрицы $P^{(0)}$. Результаты вычислений занесены в таблицы 10 и 11.

Таблица 10. ($\varepsilon=10^{-10}$)

Интервальный метод (8) из [1]					
разностная схема			схема Эрмита		
B_0^{-1}	D_0^{-1}	$(L_0-D_0)^{-1}$	B_0^{-1}	D_0^{-1}	$(L_0-D_0)^{-1}$
3	8	7	3	8	7
3	12	11	3	12	11

Таблица 11. ($\varepsilon=10^{-10}$)

Интервальный метод (2.43)					
разностная схема			схема Эрмита		
B_o^{-1}	D_o^{-1}	$(L_o-D_o)^{-1}$	B_o^{-1}	D_o^{-1}	$(L_o-D_o)^{-1}$
3	6	5	3	6	5
3	9	8	3	9	8

Из таблиц 4 и 5 следует, что метод (2.43) обладает более высокой скоростью сходимости, чем аналогичный метод из [I]. Хотя в методе (2.43) возрастает объем вычислений, но время уходящее на это поглощается за счет уменьшения количества итераций.

§ 3.4 Численное решение некоторых краевых задач с помощью интервального метода типа Рунге.

Для решения систем нелинейных уравнений (I.7) рассмотрим еще один интервальный итерационный метод, который учитывает структуру интервальной матрицы производных. В этом методе, по сравнению с предыдущими (2.I4) - (2.I5),(2.27) - (2.28), (2.43), не требуется обращать матрицы ни точно (как в (2.I4)-(2.I5), (2.27)-(2.28)), ни приближенно (как в (2.43)). К тому же этот интервальный метод сходится к решению системы нелинейных уравнений (I.7), при выполнении более слабых условий, чем известные методы такого рода. Более того, этот интервальный метод вычисляют последовательность приближений, которая сходится к решению быстрее, чем нижняя и верхняя последовательности ограничивающих векторов. Рассмотрим алгоритмов этого метода

$$Y^{(k)} = x^{(k)} - \tilde{D}(X^{(k)})(U(X^{(k)})(X^{(k)} - x^{(k)}) - L(X^{(k)})(Y^{(k)} - x^{(k)}) - f(x^{(k)})), \tag{3.8}$$

$$X^{(k+1)} = Y^{(k)} \cap X^{(k)}, \quad k=0,1,2,3, \ldots \tag{3.9}$$

где $x^{(k)} = \mathrm{mid}(X^{(k)})$, $\tilde{D}(X^{(k)}) = (D(X^{(k)}))^{-1}$;

$F'(X) = L(X) - U(X) - D(X)$; $D(X)$ диагональная ,$L(X)$, $U(X)$ - соответственно строго нижняя и верхняя треугольные матрицы $F'(X)$;

$F'(X) = 1/4\, f'(x) + 3/4\, f'(x + 2/3(X - x))$.

Матрица $\tilde{D}(X^{(k)})$ определяется следующим образом:

$$\tilde{D}(x^{(k)}) = \begin{bmatrix} 1/d_{11}(x^{(k)}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/d_{nn}(x^{(k)}) \end{bmatrix},$$

где $d_{ii}(x^{(k)})$, $i=\overline{1,n}$ - элементы матрицы $D(x^{(k)})$.

Свойства метода (3.8)-(3.9), его условия сходимости обобщены в теореме I3.

<u>Теорема I3.</u> Пусть для отображения $f \; : \; R^n \to R^n$ выполняются условия:

1) $x^* \in D$, и $f(x^*) = 0$;

2) имеет место разложение $F'(x) = L(x) - U(x) - D(x)$;

3) $x^* \in X^{(0)}$, где $X^{(0)} \subseteq D$;

4) все действительные матрицы $F'(X^{(0)})$ являются М - матрицами.

Тогда последовательность интервалов $\langle X^{(k)} \rangle_{k=0}^{\infty}$, полученная по (3.8)-(3.9), обладает следующими свойствами:

5) $x^* \in X^{(k)}$; $k = 0,1,2,3, \ldots$;

6) $X^{(0)} \geq X^{(1)} \geq \ldots \geq X^{(k)} \geq X^{(k+1)} \geq \ldots$;

7) $\lim\limits_{k\to\infty} X^{(k)} = x^*$.

<u>Доказательство.</u> 5) Разложим функцию $f(x)$ в окрестности точки $x^{(0)}$ в ряд Тейлора

$$f(y)=f(x^{(0)})+ f'(x^{(0)})(y-x^{(0)})+ 1/2!\, f''(x^{(0)}+ \theta_2^0(y-x^{(0)}))\times$$
$$\times(y - x^{(0)})^2.$$

Тогда

$$f(x^*)=f(x^{(0)})+ f'(x^{(0)})(x^*-x^{(0)})+ 1/2!\, f''(x^{(0)}+ \theta_2^0(x^*-x^{(0)}))\times$$
$$\times(x^* - x^{(0)})^2.$$

Исходя из условия 3) и леммы 2, будем иметь

$$f(x^*)=f(x^{(0)})+f'(x^{(0)})(x^*-x^{(0)})+1/2!f''(x^{(0)}+\theta_2^0(x^*-x^{(0)}))\times$$

$$\times(x^*-x^{(0)})^2=f(x^{(0)})+(f'(x^{(0)})+1/2!f''(x^{(0)}+\theta_2^0(x^*-x^{(0)}))(x^*-x^{(0)}))\times$$

$$\times(x^*-x^{(0)})\in f(x^{(0)})+(f'(x^{(0)})+1/2!f''(x^{(0)}+\frac{2}{3}[\theta_1^1](X^{(0)}-x^{(0)}))\times$$

$$\times(X^{(0)}-x^{(0)}))(x^*-x^{(0)})=f(x^{(0)})+(1/4\ f'(x^{(0)})+$$

$$+3/4\ f'(x^{(0)}+2/3(X^{(0)}-x^{(0)})))(x^*-x^{(0)}). \qquad (3.10)$$

Воспользовавшись условием 2), получим

$$f(x^{(0)})+(1/4f'(x^{(0)})+3/4f'(x^{(0)}+2/3(X^{(0)}-x^{(0)})))(x^*-x^{(0)})=$$

$$=f(x^{(0)})+(L(X^{(0)})-U(X^{(0)})-D(X^{(0)}))(x^*-x^{(0)}). \qquad (3.11)$$

Из (3.10) и (3.11) имеем

$$D(X^{(0)})(x^*-x^{(0)})\in f(x^{(0)})+(L(X^{(0)})-U(X^{(0)})))(x^*-x^{(0)}).$$

Таким образом

$$x^*\in x^{(0)}-D(X^{(0)})^{-1}(U(X^{(0)})(X^{(0)}-x^{(0)})-L(X^{(0)})(X^{(0)}-x^{(0)})-$$
$$-f(x^{(0)})).$$

Значит

$$x^*\in(x^{(0)}-D(X^{(0)})^{-1}(U(X^{(0)})(X^{(0)}-x^{(0)})-L(X^{(0)})(X^{(0)}-x^{(0)})-$$
$$-f(x^{(0)})))\cap X^{(0)}=X^{(1)}.$$

Используя метод математической индукции, легко показать, что включение 5) выполняется для всех k.

6) Доказательство свойства включения векторов $X^{(k)}$ приведено в [80],[83].

7) Из свойства 6) следует, что $\lim X^{(k)}=U$. Тогда при $k\to\infty$ из (3.8)-(3.9) будем иметь

$$U = x - D(X)^{-1}(U(X)(X - x) - L(X) (X - x) - f(x));$$

$$X = U \cap X. \qquad (3.12)$$

Из последнего соотношения (3.12), получим

$$X \subseteq U.$$

Тогда

$$x \in U.$$

Значит

$$x \in x - D(X)^{-1}(U(X)(X - x) - L(X) (X - x) - f(x)).$$

Откуда имеем

$$0 \in D(X)^{-1}(U(X)(X - x) - L(X) (X - x) - f(x)).$$

Из 4) следует

$$0 \in U(X)(X - x) - L(X) (X - x) - f(x).$$

Тогда, из свойств ширины интервала получим

$$\omega(U) = |D(X)^{-1}| \; | U(X) - L(X) | \; \omega(X)/2 \le$$

$$\le |D(X)^{-1}| \; | U(X) - L(X) | \; \omega(U)/2.$$

Таким образом

$$(I - 1/2 \; |D(X)^{-1}| \; | U(X) - L(X) | \; \omega(U) \le 0. \qquad (3.13)$$

Из теоремы 2.4.8 [20] следует, что когда $F'(X^{(0)})$ является М - матрицей , то $\rho(\; |D(X)^{-1}| \; | U(X) - L(X) | \;) < I$. Тогда из (3.13) получим

$$\omega (U) = 0.$$

Согласно (3.11), имеем

$$\omega (X) = 0.$$

Из предыдущего соотношения и уcловий 5) и 6) следует, что последовательность $\{ X^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ сходится к x^*.

Таким образом, теорема полностью доказана.

Рассмотрим один из видов систем нелинейных уравнений, к которым можно применить выше описаный метод.

