

**Методы оптимизации
и их приложения**

ТРУДЫ

XIII Байкальской международной школы-семинара

Иркутск-Северобайкальск, 2-8 июля 2005 г.

Том 4
**Интервальный
анализ**

**Иркутск
2005**

Российская академия наук
Российская ассоциация математического программирования
Институт систем энергетики им. Л.А.Мелентьева СО РАН
Иркутский государственный университет
Иркутский государственный университет путей сообщения
Иркутская государственная сельскохозяйственная академия
Институт динамики систем и теории управления СО РАН
Вычислительный центр РАН

International Association for the Promotion of Co-operation with Scientists
from the New Independent States of the Former Soviet Union (INTAS)
Российский фонд фундаментальных исследований
Иркутская областная администрация

**13-я Байкальская международная
школа-семинар**

**МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ
И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ**

ТРУДЫ ШКОЛЫ-СЕМИНАРА

Том 4. Интервальный анализ

2 – 8 июля 2005 г.
Иркутск, Байкал

Иркутск
2005

УДК 517.977+517.983+517.988+517.63+519.86

Интервальный анализ: Труды XIII Байкальской международной школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения", Иркутск, Байкал, 2 – 8 июля 2005 года. Том 4: Иркутск, ИСЭМ СО РАН. – 2005. – 119 с.

ISBN 5-93908-033-2.

Данный том содержит работы, посвященные теории и методам решения задач оптимального управления и интервального анализа.

Для научных работников, студентов и аспирантов, специализирующихся в области оптимального управления, математического моделирования и интервального анализа.

Труды подготовлены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-01-10048-г) и International Association for the Promotion of Co-operation with Scientists from the New Independent States of the Former Soviet Union (проект 04-85-832)

Ответственный за выпуск: *д.ф.-м.н. Лакеев А.В.*

ISBN 5-93908-033-2

©Институт систем энергетики
им. Л.А. Мелентьева СО РАН, 2005

Russian Academy of Sciences (RAS)
Russian Association of Mathematical Programming
Institute of Energy Systems, Siberian Branch of RAS
Irkutsk State University
Irkutsk State University of Railway Communications
Irkutsk State Agricultural Academy
Institute of System Dynamics and Control Theory, Siberian Branch of RAS
Computer Center of RAS

International Association for the Promotion of Co-operation with Scientists
from the New Independent States of the Former Soviet Union (INTAS)
Russian Foundation of Basic Research
Administration of Irkutsk Region

PROCEEDINGS OF
13-th Baikal International
School-seminar

OPTIMIZATION METHODS
AND THEIR APPLICATIONS

Volume 4. Interval analysis

July, 2 – 8, 2005
Irkutsk, Baikal

Irkutsk
2005

Interval analysis: Proceedings of XIII Baikal International School-seminar "Optimization methods and their applications", July, 2 – 8, Irkutsk, Baikal, 2005. Vol. 4. Irkutsk: Melentiev Energy Systems Institute SB RAS. – 2005. – 119 p.

Publication of the proceedings are supported by Russian Foundation of Basic Research (project 05-01-10048-г) and International Association for the Promotion of Co-operation with Scientists from the New Independent States of the Former Soviet Union (project 04-85-832)

СОДЕРЖАНИЕ

ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ	1
А.В. Лакеев (<i>Иркутск</i>) Вычислительная сложность решения интервальных задач	3
С.П. Шарый (<i>Новосибирск</i>) Численное решение интервальных линейных систем уравнений	5
СЕКЦИОННЫЕ ДОКЛАДЫ	7
Р.Р. Ахмеров (<i>Барнаул</i>) Интервально-аффинный метод Гаусса для систем со связями	9
Л.Т. Ащепков, А.В. Милютин (<i>Владивосток</i>) Управление запасами с ограниченным сроком	27
М.Б. Бозоров, З.Х. Юлдашев (<i>Навои, Ташкент</i>) Об одном интервальном варианте	34
Б.С. Джаныбеков (<i>Новосибирск</i>) Интервальный метод Гаусса-Зейделя для комплексных линейных систем	39
Б.С. Добронез (<i>Красноярск</i>) Виртуальный сдвиг множества решений	47
Г.Л. Козина (<i>Запорожье</i>) Правило выбора решений оптимизационных задач на графах с интервальными параметрами	51
А.Л. Крюкова (<i>Вологда</i>) Алгебраические и порядковые структуры интервальных округлений	56
А.В. Панюков, Е.С. Чечулина (<i>Челябинск</i>) Решения систем линейных алгебраических уравнений при интервальной неопределенности коэффициентов	62
С.П. Соколова, А.Г. Тохтабаев (<i>Санкт-Петербург</i>) Вычислительная процедура определения сингулярных чисел интервальной действительной матрицы	66
Е.В. Чаусова (<i>Томск</i>) Управление запасами с учетом потерь в условиях интервальной неопределенности	71
И.А. Шарая (<i>Новосибирск</i>) О строении допустимого множества	78
С.П. Шарый (<i>Новосибирск</i>) Стохастические подходы в интервальной глобальной оптимизации	85
A. Kearfott, M. Nakao, F. Neumaier, S. Rump, S. Shary, P. Hentenryck. Standardized notation in interval analysis	106

ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СЛОЖНОСТЬ РЕШЕНИЯ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

А.В. Лакеев

*Институт динамики систем и теории управления СО РАН, г. Иркутск
e-mail: lakeyev@icc.ru*

Аннотация. В докладе дается обзор по вычислительной сложности задач, связанных с интервальными вычислениями. Рассматриваются в основном две задачи: выяснения непустоты различных множеств решений интервальной системы линейных уравнений и нахождения оценки этих множеств. Показано, что в большинстве случаев эти задачи оказываются NP -полными.

Рассматриваются также некоторые задачи для линейных систем уравнений с неопределенностями в коэффициентах, близкие к интервальным.

Ключевые слова: системы линейных интервальных уравнений, обобщенное множество решений, полиномиальные алгоритмы, NP -трудность, NP -полнота, системы с неопределенностью.

Список литературы

- [1] Lakeyev A.V., Kreinovich V. NP-Hard Classes of Linear Algebraic System with Uncertainties // *Reliable Computing*, 1997, v. 3, N 1, pp. 51-81.
- [2] Kreinovich V., Lakeyev A.V., Rohn J., Kahl P. Computational Complexity and Feasibility of Data Processing and Interval Computations.– Dordrecht: Kluwer, 1997, 472 p.
- [3] Lakeyev A.V. Computational Complexity of Estimation of Generalized Solution Sets for Interval Linear Systems // *Вычислительные технологии*, т. 8, N 1, с. 12-23.

THE COMPUTATIVE COMPLEXITY OF INTERVAL PROBLEMS SOLVING

A.V. Lakeyev

*Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS, Irkutsk
e-mail: lakeyev@icc.ru*

Abstract. In the report it is proposed the survey on computative complexity of problems connected to interval calculations. We investigate two problems: identification the situation of infeasibility of interval systems of linear equations and getting the estimates of the feasible sets. It is shown that in most cases these problems are NP-complete.

We consider also some problems on systems of linear equations with indefinite coefficients which are close to interval.

Key words: systems of linear interval equations, feasible set, polynomial algorithms, NP-complexity, NP-complete problems, systems with indefinite coefficients.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

С.П. Шарый

*Новосибирское отделение Intel Corporation, г. Новосибирск
e-mail: sergey.p.shary@intel.com*

Аннотация. Доклад является обзором теории и современных численных методов решения различных постановок задач, связанных с интервальными системами линейных алгебраических уравнений. Рассматриваются, в частности, задачи внешнего и внутреннего оценивания множеств решений интервальных линейных систем, как наиболее популярного объединенного множества решений, так и обобщенных множеств решений. Осмысливаются вопросы организации численных алгоритмов для решения этих задач, вытекающие из факта их труднорешаемости.

Ключевые слова: интервальный, линейный, система уравнений, множество решений, внешняя оценка, внутренняя оценка, последовательно гарантирующий алгоритм, финально гарантирующий алгоритм.

Список литературы

- [1] С.П. Шарый *Конечномерный интервальный анализ*. — Рукопись, доступная на <http://www.ict.nsc.ru/interval/Books/FInAnal.pdf>, 700 с.

NUMERICAL SOLUTION OF INTERVAL LINEAR ALGEBRAIC SYSTEMS OF EQUATIONS

S.P. Shary

*Novosibirsk department of Intel Corporation, Novosibirsk
e-mail: sergey.p.shary@intel.com*

Abstract. Our talk presents a survey of the theory and modern numerical methods for the solution of various problem statements that arise in connection with interval systems of linear algebraic equations. We consider, in particular, the problems of outer and inner estimation of the solution sets to interval linear systems, both for the most popular united solution set and for generalized solution sets. Finally, we discuss the implementation issues of the interval numerical algorithms which stem from the fact that the problems under solution are mostly intractable.

Key words: interval, linear, systems of equations, solution set, outer estimate, inner estimate, sequentially validating algorithm, finally validating algorithm.

СЕКЦИОННЫЕ ДОКЛАДЫ

ИНТЕРВАЛЬНО-АФФИННЫЙ МЕТОД ГАУССА ДЛЯ СИСТЕМ СО СВЯЗЯМИ

Р. Р. Ахмеров

Алтайский государственный университет, Барнаул
e-mail: arr@ctta.ru

Аннотация. В работе представлен интервально-аффинный метод Гаусса для решения интервальной линейной системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ при наличии некоторых связей на коэффициенты системы. Этот метод основан на так называемой интервально-аффинной арифметике, которая дает возможность учесть связи при вычислении интервальных оценок для множества решений системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, и сделать эти оценки более точными.

Ключевые слова: интервальный, аффинный, арифметика, системы уравнений, метод Гаусса.

1 Введение

Пусть даны интервальная матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ и интервальный вектор $\mathbf{b} \in \mathbb{IR}^n$. Обозначим

$$\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(Ax = b) \}$$

— объединенное множество решений интервальной системы линейных алгебраических уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

В отношении $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ставится задача *внешнего интервального оценивания*:

найти брус $\mathbf{U} \subset \mathbb{R}^n$, такой что $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \subseteq \mathbf{U}$.

В данной задаче нас интересует \mathbf{U} , который оценивает Ξ_{uni} извне наиболее точно или наиболее близок к Ξ_{uni} в некотором смысле. Здесь и далее *брусом* мы называем подмножество \mathbb{R}^n , которое является декартовым произведением n интервалов.

Предположим, что на коэффициенты вещественных систем, решения которых образуют Ξ_{uni} , наложены некоторые условия связи. Например, если мы наложим условие, что рассматриваем только системы с симметричными матрицами $A \in \mathbf{A}$, то получим *интервальную симметричную линейную систему*. Объединенное множество решений этой системы будет иметь вид:

$$\Xi_{sym}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(A = A^T \text{ и } Ax = b) \}.$$

Условие “ $A = A^T$ ” представляет собой частный случай линейной связи типа “равенство” на коэффициенты матрицы. Аналогично можно определить системы с другими видами связей. В последние годы появилось ряд работ, посвященных системам со связями, смотрите, например, [2, 3, 1].

Пусть $\Xi_{tie}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ — множество решений некоторой системы со связями. Очевидно, что $\Xi_{tie} \subseteq \Xi_{uni}$. Если включение строгое, то можно ожидать, что $\square \Xi_{tie} \subset \square \Xi_{uni}$, где “ \square ” обозначает интервальную оболочку множества. Действительно, для множеств решений симметричных систем приведены примеры (см. [3]) когда это выполняется. Возникает вопрос:

Каким образом учесть условия связи на коэффициенты системы, чтобы повысить точность внешней оценки для Ξ_{tie} ?

Для решения внешней задачи в классической постановке без связей широко применяется *интервальный метод Гаусса* (см., например, [7]). Этот метод является обобщением на интервальный случай известного метода Гаусса для решения линейных алгебраических систем с вещественными коэффициентами. Основой интервального метода Гаусса является *интервальная арифметика*, которая страдает от так называемой “проблемы зависимости”. В интервальной арифметике нет средств для учета взаимосвязи между аргументами арифметических операций — любая такая взаимосвязь этой арифметикой попросту отбрасывается. Поэтому связь коэффициентов, даже такую тривиальную как $a_{ij} = a_{ji}$ для симметричных матриц, в интервальном методе Гаусса учесть нельзя. Из равенства интервалов $\mathbf{a}_{ij} = \mathbf{a}_{ji}$ не обязательно следует, что $a_{ij} = a_{ji}$ для любых $a_{ij} \in \mathbf{a}_{ij}$, $a_{ji} \in \mathbf{a}_{ji}$.

Возникает идея применить в методе Гаусса некоторый другой метод оценивания или некоторую другую арифметику, в которой проблема зависимости либо отсутствует, либо проявляется менее сильно, чем в интервальной арифметике. В следующих разделах мы описываем такой метод.

2 Основные понятия и обозначения

2.1 Области значений и связи

Мы различаем понятия “*переменная*” и “*значение переменной*”. Для обозначения переменных мы будем использовать символы в стиле `mathsf` ($\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \dots$), а для обозначения конкретных (частных) значений этих переменных обычные символы (x, y, z, u, \dots). Интервальные объекты традиционно обозначаются символами $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{A}, \dots$ (см. [6]).

Определение 1. *Областью значений переменной* называется множество всех значений, которые переменная может принимать в условиях данного вопроса. Область значений произвольной переменной x мы будем обозначать через $\text{gap } x$.

Пусть дана переменная x . Обозначим $D = \text{gap } x$. Тогда для любого частного значения x переменной x всегда выполняется $x \in D$. В таком случае, вместо, например, записей вида “ $(\exists x \in D)$ ” или “ $(\forall x \in D)$ ”, можно писать более коротко: “ $(\exists x)$ ” или “ $(\forall x)$ ”.

Пусть у нас есть n переменных x_1, x_2, \dots, x_n и для любого i от 1 до n выполняется $\text{gap } x_i \subseteq M_i$. На эти переменные могут наложены некоторые *связи*. В общем случае под связью на переменные x_1, x_2, \dots, x_n мы понимаем формулу вида

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где

$$T: M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n \rightarrow \{\text{л}, \text{и}\}$$

есть некоторый предикат, принимающий значения “л” (ложь) или “и” (истина). Мы допускаем связи на одну переменную, например вида “ $x \in [0, 1]$ ”, “ $x > 100$ ” и т.д. Мы предполагаем, что несколько связей соединяются логическим союзом “и” (“&”). Например, связи $T_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $T_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ эквивалентны одной связи

$$T_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \& T_2(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Запишем множество всех связей на переменные x_1, x_2, \dots, x_n в виде одной связи $T(x_1, x_2, \dots, x_n)$, которую мы будем называть *совокупной связью* на переменные x_1, x_2, \dots, x_n .

Совокупная связь $T(x_1, x_2, \dots, x_n)$ сопоставляет кортежу переменных (x_1, x_2, \dots, x_n) множество D , состоящее из всех элементов области истинности предиката T . Назовем это множество *совместной областью значений переменных* x_1, x_2, \dots, x_n или *областью значений кортежа переменных* (x_1, x_2, \dots, x_n) . Частное значение кортежа (x_1, x_2, \dots, x_n) мы будем записывать через (x_1, x_2, \dots, x_n) . Таким образом, если D — совместная область значений переменных x_1, x_2, \dots, x_n , то всегда выполняется $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$, или, что то же самое,

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{и.}$$

Область значений кортежа переменных (x_1, x_2, \dots, x_n) мы также будем обозначать $\text{ran}(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Введем следующие обозначения, которые понадобятся нам в дальнейшем. Пусть $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_s)$ — кортеж из произвольных объектов длины s и $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq s$. Обозначим

$$\text{пр}_{i_1, i_2, \dots, i_k} \alpha = (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k})$$

— *проекция кортежа* α на оси с номерами i_1, i_2, \dots, i_k . Пусть множество A состоит из кортежей длины s . Обозначим

$$\text{пр}_{i_1, i_2, \dots, i_k} A = \{ \text{пр}_{i_1, i_2, \dots, i_k} \alpha \mid \alpha \in A \}$$

— *проекция множества* A на оси с номерами i_1, i_2, \dots, i_k .

Совокупная связь на последовательность переменных определяет совокупные связи на любые её подпоследовательности. Используя введенные выше обозначения, легко показать, что если D есть область значений кортежа переменных (x_1, x_2, \dots, x_n) , то областью значений кортежа $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})$, где $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, будет множество $D' = \text{пр}_{i_1, i_2, \dots, i_k} D$. В частности, областью значений каждой переменной x_i будет множество $\text{пр}_i D$.

Переменную, область значений которой содержится в \mathbb{R} , назовем *одномерной вещественной величиной*.

Пусть даны одномерные вещественные величины x_1, x_2, \dots, x_n . Совместной областью значений этих величин будет некоторое множество D из \mathbb{R}^n . Обозначим $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Будем говорить, что переменная x является *n -мерной вещественной величиной*. Областью значений x будет множество D . Также будет выполняться

$$\text{ran пр}_{i_1, i_2, \dots, i_k} x = \text{пр}_{i_1, i_2, \dots, i_k} \text{ran } x$$

для любых осей $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$.

Когда размерность величин ясна из контекста или не имеет значения, одномерные или многомерные вещественные величины мы будем называть просто *величинами*.

Под *выражением* мы понимаем формулу вида $f(x)$, где x — величина и $f: \text{ran } x \rightarrow \mathbb{R}^m$ для некоторого натурального m .

Областью значений выражения $f(x)$ мы будем называть множество

$$\text{ran } f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{ y \mid (\exists x)(y = f(x)) \}.$$

Пусть дана n -мерная величина $x = (x_1, \dots, x_n)$ и k -мерная величина $y = (y_1, \dots, y_k)$. Из величин x и y можно составить кортеж (x, y) . Мы полагаем по определению, что

$$(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k).$$

Таким образом,

$$\text{ran}(x, y) = \text{ran}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k) \subset \mathbb{R}^{n+k}.$$

2.2 Зависимость

Для любых величин x и y всегда имеет место включение $\text{ran}(x, y) \subseteq \text{ran } x \times \text{ran } y$.

Определение 2. Будем говорить, что две величины (простые или многомерные) x и y *независимы друг от друга*, если имеет место равенство:

$$\text{ran}(x, y) = \text{ran } x \times \text{ran } y.$$

Иначе x и y назовем *зависимыми друг от друга* или *связанными друг с другом* (см. [1]).

Независимые друг от друга x и y имеют то свойство, что записи “ $(\exists(x, y))$ ” и “ $(\exists x)(\exists y)$ ” эквивалентны. Кроме того, проекции x и y на любые их оси также независимы друг от друга, т.е.

$$\begin{aligned} \text{ran}(\text{пр}_{i_1, \dots, i_k} x, \text{пр}_{j_1, \dots, j_s} y) &= \text{ran } \text{пр}_{i_1, \dots, i_k} x \times \text{ran } \text{пр}_{j_1, \dots, j_s} y = \\ &= \text{пр}_{i_1, \dots, i_k} \text{ran } x \times \text{пр}_{j_1, \dots, j_s} \text{ran } y. \end{aligned}$$

Термин “зависимость” в применении к переменным иногда используется в безотносительном смысле. Например, говорят “независимая переменная x ” или “зависимая переменная y ”. Мы также будем использовать эти термины.

Определение 3. *Независимой переменной* мы будем называть переменную, область значений которой задана заранее и не определяется зависимостями, которые имеет данная переменная с любыми другими переменными. Иначе переменную будем называть *зависимой переменной*.

Тогда, если мы имеем, например, $y = f(x)$ и $\text{ran } x = [-2, 4]$, то x будет независимой переменной, а y — зависимой. Но если задано $y = f(x)$ и $\text{ran } y = \{-3, 6, 8\}$, то уже y будет независимой переменной. И в том и в другом случае, если f не константа на $\text{ran } x$, то x и y зависимы друг от друга.

Замечание. Из определения 3 следует, что любые две независимые переменные x и y независимы друг от друга. Это означает, что независимая переменная не может иметь два различных имени, т.е. нельзя сказать “независимая переменная x и независимая переменная y и $x = y$ ”.

Будем говорить, что x и y *эквивалентны в глобальном смысле*, если $\text{ran } x = \text{ran } y$. Если также выполняется связь $x = y$, то величины x и y будем называть *эквивалентными в функциональном смысле* или просто *эквивалентными*. Легко показать, что x и y эквивалентны в функциональном смысле тогда и только тогда, когда $\text{ran}(x - y) = \{0\}$.

Пример 1. Пусть даны одномерные величины x, y, z и выполняется $\text{ran } x = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, $y = x^2$ и $z = x^3$. Тогда $\text{ran } y = \text{ran } z = [0, 1]$, но $\text{ran}(y - z) = \text{ran } x^2(1 - x) \neq \{0\}$, так как, например, $0.5 \in \text{ran } x^2(1 - x)$. Таким образом, y и z эквивалентны в глобальном смысле, но не эквивалентны в функциональном.

2.3 Внешние оценки

Определение 4. Величину y назовем *внешней оценкой* для величины x , если выполняется $\text{ran } x \subseteq \text{ran } y$. В этом случае мы также будем говорить, что y *оценивает* x *извне*.

Замечание. Обычно термин “внешняя оценка” употребляется в применении к множествам. Говорят, что множество A является внешней оценкой для множества B , если $B \subseteq A$. Мы получим этот случай, если положим $\text{ran } y = A$ и $\text{ran } x = B$. С другой стороны, в определенных условиях мы можем, например, сказать, что $f(x) + g(x, y)$ является внешней оценкой для $h(x, y)$ для некоторых величин x, y и функций f, g, h . В случае с множествами такое невозможно.

Если $\text{ran } x \subseteq \text{ran } y$ и величины x и y имеют размерность $n > 1$, то для любых осей $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ всегда выполняется $\text{ran } \text{pr}_{i_1, i_2, \dots, i_k} x \subseteq \text{ran } \text{pr}_{i_1, i_2, \dots, i_k} y$. Это следует из того, что $\text{ran } \text{pr}_{i_1, i_2, \dots, i_k} x = \text{pr}_{i_1, i_2, \dots, i_k} \text{ran } x$ и $\text{ran } \text{pr}_{i_1, i_2, \dots, i_k} y = \text{pr}_{i_1, i_2, \dots, i_k} \text{ran } y$ и из свойств проекций. Таким образом, оценка для величины автоматически порождает оценку для любой ее проекции.

Очевидно, что если $\text{ran } x \subseteq \text{ran } y$, то $\text{ran } f(x) \subseteq \text{ran } f(y)$ для любой функции f , определенной на $\text{ran } y$.

3 Интервальные величины

При построении внешних оценок мы будем использовать переменные специального вида. Простейшими из них являются так называемые “интервальные величины”.

Определение 5. *Интервальной величиной* назовем независимую величину, областью значений которой является брус в соответствующем пространстве.

Таким образом, если x — n -мерная интервальная величина, то $\text{ran } x = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ для некоторых интервалов $[a_i, b_i] \subset \mathbb{R}$.

Условие независимости интервальной величины отражает тот факт, что ее область значений является конкретным, определенным множеством и есть простой способ это множество описать. Фактически, мы сначала задаем некоторый брус и после этого сопоставляем ему переменную, которая изменяется в пределах этого бруса. Если область значений величины строится по другому, то такую величину мы не будем считать интервальной величиной. Например, пусть x — одномерная интервальная величина, т.е. $\text{ran } x$ есть интервал из \mathbb{R} , и дана функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, определенная и непрерывная на $\text{ran } x$. Тогда областью значений величины $y = f(x)$ также будет интервал, но в нашем понимании y не будет являться интервальной величиной.

Все компоненты многомерной интервальной величины независимы друг от друга. Область значений проекции интервальной величины на любые оси является брусом. Совместная область значений нескольких различных интервальных величин также является брусом (см. замечание к определению 3).

Для любого натурального n и для любого бруса $B \in \mathbb{R}^n$ мы предполагаем возможность введения *новой* интервальной величины var , такой что $\text{ran } \text{var} = B$. Здесь “ var ” есть некоторое новое, не использованное нами ранее имя.

Пусть дана произвольная величина x . Интервальную величину \tilde{x} , оценивающую x извне, назовем *интервальной оценкой величины* x .

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $\text{ran } x$ — связное компактное множество в \mathbb{R}^n для некоторого n . Тогда $\text{ran } x_i$ для любого i будет интервалом. Интервальную оценку \tilde{x}' для величины x , такую что $\text{ran } \tilde{x}' = \text{ran } x_1 \times \dots \times \text{ran } x_n$ будем называть *наилучшей интервальной оценкой величины x* . Такую \tilde{x}' также называют *интервальной оболочкой для x* . Вообще говоря, интервальную оболочку можно определить для любой величины с ограниченной областью значений.

4 Аффинные величины

Определение 6. *Одномерной аффинной величиной*, назовем величину x вида:

$$x = a_0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \dots + a_s\varepsilon_s,$$

где все $a_i \in \mathbb{R}$, ε_i — одномерные интервальные величины, такие что $\text{ran } \varepsilon_i = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$, и $a_i \neq 0$ при $i > 0$.

Кортеж из любых n одномерных аффинных величин назовем *n -мерной аффинной величиной*.

Так как любой коэффициент a_i перед ε_i в записи x не равен 0, то x и ε_i для любого i зависят друг от друга. По определению интервальной величины, ε_i — независимая величина, поэтому мы также будем говорить, что x *зависит от ε_i* . Множество интервальных величин, от которых зависит величина x , назовем *множеством зависимости аффинной величины x* .

Любую n -мерную аффинную величину x можно представить в виде: $x = L(\varepsilon)$, где $\text{ran } \varepsilon = [-1, 1] \times \dots \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^k$ для некоторого k и L — линейное отображение из \mathbb{R}^k в \mathbb{R}^n . Областью значений x будет многогранник в \mathbb{R}^n , который также называют *зонотопом*. Область значений проекции x на любые оси также будет зонотопом.

Пусть аффинная x зависит от $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ и i -я компонента x имеет вид:

$$x_i = a_{i0} + a_{i1}\varepsilon_{j_{i1}} + a_{i2}\varepsilon_{j_{i2}} + \dots + a_{ik_i}\varepsilon_{j_{ik_i}},$$

где $\varepsilon_{j_{i1}}, \dots, \varepsilon_{j_{ik_i}}$ есть некоторая зависящая от i подпоследовательность последовательности $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$. Тогда для области значений x_i мы будем иметь:

$$\text{ran } x_i = [a_{i0} - \sum_{l=1}^{k_i} |a_{il}|, a_{i0} + \sum_{l=1}^{k_i} |a_{il}|].$$

Это дает нам возможность легко строить наилучшую интервальную оценку для аффинной величины x .

Наоборот, для любой интервальной величины y всегда можно построить такую аффинную величину x , что $\text{ran } x = \text{ran } y$. Для этого, например, можно сопоставить каждой интервальной компоненте $y_i = \text{pr}_i y$ аффинную величину $x_i = \text{mid}(\text{ran } y_i) + \text{rad}(\text{ran } y_i)\varepsilon_i$, где $\text{mid}(\cdot)$ и $\text{rad}(\cdot)$ обозначают середину и радиус интервала.

Аффинную величину \hat{x} , оценивающую некоторую величину x извне, назовем *аффинной оценкой величины x* .

5 Построение внешних оценок

Классическую задачу *внешнего интервального оценивания* в нашей терминологии можно переформулировать так:

$$\begin{aligned}
 &\text{Даны величина } x, \text{ внешняя интервальная оценка } \tilde{x} \text{ для } x \text{ и функция } f, \text{ определенная на } \text{ran } x. \\
 &\text{Найти внешнюю интервальную оценку } \tilde{y} \text{ для величины } y = f(x).
 \end{aligned} \tag{1}$$

В задаче (1) нас интересует получение наиболее точной, в идеале наилучшей, интервальной оценки при имеющихся вычислительных возможностях. Точность внешней оценки мы понимаем в двух смыслах: в глобальном (теоретико-множественном) смысле и в функциональном смысле. Пусть h — хаусдорфова метрика в \mathbb{R}^n . По определению, для любых двух компактных множеств $A, B \subset \mathbb{R}^n$,

$$h(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} \max \left\{ \max_{a \in A} \min_{b \in B} \|a - b\|, \max_{b \in B} \min_{a \in A} \|a - b\| \right\},$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма в \mathbb{R}^n . Метрика h порождает хаусдорфову метрику (точнее псевдометрику) ρ_H на множестве величин. Для любых величин u, v одной размерности:

$$\begin{aligned}
 \rho_H(u, v) &\stackrel{\text{def}}{=} h(\text{ran } u, \text{ran } v) = \\
 &= \max \left\{ \max_u \min_v \|u - v\|, \max_v \min_u \|u - v\| \right\}.
 \end{aligned}$$

Напомним, что u и v мы понимаем как частные значения переменных u и v , а запись вида “ $\max_u \dots$ ” означает “ $\max_{u \in \text{ran } u} \dots$ ”. Для ρ_H не выполняется аксиома:

$$\rho_H(u, v) = 0 \Rightarrow u = v.$$

Метрика ρ_H отражает близость величин в глобальном смысле, т.е. близость их областей значений. Близость величин в функциональном смысле отражает метрика

$$\rho(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\text{ran}} \|u - v\| = \max_{(u, v)} \|u - v\|$$

— *равномерная метрика*. Для простоты мы полагаем, что множества $\text{ran } u$, $\text{ran } v$ и $\text{ran}(u, v)$ замкнуты, т.е. метрики ρ_H и ρ определены.

При поиске интервальной оценки \tilde{y} для y в задаче (1) можно стремиться минимизировать расстояния $\rho_H(y, \tilde{y})$ или $\rho(y, \tilde{y})$, которые мы назовем соответственно *хаусдорфовой* и *функциональной* погрешностями оценки. Заметим, что так как $\text{ran } y \subseteq \text{ran } \tilde{y}$, то $\rho_H(y, \tilde{y})$ будет иметь более простой вид:

$$\rho_H(y, \tilde{y}) = \max_{\tilde{y}} \min_y \|\tilde{y} - y\|.$$

Из независимости интервальной \tilde{y} от y , для функциональной погрешности мы будем иметь

$$\rho(y, \tilde{y}) = \max_{(y, \tilde{y})} \|y - \tilde{y}\| \geq \text{diam}(\text{ran } y), \tag{2}$$

где $\text{diam}(\cdot)$ обозначает диаметр множества.

В классическом интервальном анализе обычно стараются минимизировать расстояние ρ_H . Кроме того, из свойства (2) следует, что при использовании интервальных оценок наша способность влиять на погрешность $\rho(y, \tilde{y})$ сильно ограничена. Как мы увидим далее, часто бывает выгодней минимизировать именно функциональную погрешность $\rho(y, \tilde{y})$. Для этого нам придется использовать другой класс оценивающих величин.

Для рациональной функции f простейшим способом решения задачи (1) является использование специализированной “оценивающей” арифметики. Строя оценки в такой арифметике последовательно для каждой величины, мы в итоге получаем оценку для результата.

5.1 Интервальная арифметика

Допустим, что нам известна интервальная оценка \tilde{u} для некоторой величины u . Задача внешнего интервального оценивания для рациональных функций будет решена, если имея оценку \tilde{u} для u мы сможем вычислить также интервальную оценку для величины $(u, x \star y)$, где x, y — некоторые одномерные компоненты u и “ \star ” — одна из арифметических операций $\{+, -, *, /\}$.

Пусть $(x, y) = \text{pr}_{i,j} u$ для некоторых осей i, j . Выберем из оценки \tilde{u} соответствующие компоненты $(\tilde{x}, \tilde{y}) = \text{pr}_{i,j} \tilde{u}$. Предположим, что операция “ \star ” определена на $\text{ran}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \text{ran} \tilde{x} \times \text{ran} \tilde{y}$. Это выполняется всегда, кроме случая когда “ \star ” есть операция деления “/” и $0 \in \text{ran} \tilde{y}$. Областью значений $\tilde{x} \star \tilde{y}$ является интервал из \mathbb{R} :

$$\text{ran} \tilde{x} \star \tilde{y} = \left[\min_{(\tilde{x}, \tilde{y})} \tilde{x} \star \tilde{y}, \max_{(\tilde{x}, \tilde{y})} \tilde{x} \star \tilde{y} \right].$$

Выберем такую новую интервальную величину \tilde{z} , что $\text{ran} \tilde{z} = \text{ran} \tilde{x} \star \tilde{y}$. Так как \tilde{u} оценивает u и \tilde{z} независима, то гарантированно выполняется:

$$\text{ran}(u, x \star y) \subseteq \text{ran}(\tilde{u}, \tilde{x} \star \tilde{y}) \subseteq \text{ran} \tilde{u} \times \text{ran} \tilde{x} \star \tilde{y} = \text{ran}(\tilde{u}, \tilde{z}).$$

Таким образом, мы построили *внешнюю интервальную оценку* (\tilde{u}, \tilde{z}) для величины $(u, x \star y)$.

При вычислении \tilde{z} мы используем только величины \tilde{x}, \tilde{y} и операцию “ \star ”. Процедуру вычисления \tilde{z} можно понимать как бинарную операцию над интервальными величинами \tilde{x} и \tilde{y} .

Определение 7. *Интервальной арифметической операцией*, соответствующей вещественной арифметической операции “ \star ”, назовем бинарную операцию “ \boxtimes ”, которая в применении к любым двум одномерным интервальным величинам v, w дает в результате такую *новую* интервальную величину r , что

$$\text{ran} r = \left[\min_{(v,w)} v \star w, \max_{(v,w)} v \star w \right].$$

Кратко это мы будем записывать так: $r := v \boxtimes w$.