Пусть необходимо найти решение следующей элиптической краевой задачи

$$\Delta u = u_{ss} + u_{tt} = f(s,t,u), \qquad (s,t) \in \Omega$$

при $u(s,t) = \varphi(s,t)$ для $(s,t) \in \partial\Omega$. Здесь Ω - односвязная, ограниченная, открытая область плоскости (s,t), а $\partial\Omega$ обозначает границу области Ω. Мы предположим для простоты, что $\Omega = (0,1)\times(0,1)$. Если $f\colon \Omega\times R \to R$ непрерывно дифференцируема и $f_u(s,t,u)\ge 0$, $(s,t) \in \Omega$, $u \in R$, то при относительно слабых условиях на φ рассматриваемая краевая задача имеет единственное решение. Для нахождения этого решения, преобразуем с помощью метода конечных разностей краевую задачу к системе нелинейных уравнений. Введем сетку $P_{ij} = (ih, jh)$, где $h = 1/(m+1)$, $i,j = 0,1, \ldots, m+1$. Тогда получим

$$u_{ss}(P_{ij}) = h^{-2}(u(P_{i+1,j}) - 2u(P_{ij}) + u(P_{i-1,j})),$$
$$u_{tt}(P_{ij}) = h^{-2}(u(P_{i,j+1}) - 2u(P_{ij}) + u(P_{i,j-1})), \quad i,j=1,\ldots,m.$$

Таким образом, мы пришли к системе из $n = m^2$ нелинейных уравнений

$$4x_{ij} - x_{i-1,j} - x_{i+1,j} - x_{i,j+1} - x_{i,j-1} + h^2 f(ih, jh, x_{ij}) = 0, \qquad (3.14)$$

где

$$x_{0j} = \varphi(P_{0j}), \qquad x_{m+1,j} = \varphi(P_{m+1,j}), \qquad (3.15)$$
$$x_{j0} = \varphi(P_{j0}), \qquad x_{j,m+1} = \varphi(P_{j,m+1}), \quad j=0,\ldots,m+1 \qquad (3.16)$$

Эту систему нелинейных уравнений можно записать следующим образом

$$f(x) = A\,x + \Phi(x) + b = 0, \tag{3.17}$$

где

A - блочная трехдиагональная матрица вида

$$A = \begin{bmatrix} B & -I & & 0 \\ -I & B & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & B & -I \\ 0 & & -I & B \end{bmatrix},$$

в которой I - это $m \times m$ единичная матрица,

B - $m \times m$ матрица вида

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & & 0 \\ -1 & 4 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 4 & -1 \\ 0 & & & -1 & 4 \end{bmatrix};$$

$\Phi(x)$ - вектор с компонентами $\phi_k(x) = h^2 f(ih, jh, x_k)$, $k = i + (j-1)\,m$ $(i, j = 1, \dots, m)$;

b - вектор, в котором учтены граничные условия (3.15)-(3.16). Легко проверить, что для систем вида (3.17) выполняются условия (2.37) - (2.42). Метод (3.8)-(3.9) применялся нами для решения нескольких конкретных граничных задач.

Пример 1. (см. [1])

$$\Delta u = u^3 / (1 + x^2 + y^2), \qquad (x, y) \in (0,1)\times(0,1),$$

$$u(x,0) = 1, \quad u(x,1) = 2 - e^x, \quad x \in [0,1],$$

$$u(0,y) = 1, \quad u(1,y) = 2 - e^y, \quad y \in [0,1].$$

Результаты вычислений занесены в таблицу 12 (Они получены на компьютере серии IBM PC/AT без сопроцесора. Время учитывает вывод промежуточных результатов на каждой итерации. Вычисления проводились с точностью $\varepsilon = 10^{-10}$).

Таблица 12.

N п/п	Начальные интервалы		n	9	16	25
			h	1/4	1/5	1/6
1	[-5, 4]	Метод Ньютона	Кол-во итер.	51	56	105
			Время счета (мин.сек.сот)	0.18.18	0.47.40	2.56.91
		Метод типа Рунге	Кол-во итер.	39	48	80
			Время счета (мин.сек.сот)	0.15.98	0.45.25	2.31.31
2	[-3, 4]	Метод Ньютона	Кол-во итер.	37	61	79
			Время счета (мин.сек.сот)	0.13.45	0.53.55	2.23.57
		Метод типа Рунге	Кол-во итер.	28	42	67
			Время счета (мин.сек.сот)	0.10.82	0.40.64	2.10.39
3	[-1, 2]	Метод Ньютона	Кол-во итер.	19	31	52
			Время счета (мин.сек.сот)	0.07.30	0.28.17	1.36.39
		Метод типа Рунге	Кол-во итер.	19	31	52
			Время счета (мин.сек.сот)	0.08.07	0.30.53	1.42.65

Пример 2. (см. [I])

$$\Delta u = u^3, \qquad (x,y) \in (0,1)\times(0,1),$$

$$u(x,y) = x + 2y \text{ на } \partial\Omega.$$

Таблица 13.

N п/п	Начальные интервалы		n	9	16	25
			h	1/4	1/5	1/6
1	[-6, 3]	Метод Ньютона	Кол-во итер.	50	76	121
			Время очета (мин.сек.сот)	0.13.29	0.53.33	3.06.44
		Метод типа Рунге	Кол-во итер.	29	47	81
			Время очета (мин.сек.сот)	0.09.77	0.38.99	2.19.01
2	[-4, 3]	Метод Ньютона	Кол-во итер.	28	44	80
			Время очета (мин.сек.сот)	0.08.45	0.33.72	2.09.78
		Метод типа Рунге	Кол-во итер.	24	38	63
			Время очета (мин.сек.сот)	0.08.34	0.32.46	1.51.11
3	[0, 3]	Метод Ньютона	Кол-во итер.	17	27	39
			Время очета (мин.сек.сот)	0.05.54	0.21.86	1.07.33
		Метод типа Рунге	Кол-во итер.	17	27	38
			Время очета (мин.сек.сот)	0.06.20	0.23.72	1.09.97

Из результатов вычислений (таблицы 12,13) следует, что интервальный метод (3.8) - (3.9) по сравнению с соответствующей модификацией метода Ньютона для широких начальных интервалов сходится за меньшее количество итераций. В результате этого уменьшается суммарное время очета. Поэтому для задач с начальными данными с большой мерой неопределенности выгоднее использовать интервальный итерационный метод (3.8)-(3.9).

Глава 4. Разработка программного обеспечения для автоматизации процесса вычислений с интервалами.

В настоящее время интервальный анализ применяется к решению различного рода задач в разных областях науки и техники, таких как машиноведение, метрология, инженерия, прогнозирование, медицина, космические исследования. Поэтому возникает проблема написания программ интервальных алгоритмов в связи со спецификой выполнения интервальных вычислений. Для облегчения написания и прохождения программ с интервальными величинами уже создано много разных пакетов, среди которых хорошо известные системы [54], [31], [32], [20], [50],[75], [78], [119], [82], [118], [92], [81], [90], [93]. Они разработаны как расширение соответствующих алгоритмических языков новыми конструкциями, типами данных и операциями, или как совокупность процедур реализации множества интервальных операций. Недостатком в первом подходе является то, что нарушается стандарт языка и дополнительные служебные слова приводят к плохой читабельности программ.Во-втором подходе основным недостатком есть частое обращение к библиотеке интервальных операций, что выглядит в программе как длинная последовательность вызовов разного рода процедур, построение которой нередко приводит к ошибкам при написании программ. Следовательно возник вопрос о переходе от использования библиотек к разработке, реализации и использованию компиляторов, автоматически вычисляющих интервальные выражения. Один из них был создан для вычислений интервальных алгебраических выражений [33] , который может работать на всех моделях ЭВМ серии

ЕС.

<u>Замечание 3</u>. Далее под интервальной программой (алгоритмом, методом) будем подразумевать программу (алгоритм, метод), в которой встречаются интервальные величины.

Предлагаемый препроцессор позволяет создавать интервальные программы практически на стандартном языке Паскаль с использлванием нового типа данных interval. Данные этого типа можна использовать так же, как и данные типа real. Все конструкции языка для пользователя сохранят свой вид. Важной особенностью препроцессоора является возможность использования в логических выражениях , содержащих данные типа interval, многозначной алгебры логики и различных видов отношений между элементами типа interval. Поскольку эти вопросы пока окончательно не разработаны (имеется ряд предложений в [65]), то эти моменты в препроцессоре строго не фиксированы и могут легко изменятся пользователем. Это может оказаться полезным для внесения предложений различных авторов.

В препроцессоре вводится новый тип данных interval, который является интервальным расширением действительного числа наиболее длинного формата используемой версии языка Паскаль (для удобства будем обозначать этот вещественный тип как intreal). Значение типа interval представляет совокупность двух значений типа intreal, представляющих собой границы интервала. Для преобразований типов interval - intreal введены четыре функции, которые разрешают переходить от одного типа к другому и наоборот. Для значений интервального типа определены операции +,-,*,/, а также дополнительная операция возведения в целую степень \ . Допустимы также смешанные операции +,-,*,/, когда один из операндов имеет тип intreal, а второй - interval. Результат всегда получается типа interval.

При интервальных вычислениях, как в обычном случае,приходится часто использовать разные математические функции , поэтому в препроцессоре построены интервальные расширение соответствующих функций, описания которых приведены в разделе 4. Кроме того, для интервалов как множеств специальной структуры, наряду со стандартным набором отношений могут употребляться дополнительные наборы типов отношений, имеющих практическое значение. В препроцессоре реализовано 15 отношений, по аналогии с одним из наиболее популярных пакетов интервальных операций [119] (набор отношений может легко модифицироваться и дополняться). Здесь следует отметить, что в силу специфики интервальных отношений использование обычной логики при вычислении отношений бывает недостаточно [50],[65],[77]. В связи с этим, в языке допускается использование многозначной логики. Вводится неявный тип " обобщенный логический ", который получается в результате операций отношения между интервальными значениями. Для этого типа определяются также логические операции многозначной логики (правила вычисления которых могут легко модифицироваться). Обобщенное логическое значение может использоваться только в операторах if, while, repeat, где оно трактуется как true для единственного истинного значения и как false для остальных значений многозначной логики.

Для более полного учета обобщенных логических значений введено обобщение условного оператора

if <обобщенное логическое выражение>

then1 <операторI>

then2 <оператор2>

....

thenk <операторk>

else <оператор>.

где else <оператор> можно опускать.

Здесь предполагается, что все обобщенные логические значения упорядочены от I до n, причем I - это истинное значение и theni <операторi> выполняется в том случае, если обобщенное логическое значение принимает значение i.