Замечание. В определении 7 мы используем символ присваивания “:=” вместо равенства. Дело в том, что операция “ \boxtimes ” каждый раз порождает новую величину, поэтому она не является однозначной. Если мы последовательно вычислим $r_1 := v \boxtimes w$, $r_2 := v \boxtimes w$, то выполняется $\text{ran} r_1 = \text{ran} r_2$, но, вообще говоря, $r_1 \neq r_2$. В этом смысле интервальная операция отличается от привычного нам понятия “арифметическая операция”, и при выполнении вычислений этот факт нужно учитывать.

Для выражения от интервальных величин $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можно записать ее интервальный аналог. Для этого все операции в f нужно заключить в рамку \square . Если после этого мы выполним все интервальные операции в соответствии с определением 7, то получим внешнюю интервальную оценку для $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Пример 2. Пусть $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ и

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = ((x_1 + x_2 + x_4)/(x_3 - x_1), x_4 * (x_2 - x_1/x_3)),$$

где все x_i — интервальные. Тогда

$$y := ((x_1 \boxplus x_2 \boxplus x_4)/(x_3 \boxminus x_1), x_4 \boxtimes (x_2 \boxminus x_1 \boxdiv x_3))$$

будет внешней интервальной оценкой для $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Интервальная величина $\tilde{z} := \tilde{x} \boxtimes \tilde{y}$ по построению является точной внешней оценкой для $\tilde{x} * \tilde{y}$ в смысле погрешности ρ_H , так как $\rho_H(\tilde{z}, \tilde{x} * \tilde{y}) = 0$. Если принять во внимание картину в целом и предположить, что величины \tilde{x}, \tilde{y} далее опять будут использованы в вычислительном процессе совместно с \tilde{z} , то правильнее будет рассматривать погрешность $\sigma = \rho_H((\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{x} * \tilde{y}))$. Эта погрешность не обязательно равна 0. Например, для операций “+” или “−” можно вычислить, что

$$\sigma = \frac{\text{wid}(\text{ran } \tilde{x}) + \text{wid}(\text{ran } \tilde{y})}{\sqrt{3}},$$

где $\text{wid}(\cdot)$ обозначает ширину интервала. Для операций “*”, “/” можно получить похожие соотношения для погрешности σ . Этот факт является источником упомянутой ранее “проблемы зависимости”. Ненулевая погрешность σ на каждом, за исключением тривиальных случаев, шаге приводит к тому, что погрешность результирующей интервальной оценки может быть очень велика.

Вычислим функциональную погрешность $\rho(\tilde{z}, \tilde{x} * \tilde{y})$. Так как $\text{ran } \tilde{z} = \text{ran } \tilde{x} * \tilde{y}$ и из того, что \tilde{z} не зависит от $\tilde{x} * \tilde{y}$ получим:

$$\gamma = \rho(\tilde{z}, \tilde{x} * \tilde{y}) = \max \text{ran } |\tilde{z} - \tilde{x} * \tilde{y}| = \text{wid}(\text{ran } \tilde{z}) = \text{wid}(\text{ran}(\tilde{x} * \tilde{y})).$$

Погрешность γ связана с σ . Например, можно показать, что

$$\text{wid}(\text{ran}(\tilde{x} \pm \tilde{y})) = \text{wid}(\text{ran } \tilde{x}) + \text{wid}(\text{ran } \tilde{y}).$$

Т.е. для операций “+”, “−” выполняется $\sigma = \gamma/\sqrt{3}$. Для операций “*”, “/” в большинстве случаев $\sigma > \gamma/\sqrt{3}$. Если нам удастся уменьшить функциональную погрешность $\rho(\tilde{z}, \tilde{x} * \tilde{y})$, то мы тем самым уменьшим хаусдорфову погрешность $\rho_H((\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{x} * \tilde{y}))$.

5.2 Аффинная арифметика

Для построения внешних оценок можно использовать аффинные величины. Допустим, что нам известна аффинная оценка \hat{u} для некоторой величины u . Пусть x, y — некоторые одномерные компоненты u и “*” — одна из арифметических операций $\{+, -, *, /\}$.

Пусть, как и в секции 5.1, для некоторых осей i, j выполняется $(x, y) = \text{pr}_{i,j} u$, $(\hat{x}, \hat{y}) = \text{pr}_{i,j} \hat{u}$ и операция “*” определена на $\text{ran}(\hat{x}, \hat{y})$.

Заметим, что для любых вещественных чисел a, b, c величина $p(\hat{x}, \hat{y}) = a\hat{x} + b\hat{y} + c$ является аффинной величиной. Обозначим $\mathbf{t} = \hat{x} \star \hat{y} - p(\hat{x}, \hat{y})$ и $\delta = \max \text{ran } |\mathbf{t}|$. Введем новую интервальную величину ε , такую что $\text{ran } \varepsilon = [-1, 1]$. Тогда $\text{ran } \mathbf{t} \subseteq \text{ran } \delta\varepsilon = [-\delta, \delta]$, и из независимости ε будем иметь

$$\begin{aligned} \text{ran}(\mathbf{u}, \mathbf{x} \star \mathbf{y}) &\subseteq \text{ran}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{x} \star \hat{y}) = \text{ran}(\hat{\mathbf{u}}, p(\hat{x}, \hat{y}) + \mathbf{t}) \subseteq \\ &\subseteq \text{ran}(\hat{\mathbf{u}}, p(\hat{x}, \hat{y}) + \delta\varepsilon). \end{aligned}$$

Величина

$$\hat{z} = p(\hat{x}, \hat{y}) + \delta\varepsilon = a\hat{x} + b\hat{y} + c + \delta\varepsilon$$

является аффинной величиной. Поэтому $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{z})$ будет *внешней аффинной оценкой* для $(\mathbf{u}, \mathbf{x} \star \mathbf{y})$.

Вычислим функциональную погрешность оценки \hat{z} :

$$\begin{aligned} \rho(\hat{z}, \hat{x} \star \hat{y}) &= \max \text{ran } |a\hat{x} + b\hat{y} + c + \delta\varepsilon - \hat{x} \star \hat{y}| = \\ &= \max \text{ran } |\delta\varepsilon - \mathbf{t}| = \text{wid}(\text{ran } \delta\varepsilon) = 2\delta. \end{aligned}$$

Напомним, что $\delta = \max \text{ran } |\mathbf{t}|$, поэтому δ можно переписать так:

$$\delta = \max_{(\hat{x}, \hat{y})} |\hat{x} \star \hat{y} - (a\hat{x} + b\hat{y} + c)|.$$

Выбирая подходящим образом числа a, b, c мы сможем уменьшить δ . Тем самым мы уменьшим погрешность $\rho(\hat{z}, \hat{x} \star \hat{y})$. При этом хаусдорфова погрешность $\rho_H(\hat{z}, \hat{x} \star \hat{y})$ может возрасти. Но наша задача состоит в уменьшении совокупной погрешности $\rho_H((\hat{\mathbf{u}}, \hat{z}), (\hat{\mathbf{u}}, \hat{x} \star \hat{y}))$, что мы и достигаем, уменьшая $\rho(\hat{z}, \hat{x} \star \hat{y})$.

Как и в интервальном случае, при построении \hat{z} мы используем только величины \hat{x}, \hat{y} и операцию “ \star ”. Определим соответствующую этому процессу бинарную операцию на множестве аффинных величин.

Определение 8. *Аффинной арифметической операцией*, соответствующей вещественной арифметической операции “ \star ”, назовем бинарную операцию “ $\hat{\star}$ ”, которая в применении к любым двум одномерным аффинным величинам \mathbf{v}, \mathbf{w} дает в результате такую аффинную величину \mathbf{r} , что

$$\mathbf{r} = a\mathbf{v} + b\mathbf{w} + c + \delta\varepsilon,$$

где ε новая интервальная величина, $\text{ran } \varepsilon = [-1, 1]$,

$$\delta = \max_{(\mathbf{v}, \mathbf{w})} |\mathbf{v} \star \mathbf{w} - (a\mathbf{v} + b\mathbf{w} + c)|,$$

и вещественные коэффициенты a, b, c выбираются из условия минимизации δ .

Для таких \mathbf{v}, \mathbf{w} и \mathbf{r} мы будем писать: $\mathbf{r} := \mathbf{v} \hat{\star} \mathbf{w}$.

Аффинная арифметика [4, 9] имеет ряд свойств, которых нет в интервальной арифметике. Если пренебречь ошибками округлений, то умножение на скаляр, сложение и вычитание в аффинной арифметике выполняются с нулевой функциональной погрешностью, т.е. точно. Для любых одномерных аффинных \mathbf{x}, \mathbf{y} имеют место равенства:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \hat{+} \mathbf{y} &= \mathbf{x} + \mathbf{y} \\ \mathbf{x} \hat{-} \mathbf{y} &= \mathbf{x} - \mathbf{y} \\ \mathbf{x} \hat{*} \mathbf{y} &= \mathbf{x} * \mathbf{y} && (\text{если } \text{wid}(\text{ran } \mathbf{x}) = 0 \text{ или } \text{wid}(\text{ran } \mathbf{y}) = 0), \\ \mathbf{x} \hat{/} \mathbf{y} &= \mathbf{x} / \mathbf{y} && (\text{если } \text{wid}(\text{ran } \mathbf{y}) = 0). \end{aligned}$$

Практически во всех остальных случаях операция “ $\hat{\star}$ ” выполняется с ошибкой $\delta > 0$. Если мы в таких условиях вычислим последовательно $r_1 := x \hat{\star} y$, $r_2 := x \hat{\star} y$, то получим две различные, хотя часто сильно зависимые, аффинные величины r_1 и r_2 .

5.3 Интервально-аффинная арифметика

Если в алгоритме вычисления целевой функции f из задачи (1) входные или промежуточные переменные участвуют в различных операциях при вычислении f большое число раз, то аффинная арифметика дает ощутимое повышение точности внешних оценок по сравнению с интервальной. Но бывают случаи когда на некоторых этапах алгоритма выгоднее использовать именно интервальную арифметику. Например, если в процессе построения оценки для $f(x)$ нужно вычислить внешнюю оценку z_{out} для некоторой величины $z = u \star v$ и известно, что переменные u и v далее в вычислении f не участвуют, то обычно не имеет смысла стремиться уменьшить функциональную погрешность оценки z_{out} . Достаточно минимизировать $\rho_H(z, z_{out})$, что и делает интервальная арифметика.

Ниже мы строим арифметику, которая сочетает в себе возможности интервальной и аффинной арифметик. Эта арифметика не использует интервальные или аффинные операции (определения 7, 8), но построена на тех же принципах.

Пусть дана некоторая величина u . Пару $\{\tilde{u}, \hat{u}\}$, где \tilde{u} и \hat{u} — интервальная и аффинная оценки величины u , будем называть внешней *интервально-аффинной* или *смешанной* оценкой величины u . Пару $\{\tilde{u}, \hat{u}\}$ мы также будем называть *интервально-аффинной величиной*.

Так как $\text{ran } u \subseteq \text{ran } \tilde{u}$ и $\text{ran } u \subseteq \text{ran } \hat{u}$, то $\text{ran } u \subseteq \text{ran } \tilde{u} \cap \text{ran } \hat{u}$. В двумерном случае картина будет как на рисунке 1.

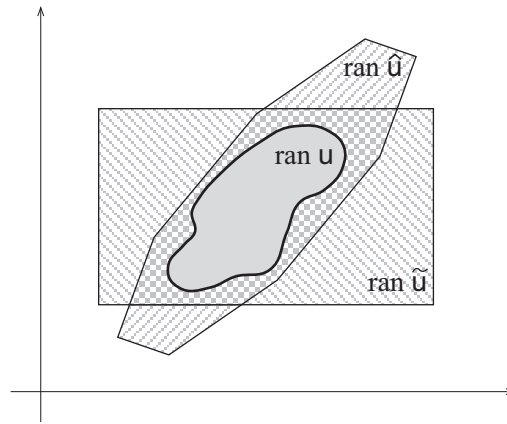


Рис. 1: Интервально-аффинная оценка u в \mathbb{R}^2 .

Пусть $(x, y) = \text{pr}_{i,j} u$, $(\tilde{x}, \tilde{y}) = \text{pr}_{i,j} \tilde{u}$, $(\hat{x}, \hat{y}) = \text{pr}_{i,j} \hat{u}$ для некоторых осей i, j и операция “ \star ” $\in \{+, -, *, /\}$ определена на множестве $D = \text{ran}(\tilde{x}, \tilde{y}) \cap \text{ran}(\hat{x}, \hat{y})$.

Вычислим интервально-аффинную оценку для $(u, x \star y)$. Интервальная составляющая легко вычисляется. Это такая новая интервальная \tilde{z} , что

$$\text{ran } \tilde{z} = \left[\min_{(\alpha, \beta) \in D} \alpha \star \beta, \max_{(\alpha, \beta) \in D} \alpha \star \beta \right].$$

В качестве аффинной составляющей выберем

$$\hat{z} = a\hat{x} + b\hat{y} + c + \delta\varepsilon,$$

где $a, b, c \in \mathbb{R}$, ε — новая интервальная величина, $\text{ran } \varepsilon = [-1, 1]$ и

$$\delta = \max_{(\alpha, \beta) \in D} |\alpha \star \beta - (a\alpha + b\beta + c)|.$$

Можно показать, что $\{(\tilde{u}, \tilde{z}), (\hat{u}, \hat{z})\}$ будет интервально-аффинной оценкой для $(u, x \star y)$.

В итоге задача сводится к поиску таких вещественных a, b, c , которые минимизируют δ . Это задача поиска *наилучшего линейного чебышевского приближения функции* $f(\alpha, \beta) = \alpha \star \beta$ на области D . Так как для операций “+” и “−” функция $f(\alpha, \beta)$ уже линейна, то такую задачу нужно решать только для операций “*” и “/”.

Учитывая простой вид множества D , можно найти близкое к наилучшему линейное приближение для $\alpha \star \beta$ за время порядка $O(n)$, где n — суммарное число элементов в множествах зависимости аффинных \hat{x} и \hat{y} (см. раздел 4). Задача нахождения наилучшего приближения для $\alpha \star \beta$ на D за время, сравнимое с $O(n)$ открыта.

Процедуру вычисления оценки $\{\tilde{z}, \hat{z}\}$ назовем *интервально-аффинной операцией* “ $\hat{\boxplus}$ ”, соответствующей арифметической операции “*” и будем писать $\{\tilde{z}, \hat{z}\} := \{\tilde{x}, \hat{x}\} \hat{\boxplus} \{\tilde{y}, \hat{y}\}$. Алгоритм вычисления операции $\hat{\boxplus}$:

Вход

Смешанные оценки $\{\tilde{x}, \hat{x}\}, \{\tilde{y}, \hat{y}\}$, операция “*”.

Выход

$\{\tilde{z}, \hat{z}\} := \{\tilde{x}, \hat{x}\} \hat{\boxplus} \{\tilde{y}, \hat{y}\}$.

Алгоритм

строим множество $D = \text{ran}(\tilde{x}, \tilde{y}) \cap \text{ran}(\hat{x}, \hat{y})$;

вычисляем \tilde{z} такую, что $\text{ran } \tilde{z} = \left[\min_{(\alpha, \beta) \in D} \alpha \star \beta, \max_{(\alpha, \beta) \in D} \alpha \star \beta \right]$;

находим линейное приближение $a\alpha + b\beta + c$ для $\alpha \star \beta$ на D ;

вычисляем ошибку приближения $\delta = \max_{(\alpha, \beta) \in D} |a\alpha + b\beta + c - \alpha \star \beta|$;

конструируем $\hat{z} = a\hat{x} + b\hat{y} + c + \delta\varepsilon$, где ε новая интервальная величина, $\text{ran } \varepsilon = [-1, 1]$.

6 Интервально-аффинный метод Гаусса

Рассмотрим интервальную систему линейных уравнений $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$, где $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{IR}^{n \times n}$, $\mathbf{b} = (b_i) \in \mathbb{IR}^n$.

Задачу интервального оценивания множества решений $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ можно переписать в другом виде, используя введенное нами понятие “интервальной величины”. Напомним, что “одномерной величиной” мы называем переменную, которая принимает значения из \mathbb{R} . Соответственно, “одномерной интервальной величиной” мы называем независимую переменную, областью значений которой является интервал. По другому можно сказать, что “одномерная интервальная величина” это независимая переменная, *изменяющаяся в пределах* некоторого интервала.

Сопоставим интервалам a_{ij}, b_i интервальные величины $\tilde{a}_{ij}, \tilde{b}_i$, такие что $\text{ran } \tilde{a}_{ij} = a_{ij}, \text{ran } \tilde{b}_i = b_i$. Пусть $\tilde{\mathbf{A}} = (\tilde{a}_{ij})$ и $\tilde{\mathbf{b}} = (\tilde{b}_i)$. Матрицу $\tilde{\mathbf{A}}$ и вектор $\tilde{\mathbf{b}}$ можно понимать как величины со значениями в $\mathbb{R}^{n \times n}$ и в $\mathbb{R}^{n \times 1} \stackrel{def}{=} \mathbb{R}^n$, такие что $\text{ran } \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$ и $\text{ran } \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$.

Пусть x — величина со значениями в \mathbb{R}^n , связанная с $\tilde{\mathbf{A}}$ и $\tilde{\mathbf{b}}$ тем соотношением, что $\tilde{\mathbf{A}}x = \tilde{\mathbf{b}}$. Область значений x будет иметь вид:

$$\text{ran } x = \{ x \mid (\exists(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{b}}))(\tilde{\mathbf{A}}x = \tilde{\mathbf{b}}) \}. \quad (3)$$

Интервальные $\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{b}}$ независимы, поэтому вместо “ $(\exists(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{b}}))$ ” можно писать “ $(\exists\tilde{\mathbf{A}})(\exists\tilde{\mathbf{b}})$ ”. Если использовать стандартную нотацию, то (3) можно переписать в виде:

$$\text{ran } x = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists\tilde{\mathbf{A}} \in \text{ran } \tilde{\mathbf{A}})(\exists\tilde{\mathbf{b}} \in \text{ran } \tilde{\mathbf{b}})(\tilde{\mathbf{A}}x = \tilde{\mathbf{b}}) \}.$$

Таким образом,

$$\text{ran } x = \Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}).$$

Это означает, что если у нас есть некоторый метод решения *вещественной* системы $\tilde{\mathbf{A}}x = \tilde{\mathbf{b}}$ относительно x , то выполнив его, например, в интервальной арифметике, мы получим интервальную оценку \tilde{x} для x . Тем самым мы получим интервальную оценку для множества $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Построим такие матрицу $\hat{\mathbf{A}} = (\hat{a}_{ij})$ и вектор $\hat{\mathbf{b}} = (\hat{b}_i)$, состоящие из аффинных величин, что $\text{ran}(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{b}}) = \text{ran}(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{b}})$. Все элементы $\tilde{\mathbf{A}}$ и $\tilde{\mathbf{b}}$ независимы друг от друга, поэтому элементы $\hat{\mathbf{A}}$ и $\hat{\mathbf{b}}$ также независимы друг от друга.

Предположим, что $\text{ran } \tilde{a}_{ij} = \text{ran } \tilde{a}_{ji}$ для любых $1 \leq i, j \leq n$, т.е. интервальная матрица \mathbf{A} симметрична. Тогда для аффинной $\hat{\mathbf{A}}$ также выполняется $\text{ran } \hat{a}_{ij} = \text{ran } \hat{a}_{ji}$ для любых i, j . Выполним следующую процедуру: для всех $1 \leq i < j \leq n$ присвоим $\hat{a}_{ji} := \hat{a}_{ij}$. После этого мы будем иметь $\hat{a}_{ji} = \hat{a}_{ij}$ для любых $1 \leq i, j \leq n$. Это свойство присуще именно аффинным величинам. Для интервальных величин равенство $\tilde{a}_{ji} = \tilde{a}_{ij}$ для различных i, j возможно только если $\text{wid}(\tilde{a}_{ij}) = 0$ и $\text{ran } \tilde{a}_{ji} = \text{ran } \tilde{a}_{ij}$, т.е. \tilde{a}_{ij} и \tilde{a}_{ji} есть равные постоянные. После процедуры присваивания мы получим $\text{ran } \hat{\mathbf{A}} \subseteq \text{ran } \tilde{\mathbf{A}}$. Если для каких-либо индексов $i \neq j$ выполняется $\text{wid}(\text{ran } \tilde{a}_{ij}) > 0$, то включение будет строгим.

Пусть величина x' такая, что $\hat{\mathbf{A}}x' = \hat{\mathbf{b}}$. Легко показать, что

$$\text{ran } x' = \Xi_{sym}(\mathbf{A}, \mathbf{b}).$$

Систему $\hat{\mathbf{A}}x' = \hat{\mathbf{b}}$ можно решить тем же методом, что и систему $\tilde{\mathbf{A}}x = \tilde{\mathbf{b}}$. При этом нужно использовать либо аффинную, либо более точную интервально-аффинную арифметику. В результате мы получим оценку для x' , которая тривиальным образом преобразуется в интервальную оценку для множества $\Xi_{sym}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. При решении системы $\hat{\mathbf{A}}x' = \hat{\mathbf{b}}$ мы стартуем с более узкого множества $\text{ran}(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{b}})$, чем множество $\text{ran}(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{b}})$ при решении системы $\tilde{\mathbf{A}}x = \tilde{\mathbf{b}}$. Поэтому можно ожидать, что полученная оценка для $\text{ran } x'$ будет уже, чем оценка для $\text{ran } x$.

Мы рассмотрели случай симметричной системы. Используя подобный подход можно учитывать, частично или полностью, любые выраженные явно связи. Например, для учета связи на элементы матриц $A = (a_{ij}) \in \mathbf{A}$, типа

$$a_{kl} = f(a_{i_1j_1}, a_{i_2j_2}, \dots, a_{i_sj_s}), \quad (4)$$

для некоторых индексов $k, l, \{i_m\}$ и $\{j_m\}$, мы можем выполнить соответствующее присваивание

$$\hat{a}_{kl} := \hat{f}(\hat{a}_{i_1j_1}, \hat{a}_{i_2j_2}, \dots, \hat{a}_{i_sj_s}). \quad (5)$$

Здесь \hat{f} обозначает функцию, полученную из функции f заменой всех операций на аффинные. Для нелинейной функции f величины \hat{a}_{kl} и $f(\hat{a}_{i_1j_1}, \hat{a}_{i_2j_2}, \dots, \hat{a}_{i_sj_s})$ не будут равны, но будут зависимы. Это дает возможность частично учесть связь (4) при построении оценки.

В качестве базового метода решения линейной вещественной системы используем метод Гаусса исключения неизвестных. Реализуем этот метод в интервально-аффинной арифметике с предварительным вычислением связей. Этот метод мы назовем *интервально-аффинным методом Гаусса для систем со связями*. Окончательный псевдокод метода представлен в таблице 1.

Если при решении системы интервально-аффинным методом мы учитываем одно условие симметрии $A = A^T$, то будем называть такой метод *симметричным интервально-аффинным методом Гаусса*.

7 Вычислительные эксперименты

Ниже мы приводим результаты вычислительных экспериментов с симметричными матрицами и с матрицами, которые мы назовем “полукососимметричными”. *Полукососимметричной* матрицей мы называем такую матрицу $A = (a_{ij})$, у которой $a_{ij} = -a_{ji}$ при $i \neq j$. У полукососимметричной матрицы диагональные элементы a_{ii} не обязательно должны быть равны 0.

В каждом из примеров мы решаем интервальные линейные системы с различными типами связей интервально-аффинным методом Гаусса.

Пример 1. Рассмотрим систему 3×3 из [5]

$$\begin{pmatrix} [0.7, 1.3] & [-0.3, 0.3] & [-0.3, 0.3] \\ [-0.3, 0.3] & [0.7, 1.3] & [-0.3, 0.3] \\ [-0.3, 0.3] & [-0.3, 0.3] & [0.7, 1.3] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-14, -7] \\ [9, 12] \\ [-3, 3] \end{pmatrix}.$$

Метод Гаусса дает следующие интервальные оценки для Ξ_{uni} :

связей нет	$a_{ij} = a_{ji}$	$a_{ij} = -a_{ji} (i \neq j)$
$\begin{pmatrix} [-101, 71] \\ [-62.25, 99] \\ [-90, 90] \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} [-101, \underline{64.8}] \\ [-\underline{56.06}, 99] \\ [-90, 90] \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} [-\underline{46.58}, \underline{21.44}] \\ [-\underline{14.98}, \underline{42.03}] \\ [-\underline{31.33}, \underline{31.33}] \end{pmatrix}$

Здесь подчеркнутым помечены изменения оценок в результате учета связей.

Пример 2. Рассмотрим систему из [8]

$$\begin{pmatrix} [15, 17] & [-3, 3.01] & [-3, 3.01] & [-3, 3.01] \\ [-3, 3.01] & [15, 17] & [-3, 2.99] & [-3, 2.99] \\ [-3, 2.99] & [-3, 2.99] & [15, 17] & [-3, 3.01] \\ [-3, 3.01] & [-3, 3.01] & [-3, 2.99] & [15, 17] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-6, -2] \\ [4, 5] \\ [-2, 4] \\ [8, 10] \end{pmatrix}. \quad (6)$$

В интервальном смысле матрица системы (6) не является симметричной или полукососимметричной. Поэтому мы её модифицируем, рассмотрев два случая: $\mathbf{a}_{ji} = \mathbf{a}_{ij}$, ($i < j$) и $\mathbf{a}_{ji} = -\mathbf{a}_{ij}$, ($i < j$).

Таблица 1: Интервально-аффинный метод Гаусса для систем со связями

Вход

Интервальные матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$, вектор $\mathbf{b} \in \mathbb{IR}^n$.
 Множество CS связей вида (4), записанных в некотором виде.

Выход

Интервальный вектор \mathbf{x} — внешняя интервальная оценка
 для множества $\Xi_{tie}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ или сообщение “нет ответа”.

Алгоритм

Пусть $A = (a_{ij})$, $b = (b_i)$ — $n \times n$ -матрица и n -вектор из
 интервально-аффинных величин;
 Конвертируем $\mathbf{A} \rightarrow A$; $\mathbf{b} \rightarrow b$;
 Пересчитываем элементы A в соответствии со связями из CS
 в интервально-аффинной арифметике по аналогии с (5);
for $k := 1$ **to** n **do** { // приводим A к “верхнетреугольному” виду
 $m := k$;
 // ищем разрешающий элемент, mig — мигнитюдера интервала
 for $i := k + 1$ **to** n **do**
 if $mig(\text{ran } a_{ik}) > mig(\text{ran } a_{mk})$ **then** $m := i$;
 if $mig(\text{ran } a_{mk}) = 0$ **then** **ВЫХОД** с сообщением “нет ответа”;
 Меняем местами строки k и m матрицы A и элементы b_k и b_m ;
 for $j := k + 1$ **to** n **do** $a_{kj} := a_{kj} \hat{\square} a_{kk}$;
 $b_k := b_k \hat{\square} a_{kk}$;
 for $i := k + 1$ **to** n **do** { // обнуляем столбец под диагональю
 for $j := k$ **to** n **do** $a_{ij} := a_{ij} \hat{\square} a_{ik} \hat{\square} a_{kj}$;
 $b_i := b_i \hat{\square} a_{ik} \hat{\square} b_k$;
 }
 }
 }
 Пусть x — вектор длины n из интервально-аффинных величин;
for $i := n$ **downto** 1 **do** { // обратная подстановка
 $x_i := b_i$;
 for $j := i + 1$ **to** n **do**
 $x_i := x_i \hat{\square} a_{ij} \hat{\square} x_j$;
 }
 }
 Конвертируем $x \rightarrow \mathbf{x}$;

В первом случае интервально-аффинный метод Гаусса дает:

связей нет	$a_{ij} = a_{ji}$
$\begin{pmatrix} [-1.0313, 0.4958] \\ [-0.3472, 0.9745] \\ [-0.7703, 0.9190] \\ [0.1495, 1.2524] \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} [-1.0312, 0.4363] \\ [-0.2897, 0.9745] \\ [-0.7610, 0.9189] \\ [0.1735, 1.2523] \end{pmatrix}$

Во втором случае мы получаем:

связей нет	$a_{ij} = -a_{ji} (i \neq j)$
$\begin{pmatrix} [-1.0303, 0.4948] \\ [-0.3470, 0.9730] \\ [-0.7708, 0.9170] \\ [0.1495, 1.2510] \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} [-0.8536, 0.3693] \\ [-0.2279, 0.7831] \\ [-0.6104, 0.7370] \\ [0.1672, 0.9932] \end{pmatrix}$

Пример 3 (Случайный тест с симметричными матрицами).

Для заданного порядка n генерировалось N случайных интервальных систем $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ с симметричной \mathbf{A} . Каждая система решалась интервальным, интервально-аффинным и симметричным интервально-аффинным методами Гаусса.

Алгоритм генерации случайной системы:

Вход

n — порядок системы;

$\mathbf{c} = [\underline{\mathbf{c}}, \bar{\mathbf{c}}] \in \mathbb{IR}$, $r_{max} \in \mathbb{R}$ — параметры семейства систем (см. ниже).

Выход

Матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$, вектор $\mathbf{b} \in \mathbb{IR}^n$.

Алгоритм

Для всех i, j , $1 \leq i \leq j \leq n$ вычисляем

$$\mathbf{a}_{ji} := \mathbf{a}_{ij} := \text{rand}(\underline{\mathbf{c}}, \bar{\mathbf{c}}) + [\text{rand}(-r_{max}, 0), \text{rand}(0, r_{max})].$$

Для всех $1 \leq i \leq n$ вычисляем

$$\mathbf{b}_i := \text{rand}(\underline{\mathbf{c}}, \bar{\mathbf{c}}) + [\text{rand}(-r_{max}, 0), \text{rand}(0, r_{max})].$$

Здесь $\text{rand}(\alpha, \beta)$ — функция, возвращающая случайное число, равномерно распределенное на интервале $[\alpha, \beta]$.

Результаты экспериментов для различных n приведены в таблице 2. Параметр \mathbf{c} для всех n выбирался равным $[-10^4, 10^4]$. Таблица состоит из следующих столбцов:

- N — число сгенерированных систем порядка n ;
- $N_{\text{int}}, N_{\text{iaff}}, N_{\text{siaff}}$ — число систем, успешно решенных интервальным, интервально-аффинным и симметричным интервально-аффинным методами Гаусса;
- K_{ave} — среднее отношений диаметров интервальных оценок, полученных интервально-аффинным методом к диаметрам оценок, полученных симметричным методом. K_{ave} вычисляется только по задачам, решенным обоими методами.

Таблица 2: Случайный тест.

n	r_{max}	N	N_{int}	N_{iaff}	N_{siaff}	K_{ave}
5	500	1000	422	652	668	2.21
10	100	200	0	151	156	9.62
15	35	200	0	157	162	4.79
20	23	200	0	124	144	4.30
25	15	50	0	22	26	2.42

Из таблицы 2 видно, что учет связей позволяет увеличить число успешно решенных систем и повысить точность оценок. Характеристика K_{ave} зависит от многих параметров, включая n и r_{max} , поэтому для более качественного анализа изменения точности оценок нужно провести большее количество экспериментов с различными алгоритмами генерации случайных задач.

Таблица также показывает, что классический интервальный метод Гаусса, начиная с размерности $n = 10$ не смог решить ни одну задачу.

В заключение заметим, что ценой за более качественные результаты, которые дает интервально-аффинный метод Гаусса является его высокая трудоемкость, равная порядка $O(n^5)$. Существует ряд приемов уменьшения трудоемкости этого метода за счет некоторого огрубления оценок. Хотя нужно отметить, что интервальные задачи имеют качественно иной уровень по сравнению со своими вещественными аналогами. Поэтому ожидать сравнимой с вещественным случаем трудоемкости интервальных методов не приходится.

Список литературы

- [1] Шарый, С.П.: Решение интервальных линейных систем со связями, *Сибирский Журнал Вычислительной Математики* **7** (2004), No. 4, pp. 363–376.
- [2] Alefeld G., Kreinovich V., Mayer G. On the shape of the symmetric, persymmetric, and skew-symmetric solution set // *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* – 1997. – Vol. 18. – P. 693–705.
- [3] Alefeld, G., Kreinovich, V., Mayer, G.: *On symmetric solution sets*. Computing Supplement 16, Herzberger J., ed. - Wien, New York: Springer, 2003, pp. 1–23.
- [4] Comba, J.L.D., Stolfi, J.: *Affine arithmetic and its applications to computer graphics*. In Proceedings of VI SIBGRAPI, pp. 9–18, 1993.
- [5] Hansen, E.: Bounding the solution of interval linear equations, *SIAM Journal on Numerical Analysis* **29** (1992), No. 5, pp. 1493–1503.
- [6] Kearfott, R.B., Nakao, M.T., Neumaier, A., Rump, S.M., Shary, S.P., van Hentensyck, P.: *Standardized notation in interval analysis*. — A manuscript, downloadable from <http://www.mat.univie.ac.at/~neum/software/int>
- [7] Neumaier, A.: *Interval methods for systems of equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [8] Ning, S. and Kearfott, R. B.: A comparison of some methods for solving linear interval equations, *SIAM Journal on Numerical Analysis* **34** (1997), No. 4, pp. 1289–1305.

- [9] Stolfi, J., L.H. de Figueiredo: *Self-Validated Numerical Methods and Applications*. Notes of 21st Brazilian Mathematics Colloquium, 1997.

Interval-Affine Gaussian algorithm for constrained systems

R.R. Akhmerov

Altai State University, Barnaul
e-mail: arr@ctta.ru

Abstract. The paper presents interval-affine Gaussian algorithm for the interval linear systems $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ subject to some constraints on real matrices A from the interval matrix \mathbf{A} . The interval-affine method is based on the so-called interval-affine arithmetic that allows to take the constraints into account during the computation of interval enclosures of the united solution set of the system $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$, and to make the estimates more accurate.