Препроцессор преобразует программу, написанную на расширенном языке Паскаль, в программу на стандартном языке Паскаль. Прежде всего он вставляет в начало программы определение типа interval

```
IntReal=Extended;

Interval0 = Array [1..2] of IntReal;
Interval = ^Interval0;
PreStek = ^StekInt;
StekInt = Record
            VarPre:PreStek;
            VarInt:Interval;
          End;
```

и описание вспомогательных подпрограмм и функций для операций с интервальными и обобщенными логическими значениями. Однако, в целях эффективности эти описания выгодно не вставлять непосредственно в текст программы, а помещать в дополнительный файл (например, включаемый файл TPU для TURBO-Паскаля). В этом случае в начало программы вставляется оператор подключения этого файла (Uses Intrvl;).

Основным звеном преобразованной интервальной программы является стек. Он позволяет хранить промежуточные вычисления и предохраняет от создания новых имен переменных. Вместо работы над данными предполагается использовать ссылки на них, что более эффективно при преобразованиях и согласуется с правилами описания подпрограмм-функций.

Из приведенного выше определения типа interval видно, что переменная этого типа представляет собой ссылку на массив, в котором хранятся значения интервальной переменной.Такое представление обладает рядом преимуществ, но требует для каждой интервальной переменной дополнительных процедур по выделению/уничтожению памяти под массив значений этой переменной и соответствующего определения ссылок.

В связи с этим в процессе преобразования исходной программы в начало каждой подпрограммы вставляются операторы инициализации для каждой локальной переменной (каждого элемента локального массива), которые описаны в этой подпрограмме. Операторы инициализации осуществляют динамическое выделение памяти для массива двух значений типа intreal и присваивают ссылку на этот массив соответствующей интервальной переменной.

Аналогично, в конец каждой подпрограммы вставляются операторы "деинициализации"(уничтожения) для каждой локальной переменной данной подпрограммы. Эти операторы просто освобождают память, динамически выделенную при инициализации.

<u>Замечание 4.</u> Несмотря на определенную сложность в реализации процедуры инициализации интервальных переменных такой подход является весьма перспективным в связи с переходом к объеткному программированию. Процедуры инициализации и "деинициализации" идеально подходят для включения в конструктор и деструктор

об)екта(класса) "интервальная величина".

При встрече препроцессором оператора присвоения проверяется принадлежность переменной в левой части к интервальному типу. В случае выполнения этого условия препроцессор преобразует правую часть оператора сначала в обратную польскую запись, а затем в последовательность вызовов процедур выполнения арифметических операций.

Пример 3.

```
.............
var
  alfa,beta,fg:Interval;
          s,b :IntReal;
            l :Integer;
.............
fg:=alfa*2.19+beta*s\l-b;
```

```
Uses Intrvl;
.......................
var
  alfa,beta,fg:Interval;
          s,b :IntReal;
            l :Integer;
.............
Begin
  AddStek(alfa);
  AddStekNoInt(2.19);
  Mulss;
  AddStek(beta);
  AddStekNoInt(s);
  AddStekNoInt(l);
  Sqrss; Mulss;
  AddStekNoInt(b); Subss;
  Addss; CopyStek(fg);
End;
```

Если в программе встречается конструкция if ...then ...else и в условии встречается интервальная переменная, то производится преобразования данного логического выражения по следующим правилам. Интервальные арифметические выражения вычисляются, как указано в предыдущем пункте. Следует отметить, что исключаются части логического выражения, не содержащие интервальных переменных и они переносятся в выходную программу в исходном виде. Далее логическое выражение преобразуется в последовательность вызовов процедур соответствующих интервальных логических операций. Как указано выше, наряду с конструкцией if ... then ...else ... может быть использован оператор if....then1...then2...else..., в вычислении логического условия которого применяется троичная логика. Так как в общем случае обобщенный оператор if представляет собой многовариантную развилку, то его наиболее естественно реализовать с помощью конструкции case... of....end. Например,

Пример 4.

```
...............
var
  a,b:Interval;
  c,beta,v,w:IntReal;
  l:Integer;
...............
if (a)=b) or ((c+beta\l)>v)
               and (v=b)=a)
     then1  w:=5.1
     then2  w:=10.2
     else   w:=25.3;
```

```
Uses Intrvl;
...............
var
  a,b:Interval;
  c,beta,v,w:IntReal;
  l:Integer;
  LogVar1:Integer;
...............
Begin
  AddStek(a);
  AddStek(b);
  LogGE;
  AddStekNoIntLog((c+beta\l)
                   >v);
  AddStekNoInt(v);
  AddStek(b);
  Addss; AddStek(a);
  LogGE; LogAnd; LogOR;
  CopyStekLog(LogVar1);
  Case LogVar1 of
        1:w:=5.1;
        2:w:=10.2
      else
      End;  w:=25.3;
End;
```

В конструкциях типа while ... do или repeat...until.... , при наличии интервальных переменных в условии, логическое выражение преобразуется аналогично, как в условном операторе. Например, для конструкции while....do.... будем иметь:

Пример 5.

```
..............
var
  v,w:Interval;
  b,c,d:IntReal;
  k:Integer;
..............
while v>=w do
  c:=d+(b*c)/k;
```

```
Uses Intrvl;
..............
var
  v,w:Interval;
  b,c,d:IntReal;
  k:Integer;
  LogVarBool1:Boolean;
  LogVar1:Integer;
...................
Begin
  LogVarBool1:=True;
  while LogVarBool1 do
    Begin
      Begin
        AddStek(v);
        AddStek(w);
        LogGE;
        CopyStekLog(LogVar1);
      End;
      if LogVar1 then
       LogVarBool1:=True
             else
       LogVarBool1:=False;
      if LogVarBool1 then
        c:=d+(b*c)/k;
   End;
```

Конструкция `repeat.....until` с интервальным условием преобразуется более просто, потому что вычисление обобщенного логического выражения вносится в тело цикла и только после этого логическая переменная принимает определенное логическое значение.

Пример 6.

```
..............
var
  v,w:Interval;
  b,c,d:IntReal;
  k:Integer;
..............
Repeat
  c:=d+(b*c)/k;
Until v<w;
```

```
Uses Intrvl;
..............
var
  v,w:Interval;
  b,c,d:IntReal;
  k:Integer;
  LogVarBool1:Boolean;
  LogVar1:Integer;
..................
Begin
  Repeat
    C:=d+(b*c)/k;
   Begin
    AddStek(v);
    AddStek(w);
    LogLT;
    CopyStekLog(LogVar1);
   End;
   if LogVar1 then
    LogVarBool1:=True
         else
    LogVarBool1:=False;
Until LogVarBool1;
```

Если в операторе ввода-вывода встречаются интервальные переменные, то они заменяются в выходной программе ссылкой на границы этого интервала и выводятся последовательно вместо имени интервальной переменной. В случае размещения в операторах ввода-вывода арифметических или логических выражений, вычисления последних выносятся вне оператора, а в сам оператор вставляются ссылки на значения границ конечного интервала.

Для проведения интервальных вычислений в преобразованной препроцессором программе используется целый ряд подпрограмм интервального анализа (специализированная библиотека подпрограмм интервального анализа). Все подпрограммы логически распадаются на ряд специализированных групп.

Первая группа этих подпрограмм состоит из процедур работы со стеком. Она включает следующие подпрограммы:

InitStek - инициализация стека;

ListStek - просмотр содержимого стека;

AddStekNoInt(x:IntReal) - занесения в стек неинтервальной переменной x;

SubStLog(n:Integer):Interval - извлечение из стека интервальной переменной, находящейся на глубине n;

AddStek(x:Interval) - добавление в стек интервальной переменной;

DelStek - удаление из верхушки стека интервальной переменной;

CopyStek(var x:Interval) - присвоение интервальной переменной x значения из стека и удаления ее из стека;

AddStekLog(ilog:Boolean) - добавление в стек логической переменной ilog;

CopyStekLog(var ilog:Integer) - выборка из стека целого значения обобщенного логического типа;

Вторая группа представляет дополнительный набор процедур работы с интервалами. Она содержит следующие подпрограммы:

Width(wx:Interval):Interval - вычисление ширины интервала wx (см.[1],[37],[77]);

Dn(x:Interval):IntReal - нижняя граница интервала x;

Up(x:Interval):IntReal - верхняя граница интервала x;

Mid(x:Interval):IntReal - средняя точка интервала x;

CreateInt(x1:IntReal;x2:IntReal) - создание интервала [x1,x2] (при условии x1<=x2);

CorrUp(iCorr:IntReal):IntReal - увеличение iCorr на единицу младшего разряда мантиссы;

CorrDn(iCorr:IntReal):IntReal-уменьшение iCorr на единицу младшего разряда мантиссы;

Perer(x1,x2:Interval;var xx:Interval;var log:Boolean)-вычисление xx пересечения интервалов xI и x2, если xx непустой интервал, то log=True, иначе False.

Замечание 5. Следующие процедуры выполняют действия над двумя интервалами, извлекаемыми из стека, и помещают результат снова в стек.

Третья группа содержит процедуры выполнения операций отношений(см. раздел 2). В нее входят подпрограммы (в скобках указано обозначение на Паскале):

LogLT - операция < (<);

LogLTE - операция <~(<<);

LogLE - операция <=(<=);

LogLEE - операция <=~ (<~);

LogGT - операция > (>);

LogGTE - операция >~ (>>);

LogGE - операция ≥ (>=);

LogGEE - операция ≥~ (>~);

LogEQ - операция = (=);

LogEQE - операция ≅ (=~);

LogNE - операция ≠ (<>);

LogNEE - операция ≇ (~~);

LogIN - операция ⊂ (<^);

LogINE - операция ≤ (<");

LogOUT - операция ⊃ (>^);

LogOUTE - операция ⊇ (>");

В четвертую группу включены процедуры логических операций с использованием троичной логики. При вызове их следует использовать следующие подпрограммы:

LogNOT - операция NOT;

LogAND - операция AND;

LogOR - операция OR;

LogXOR - операция XOR.

Пятая группа содержит процедуры интервальных арифметических операций. Она включает:

Addss - операция + ;

Subss - операция - ;

Mulss - операция * ;

Divss - операция / ;

Sqrss - операция \ (возведение в целую степень).

При проведении интервальных вычислений необходимо иметь интервальные расширения математических функций. Все они составляют шестую группу, в которую входят следующие процедуры:

IntCos(x:Interval) - косинус интервала x;

IntSin(x:Interval) - синус интервала x;

IntSqr(x:Interval) - квадрат интервала x;

IntSqrt(x:Interval) - корень квадратный из интервала x;

IntLn(x:Interval) - натуральный логарифм интервала x;

IntExp(x:Interval) - экспоненциальная функция интервала x;

IntArt(x:Interval) - арктангенс интервала x;

IntAbs(x:Interval) - абсолютное значение интервала x.

В целом группы составляют минимально необходимый набор процедур интервального анализа. При необходимости пользователь может использовать собственные подпрограммы вместо указанных выше, а также дополнить этот набор новыми процедурами.

Рассматриваемый препроцессор реализован на IBM PC/AT в рамках системы програмирования TURBO-Паскаль версии 5.5. Он вызывается в режиме пакетной обработки файлов. Для этого создано три командных файла, которые позволяют отдельно выполнять все этапы запуска программы. Для обработки препроцессором файла с интервальной программой используется команда:

IntComp <имя файла I > < имя файла 2 >,

где <имя файла I > - имя файла с интервальной программой,

<имя файла 2 > - имя файла с программой на Паскале.

Если не задано расширение файла I, то по умолчанию подразумевается INT, аналогично файла 2 - PAS. Когда задан один файл, то второй будет иметь такое же название, но с расширением PAS.

Для создания выполняемого файла с интервальной программы используется команда:

IntLink <имя файла I > < имя файла 2 >,

где <имя файла I > - имя файла с интервальной программой (по умолчанию расширение INT),

<имя файла 2 > - имя выполняемого файла (по умолчанию расширение EXE).

Для запуска интервальной программы на выполнение, следует указать команду:

IntRun <имя файла I> < имя файла 2 >,

где <имя файла I >, <имя файла 2> - определяются аналогично предыдущей команде.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Препроцессор TPINT применялся для решения системы (3.4) интервальным методом Кравчика (I.I2)-(I.I3).

Исходная программа:

```
Program IntKrawchyk;
Const
   nmax=20;
Label
  cicl,endcicl,labnet,labpod,labdali;
 Type
     IntRealStr=array[1..nmax] of IntReal;
     IntRealArray=array[1..nmax,1..nmax] of IntReal;
Var
  snorm,snormf,omega2,omax2,omax1,s_,prom,
  tochn                                      :IntReal;
  dod2,rr,r6,g,f,y,fig3,fig4                   :IntRealStr;
  x,hdod,r1,rtx
                                :array[1..nmax] of Interval;
  soxr1,soxr2
                                :array[1..nmax*10] of Interval;
  a,r
                              :array[1..nmax,1..nmax] of Interval;
  b1                                         :IntRealArray;
  nn,nn1,nn2,n_,n1,n2,nn3,nn4,irs,ikol,i,j,k,n,
  ii,ido,ido1,npod,i3,j_1,j_2,j_j1,i4,
  j_j2,irs,irs1                              :Integer;
  mlog,log2                                  :Boolean;
  s,ss,sss                                   :Interval;
  fi:text;
Procedure Podili;
  Var    imax:integer;
    xn1,xn2,xprom:interval;
    xmed,ximax:IntReal;
    rt:array[1..nMax] of Interval;
    i,ii,i2  :integer;
    log1,log3,log4:boolean;
  Begin
    iMax:=1; ximax:=Width(rtx[1]);
    for i:=2 to n do
        if ximax<Width(rtx[i]) then
           Begin
             xiMax:=Width(rtx[i]);
             iMax:=i;
           End;
    for i:=1 to n do Perer(rtx[i],x[i],rt[i],log1);
    CreateInt(Dn(rtx[imax]),Mid(rtx[imax]));
    CopyStek(xprom);
    perer(xprom,x[imax],xn1,log3);
    CreateInt(Mid(rtx[imax]),Up(rtx[imax]));
```

```
    CopyStek(xprom);
    Perer(xprom,x[imax],xn2,log4);
    if log3 then
                    Begin
                      j_1:=j_1+1;
                      for i:=1 to n do
                          Begin
                            i1:=n1+i;
                            if i<>imax then soxr1[i1]:=rt[i] else
                                            soxr1[i1]:=xn1;
                          End;
                      n1:=i1;
                    End;
    if log4 then
                    Begin
                      j_2:=j_2+1;
                      for i:=1 to n do
                          Begin
                            i2:=n2+i;
                            if i<>imax then soxr2[i2]:=rt[i] else
                                            soxr2[i2]:=xn2;
                          End;
                      n2:=i2;
                    End;
    End;
  Procedure Systm;
       Var
         xc:array[1..nmax] of Interval;
       Begin
         for i:=1 to nmax do xc[i]:=x[i];
         f[1]:=6*St(y[1],5)-25.2*St(y[1],3)+24*y[1]-6*y[2];
         f[2]:=12*y[2]-6*y[1];
         a[1,2]:=0-6;
         a[2,1]:=a[1,2];
         a[2,2]:=12;
         a[1,1]:=(30*xc[1]\2-75.6)*xc[1]\2+24;
      end;

Begin
  nn1:=0; nn2:=0; n_:=0; n1:=0; n2:=0;
  nn3:=0; nn4:=0; irs:=1; i1:=1; j_1:=0; j_2:=0;
  j_j1:=0; j_j2:=0; irs1:=0; npod:=0;
  write(' Размерность системы........   '); readln(n);
  write(' Точность ..................   '); readln(tochn);
  writeln(' Исходные интервалы ');
    for i:=1 to n do
        Begin
          write('     по ',i,' координате .......   ');
          readln(x[i]);
        End;
     Assign(fi,'rezult');
     Rewrite(fi);
    writeln(fi,' Размерность системы........   ',n);
    writeln(fi,' Точность ..................   ',tochn);
```

```
    writeln(fi,' Исходные интервалы ');
    for i:=1 to n do
         writeln(fi,'      по ',i,' координате .......    ',x[i]);
cicl:
     ikol:=0;
     for i:=1 to N do
          Begin
            y[i]:=Mid(x[i]); r0[i]:=Width(x[i]);
          End;
     Systm;
     for i:=1 to n do
          for j:=1 to n do b1[i,j]:=Mid(a[i,j]);
     Invert(n,b1);
     for i:=1 to n do
          for j:=1 to n do
                   Begin
                     s:=0;
                     for k:=1 to n do s:=s+b1[i,k]*a[k,j];
                     if i=j then r[i,j]:=1-s   else r[i,j]:=0-s;
                   End;
     for i:=1 to n do
          Begin
            s_:=0; for j:=1 to n do s_:=s_+b1[i,j]*f[j];
            g[i]:=s_;
          End;
     for i:=1 to n do
          Begin
            prom:=y[i]-g[i]; ss:=0;  ido:=i-1;
            if ido<>0 then for j:=1 to ido do
                              ss:=ss+r[i,j]*(rtx[j]-y[j]);
            sss:=0;
            ido1:=ido+1;
            for k:=ido1 to n do sss:=sss+r[i,k]*(x[k]-y[k]);
            r1[i]:=prom+ss+sss;
            Perer(x[i],r1[i],rtx[i],mlog);
            if not mlog then goto labpod;
            rr[i]:=Width(rtx[i]);
            if rr[i]<>r0[i] then ikol:=ikol+1;
          End;
          if ikol<>n then
                         Begin
                           npod:=npod+1;
                           Podil1;
                           if n1>nn3 then
                              Begin
                                nn1:=nn1+1; nn3:=nn3+n;
                                for i:=1 to n do
                                     Begin
                                       i3:=j_j1+1;
                                       x[i]:=soxr1[i3];
                                     End;
                                j_j1:=i3; goto endcicl;
                              End
                          Else
                           Begin
```

```
            labpod: if n2<=nn4 then goto labnet;
                      nn2:=nn2+1;
                      nn4:=nn4+n;
                      for i:=1 to n do
                          Begin
                            i4:=j_j2+i;
                            x[i]:=soxr2[i4];
                          End;
                      j_j2:=i4;
                      goto endcicl;
                    End;
            End;
            omax1:=0;
            for i:=1 to n do
                Begin
                  x[i]:=rtx[i];
                  y[i]:=Mid(x[i]);
                  omax2:=rr[i];
                  omega2:=IntRealMax2(omax1,omax2);
                  omax1:=omega2;
                End;
            if omega2>tochn then
                                Begin
                     endcicl:irs:=irs+1;
                                  irs1:=irs1+1;
                                  goto cicl;
                                End;
writeln(fi);
writeln(fi,
' Интервал ',ii,' решения по      1 координате  .......',r1[1]);
for i:=2 to n do writeln(fi,
'                              по ',i
,' координате  ................      ',r1[i]);
writeln(fi,' Количество итераций нахождения ',ii,
' решения ..................      ',irs1);
writeln(fi,' Количество делений интервалов нахождения ',ii,
' решения ........   ',npod);
writeln(fi,' Общее количество итераций нахождения ',ii,
' решения ............    ',irs);
writeln(fi);
irs1:=0;
ii:=ii+1;
goto labdali;
labnet:
writeln(fi,' В начальных интервалах больше корней нет ');
labdali: ii:=ii-1;
writeln(fi,' Общее количество итераций равно .......',irs);
writeln(fi,
' Общее количество делений интервалов равно ......  ',npod);
writeln(fi,
' Количество подинтервалов левых частей ......',nn1);
writeln(fi,
' ---------------------- правых частей ........   ',nn2);
nn:=nn1+nn2;
```

```
  writeln(fi,
  ' Общее количество подинтервалов равно ............    ',nn);
  writeln(fi,
  ' Количество вычисленных решений в X(0) равно ......   ',ii);
  close(fi);
End.
```