Key words: interval, affine, arithmetic, linear system, Gaussian algorithm

УПРАВЛЕНИЕ ЗАПАСАМИ С ОГРАНИЧЕННЫМ СРОКОМ ХРАНЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ИНТЕРВАЛЬНОСТИ СПРОСА*

Л.Т. Ащепков, А.В. Милютин

Дальневосточный государственный университет, Владивосток

Описывается линейная модель управления запасами ограниченного срока хранения при неопределенности спроса. С помощью понятия универсального плана проводится редукция модели к детерминированной задаче линейного программирования. Приведены результаты численного эксперимента.

Введение

В работе рассматривается упрощенная однопродуктовая модель управления запасами, разработанная для завода «Владхлеб», гор. Владивосток. По сравнению с классическим вариантом (см, например, [1]) в ней дополнительно учитывается интервальная неопределенность спроса и ограничения на срок хранения продукции. С формальной точки зрения модель можно отнести к интервальным задачам линейного программирования, в которых коэффициенты заранее не определены и принимают любые значения из заданных интервалов. Такое положение характерно, вообще говоря, для многих прикладных задач линейного программирования. Неопределенность коэффициентов и отсутствие информации об их распределении затрудняют применение к задачам хорошо разработанной теории параметрического линейного программирования [2], стохастической оптимизации [3] и требуют разработки других подходов. Один из них, предлагаемый в данной работе, трактует интервальную задачу линейного программирования как параметрическое семейство аналогичных детерминированных задач и базируется на идее нахождения одного «приемлемого» решения для всего семейства задач. Понятие «приемлемости» сочетает точность выполнения ограничений с требованием оптимизации целевой функции в каждой задаче семейства. На этом пути естественно возникают понятия *универсального плана* и *оптимального универсального плана*. Принятый подход позволяет преобразовать интервальную модель управления запасами к разрешимой детерминированной задаче линейного программирования и провести ее численный анализ.

1. Построение модели

В модельном представлении на хлебозаводе ежедневно в течение планового периода производится некоторая кондитерская продукция. После изготовления она доставляется на склад и на следующий день используется для реализации. На складе продукция сортируется по времени хранения и затем отгружается порциями в магазины с таким расчетом, чтобы ее запасы уменьшались с увеличением срока хранения. Спрос на продукцию точно не известен, прогнозируется лишь его верхняя и нижняя оценки. Известны также затраты на хранения и

* Работа выполнена в рамках программы «Университеты России», 2004-2005 гг. (грант УР 03.01.001).

производство единицы продукции. Задача состоит в нахождении плана производства, который обеспечивал бы удовлетворение неопределенного (в пределах оценок) спроса при минимальных издержках на хранение и производство продукции.

Для формализации задачи будем использовать обозначения, приведенные в таблице.

№ п/п	Величина	Обозначение	Размерность
1	Длительность планового периода	T	сутки
2	Предельный срок хранения продукции	θ	сутки
3	Номер текущего дня планового периода	t	-
4	Время хранения («возраст») продукции на складе	τ	сутки
5	Хранящееся на складе в день t количество продукции возраста τ	$y_{t\tau}$	m
6	Отгруженное со склада в день t количество продукции возраста τ	$v_{t\tau}$	m
7	Спрос на продукцию в день t	D_t	m
8	Нижняя оценка спроса в день t	\underline{D}_t	m
9	Верхняя оценка спроса в день t	\overline{D}_t	m
10	Мощность производства – максимальное суточное производство продукции	Y_{max}	$m/сутки$
11	Суточные издержки на хранения 1 m продукции	c_1	руб./ $m/сутки$
12	Затраты на производство 1 m продукции	c_2	руб./ m

Тогда условия задачи примут вид

$$c_1 \sum_{t=1}^T \sum_{\tau=1}^{\theta} y_{t\tau} + c_2 \sum_{t=1}^T y_{t0} \rightarrow \min; \quad (1)$$

$$\sum_{\tau=0}^{\theta} y_{t\tau} - D_t \geq 0, \quad t = 1, 2, \dots, T; \quad (2)$$

$$y_{t\tau} = y_{t-1, \tau-1} - v_{t-1, \tau-1}, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad \tau = 1, 2, \dots, \theta + 1; \quad (3)$$

$$\sum_{\tau=1}^{\theta} v_{t\tau} = D_t, \quad \underline{D}_t \leq D_t \leq \overline{D}_t, \quad t = 1, 2, \dots, T; \quad (4)$$

$$y_{t, \theta+1} = 0, \quad v_{t-1, 0} = 0, \quad t = 1, 2, \dots, T; \quad (5)$$

$$y_{t\tau} \geq y_{t, \tau+1}, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad \tau = 1, 2, \dots, \theta; \quad (6)$$

$$0 \leq y_{t0} \leq Y_{max}, \quad v_{t\tau} \geq 0, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad \tau = 1, 2, \dots, \theta. \quad (7)$$

Содержательный смысл условий: (1) – минимизация общих производственных издержек; (2) – обеспечение спроса на продукцию; (3) – старение и отгрузка запасов; (4) – удовлетворение спроса на продукцию; (5) – отсутствие продукции с истекшим сроком хранения и невозможность отгрузки продукции нулевого возраста; (6) – монотонность запасов по срокам хранения; (7) – условие неотрицательности неизвестных и ограничение на количество производимой продукции.

1. Редукция задачи

Задача (1)-(7) изменением знака целевой функции и введением дополнительных переменных приводится к канонической форме. В этом смысле ее можно считать частным случаем общей задачи линейного программирования

$$c'x \rightarrow \max, \quad Ax = b, \quad x \geq 0 \quad (8)$$

с неопределенными матричными и векторными коэффициентами $A \in R^{m \times n}, b \in R^m, c \in R^n$ из заданных замкнутых интервалов

$$|A - A_0| \leq \Delta A, \quad |b - b_0| \leq \Delta b, \quad |c - c_0| \leq \Delta c. \quad (9)$$

Здесь $x \in R^n$ – искомый вектор, '(штрих) – знак транспонирования, $c'x$ – скалярное произведение векторов c и x . Модули матриц и матричные неравенства (9) понимаются поэлементно.

Коэффициенты A, b, c из интервалов (9) будем называть *допустимыми*. Интервалы (9) будем также записывать в виде

$$\underline{A} \leq A \leq \bar{A}, \quad \underline{b} \leq b \leq \bar{b}, \quad \underline{c} \leq c \leq \bar{c},$$

$$(\underline{A} = A_0 - \Delta A, \quad \bar{A} = A_0 + \Delta A \text{ и т.д.}).$$

Обозначим через $\varepsilon \in R^m$ неотрицательную векторную *невязку* уравнений (8). Назовем вектор $x \in R^n$ ε -планом задачи (8), (9), если $x \geq 0$ и $|Ax - b| \leq \varepsilon$ для всех допустимых A, b . Очевидно, вектор x будет ε -планом тогда и только тогда, когда удовлетворяет неравенствам

$$-\underline{A}x + \bar{b} \leq \varepsilon, \quad \bar{A}x - \underline{b} \leq \varepsilon, \quad x \geq 0. \quad (10)$$

Используя (10) и нижнюю оценку линейной формы $c'x$ по допустимым коэффициентам, сформируем задачу линейного программирования

$$\underline{c}'x \rightarrow \max, \quad -\underline{A}x - \varepsilon \leq -\bar{b}, \quad \bar{A}x - \varepsilon \leq \underline{b}, \quad x \geq 0 \quad (11)$$

с неизвестным вектором x .

В задаче (11) фигурирует неопределенная невязка ε . Если задать ее достаточно большой (по норме), то теряется аппроксимативный смысл неравенств (10), если малой, - то неравенства (10) станут, вообще говоря, несовместными. Поэтому на первой этапе исследования необходимо ввести *вспомогательную* задачу линейного программирования для определения «минимальной» невязки

$$\varepsilon_{m+1} \rightarrow \min, \quad -\underline{A}x - \varepsilon \leq -\bar{b}, \quad \bar{A}x - \varepsilon \leq \underline{b}, \quad e' \varepsilon - \varepsilon_{m+1} \leq 0, \quad x \geq 0, \quad \varepsilon \geq 0. \quad (12)$$

Здесь $x, \varepsilon, \varepsilon_{m+1}$ - неизвестные, e - вектор из R^m с единичными координатами, $e' \varepsilon$ - сумма координат (норма) невязки ε .

Очевидно, во вспомогательной задаче линейная форма ограничена снизу нулем и ограничения совместны, поэтому она имеет [4] хотя бы один оптимальный план $\hat{x}, \hat{\varepsilon}, \hat{\varepsilon}_{m+1}$. Вектора x, ε , удовлетворяющие неравенствам (5) при $\varepsilon_{m+1} = \hat{\varepsilon}_{m+1}$, будем называть соответственно *минимальными невязками* уравнения (8) и *универсальными планами* задачи (8), (9). Таким образом, решение вспомогательной задачи (12) дает универсальный план \hat{x} , минимальную невязку $\hat{\varepsilon}$ и ее норму $\hat{\varepsilon}_{m+1}$.

Пусть норма $\hat{\varepsilon}_{m+1}$ минимальной невязки известна. На следующем этапе естественно попытаться выделить среди всех универсальных планов задачи (11) с найденной минимальной невязкой

$$\underline{c}'x \rightarrow \max, \quad -\underline{A}x - \varepsilon \leq -\bar{b}, \quad \bar{A}x - \varepsilon \leq \underline{b}, \quad e' \varepsilon \leq \hat{\varepsilon}_{m+1}, \quad x \geq 0, \quad \varepsilon \geq 0. \quad (13)$$

оптимальный универсальный план. Легко показать, что в предположении $e' \Delta A > 0$ задача (13) разрешима.

2. Численный эксперимент

Задача (1)–(7) решалась в два этапа. На первом этапе выявлялась минимальная разрешимость соответствующей ε -задачи типа (12). Формально она получается из задачи (1)–(7) заменой условий (1), (2), (4) следующими:

$$\sum_{t=1}^T (\varepsilon_{t1} + \varepsilon_{t2}) \rightarrow \min, \quad (14)$$

$$\sum_{\tau=0}^{\theta} y_{t\tau} - \bar{D}_t + \varepsilon_{t1} \geq 0, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (15)$$

$$\bar{D}_t - \varepsilon_{t2} \leq \sum_{\tau=1}^{\theta} v_{t\tau} \leq \underline{D}_t + \varepsilon_{t2}, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (16)$$

и добавлением условий неотрицательности

$$\varepsilon_{t1} \geq 0, \quad t = 1, 2, \dots, T. \quad (17)$$

При этом неотрицательность неизвестных ε_{t2} следует из неравенств (16).

Как уже отмечалось, ε -задача разрешима. Обозначим через $\varepsilon_{t1}^*, \varepsilon_{t2}^*, t = 1, 2, \dots, T$ составляющие ее оптимального плана. Если в ограничениях ε -задачи положить $\varepsilon_{t1} = \varepsilon_{t1}^*, \varepsilon_{t2} = \varepsilon_{t2}^*, t = 1, 2, \dots, T$, то они опишут множество D^* универсальных планов $y_{t\tau}, v_{t-1,\tau}, t = 1, 2, \dots, T, \tau = 1, 2, \dots, \theta$. На втором этапе решалась задача минимизации целевой функции (1) на множестве D^* , то есть определялся оптимальный универсальный план. Численные эксперименты проводились для начальных данных

$$T = 4, \quad \theta = 2, \quad \underline{D}_1 = 0, \quad \underline{D}_2 = 27, \quad \underline{D}_3 = 54, \quad \underline{D}_4 = 9,$$

$$\bar{D}_1 = 0, \quad \bar{D}_2 = 33, \quad \bar{D}_3 = 66, \quad \bar{D}_4 = 11, \quad Y_{\max} = 50, \quad c_1 = 1, \quad c_2 = 1.$$

Результаты решения – план производства и картина удовлетворения спроса – приведены на рис. 1, 2. Минимальные невязки равны

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^* = 0, \quad \varepsilon_{21}^* = 0, \quad \varepsilon_{31}^* = 0, \quad \varepsilon_{41}^* = 0; \\ \varepsilon_{12}^* = 0, \quad \varepsilon_{22}^* = 3, \quad \varepsilon_{32}^* = 6, \quad \varepsilon_{42}^* = 1. \end{aligned}$$

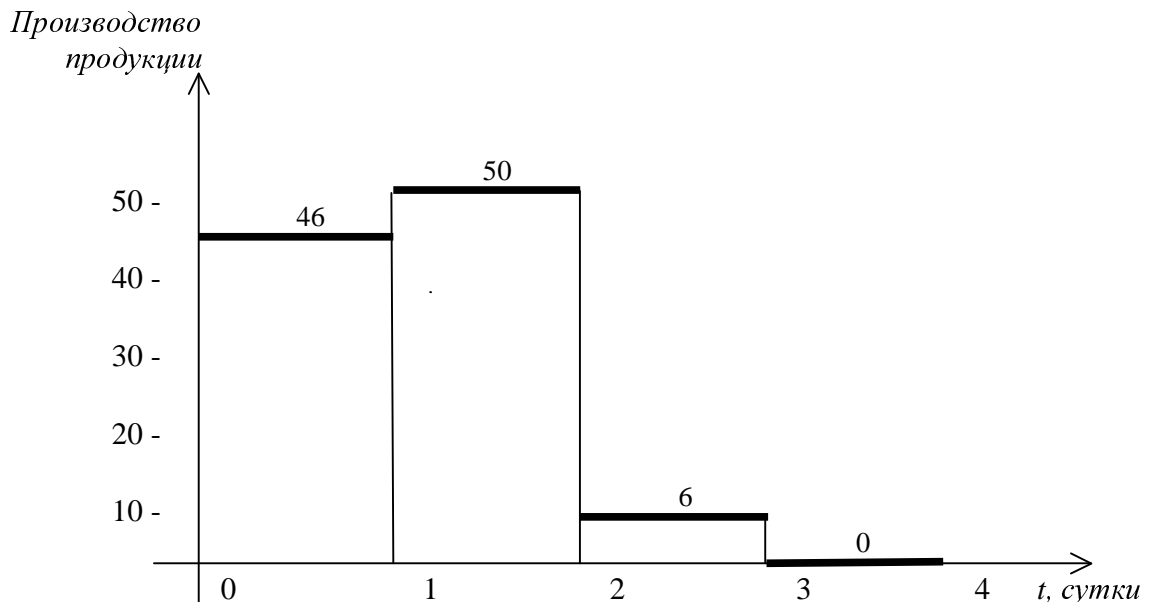


Рис. 1. График оптимального производства продукции

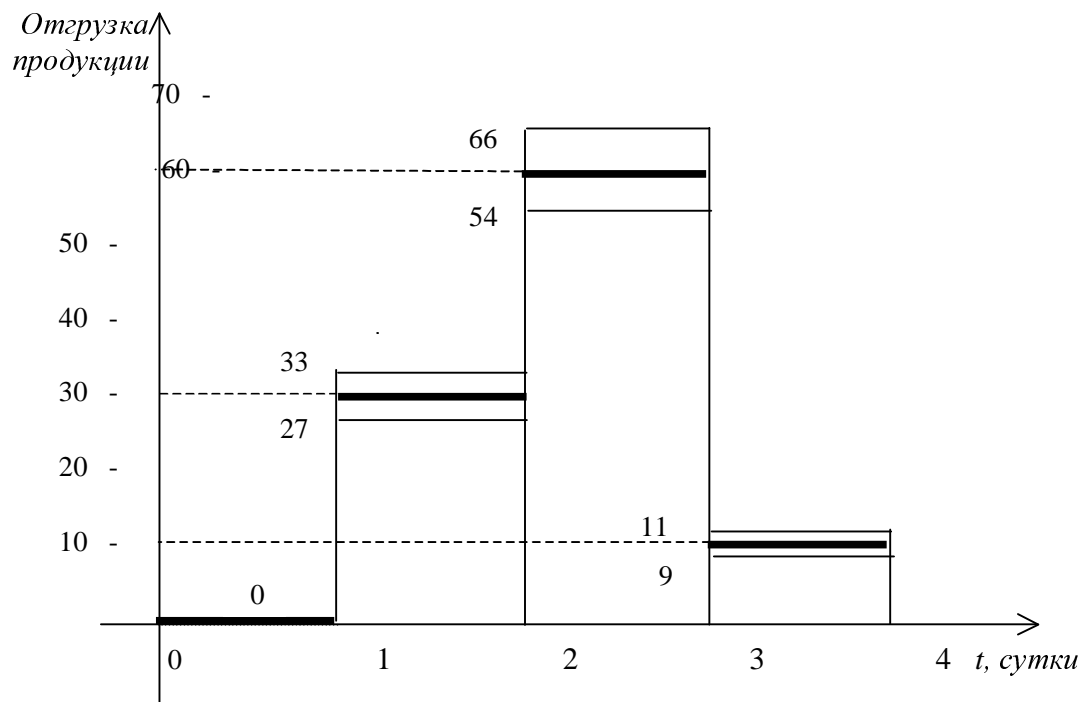


Рис. 2. График оптимальной отгрузки продукции (жирная линия), границы интервалов спроса (тонкая линия) и середина интервалов спроса (пунктирная линия)

Заключение

В работе описана модель управления запасами, учитывающая неопределенность спроса и ограниченность срока хранения продукции. Показано, что нахождение универсального плана сводится к решению обычной (не интервальной) задачи линейного программирования. Приведены результаты численного эксперимента.

Использование универсальных планов приводит к появлению в балансовых уравнениях и неравенствах некоторых невязок. С экономической точки зрения они имеют смысл дополнительных ресурсов, которые необходимы для совместности балансовых уравнений и неравенств с неопределенными коэффициентами. В этом смысле универсальные планы автоматически осуществляют «развязывание узких мест» путем минимального увеличения «ресурсной базы». Дальнейшее увеличение ресурсов можно трактовать как переход от универсальных планов к ϵ -планам – расширению множества планов – и, как следствие, увеличению максимума целевой функции. Безусловно, в процедуру развязывания узких мест можно ввести стоимостные показатели (например, стоимость дополнительных ресурсов) и связать их изменение с изменением максимума целевой функции. Однако, все эти вопросы уже выходят за рамки данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вагнер Г.* Основы исследования операций. Т.1-3. М.: Мир, 1972.
2. *Вильямс С.С.* Параметрическое программирование в экономике. М.: Статистика, 1976.
3. *Ермольев Ю.М.* Методы стохастического программирования. М.: Наука, 1976.
4. *Васильев Ф.П., Ивануцкий А.Ю.* Линейное программирование. М.: Факториал, 1998.

ОБ ОДНОМ ИНТЕРВАЛЬНОМ ВАРИАНТЕ УРАВНЕНИЯ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА

М. Б. Бозоров

Навоийский государственный горный институт, Навои, Узбекистан
e-mail: tamurjon@mail.ru

З. Х. Юлдашев

Узбекский национальный университет, Ташкент, Узбекистан
e-mail: ziyaut@mail.ru

Аннотация. В данной работе предлагается интервальная постановка задачи межотраслевого баланса, являющейся основой многих линейных экономических моделей. Приводится анализ продуктивности модели Леонтьева при интервальных неопределенностях. Далее, в работе формулирована и доказана теорема о продуктивности интервальной модели Леонтьева.

Ключевые слова: интервальный анализ, экономическая модель, продуктивность модели Леонтьева.

Введение

В последнее время большое число математических моделей успешно применяется при решении реальных задач и дает практический эффект. В первую очередь к ним следует отнести класс моделей линейного программирования типа задачи о раскрое, задачи о рациионе, транспортной задачи и т.д., также схему межотраслевого баланса, ставшую рабочим инструментом плановых органов народного хозяйства.

Стремление приблизить экономико-математическое моделирование к реальности, сделать модели более "вычислимыми" в условиях недетерминированности данных диктует необходимость разработки адекватных методов. Одними из них являются - методы интервального анализа. В данной работе предлагается интервальная постановка задачи межотраслевого баланса, являющейся основой многих линейных экономических моделей. Приводится анализ продуктивности модели Леонтьева при интервальных неопределенностях.

Для удобства дальнейшего изложения приведем некоторые основные обозначения и факты из интервального анализа [1-4]. Наша система обозначений следует, в основном, тем неофициальным международным рекомендациям [4].

- В тексте интервалы и интервальные величины (векторы, матрицы и др.) будут обозначаться жирным шрифтом, например, **A, B, C, ..., x, y, z**, тогда как неинтервальные (вещественные, точечные и т.п.) величины никак специально не выделяются.
- Интервальным числом называются замкнутый интервал вещественных чисел: $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b, x \in R\}$, где R -множество всех вещественных чисел, а множество всех интервалов обозначим через \mathbb{IR} . Если **a**- интервальное число $\mathbf{a} \in \mathbb{IR}$, то его левый и правый концы будем обозначать как: $\mathbf{a} := [\underline{a}, \bar{a}]$.
- *Вырожденный* интервал, т.е. интервал с совпадающими концами $\underline{a} = \bar{a} = a$, эквивалентен к вещественному числу a .

- Символы $\in, \cap, \cup, \subseteq$ и т.п. используется и понимается в обычном теоретико-множественном смысле, причем знак \subseteq означает необязательно строгое включение, т.е. допускает равенство интервалов. Два интервала \mathbf{a} и \mathbf{b} равны, тогда и только тогда, когда $\underline{a} = \underline{b}$, $\bar{a} = \bar{b}$.
- Абсолютная величина интервала определяется как $|\mathbf{a}| = |[\underline{a}, \bar{a}]| = \max\{|\underline{a}|, |\bar{a}|\}$.
- Арифметические операции над интервальными числами определяются следующим образом. Пусть $*$ $\in \{+, -, \cdot, /\}$ $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{IR}$. Тогда $\mathbf{a} * \mathbf{b} = \{a * b | a \in \mathbf{a}, b \in \mathbf{b}\}$, причем в случае деления $0 \notin \mathbf{b}$.

1. Постановка задачи в интервальном случае

Предположим, что каждая отрасль выпускают продукт только одного типа и разные отрасли выпускают разные продукты. Значит, в рассматриваемой нами производственно-экономической системе выпускается n видов продуктов. Каждая отрасль, в процессе производства своего вида продукта нуждается в продукции других отраслей.

\tilde{a}_{11}	\tilde{a}_{12}	\tilde{a}_{13}	\dots	\tilde{a}_{1n}	\tilde{c}_1
\tilde{a}_{21}	\tilde{a}_{22}	\tilde{a}_{23}	\dots	\tilde{a}_{2n}	\tilde{c}_2
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
\tilde{a}_{n1}	\tilde{a}_{n2}	\tilde{a}_{n3}	\dots	\tilde{a}_{nn}	\tilde{c}_n
\tilde{v}_1	\tilde{v}_2	\tilde{v}_3	\dots	\tilde{v}_n	

Пусть в некоторый момент времени, скажем, в году T_0 , составлен балансовой отчет по народному хозяйству по итоговым данным за фиксированный период времени по следующей форме:

Тогда, балансовый характер этой таблицы выражается соотношением

$$\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} = \tilde{v}_i - \tilde{c}_i, \quad i = \overline{1, n},$$

где i, j - означает номера отраслей; \tilde{a}_{ij} - объем продукции отрасли i , израсходованной отраслью j , число \tilde{v}_j - равно общему объему продукции (валовому выпуску) j -й отрасли за тот же период, а значение \tilde{c}_j - объем продукции j -й отрасли, который потреблен в непромышленной сфере, для создания запасов и т.д. Число \tilde{a}_{ij} ($j = \overline{1, n}$), показывают распределение продукции отрасли i на производственные нужды других отраслей. Все указанные величины могут быть либо натуральными (тонны, штуки, киловатт-часы и т.д.), либо стоимостными, в зависимости от чего различают натуральный и стоимостный межотраслевой баланс.

Если все элементы j -го столбца таблицы разделить на величину \tilde{v}_j , то число $a_{ij} = \tilde{a}_{ij}/\tilde{v}_j$ можно понимать как объем продукции i -й отрасли, необходимый для производства одной единицы продукта отрасли с номером j ; число $c_j = \tilde{c}_j/\tilde{v}_j$ - как долю продукции j -й отрасли, израсходованную на производственное потребление.

Для осуществления объема x_j валового выпуска продукции отрасли j необходимо и достаточно произвести затраты в объемах $x_j a_{ij}$, $i = \overline{1, n}$, а часть общего валового выпуска описывается вектором

$$\left(\sum_{j=1}^n a_{1j} x_j, \sum_{j=1}^n a_{2j} x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{nj} x_j \right).$$

Вектор производственных затрат в матричном виде равен на Ax . Тогда свободный остаток $c = x - Ax$, будет использован на производственные цели и накопления. В планировании производства на период времени $[T_0, T]$, задача формулируется, наоборот: при заданном векторе c конечного потребления требуется найти вектора валового выпуска

$$x - Ax = c, x \geq 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) называемое линейным уравнением межотраслевого экономического баланса, есть классическое уравнение Леонтьева [5].

На практике определение коэффициентов a_{ij} для отдельно взятого предприятия не составляет труда, но в масштабах всей отрасли найти их весьма трудно. Как правило, вместо точных значений этих коэффициентов оперируют их оценками, полученными по тем или иным методикам. Разумно даже считать, что коэффициенты прямых производственных затрат известны нам лишь с некоторой неопределенностью, которую мы будем предполагать интервальной. Иными словами, пусть $a_{ij} \in \mathbf{a}_{ij}$ и $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij}) = ([\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}])$.

Аналогичным образом, требование на вектор конечного потребления c также естественно сформулировать в интервальной форме: нас, как правило, устроит ситуация, когда реальное потребление будет выдерживаться в пределах некоторого интервала \mathbf{c} . В вещественном случае решения системы (1) относительно x позволяет спрогнозировать объемы производства по отраслям, необходимые для получения запланированного конечного потребления \mathbf{c} .

В интервальном случае вместо (1) мы имеем уравнение

$$x = \mathbf{A}x + \mathbf{c}, x \geq 0, \quad (2)$$

с вектором конечного потребления по отраслям $\mathbf{c} \in \mathbf{IR}^n$ и матрицей $\mathbf{A} \in \mathbf{IR}^{n \times n}$ - коэффициентов прямых производственных затрат. Условия неотрицательности вектора x , естественное с содержательной точки зрения, создает определенные трудности при исследовании вопроса о существовании решения системы (2).

В интервальном варианте для (2), вопрос может быть сформулирован следующим образом:

для каких объемов производства \mathbf{x} при любых значениях коэффициентов прямых производственных затрат a_{ij} в пределах \mathbf{a}_{ij} , мы все равно получим конечное потребление из заданного интервала \mathbf{c} ?

Нетрудно понять, что множество всех таких векторов \mathbf{x} образует допустимое множество решений интервальной линейной системы

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{c},$$

где \mathbf{I} - единичная $n \times n$ - матрица.

Если же интервалы некоторых коэффициентов прямых производственных затрат представляют пределы их возможного управления, скажем, в результате некоторых изменений технологии производства или административных решений, то задачи определения объемов производства, которые обеспечивают конечное потребление, приводит уже к рассмотрению управляемых множеств решений интервальных систем линейных алгебраических уравнений.

2. Анализ продуктивности модели Леонтьева при интервальных неопределенностях

С математической точки зрения вопрос о существовании решения \mathbf{x} в уравнений (2) полностью определяется существованием матрицы $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$.

Определение. Модель Леонтьева называется продуктивной, если матрица $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ существует и все ее элементы неотрицательны.

Однако, даже если матрица $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ существует, это еще не означает, что вектор $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{c}$ будет неотрицательным. В математическом плане продуктивность модели Леонтьева определяется величиной фробениуса собственного числа матрицы \mathbf{A} .

Теорема. Интервальная модель Леонтьева (2) продуктивна тогда и только тогда, когда $|\lambda_A| < 1$, где λ_A – собственное число Фробениуса матрицы \mathbf{A} .

Доказательство. Необходимость. Пусть модель Леонтьева продуктивна. Предположим, что вектор конечного потребления неотрицателен: $\mathbf{c} > 0$. Тогда для вектора $x (x \geq 0)$ выполняется $x > |\mathbf{A}|x$. Умножая последнее неравенство на неотрицательный вектор \mathbf{p}_A , имеем $\langle x, \mathbf{p}_A \rangle |\lambda_A| < \langle x, \mathbf{p}_A \rangle$, где $\langle x, \mathbf{p}_A \rangle$ – скалярное произведение векторов. Поскольку $\langle x, \mathbf{p}_A \rangle > 0$, получим $|\lambda_A| < 1$.

Достаточность. Пусть $|\lambda_A| < 1$. Поскольку $|\mathbf{A}|x_A = |\lambda_A|x_A$, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\mathbf{A}|^k x_A = \lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_A|^k x_A = 0.$$

Учитывая $x_A > 0$, $|\mathbf{A}|^k \geq 0$, получим, что $\lim_{k \rightarrow \infty} |\mathbf{A}|^k = 0$.

Рассмотрим равенство

$$(\mathbf{I} - |\mathbf{A}|)(\mathbf{I} + |\mathbf{A}| + |\mathbf{A}|^2 + \dots + |\mathbf{A}|^{k-1}) = \mathbf{I} - |\mathbf{A}|^k.$$

Так как предел при $k \rightarrow \infty$ правой части существует, то существует предел и левой части, т.е.

$$(\mathbf{I} - |\mathbf{A}|) \sum_{k=1}^{\infty} |\mathbf{A}|^k = \mathbf{I}.$$

Этим доказано, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |\mathbf{A}|^k$ сходится, а матрица $(\mathbf{I} - |\mathbf{A}|)$ невырождена. Из последнего равенства получаем $|\mathbf{A}|^k = \sum_{k=1}^{\infty} |\mathbf{A}|^k$.

Поскольку $|\mathbf{A}|^k \geq 0, k = 1, 2, \dots$, то $(\mathbf{I} - |\mathbf{A}|)^{-1} \geq 0$. Отсюда вытекает, что для любого вектора конечного потребления $\mathbf{c} \geq 0$ существует неотрицательное решение системы уравнений (2):

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - |\mathbf{A}|)^{-1}\mathbf{c},$$

что и означает продуктивность модели Леонтьева. Теорема доказана.

Заметим, что вещественная модель Леонтьева отражает лишь потенциальные возможности, заложенные в технологии производства. В (1) предполагается, что процесс производства совершается мгновенно – все промежуточные продукты оказываются произведенными к тому моменту, когда в них появляется потребность. В отличие от этого в модель (2) включаются как результаты уже состоявшегося так и будущего цикла, а интервальность \mathbf{a}_{ij} и \mathbf{c}_i , позволяет прокручивать одновременно континуальное множество производственных циклов и вариантов потребления

Литература

1. Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, 1986 - 223 с
2. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. - М.: Мир, 1987.
3. Шарый С.П. Интервальные алгебраические задачи и их численное решение. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук.- Новосибирск : ИВТ СО РАН, 2000.- 332 с.
4. R.V.Kearfott, M.T.Nakao, A.Neumaier, S.M. Rump, S.P.Shary, and P.van Hentenruck. Standardized notation in interval analysis - Reliable Computing.
5. Леонтьев В.В. Исследование структуры американской экономики. М: Гос.статиздат.,- 1958.

ABOUT ONE INTERVAL VERSION OF INTER-INDUSTRY BALANCE EQUATION

M. B. Bozorov

Navoi state institute of mining, Navoi, Uzbekistan

e-mail: mamurjon@mail.ru

Z. KH. Yuldashev

Uzbek national university, Tashkent, Uzbekistan

e-mail: ziyaut@mail.ru

Abstract. In the given work the interval statement of the problem the inter-industry balance is offered, being the base of the many linear economic models. Here we refer to the analysis of productivity of models under interval uncertainty by Leontyev. It is formulated and proved that the theorem of productivity of the interval models by Leontyev is right.

Key words: interval analysis, economic model, productivity of models.

ИНТЕРВАЛЬНЫЙ МЕТОД ГАУССА-ЗЕЙДЕЛЯ ДЛЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Б.С. Джаныбеков

Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск

e-mail: janybekov@mail.ru

Аннотация. Рассматривается итерационный интервальный метод Гаусса-Зейделя для внешнего оценивания множеств решений систем линейных алгебраических уравнений с комплексными интервальными параметрами. Метод работает таким образом, что для предобусловленной линейной интервальной системы любой достаточно широкий начальный интервальный вектор улучшается на каждом последующем шаге итерации.

Ключевые слова: Интервальная математика, внешняя оценка, множество решений, интервальная система линейных алгебраических уравнений, интервальный метод Гаусса-Зейделя, комплексные интервалы.

Введение

Исследуется интервальная система линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ)

$$Ax = b,$$

где элементами $n \times n$ -матрицы A и n -вектора правой части b являются комплексные интервалы.

Множество решений ИСЛАУ в общем случае не имеет простого описания. Поэтому мы ограничимся нахождением интервального вектора, целиком или частично содержащего это множество решений в зависимости от постановки задачи. Как известно, полученный вектор называется *внешней оценкой* множества решений ИСЛАУ.

Одним из наиболее популярных и эффективных алгоритмов нахождения внешних интервальных оценок множеств решений ИСЛАУ с вещественными интервальными параметрами является *интервальный метод Гаусса-Зейделя* (см., например, [2], [4], [5]), применяемый обычно после предварительного предобуславливания интервальной линейной системы. Метод работает таким образом, что для предобусловленной ИСЛАУ любой достаточно широкий начальный интервальный вектор x улучшается (уменьшается в размерах) на каждом последующем шаге итерации.