Выходная програмиа, обработанная препроцессором:

```
Program IntKrawchyk;
   Uses Intrvl;
   Const
     nmax=2;
   Label
     cicl,endcicl,labnet,labpod,labdali;
 Type
   IntRealStr=array[1..nmax] of IntReal;
   IntRealArray=array[1..nmax,1..nmax] of IntReal;
 Var
   snorm,snormf,omega2,omax2,omaxl,s_,prom,
   tochn                                   :IntReal;
   dod2,rr,r6,g,f,y,fig3,fig4                  :IntRealStr;
   x,hdod,r1,rtx
                        :array[1..nmax] of Interval;
   soxr1,soxr2
                        :array[1..nmax*10] of interval;
   a,r
                        :array[1..nmax,1..nmax] of Interval;
   b1                                      :IntRealArray;
   nn,nn1,nn2,n_,n1,n2,nn3,nn4,irs,ikol,i,j,k,n,
   ii,ido,ido1,npod,i3,j_1,j_2,j_j1,i4,j_j2,irs1
                                           :Integer;
   mlog,log2                               :Boolean;
   s,ss,sss                                :Interval;
   fi:text;
  Procedure CreateInterv;
    var
      Int0:1..NMAX;        Int1:1..NMAX;
      Int2:1..NMAX;        Int3:1..NMAX;
      Int4:1..NMAX*10;     Int5:1..NMAX*10;
      Int6:1..NMAX;        Int7:1..NMAX;
      Int8:1..NMAX;        Int9:1..NMAX;
 Begin
   For Int0:=1 To NMAX Do          New(X[Int0]);
   For Int1:=1 To NMAX Do          New(HDOD[Int1]);
   For Int2:=1 To NMAX Do          New(R1[Int2]);
   For Int3:=1 To NMAX Do          New(RTX[Int3]);
   For Int4:=1 To NMAX*10 Do       New(SOXR1[Int4]);
   For Int5:=1 To NMAX*10 Do       New(SOXR2[Int5]);
   For Int6:=1 To NMAX Do
   For Int7:=1 To NMAX Do          New(A[Int6,Int7]);
   For Int8:=1 To NMAX Do
   For Int9:=1 To NMAX Do          New(R[Int8,Int9]);
   New(S);         New(SS);        New(SSS);
  End;
```

```
 Procedure DeleteInterv;
    var
      Int0:1..NMAX;          Int1:1..NMAX;
      Int2:1..NMAX;          Int3:1..NMAX;
      Int4:1..NMAX*10;       Int5:1..NMAX*10;
      Int6:1..NMAX;          Int7:1..NMAX;
      Int8:1..NMAX;          Int9:1..NMAX;
Begin
  For Int0:=1 To NMAX Do          Dispose(X[Int0]);
  For Int1:=1 To NMAX Do          Dispose(HDOD[Int1]);
  For Int2:=1 To NMAX Do          Dispose(R1[Int2]);
  For Int3:=1 To NMAX Do          Dispose(RTX[Int3]);
  For Int4:=1 To NMAX*10 Do       Dispose(SOXR1[Int4]);
  For Int5:=1 To NMAX*10 Do       Dispose(SOXR2[Int5]);
  For Int6:=1 To NMAX Do
  For Int7:=1 To NMAX Do          Dispose(A[Int6,Int7]);
  For Int8:=1 To NMAX Do
  For Int9:=1 To NMAX Do          Dispose(R[Int8,Int9]);
  Dispose(S);  Dispose(SS);       Dispose(SSS);
 End;


  Procedure Podil1;
  Var
    imax:integer;
    xn1,xn2,xprom:interval;
    xmed,ximax:IntReal;
    rt:array[1..nMax] of Interval;
    i,i1,i2  :integer;
    log1,log3,log4:boolean;
 Procedure CreateInterv;
    var
      Int0:1..NMAX;
Begin
  New(XN1);       New(XN2);       New(XPROM);
  For Int0:=1 To NMAX Do
                          New(RT[Int0]);
 End;

 Procedure DeleteInterv;
    var
      Int0:1..NMAX;
Begin
  Dispose(XN1);      Dispose(XN2);      Dispose(XPROM);
  For Int0:=1 To NMAX Do        Dispose(RT[Int0]);
 End;


  Begin
    CreateInterv;  iMax:=1; ximax:=Width(rtx[1]);
    for i:=2 to n do
        if  ximax<Width(rtx[i])  then
            Begin
```

```
            xiMax:=Width(rtx[i]);       iMax:=i;
          End;
  for i:=1 to n do Perer(rtx[i],x[i],rt[i],log1);
  CreateInt(Dn(rtx[imax]),Mid(rtx[imax]));
  CopyStek(xprom);      Perer(xprom,x[imax],xn1,log3);
  CreateInt(Mid(rtx[imax]),Up(rtx[imax]));
  CopyStek(xprom);      Perer(xprom,x[imax],xn2,log4);
  if  log3  then
                  Begin
                    j_1:=j_1+1;
                    for i:=1 to n do
                        Begin
                          i1:=n1+i;
                          if i<>imax  then
                          { soxr1[i1]:=(rt[i]);               }
                          Begin
                            AddStek(rt[i]);
                            CopyStek(soxr1[i1]);
                          End
                                     Else
                          { soxr1[i1]:=(xn1);   }
                          Begin
                            AddStek(xn1);
                            CopyStek(soxr1[i1]);
                          End;

                        End;
                    n1:=i1;
                  End;
  if log4  then
                  Begin
                    j_2:=j_2+1;
                    for i:=1 to n do
                        Begin
                          i2:=n2+i;
                          if i<>imax  then
                          { soxr2[i2]:=(rt[i]);               }
                          Begin
                            AddStek(rt[i]);
                            CopyStek(soxr2[i2]);
                          End
                                     Else
                          { soxr2[i2]:=(xn2);   }
                          Begin
                            AddStek(xn2);
                            CopyStek(soxr2[i2]);
                          End;
                        End;
                    n2:=i2;
                  End; DeleteInterv;
  End;

Procedure Systm;
     Var
       xc:array[1..nmax] of Interval;
```

```
 Procedure CreateInterv;
    var         IntO:1..NMAX;
Begin
  For IntO:=1 To NMAX Do      New(XC[IntO]);
 End;

 Procedure DeleteInterv;
    var         IntO:1..NMAX;
Begin
  For IntO:=1 To NMAX Do      Dispose(XC[IntO]);
 End;
 {$i St}
      Begin

CreateInterv;
        for i:=1 to nmax do  { xc[i]:=Gx[i]);   }
Begin
  AddStek(x[i]);
  CopyStek(xc[i]);
End;
        f[1]:=6*St(y[1],5)-25.2*St(y[1],3)+24*y[1]-6*y[2];
        f[2]:=12*y[2]-6*y[1];
{ a[1,2]:=(0-6);          }
Begin
  AddStekNoInt(0);
  AddStekNoInt(6);
  Subss;
  CopyStek(a[1,2]);
End;
{ a[2,1]:=(a[1,2]);            }
Begin
  AddStek(a[1,2]);
  CopyStek(a[2,1]);
End;
{ a[2,2]:=(12);         }
Begin
  AddStekNoInt(12);
  CopyStek(a[2,2]);
End;
{ a[1,1]:=((30*xc[1]\2-75.6)*xc[1]\2+24);            }
Begin
  AddStekNoInt(30);
  AddStek(xc[1]);
  AddStekNoInt(2);
  Sqrss;
  Mulss;
  AddStekNoInt(75.6);
  Subss;
  AddStek(xc[1]);
  AddStekNoInt(2);
  Sqrss;
  Mulss;
  AddStekNoInt(24);
  Addss;
```

```
  CopyStek(a[1,1]);
End;
DeleteInterv;
      end;
  {$i Invert}
Begin
  InitStek;
  CreateInterv;
  nn1:=0; nn2:=0; n_:=0; n1:=0; n2:=0;
  nn3:=0; nn4:=0; irs:=1; ii:=1; j_1:=0; j_2:=0;
  j_j1:=0; j_j2:=0; irs1:=0; npod:=0;
  write(' Размерность системы ........  '); readln(n);
  write(' Точность ...................  '); readln(tochn);
  writeln(' Исходные интервалы ');
    for i:=1 to n do
        Begin
          write('      по ',i,' координате .......  ');
          readln(x[i]^[1],x[i]^[2]);
        End;
     Assign(fi,'rezult');
     Rewrite(fi);
    writeln(fi,' Размерность системы ........   ',n);
    writeln(fi,' Точность ...................   ',tochn);
    writeln(fi,' Исходные интервалы ');
    for i:=1 to n do
          writeln(fi,'      по ',i,
                 ' координате .......   ',x[i]^[1],x[i]^[2]);

cicl:
     ikol:=0;
     for i:=1 to N  do
          Begin
            y[i]:=Mid(x[i]);
            r0[i]:=Width(x[i]);
          End;
     Systm;
     for i:=1 to n do
          for j:=1 to n do b1[i,j]:=Mid(a[i,j]);
     Invert(n,b1);
     for i:=1 to n do
          for j:=1 to n do
                   Begin
                     { s:=(0);            }
                     Begin
                       AddStekNoInt(0);
                       CopyStek(s);
                     End;
                     for k:=1 to n do
                     { s:=(s+b1[i,k]*a[k,j]);    }
                            Begin
                              AddStek(s);
                              AddStekNoInt(b1[i,k]);
                              AddStek(a[k,j]);
                              Mulss;
                              Addss;
```

```
                        CopyStek(s);
                      End;
               if  i=j  then
                      { r[i,j]:=(1-s);                  }
                      Begin
                        AddStekNoInt(1);
                        AddStek(s);
                        Subss;
                        CopyStek(r[i,j]);
                      End
                        Else
                      { r[i,j]:=(0-s);  }
                      Begin
                        AddStekNoInt(0);
                        AddStek(s);
                        Subss;
                        CopyStek(r[i,j]);
                      End;
             End;
      for i:=1 to n do
          Begin
            s_:=0;
            for j:=1 to n do s_:=s_+b1[i,j]*f[j];
            g[i]:=s_;
          End;
      for i:=1 to n do
          Begin
            prom:=y[i]-g[i];
            { ss:=(0);              }
            Begin
              AddStekNoInt(0);
              CopyStek(ss);
            End;
            ido:=i-1;
            if ido<>0  then
            for j:=1 to ido do  {
ss:=(ss+r[i,j]*(rtx[j]-y[j]));   }
 Begin
   AddStek(ss);
   AddStek(r[i,j]);
   AddStek(rtx[j]);
   AddStekNoInt(y[j]);
   Subss;
   Mulss;
   Addss;
   CopyStek(ss);
 End;
 { sss:=(0);              }
 Begin
   AddStekNoInt(0);
   CopyStek(sss);
 End;

            ido1:=ido+1;
```

```
   for k:=idoi to n do  { sss:=(sss+r[i,k]*(x[k]-y[k])); }
   Begin
     AddStek(sss);
     AddStek(r[i,k]);
     AddStek(x[k]);
     AddStekNoInt(y[k]);
     Subss;
     Mulss;
     Addss;
     CopyStek(sss);
   End;
   { r1[i]:=(prom+ss+sss);                }
   Begin
     AddStekNoInt(prom);
     AddStek(ss);
     Addss;
     AddStek(sss);
     Addss;
     CopyStek(r1[i]);
   End;
   Perer(x[i],r1[i],rtx[i],mlog);
   if not mlog  then goto labpod;
   rr[i]:=Width(rtx[i]);
;  if rr[i]<>r0[i ] then ikol:=ikol+1;
 End;
 if ikol<>n  then
               Begin
                 npod:=npod+1;
                 Podil1;
                 if n1>nn3  then
                    Begin
                      nn1:=nn1+1; nn3:=nn3+n;
                      for i:=1 to n do
                           Begin
                             i3:=j_j1+i;
                             { x[i]:=(soxr1[i3]);  }
                              Begin
                                AddStek(soxr1[i3]);
                                CopyStek(x[i]);
                              End;
                           End;
                      j_j1:=i3; goto endcicl;
                    End
                    Else
                    Begin
              labpod: if  n2<=nn4  then goto labnet;
                      nn2:=nn2+1;
                      nn4:=nn4+n;
                      for i:=1 to n do
                           Begin
                            i4:=j_j2+i;
                            { x[i]:=(soxr1[i4]);   }
                              Begin
                                AddStek(soxr2[i4]);
                                CopyStek(x[i]);
```

```
                    End;
                  End;
              j_j2:=i4;
              goto endcicl;
            End;
          End;
          omaxl:=0;
          for i:=1 to n do
                Begin
                  { x[i]:=(rtx[i]);          }
                  Begin
                    AddStek(rtx[i]);
                    CopyStek(x[i]);
                  End;
          y[i]:=Mid(x[i]);
          omax2:=rr[i];
          omega2:=IntRealMax2(omaxl,omax2);
          omaxl:=omega2;
        End;
        if omega2>tochn  then
                Begin
          endcicl:irs:=irs+1;
                  irs1:=irs1+1;
                  goto cicl;
                End;

writeln(fi);
writeln(fi,
' Интервал ',ii,' решения по     1 координате  ............ ',
r1[1]^[1],r1[1]^[2]);
for i:=2 to n do writeln(fi,'                      по ',i,
' координате  ....... ',r1[i]^[1],r1[i]^[2]);
writeln(fi,' Количество итераций нахождения ',ii,
' решения .................   ',irs1);
writeln(fi,' Количество делений интервалов нахождения ',ii,
' решения ........  ',npod);
writeln(fi,' Общее количество итераций нахождения ',ii,
' решения ...........  ',irs);
writeln(fi);
irs1:=0;
ii:=ii+1;
goto labdali;
labnet:
 writeln(fi,' В начальных интервалах больше корней нет ');
labdali:
ii:=ii-1;
writeln(fi,' Общее количество итераций равно ..........',irs);
writeln(fi,
' Общее количество делений интервалов равно ..........   ',npod);
writeln(fi,
' Количество подинтервалов левых частей ...............   ',nn1);
writeln(fi,
' ------------------- правых частей .........    ',nn2);
nn:=nn1+nn2;
```

```
writeln(fi,
 ' Общее количество подинтервалов равно .............   ',nn);
writeln(fi,
 ' Количество вычисленных решений в X(O) равно .......   ',ii);
close(fi);
DeleteInterv;
End.
```