Одним из существенных достоинств этого метода является то, что в отличие от метода Кравчика решения ИСЛАУ [3], метод Гаусса-Зейделя дает более узкие внешние оценки множеств решений. Кроме того, интервальный метод Гаусса-Зейделя позволяет получать ответ в тех задачах, к которым интервальный метод Кравчика неприменим.

Отметим, что интервальный метод Гаусса-Зейделя ранее применялся для внешнего оценивания множеств решений ИСЛАУ с вещественными интервальными параметрами. Целью работы является обобщение метода Гаусса-Зейделя на случай комплексных ИСЛАУ.

Обозначения

\mathbb{R} — множество вещественных чисел

\mathbb{C} — множество комплексных чисел

\mathbb{IR} — множество замкнутых интервалов $[a, b]$ на \mathbb{R} , $a \leq b$

\mathbb{IC} — множество комплексных интервалов

\mathbb{IC}^n — множество n -мерных векторов с элементами из \mathbb{IC}

$\mathbb{IC}^{n \times n}$ — множество $n \times n$ -матриц с элементами из \mathbb{IC}

$\rho(A)$ — спектральный радиус матрицы A

$\text{mid } \mathbf{A}$ — средняя матрица интервальной матрицы \mathbf{A} , $\text{mid } \mathbf{A} = \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{A}})$

1. Основные определения

В нашем методе существенную роль играет понятие *интервальной H -матрицы*. Но перед тем как непосредственно перейти к определению H -матрицы, дадим несколько вспомогательных определений:

Определение 1. [7] Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ называется M -матрицей, если она удовлетворяет любому из следующих эквивалентных условий

- I. $A = sI - P$, где P — неотрицательная матрица и $s > \rho(P)$;
- II. внедиагональные элементы A неположительны и $A^{-1} \geq 0$;
- III. внедиагональные элементы A неположительны и существует положительный вектор $u > 0$, такой что $Au > 0$;
- IV. внедиагональные элементы A неположительны и e° собственные значения имеют положительные вещественные части;
- V. ... и т.д.

Определение 2. Пусть $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + i \mathbf{a}_2$ и $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + i \mathbf{b}_2$ принадлежат \mathbb{IC} . Тогда расстояние dist между комплексными интервалами \mathbf{a} и \mathbf{b} определяется формулой

$$\text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \text{dist}(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) + \text{dist}(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2).$$

Определение 3. Пусть $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + i \mathbf{a}_2 \in \mathbb{IC}$. Тогда величина $|\mathbf{a}| = |\mathbf{a}_1| + |\mathbf{a}_2|$ называется абсолютной величиной или модулем интервала \mathbf{a} .

Определение 4. Пусть $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + i \mathbf{a}_2 \in \mathbb{IC}$. Тогда величина $\langle \mathbf{a} \rangle = \langle \mathbf{a}_1 \rangle + \langle \mathbf{a}_2 \rangle$ называется мигнитудой интервала \mathbf{a} .

Определение 5. Для интервальной матрицы $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij}) \in \mathbb{IC}^{n \times n}$ матрицей сравнения называется точечная матрица того же размера, обозначаемая $\langle \mathbf{A} \rangle$, такая что

$$ij\text{-й элемент } \langle \mathbf{A} \rangle = \begin{cases} \langle \mathbf{a}_{ij} \rangle, & \text{если } i = j, \\ -|\mathbf{a}_{ij}|, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Определение 6. [4] Интервальная квадратная матрица \mathbf{A} называется H -матрицей, если ее матрица сравнения $\langle \mathbf{A} \rangle$ является M -матрицей.

В частности, H -матрицей является любая интервальная матрица $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$ со строгим диагональным преобладанием, удовлетворяющая

$$\langle \mathbf{a}_{ii} \rangle > \sum_{j \neq i} |\mathbf{a}_{ij}| \text{ для всех } i = 1, 2, \dots, n.$$

Более простой пример интервальных H -матриц — это невырожденные треугольные матрицы, верхние или нижние [4].

Предложение 1. Матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{I}\mathbb{C}^{n \times n}$ является H -матрицей тогда и только тогда, когда для не^o верна импликация

$$u \in \mathbb{R}^n, \quad u \geq 0, \quad \langle \mathbf{A} \rangle u \leq 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0.$$

Определение 7. Интервальная матрица \mathbf{A} называется неособенной (невырожденной), если неособенны (невырождены) все матрицы $A \in \mathbf{A}$.

Определение 8. Будем говорить, что интервальная матрица \mathbf{A} сильно неособенная, если неособенна интервальная матрица $(\text{mid } \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}$.

Отметим, что всякая интервальная H -матрица является сильно неособенной.

Предложение 2. [4] Пусть интервальная матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{I}\mathbb{C}^{n \times n}$ такова, что e^o средняя матрица $\text{mid } \mathbf{A}$ неособенна. Тогда следующие утверждения эквивалентны друг другу:

- I. матрица \mathbf{A} сильно неособенна;
- II. $\rho(|(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}| \cdot \text{rad } \mathbf{A}) < 1$;
- III. $\|I - (\text{mid } \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}\|_u < 1$ для некоторого вектора $u > 0$;
- IV. произведение $(\text{mid } \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}$ является H -матрицей.

2. Интервальный метод Гаусса-Зейделя

Пусть дана линейная интервальная система

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b} \tag{1}$$

с неособенной матрицей $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij}) \in \mathbb{I}\mathbb{C}^{n \times n}$ и вектором $\mathbf{b} \in \mathbb{I}\mathbb{C}^n$.

Ее объединенное множество решений определяется в виде:

$$\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{ x \in \mathbb{C}^n \mid (\exists A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(Ax = b) \}.$$

Одним из эффективных алгоритмов нахождения внешних интервальных оценок множеств решений ИСЛАУ с комплексными интервальными параметрами является *интервальный метод Гаусса-Зейделя*. Данный метод является методом итеративного улучшения вектора начального приближения $x \in \mathbb{I}\mathbb{C}^n$, ограничивающего желаемую часть множества решений $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ линейной интервальной системы (1).

Таким образом, нашей целью является нахождение более “лучшего” интервального вектора, ограничивающего множество решений

$$\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \mathbf{x} = \{x \in \mathbf{x} \mid Ax = b \text{ для некоторых } A \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{b}\},$$

где элементы главной диагонали интервальной матрицы $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$ не содержат нуля, т.е. $0 \notin \mathbf{a}_{ii}$ для $i = 1, 2, \dots, n$.

Выпишем систему $Ax = b$ покомпонентно в виде

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

а потому

$$x_i = \left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j \right) / a_{ii}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Обозначая

$$\mathbf{x}'_i = \left(\mathbf{b}_i - \sum_{j \neq i} \mathbf{a}_{ij} \mathbf{x}_j \right) / \mathbf{a}_{ii}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

мы должны признать, что

$$x_i \in \mathbf{x}'_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

так как выражения для \mathbf{x}'_i являются естественными интервальными расширениями выражений (2) по $a_{ij} \in \mathbf{a}_{ij}, b_i \in \mathbf{b}_i, x_i \in \mathbf{x}_i$. Таким образом мы имеем

$$\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \mathbf{x} \subseteq \mathbf{x}' \cap \mathbf{x}.$$

Далее, учитывая тот факт, что на i -том шаге при вычислении \mathbf{x}'_i мы уже владеем информацией о предыдущих $\mathbf{x}'_1, \dots, \mathbf{x}'_{i-1}$, то мы можем выписать более улучшенную формулу

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i \cap \left(\mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \mathbf{a}_{ij} \mathbf{x}_j - \sum_{j=i+1}^n \mathbf{a}_{ij} \mathbf{x}_j \right) / \mathbf{a}_{ii}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

В итоге мы получим уточненную внешнюю оценку $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)^T$, ограничивающую множество решений $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \mathbf{x}$ интервальной системы (1).

Если матрица \mathbf{A} не является H -матрицей, то интервальный метод Гаусса-Зейделя никакого улучшения начального приближения не гарантирует. Данный вывод следует из теоремы:

Теорема 1. *Если матрица $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij}) \in \mathbb{I}\mathbb{C}^{n \times n}$ не является интервальной H -матрицей, то существуют сколь угодно широкие интервальные векторы, которые не улучшаются интервальным методом Гаусса-Зейделя, примененным для внешнего оценивания множества решений интервальной линейной системы $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$*

Доказательство. Если $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$ не является H -матрицей, то в силу предложения 3.1. существует ненулевой вектор $u \geq 0$, такой что $\langle \mathbf{A} \rangle u \leq 0$. Тогда

$$\sum_{j \neq i} |\mathbf{a}_{ij}| u_j \geq \langle \mathbf{a}_{ii} \rangle u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

так что при любом вещественном $\alpha \geq 0$

$$\sum_{j \neq i} |\mathbf{a}_{ij}| ([-\alpha, \alpha] u_j) = [-\alpha, \alpha] \sum_{j \neq i} |\mathbf{a}_{ij}| u_j \supseteq [-\alpha, \alpha] \langle \mathbf{a}_{ii} \rangle u_i, \quad (4)$$

для всех $i = 1, 2, \dots, n$

Располагая начальной внешней оценкой множества решений $\Xi(\mathbf{A}, 0)$ в виде уравновешенного интервального вектора $\mathbf{x} = [-\alpha, \alpha] u$, мы, в соответствии с расчетными формулами интервального метода Гаусса-Зейделя, должны взять первую компоненту следующего приближения как

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1 \cap \left(0 - \sum_{j=2}^n \mathbf{a}_{1j} \mathbf{x}_j \right) / \mathbf{a}_{11}.$$

Но включение (4) имеет следствием

$$\left(- \sum_{j=2}^n \mathbf{a}_{1j} \mathbf{x}_j \right) / \mathbf{a}_{11} \supseteq \mathbf{x}_1,$$

так что $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1$. То же самое по индукции доказывается и для остальных компонент вектора следующего приближения \mathbf{x} . Итак, $\mathbf{x} = \mathbf{x}$ и никакого улучшения оценки интервальный метод Гаусса-Зейделя не обеспечивает. \square

Вывод теоремы останется справедливым и в случае, когда вектор правой части системы уравнений — ненулевой, но при этом матрица системы должна быть “достаточно дал°кой” от H -матрицы.

3. Предобуславливание

В задаче внешнего интервального оценивания объединенного множества решений $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ улучшение свойств матрицы системы обычно достигается с помощью так называемого *предобуславливания* — одновременного домножения матрицы и вектора правой части слева на некоторую точечную матрицу $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$, так что вместо исходной системы

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b},$$

мы получаем *предобусловленную интервальную систему*

$$(\Lambda \mathbf{A}) x = \Lambda \mathbf{b}, \quad (5)$$

множество решений которой $\Xi(\Lambda \mathbf{A}, \Lambda \mathbf{b}) \supseteq \Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Понятно, что в общем случае от подобной трансформации объединенное множество решений расширяется, но зато свойства интервальной матрицы предобусловленной системы могут быть улучшены в сравнении с исходной ИСЛАУ. Это нежелательное расширение множества решений является, вообще говоря, тем большим, чем больше предобуславливающая матрица отличается от диагональной. По этой причине нежелательно брать матрицу Λ “слишком сильно” отличающейся от диагональной.

Обычно в задачах внешнего оценивания объединенного множества решений ИСЛАУ в качестве предобуславливающей матрицы берут матрицу $\Lambda = (\text{mid } \mathbf{A})^{-1}$. Подобное предобуславливание привлекательно тем, что получающаяся предобусловленная система

На шестом шаге итерации мы прерываем выполнение алгоритма, так как расстояние между векторами \mathbf{x}^5 и \mathbf{x}^6 оказалось для нас в пределах требуемой точности $(0.001, 0.001)^T$. В итоге мы получим уточненную внешнюю оценку

$$\left(\begin{array}{l} [-0.1458, 0.1458] + i[-0.1458, 0.1458] \\ [-1.8691, 1.8691] + i[-1.8691, 1.8691] \end{array} \right),$$

ограничивающую множество решений $\Xi(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \cap \mathbf{x}$ интервальной системы (1).

Заключение

Достоинством вышеизложенного метода является то, что в отличие от метода Кравчика решения ИСЛАУ [3], метод Гаусса-Зейделя дает более узкие внешние оценки множеств решений. Кроме того, интервальный метод Гаусса-Зейделя позволяет получать ответ в тех задачах, к которым интервальный метод Кравчика неприменим. В заключении еще раз отметим, что интервальный метод Гаусса-Зейделя ранее применялся для внешнего оценивания множеств решений ИСЛАУ с вещественными интервальными параметрами. Целью работы является обобщение метода Гаусса-Зейделя на случай комплексных ИСЛАУ.

Список литературы

- [1] Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. – М.: Мир, 1987.
- [2] Barth W., Nuding E. Optimele losung von Intervallgleichungssystemen // Computing. — 1974. — Vol.12. — P. 117–125.
- [3] Krawczyk R. Newton-Algorithmen zur Bestimmung von Nullstellen mit Fehlerschranken // Computing. — 1969. — Vol.4. — P. 187–201.
- [4] Neumaier A. Interval methods for systems of equations. – Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [5] Kearfott R.B. Rigorous Global Search: Continuous Problems. -Dordrecht: Kluwer, 1996.
- [6] Shary S.P. On optimal solution of interval linear aquations // SIAM J. Numer. Anal. – 1995. – Vol.32, No. 2. – P. 610–630.
- [7] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988.

INTERVAL GAUSS-ZEIDEL METHOD FOR COMPLEX LINEAR SYSTEMS

B.S. Djanybekov

Institute of Computational Technologies SBIRAS, Novosibirsk
e-mail: janybekov@mail.ru

Abstract. Iterative interval Gauss-Zeidel method for outer estimation of solution sets to interval linear algebraic systems with complex interval parameters is considered. The essence of the method is to for preliminary precondition linear interval system any wide enough initial interval vector improves on each subsequent step of iteration.

Key words: Interval mathematics, outer estimates, solution set, interval linear algebraic system, Gauss-Zeidel method, complex interval.

ВИРТУАЛЬНЫЙ СДВИГ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ

Б.С. Добронец

Красноярский государственный университет, Красноярск
e-mail: dobronec@fivt.krasn.ru

Аннотация. В статье рассматривается алгоритм виртуального сдвига решения для исключения нулевого вектора из множества решений системы линейных алгебраических уравнений с интервальными коэффициентами.

Ключевые слова: интервальная математика, системы линейных алгебраических уравнений, линейное программирование.

Введение

Одним из методов построения оптимальных интервальных решений системы линейных алгебраических уравнений является использование линейного программирования. Этот подход получил развитие в работах [3], [4], [2], [5]. Одно из существенных ограничений при использовании данного метода — необходимость полного перебора. В общем случае при построении интервального решения размерности n , необходимо решить порядка $n2^n$ задач линейного программирования. К счастью, эта необходимость возникает не всегда. В работе [6] была сделана попытка исключить полный перебор, основная идея данного подхода состояла в построении в процессе решения специального графа, описывающего топологию решения. В большинстве случаев это позволяет избежать полного перебора и построить интервальное решение за приемлимое число операций.

Но если множество решений содержит нулевой вектор, то существует ситуации, когда такой перебор делать необходимо.

Таким образом, необходима возможность исключения нулевого вектора из множества решений и редукция полного перебора. Работа продолжает исследования начатые в работе [6].

1. Постановка задачи

Обозначим интервальным числом вещественный отрезок $\mathbf{a} = [\underline{a}, \bar{a}]$, такие числа будем записывать жирным шрифтом: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{f}, \mathbf{R}^n$ — пространство интервальных векторов размерности n , шириной интервального числа назовем величину $\text{wid } \mathbf{a} = \bar{a} - \underline{a}$.

Интервальная матрица \mathbf{A} *регулярна*, если каждая матрица $A \in \mathbf{A}$ не сингулярна.

Рассмотрим интервальную систему линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b}, \quad (1)$$

где $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, а $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$. Предположим так же, что интервальная матрица системы (1) регулярна.

Решением задачи (1) будем называть множество

$$\mathcal{X} = \{x | Ax = b, \quad A \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{b}\}.$$

Интервальной оболочкой решения задачи (1) назовем минимальный по включению интервальный вектор $\mathbf{x} \supseteq \mathcal{X}$.

Как правило \mathcal{X} — не выпуклое множество [1], и решение не является интервальным вектором. Однако, множество \mathcal{X} замкнуто в силу непрерывности линейного отображения. Следовательно, интервальная оболочка решения будет полностью содержать в себе множество \mathcal{X} .

В [4] было показано, что для нахождения интервальных границ множества решения задачи 1) в пределах каждого ортанта необходимо решить n задач линейного программирования. Таким образом, чтобы получить интервальное решение, в общем случае необходимо решить $n2^n$ задач линейного программирования, что является полным перебором всех возможных ортантов.