Результат выполнения программы:

```
Размерность системы.........  2

Точность ...................  1.0000000000E-04


Исходные интервалы

    по 1 координате .......  5.0000000000E-01 1.5000000000E+00

    по 2 координате ....... -3.0000000000E+00 2.0000000000E+00


Интервал 1 решения по     1 координате ......

..........  1.0705418042E+00    1.0705427794E+00

                     по     2 координате ......

..........  5.3527114549E-01    5.3527114633E-01

Количество итераций нахождения 1 решения ..................  12

Количество делений интервалов нахождения 1 решения ........  1

Общее количество итераций нахождения 1 решения ............  13


Общее количество итераций равно ............................  13

Общее количество делений интервалов равно ..................  1

Количество подинтервалов левых частей ......................  1

------------------------ правых частей .....................  1
```

Общее количество подинтервалов равно 2

Количество вычисленных решений в X(O) равно 1

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе получены следующие результаты:

1. Для решения систем нелинейных уравнений предложен класс интервальных итерационных методов высокого порядка сходимости. Построены алгоритмы разных модификаций предложенных интервальных методов. Исследован вопрос о выборе наиболее эффективного из данного класса методов.

2. Предложен и исследован один из видов интервальных итерационных методов типа Рунге решения систем нелинейных уравнений. Доказана теорема о количестве шагов необходимых осуществить рассмотренным методом для определения наличия корня в начальном интервале.

3. Построена модификация этого вида интервальных методов типа Рунге, не содержащая обращений интервальных матриц. Исследованы свойства интервальных последовательностей, полученных с помощью этой модификации. Установлен порядок сходимости предложенного интервального метода.

4. Исследован вопрос устойчивости одного вида интервальных итерационных методов типа Рунге. Построен метод решения нелинейных систем специального вида. Доказана сходимость этого метода.

5. Рассмотрено применение предложенных методов к решению систем нелинейных алгебраических уравнений различной размерности. Проведено сравнение результатов вычислений построенных методов и известных интервальных методов. Получено практическое подтверждение эффективности применения интервальных итерационных методов типа Рунге.

6.Указан класс задач, которые могут быть эффективно решены предложенными методами. Модификациями интервального метода типа Рунге решены граничные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений, а также краевые задачи в частных производных эллиптического типа. Проанализированно результаты решения этих задач.

7.Построен препроцессор, который позволяет автоматизировать процесс создания интервальных программ для персональных ЭВМ. Показаны примеры использования этого препроцессора.

8.Основные результаты работы, созданные алгоритмы и программы используются при проведении научно - исследовательких работ во Львовском госуниверситете. Они также внедрены в учебный процесс во Львовском университете, используются при чтении спецкурсов для студентов факультета прикладной математики. Результаты работы отражены в научно-техническом отчете за 1986-1990 г.г. по теме "Численные методы решения нелинейных уравнений и задач на экстремум", выполненную согласно Программе комплексных исследований вузов Минвуза УССР по проблеме "Моделирование и оптимизация сложных процессов управления".

Литература.

1. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. - М.: Мир, 1887. - 356 с.
2. Бабич М.Д., Иванов В.В. Оценка полной погрешности при решении нелинейных операторных уравнений методом простой итерации// Журн. вычисл. матем. и матем. физики. - 1967. - 7, № 5. - С.988-1001.
3. Бартиш М.Я. Возмущенные аналоги методов типа Ньютона - Канторовича // Матем. сборник. - Киев: Наук. думка. - 1976. - С. 59 - 62.
4. Бартиш М.Я. О методах типа Ньютона - Канторовича // Сиб. матем. журн. - 1973. - 14. № 4. - С.904.
5. Бартиш М.Я. О некоторых итерационных методах решения функциональных уравнений//Сиб. матем. журн. - 1969. - 10. № 3. - С.488 - 493.
6. Бартиш М.Я. Об одном итерационном методе решения функциональных уравнений// Докл. АН УРСР. Сер. А. - 1968. - № 5. - С. 387 - 391.
7. Бартиш М.Я., Роман Л.Л. Возмущенные аналоги рекурсивных методов типа Ньютона-Канторовича// II Симпозиум по методам решения нелинейных уравнений и задач оптимизации. Доклады и сообщения. Ч. 1. - 1981. С. 81 - 83.
8. Бартиш М.Я., Сеньо П.С. О методах типа Рунге решения нелинейных операторных уравнений// Докл. АН УССР. Сер. А. - 1971. - № 7. - С. 579 - 582.
9. Бартиш М.Я., Щербина Ю.Н. Итерационные формулы, полученные с помощью рекурсии//Матем. сборник. - Киев: Наук. думка. - 1976. - С. 50-53.
10. Бартиш М.Я., Щербина Ю.Н. Исследование условий сходимости и

оценка полной погрешности одного итерационно-разностного метода для решения нелинейных операторных уравнений//Выч. и прикл. математика. - 1976. - Вып. 28. - С.3 - 9.

11.Бельтюков Б.А. К исследованию возмущенного аналога метода Эйткена - Стеффенсена// Сиб. матем. журн. - 1974. - 15. № 5. - С. 1172 - 1173.

12.Бельтюков Б.А. О возмущенном аналоге метода Эйткена - Стеффенсена для решения нелинейных операторных уравнений// Сиб. матем. журн. - 1971.- 12. № 5. - С. 983 - 1000.

13.Бельтюков Б.А.О возмущенном аналоге метода Эйткена-Стеффенсена для решения нелинейных операторных уравнений//Сиб. матем. журн. - 1971. - 12. № 5. - С. 983 - 1000.

14.Бельтюков Б.А., Волокитин С.С. Упрощенные варианты возмущенного метода Эйткена-Стеффенсена//Сборник по вычислительной математике. Иркутск:Изд-во Иркутск. гос. пед. ин-та, 1973. - С.20-29.

15.Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. т. I - М.: Наука. - 1966. - 632 с.

16.Беляева В.П. Практические применения интервального анализа // Труды I Советско - Болгарского семинара по числовой обработке (Сборник). Переславль-Залесский. - 1989. - 175с. - Деп. в ВИНИТИ 22.2.89, № 2634 - В89.

17.Бойков И.В., Жечев И.И. Некоторые вопросы устойчивости итерационных методов решения операторных уравнений//Функ. анализ и его приложения. - Казань:Казанск. ун-т. - 1975. - С.16-33.

18.Ваарман О.М. О некоторых итерационных методах с последовательной аппроксимацией обратного оператора.I//Изв. АН ЭССР. Физика.Матем. - 1968. - 17.№ 4. - С. 379 - 387.

19. Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. - М.: Наука, 1972. - 415 с.

20. Венгерський П.С. Комплекс програм реалізації інтервальних ітераційних процесів на ЕС ЕОМ. Вісник Львівського університету. Випуск 31, 1989, С. 75-81.

21. Венгерский П.С., Кардаш А.И., Сеньо П.С. Вычислительные аспекты интервального метода типа Рунге // Научно - техническая конференция " Применение вычислительной техники и математических методов в научных и экономических исследованиях ". - Киев, 1988. - С.8-9.

22. Венгерский П.С., Кардаш А.И., Сеньо П.С. О применении некоторых интервальных итерационных методов к решению систем нелинейных алгебраических уравнений // Вычислительная и прикладная математика, Киев, 1990, N 70, С. 11 - 21.

23. Венгерский П.С., Карпов В.В., Сеньо П.С. Реализация интервальных вычислений с помощью препроцессора на алгоритмическом языке Паскаль для IBM PC. Львов, 1992. - 29 с. - Рукопись деп. в УкрНИИНТИ 13.01.92, N 24 - Ук92.

24. Венгерский П.С., Сеньо П.С. Интервальный метод решения систем нелинейных уравнений, базирующийся на предельных теоремах о среднем. Львов, 1992.- 23 с. - Рукопись деп. в УкрНИИНТИ 20.09.90. N 1612 - Ук90.

25. Венгерский П.С., Сеньо П.С. Решение задач оптимального управления методами интервального анализа // Шестая Всесоюзная конференция по управлению в механических системах. - Львов, 1988. - С. 29.

26. Венгерский П.С., Сеньо П.С. Учет погрешностей всех типов при решении систем нелинейных уравнений. // Тезисы докладов школы -

симпозиума "Системология: междисциплинарные исследования и проектирование сложных систем". - Львов, 1988. - с. 27.
27.Вержбицкий В.М. О свободных от обращения вложенных итерациях Ньютона// Краевые задачи. - Ижевск: Ижевский механический ин-т, 1979. - С. 83 -84.
28.Вержбицкий В.М.,Цалюк З.Б.Об усиленном методе Ньютона - Канторовича с аппроксимацией обратного оператора//Журн. вычисл. матем. и матем. физики. - 1972. - 12, № 1. - С. 222-227.
29.Вощинин А.П.,Сотиров Г.Р. Оптимизация в условиях неопределенности. - М.:Моск. энерг. ин - т. София: Техника. 1990.
30.Гавурин М.К. Нелинейные функциональные уравнения и непрерывные аналоги итеративных методов// Изв. вузов. Математика. - 1958. - № 5. - С. 18 - 31.
31.Глазунов Н.М.Рациональная интервальная арифметика и ее реализация на ЭВМ в системе REDUCE//Препр./ АН СССР. СО. ВЦ., Красноярск. - 1990. - № 16. - С. 7-10.
32.Глазунов Н.М. Численно-аналитический метод исследования на ЭВМ устойчивости линейных систем//Сложные системы управления. - Киев. - 1987. - С. 10-14.
33.Глазунов Н.М.,Грегуль О.Е.,Заика И.В. COMIF - компилятор вычисления алгебраических выражений, учитывающих ошибки округления ЕС ЭВМ. Киев, 1985. - 21 с. - Деп. в ВИНИТИ ,№ 7268 - В85.
34.Гребенюк В.С. Исследование сходимости некоторых классов итерационных процессов//Исслед. по современ. проблемам суммир. и приближ. функций и их прилож. - Днепропетровск. - 1975. - Вып. 6. - С. 172 - 180.
35.Давиденко Д.Ф. О приложении метода вариации параметра к теории

нелинейных функциональных уравнений// Укр. матем. журн. - 1955. - 7.N I. - С. I8 - 28.

36.Добронец Б.С., Шайдулов В.В. Двусторонние численные методы. - Новосибирск:Наука, I990. - 208 с.

37.Калмыков С.А.,Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа/ Вычисл. центр Краснояр. фил.Сиб. отделения АН СССР. - Новосибирск: Наука, I986 - 224 с.

38.Канторович Л.В. О методе Ньютона// Тр. матем. ин-та им. Стеклова. - I949. - Вып. 28. - С. I04-I44.

39.Канторович Л.В. Приближенное решение функциональных уравнений// УМН - I956. - II, вып. 6 - С. 99-II6.

40.Канторович Л.В. Функциональный анализ и прикладная математика. // УМН - I948. - II, вып. 6. - С.99 - II6.

4I.Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. - М.: Наука,I984. - 752 с.

42.Коган Т.И. Об одном итерационном процессе для функциональных уравнений // Сиб. мат. журн. - I967. - 8. N 4. - С. 958-960.

43.Коллатц Л.Функциональный анализ и вычислительная математика. - М.:Мир. - I969. - 447 с.

44.Красносельский М.А.,Вайникко Г.М., Забрейко Г.П. и др. Приближенное решение операторных уравнений. - М.:Наука. - I969. - 455 с.

45.Курчатов В.А. Итерационный метод третьего порядка для решения нелинейных функциональных уравнений // Изв. вузов. Математика. - I976. - N I2. - С. 5I - 56.

46.Курчатов В.А. Метод линеаризованных невязок приближенного решения функциональных уравнений//Изв. вузов. Математика. - I980.

- N I. - С. 27 - 33.

47.Курчатов В.А. Метод линеаризованных невязок для ускорения сходимости итераций // Изв. вузов. Математика. - 1979. - N 8 - С. 34 - 44.

48.Лика Д.К. О решении нелинейных операторных уравнений одним классом итерационных процессов//Сиб. мат. журн. - 1970. - II, N 4. - С. 942 - 947.

49.Мусаев Э.А. Интервальный анализ и задача линейного программирования//Препр./ АН СССР. СО. ВЦ, Красноярск. - 1989. - N 9 - С. 22 - 24.

50.Мусаев Э.А.Система интервальной арифметики настраиваемой точности на языке Паскаль для IBM PC.//Материалы 8 школы-семинара ИВЕРСИ-86 "Персональные компьютеры и локальные сети ".2-7 октября 1986 г., г.Новый Агафон-Тбилиси,1986. - С.258-259.

51.Нестеров В.М. Оценка вычислительной сложности алгоритма Мура // Препр. / АН СССР. СО. ВЦ, Красноярск. - 1989. - N 9. - С. 26 - 29.

52.Нечепуренко М.И. О методе Чебышева для функциональных уравнений // УМН. - 1954. - 9. N 2. - С. 163-170.

53.Ортега Дж.Рейнболдт В.Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. - М.:Мир, 1975 - 558с.

54.Панкова Г.Д.Пакет программ для интервального анализа для ЭВМ серии ЕС.Госфонд алгоритмов и программ, П003509.С. 23.

55.Полль В. Об одном классе итерационных методов для решения нелинейных операторных уравнений//Изв. АН ЭССР. Физика. Матем. - 1974. - 23, N 4. - С. 421 - 424.

56.Роозе А. Об использовании методов Рунге - Кутта для решения нелинейных уравнений //Изв. АН ЭССР, Физика. Матем. - 1973. - 22, N 4. - С. 431 - 434.

57. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.:Наука, 1977. - 300с.

58.Сеньо П.С. Исследование методов типа Рунге решения нелинейных операторных уравнений: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. - Тарту, 1979. - 18 с.

59.Сеньо П.С. Новый подход к построению интервальных методов решения систем нелинейных уравнений// Вестник Львовского ун-та. - 1989. - С. 85 - 92.

60.Сеньо П.С.Построение интервального метода типа Рунге // 5-ая Всесоюз. шк.-семинар "Распараллеливание обработки информации ". - Львов,1985.Ч.4.- С.50-51.

61.Сеньо П.С.,Венгерский П.С. Аналоги интервальных итерационных методов, не содержащих обращений интервальных матриц // Научно-техническая конференция "Применение вычислительной техники и математических методов в научных и экономических исследованиях". Тезисы докладов. - Киев, 1991. - С. 169.

62.Сеньо П.С., Венгерський П.С. Інтервальний ітераційний метод розв'язування нелінійних систем рівнянь, який не містить інверсій інтервальних матриць // Вісник Львівського університету. - Львів: Вид-во Львів. ун-ту, 1991р, випуск 35, С. 18-24.

63.Сеньо П.С.,Венгерский П.С.Решение систем нелинейных уравнений одним итерационным интервальным методом// Научно-техническая конференция "Применение вычислительной техники и математических методов в научных и экономических исследованиях". Тезисы докладов. - Севастополь, 1990. - С. 6-7.

64.Сеньо П.С., Венгерский П.С. Ускорение сходимости интервального итерационного метода типа Рунге // Научно-техническая конференция "Применение вычислительной техники и математических методов в научных и экономических исследованиях" . Тезисы докладов. - Киев, 1989. - С. 51 - 52.

65.Труды I-го Советско-Болгарского семинара по числовой обработке. (Сборник). Деп. в ВИНИТИ 22.2.89 N 2634 - В89.

66.Ульм С.Ю.Алгоритмы обобщенного метода Стеффенсена //Изв. АН ЭССР.Сер. Физ. - матем. и техн. н. - 1965. - 14, N 3. - С. 433-443.

67.Ульм С.Ю. Об итерационных методах с последовательной аппроксимацией обратного оператора //Изв. АН ЭССР, Физика. Матем. - 1967. - 16. N 4. - С. 403 -411.

68.Чернышенко В.М. Об одном методе построения итерационных формул высоких порядков//Вычисл. и приклад. математика. - 1970. - Вып.11. - С. 36 - 39.

69.Шаманский В.Е. Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ. - Киев:Наук. думка. - 1966. - ч. 2. - 242 с.

70.Шафиев Р.А. О методе хорд с последовательной аппроксимацией обратного оператора// Приближенное решение уравнений. - Кишенев, 1973. - С. 53 - 62.

71.Шафиев Р.А. О некоторых итерационных процессах // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. - 1964. - 4. N 1. - С.139-143.

72.Шахно С.М.Построение и исследование некоторых методов типа Ньютона-Канторовича для решения нелинейных функциональных уравнений:Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. - Киев,1987. - 20 с.

73.Шахно С.М. Применение методов типа Рунге и типа Ньютона для решения разностных уравнений газодинамики//Материалы 8 конф. мол. ученых Ин-та прикл. проблем мех. и мат. АН УССР, - Львов,Деп. в ВИНИТИ 23 июля 1982 г., N 3942-82 - С. 54-56.

74.Шварц Л.Анализ, том I. - 1972. - М.:Мир. - 824 с.

75.Юлдашев Л.Х. Алгоритмы реализациимашинной интервальной арифметики для ЭЦВМ БЭСМ - 6.Госфонд алгоритмов и программ, П001726, 1976, N 64, вып.2.

76.Юлдашев З.Х. Некоторые вопросы интервального анализа и применение интервальных методов для решения задач вычислительной математики:Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. - Новосибирск, 1977. - 16 с.

77.Яковлев А.Г.Интервальные вычисления на ЭВМ//Алефельд Г., Херцбергер Ю.Введение в интервальные вычисления. - М.:Мир- 1987 - С.336-352.

78.Яковлев А.Г.О некоторых возможностях в организации локализационных (интервальных) вычислений на ЭВМ// Препр. / АН СССР. СО. ВЦ., Красноярск. - 1990. - N 16. - С. 33 - 38.

79.Alefeld G.Uber die Konvergenzordnung des Intervall- Newton-Verfahrens//Computing. - 1987, 39. - N 4.- S. 363 - 369.

80. Alefeld G., Cornelius H. A device for the acceleration of convergence of a monotonously enclosing iteration method. // Lecture notes in mathematics. - N 953. - 1982. - P. 68 - 79.

81.Apostolatos N. Allgemeine Intervallarithmetiken und Anwendungen. Bull. Soc. Math. Athens. N. Ser. 10, 136 - 180 (1969).

82.Apostolatos N., Kulisch U., Krawczyk R., Lortz B., Nickel K., Wippermann H.- W. The algorithmic language Triplex - Algol 60//

Numerische Mathematik. - 1968. - Vol. 11. - P. 175-180.

83. Cornelius H. On the acceleration of an interval - arithmetic iteration method. // SIAM J. Numer. Anal. - N 20. - 1983. - P. 1010 - 1022.

84. Cornelius H. Untersuchungen zu einem intervallarithmetischen Iterationsverfahren mit Anwendungen auf eine Klasse nichtlinearer Gleichungssysteme. Dissertation, Technische Universitat Berlin. - 1981.

85. Cornelius H., Alefeld G.A device for the acceleration of convergence of a monotonously enclosing iteration method // Iterative solution of nonlinear systems of equation, Springer Lecture Notes In Mathematics. - 1982. - P.68- 70.

86. Gay D.M. Perturbation bounds for nonlinear equations.//SIAM J.Numer. Anal. - 1981. - v.18. - P. 654 - 663.

87. Guenther G. Marquardt G. A programming system for interval arithmetic in Algol 68 // Math. Centre Tracts. - 1981. - Vol. 134. - P. 201 - 215.

88. Hansen E. A globally convergent interval method for computing and bounding real roots. - BIT. - 1978. - N 18. - P. 415-424.

89. Hansen E.,Sengupta S. Bounding solutions of systems of equations using interval analysis // BIT - 1981. - v.21 , N2 - P. 203 - 211.

90. Jahn K.-U. Aufbau einer 3 - wertigen linearen Algebra und affinen Geometric auf der Grundlage der Intervallarithmetik. Ph. D. Thesis, Univ. Leipzig (1971).

91. Jones S.T. Searching for solution of finite nonlinear systems - An interval approach ph. D. thesis, university of Wisconsin -

I03. Moore R.E. A test for existance of solutions to nonlinear systems. - SIAM J.Numer.Anal. 14,611 - 618 (1977).

I04. Moore R.E. Bounding sets in functions spaces with applications to nonlinear operator equations. // SIAM Rev. - N 20. - 1978. - P. 492 - 512.

I05. Moore R.E. Interval Analysis. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1966.

I06. Moore R.E. Methods and applications of interval analysis. - Philadelfia: SIAM, 1979. - 190 p.

I07. Moore R.E. New results on nonlinear systems. - In: Interval Mathematics, 1980/Ed. by K.Nickel N.Y. e.a.: Academic Press. - 1980. - P.165 - 180.

I08. Moore R.E. On computing the range of a rational function of n variables over a bounded region. - Computing. - 1976. - v.16. - P. 1 - 15.

I09. Oelschlagel D., Susse H. Numerische Untersuchugen zu einigen Intervall - Newtonverfahren. - Wiss. Z. Tech. Hochsch. Leuna - Merseburg. - 1981. - Bd.23, N 2. - S.105 - 111.

II0. Ortega J.M., Rheinboldt V. Monotone iterations for nonlinear equations with application to Gauss - Seidel methods// SIAM J.Numer. Anal. - 1967. - 4. - P. 171 - 190.

III. Ortolf H.-J. Eine Verallgemeinerung der Intervallarithmetik. GMD - Bericht. No. 11. Bonn (1969).

II2. Qi Li-Qun. Solving systems of nonlinear algebraic equations with exclusion-Newton method. //J.Numer.Math. Comput. Appl. - 1980. - v.1. - P. 109-115.

II3. Schmidt J.W. Eingrenzung von Losungen nichtlinearer Gleichungen

Modison, 1978.

92. Kahan W.M. A more complete interval arithmetic. Report, Univ. of Toronto (1968).

93. Klaua D. Partielle Mengen mit mehruertigen Glundbeziehungen. Mber. Dt. Akad. Wiss. 11 (1969).

94. Krawczyk R. Conditionally isotone interval operators //Computing. - 1987. - 39, N 3. - P. 261 - 270.

95. Krawczyk R. Intervalliterationsverfahren.// Ber. Math. Stat. Sek. Forschunqszent. Gra. 1982. N 186-189. S. 1-49.

96. Krawczyk R. Interval iteration for including a set of solution// Computing. - 1984, v. 32. - N 1. - P. 13-31.

97. Krawczyk R. Newton - Algorithmen zur Bestimmung von Nullstellen mit Fehlerschranken//Computing. - 1969. - N 4. - S. 187-201.

98. Krawczyk R. Optimal enclosure of a generalized zero set of a function strip//SIAM J. Numer. Anal. - 1987. - 24, N 5. - P. 1202 - 1211.

99. Krawczyk R., Selsmark F. Order convergence and iterative interval methods. J. Math. Anal. Appl. -1980. -N 73 - P. 1-23.

100. Kulisch U. Grundzuge der Intervallrechnung. In "Uberbliche Mathematik", Vol. 2, Bibliograph. Inst. Mannheim, 1969.

101. Ling Yingjn, Zhuang Jiannan, Shen Zuhe. Improvement and implementation of the Krawczyk - Moore algorithm// Наньцзин даоюэ сюэбао. J. Nanjing Univ. Math. Biquart. - 1987. - 4, N 2. - P. 207 - 210.

102. Moore R.E. A computation test for convergence of iterative methods for nonlinear systems. SIAM J. Numer. Anal. 15, 1194 - 1196 (1978).

durch Verfahren mit hoherer Konvergenzgeschwindigkeit// Computing. - 1971. - 8. - P.208 - 215.

114. Schmidt J.W. Monotone Einschliebung mit der Regula falsi bei konverxen Funktionen//Z. Angew. Math. Mech. - 1970. - 50. - P.640 - 643.

115. Schmidt J.W., Leonhardt J. Eeingrenzung von Losunger mit Hilfe der Regula falsi//Computing. - 1970. - 6. -P.318-329.

116. Schmidt J.W., Loder D. Ableitungsfreie verfahren ohne auflosung linearer gleichungen // Computing. - N 5. - 1970. - P. 71 - 81.

117. Traub J.F. Iterative Methods for the solution of Equations. - New. Jersey, Englewood Cliffs, 1964. - 310 p.

118. Ullrich Ch. A FORTRAN extension for scientific computation //A new approach to scientific computation/ Ed.:Kulisch U., Miranker W.L. - New York etc.:Academic Press, 1983. - P.199-223.

119. You J.M. Software for interval arithmetic: a reasonably portable package//ACM Trans.Math.Software. -1979. -Vol.5, N 1. -P.50-63.