2. Виртуальный сдвиг решения

Как уже было сказано выше, множество \mathcal{X} связно, однако, не исключены ситуации, когда оно будет содержать нулевой вектор. Для проверки $\mathbf{0} \in \mathcal{X}$ достаточно проверить $\mathbf{0} \in \mathbf{b}$.

Действительно, если $\mathbf{0} \in \mathcal{X}$, то при подстановке в (1), получим

$$\mathbf{A}\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

То есть интервальный вектор \mathbf{b} должен содержать $\mathbf{0}$. Проверка этого условия — процесс не трудоемкий.

Заметим, что содержание множеством \mathcal{X} вектора $\mathbf{0}$ не означает автоматически, что решение содержится во всех ортантах. Так как в каждом ортанте \mathcal{X} — выпуклое множество, не исключена ситуация, изображенная на рис. 1. В этом случае, для исключения полного перебора, применим *виртуальный сдвиг решения*.

Будем смещать начало координат на вектор αv , где $v \in R^n$, $|\alpha| \rightarrow 0$ — параметр, т. е. делаем замену координат $\mathbf{x}'_\alpha = \mathbf{x} - \alpha v$. Тогда задача (1) примет вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}'_\alpha) = \mathbf{b}' = \mathbf{b} + \alpha \mathbf{A}v. \quad (2)$$

Будем говорить, что нулевой вектор *устранимый*, если существует такой вектор v , что для любого как угодно малого α : $\mathbf{0} \notin \mathbf{b}'$.

Теперь следуя работе [6] мы можем построить граф, описывающий топологию решения \mathbf{x}'_α . Устремив $|\alpha| \rightarrow 0$ мы можем исключить из рассмотрения квадранты, возникшие из сдвига решения.

Пример 1.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [3, 4] & [-2, -1] \\ [-2, -1] & [3, 4] \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [0, 3] \\ [0, 3] \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Объединенное решение изображено на рис. 1.

Поскольку $\mathbf{0} \in \mathbf{b}$, делаем сдвиг системы координат на величину $\alpha(1, 1)^T$, получаем систему с правой частью:

$$\mathbf{b}' = \begin{pmatrix} [\alpha, 3 + 3\alpha] \\ [\alpha, 3 + 3\alpha] \end{pmatrix}. \quad (4)$$

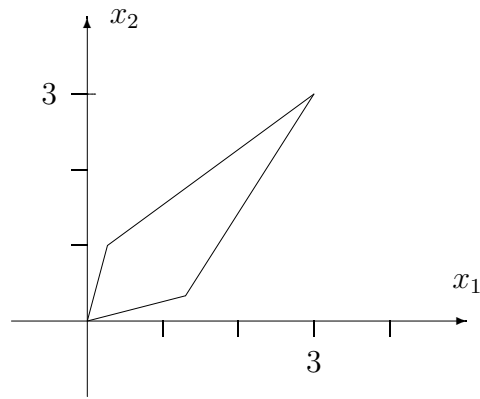


Рис. 1: Область решения для примера 1.

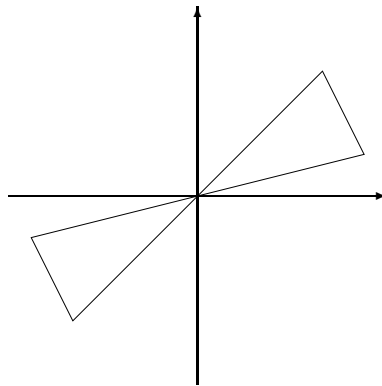


Рис. 2: Область решения для примера 2.

Решая эту систему, получим, что решение содержится только в одном квадранте, возвращаясь к исходной системе, получаем в пределах данного квадранта интервальную оболочку решения:

$$\begin{aligned} 0.000 &\leq x_1 \leq 3.000, \\ 0.000 &\leq x_2 \leq 3.000. \end{aligned}$$

Пример 2.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [2, 4] & [1, 2] \\ [-2, -1] & [2, 4] \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Объединенное решение изображено на рис. 2.

Так как $\mathbf{0} \in \mathbf{b}$, делаем замену координат, сдвигая ее на величину $\alpha(-1, 1)^T$, получаем систему интервальных линейных уравнений с правой частью

$$\mathbf{b}' = \begin{pmatrix} [-1 - 3\alpha, 1] \\ [3\alpha, 6\alpha] \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Строя граф, получим, что решение содержится в двух ортантах, Возвращаясь к исходной системе, получим интервальную оболочку решения:

$$\begin{aligned} -0.444 &\leq x_1 \leq 0.444, \\ -0.333 &\leq x_2 \leq 0.333. \end{aligned}$$

Таким образом, используя виртуальные сдвиги решения, удалось избежать полного перебора. Подобную методику можно применить и в ряде других случаев, что позволит

ускорить построение графа решения и соответственно оптимального интервального решения.

Список литературы

- [1] Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. М.:Мир, 1987. 360 с.
- [2] Hansen E. On linear algebraic equations with interval coefficient // Topics in interval analysis. Oxford: Clarendon Press, 1969. Pp. 35-46.
- [3] Oettli W. *On the Solution set of a linear system with inaccurate coefficients*. J.SIAM Numer. Anal. Ser. B, Vol. 2, No. 1, 1965.
- [4] J. E. Cope, B. W. Rust, *Bounds of solutions of linear systems with inaccurate data*. J.SIAM Numer. Anal. Vol. 16, No. 6, 1979.
- [5] Jansson C. Calculation of exact bounds for the solution set of linear interval systems. Linear Algebra and Its Applications. Vol. 251. 1997. Pp. 321–340.
- [6] Добронек Б.С., Стрельникова Е.А. Построение и исследование графовых моделей для решений интервальных СЛАУ // Вопросы математического анализа. Вып. 7. — Красноярск: Издательство КГТУ, 2004. С. 36–47.

VIRTUAL MOVE OF THE SET OF SOLUTIONS

B.S. Dobronets

Krasnoyarsk State Technical University

e-mail: dobronec@fivt.krasn.ru

Abstract. In article algorithm of the virtual move of the set of solutions is considered for exception of the zero vector from the set of solutions of the system of the linear algebraic equations with interval coefficients

Key words: interval mathematics, systems of the linear algebraic equations, linear programming

ПРАВИЛО ВЫБОРА РЕШЕНИЙ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ НА ГРАФАХ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Г.Л.Козина

Запорожский национальный технический университет, Запорожье
e-mail: ains@comint.net

Аннотация. В статье рассматривается задача о кратчайшем пути между двумя выделенными вершинами на графе с интервально взвешенными ребрами. Описываются возможные множества решений задачи, устанавливается связь между этими множествами и предлагается правило выбора единственного оптимального решения задачи.

Ключевые слова: оптимизационные задачи на графах, интервальные параметры, интервальный анализ, Паретовское множество, слабое решение, сильное решение, вероятность.

Введение

При решении оптимизационных задач на графах с интервальными параметрами (задача о минимальном остовном дереве, задача о назначениях, задача коммивояжера, задача о кратчайшем пути между двумя выделенными вершинами) возникает неопределенность относительно оптимальности полученного решения таких задач. Возможны различные подходы к определению решения интервальной оптимизационной задачи ([1], [2], [3], [4]), однако при любом подходе в качестве решения рассматривается некоторое *множество* несравнимых решений. Между этими множествами решений существует определенная связь, показывающая, что чем жестче предъявляются требования к оптимальности решения, тем шире соответствующее множество решений. При любом подходе из множества решений необходимо выбрать одно решение. Задачу выбора можно решить, приписав каждому решению из предложенного множества некоторую числовую оценку его качества. В данной статье идея оценивания решений показана на задаче о кратчайшем пути между двумя выделенными вершинами на графе с интервально взвешенными ребрами.

1. Постановка задачи

Пусть задан связный ориентированный граф $G = (V, E)$ с множеством вершин V и множеством ребер E . Каждому ребру $e \in E$ сопоставлен вес - вещественный интервал $\mathbf{c}(e) = [\underline{c}(e), \bar{c}(e)]$. Пусть необходимо найти кратчайший путь между двумя вершинами - u и v . Допустимыми решениями задачи являются подграфы графа G - простые ориентированные цепи, соединяющие вершины u и v . Каждому допустимому решению $x = (V_x, E_x)$ сопоставим его интервальный вес $\mathbf{c}(x)$ как сумму интервалов [5] - весов ребер, входящих в соответствующий подграф:

$$\mathbf{c}(x) = \sum_{e \in E_x} \mathbf{c}(e) = \sum_{e \in E_x} [\underline{c}(e), \bar{c}(e)] = [c_1(x), c_2(x)].$$

Таким образом, каждому допустимому решению соответствует определенный интервал, который является оценкой значения целевой функции для данного решения.

Определение 1. Будем называть допустимое решение x оптимизационной задачи *оптимальным по Парето*, если для него не существует такого допустимого решения y , для которого выполняются неравенства $c_1(y) \leq c_1(x)$ и $c_2(y) \leq c_2(x)$, причем, хотя бы одно из этих неравенств - строгое.

Множество всех оптимальных по Парето решений рассматриваемой задачи будем называть множеством Парето P этой задачи.

Одним из подходов к определению решения оптимизационной задачи на графах с интервальными параметрами является понятие реализации весов ребер графа [3], т.е. выбор вещественных значений весов ребер внутри заданных интервалов.

Множество всех реализаций параметров обозначим через Q . Очевидно, что множество Q можно представить в виде декартова произведения отрезков $\mathbf{c}(e)$, $e \in E$:

$$Q = \mathbf{c}(e_1) \times \mathbf{c}(e_2) \times \dots \times \mathbf{c}(e_m),$$

где $\mathbf{c}(e_i)$ - интервальный вес ребра с номером i , m - число ребер графа G .

Таким образом, точка $c = (c_1, c_2, \dots, c_m)$ множества Q представляет собой набор вещественных параметров задачи, взятых из соответствующих интервалов:

$$Q = \{c = (c_1, c_2, \dots, c_m) | c_i \in [\underline{c}(e_i), \bar{c}(e_i)]\}.$$

Для каждой реализации весов рассматривается обычная (вещественная) оптимизационная задача [6].

Определение 2. Допустимый подграф x будем называть *слабым* оптимальным решением исходной интервальной задачи, если он оптимален для *некоторой* реализации весов ребер графа G .

Множество всех слабых решений обозначим через W : $W = \{x_1, x_2, \dots, x_l\}$, где l - число слабых решений.

Определение 3. Допустимый подграф x будем называть *сильным* оптимальным решением исходной интервальной задачи, если он оптимален для *любой* реализации весов ребер графа G .

Очевидно, что если существует сильное решение, то оно принадлежит множеству слабых решений W . Сильное решение является "идеальным" решением интервальной оптимизационной задачи.

В качестве решения рассматриваемой задачи можно принять как множество Парето, так и множество слабых решений.

2. Основные результаты

Утверждение. Паретовское множество решений P является подмножеством множества слабых решений W : $P \subseteq W$.

Доказательство ([4], [8]). Паретовское решение $x \in P$ является оптимальным при следующей реализации весов ребер графа $c = (c_1, \dots, c_n)$:

$$c_i = \begin{cases} \underline{c}(e_i), & \text{if } e_i \in E_x \\ \bar{c}(e_i), & \text{if } e_i \notin E_x \end{cases}$$

Утверждение. Слабое решение x , полученное при реализации $c = (c_1, \dots, c_n)$:

$$c_i = \lambda \underline{c}(e_i) + (1 - \lambda) \bar{c}(e_i)$$

при $\lambda \in (0, 1)$, принадлежит Паретовскому множеству решений P .

Доказательство. Предположим противное. Пусть для x существует решение $y \neq x$, для которого по Определению 1 выполняются неравенства $c_1(y) \leq c_1(x)$ и $c_2(y) \leq c_2(x)$, причем, хотя бы одно из этих неравенств - строгое. Отсюда $\lambda c_1(y) \leq \lambda c_1(x)$, $(1 - \lambda)c_2(y) \leq (1 - \lambda)c_2(x)$ и, следовательно, $\lambda c_1(y) + (1 - \lambda)c_2(y) < \lambda c_1(x) + (1 - \lambda)c_2(x)$. Значит, при данной реализации решение y является оптимальным, что противоречит предположению.

Обозначим через Q_x множество реализаций, при которых слабое решение x является оптимальным ([4], [7]). Очевидно, что объединение по x всех множеств Q_x равно множеству Q : $\cup_{x \in W} Q_x = Q$.

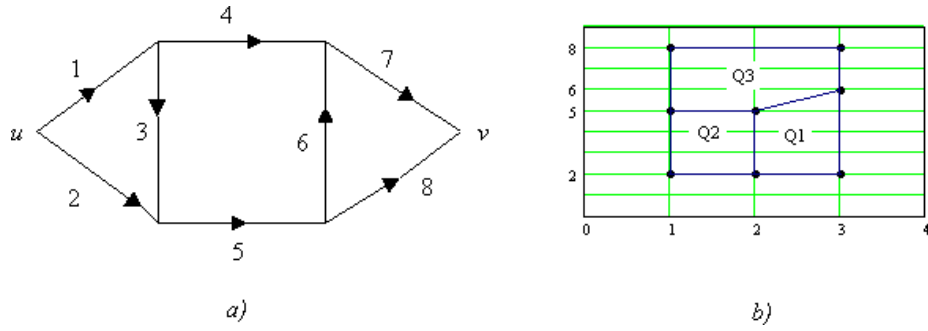


Рис. 1: Задача о кратчайшем пути между двумя вершинами u и v на графе G : a) ориентированный граф G , b) разбиение множества параметров Q .

Утверждение. Если веса всех ребер графа G строго интервальные, т.е. $\bar{c}(e) - \underline{c}(e) > 0 \forall e \in E$, то для любых двух слабых решений $x \neq y$ множества Q_x и Q_y могут пересекаться только по границе.

Доказательство. Пусть утверждение теоремы не выполняется. Тогда существует некоторая реализация $c = (c_1, c_2, \dots, c_m)$ - внутренняя точка пересечения множеств Q_x и Q_y , - при которой оптимальными будут два решения - x и y . В этом случае вес решения x будет равен весу решения y : $c(x) = c(y)$. Возьмем ребро e_i , такое что $e_i \in E_x \setminus E_y$. Если уменьшить вес c_i ребра e_i так, чтобы $c_i - \delta \in Q_x \cap Q_y$ также являлась внутренней точкой $Q_x \cap Q_y$, то равенство $c(x) = c(y)$ нарушится, и оптимальным станет только одно решение. Отсюда приходим к противоречию.

Для иллюстрации утверждения рассмотрим упрощенный пример, в котором веса только двух ребер строго интервальные. В этом случае рассматриваются проекции m -мерных множеств Q_x , $x \in W$, на плоскость.

Пример. Пусть в графе G (см. рис. 1а)), взвешенном следующим образом $\mathbf{c}(e_1) = 2, \mathbf{c}(e_2) = 2, \mathbf{c}(e_3) = 3, \mathbf{c}(e_4) = 3, \mathbf{c}(e_5) = [1, 3], \mathbf{c}(e_6) = 1, \mathbf{c}(e_7) = [2, 8], \mathbf{c}(e_8) = 6$, нужно найти кратчайший путь из вершины u в вершину v . Допустимые решения: $x_1 = (e_1, e_4, e_7)$, $x_2 = (e_2, e_5, e_6, e_7)$, $x_3 = (e_2, e_5, e_8)$, $x_4 = (e_1, e_3, e_5, e_6, e_7)$, $x_5 = (e_1, e_3, e_5, e_8)$. Соответствующие интервальные веса: $\mathbf{c}(x_1) = [7, 13]$, $\mathbf{c}(x_2) = [6, 14]$, $\mathbf{c}(x_3) = [9, 11]$, $\mathbf{c}(x_4) = [9, 17]$, $\mathbf{c}(x_5) = [12, 14]$. Паретовское множество решений совпадает с множеством слабых решений: $P = W = \{x_1, x_2, x_3\}$. В множестве параметров Q слабым решениям x_1, x_2, x_3 соответствуют множества Q_1, Q_2, Q_3 (см рис. 1б)).

Пусть $\mu(\diamond)$ - мера, определенная на множестве подмножеств множества Q . Каждому слабому решению $x_i \in W$ сопоставим величину p_i , равную отношению $\frac{\mu(Q_i)}{\mu(Q)}$, где Q_i - множество параметров, при которых решение x_i оптимально.

Определение 4. Величину

$$p_i = \frac{\mu(Q_i)}{\mu(Q)}$$

будем называть *вероятностью* оптимальности слабого решения x_i .

Очевидно, что $\sum_{i=1}^l p_i = 1$.

Таким образом, каждому слабому решению приписано некоторое число, которое может отражать качество этого решения. Чем больше вероятность оптимальности данного решения, тем оно предпочтительнее.

Теперь можно сформулировать правило выбора единственного оптимального решения оптимизационной интервальной задачи: *слабое решение с наибольшей вероятностью оптимальности можно принять в качестве решения задачи.*

Пример. Для рассмотренного графа (см. рис. 1а), б)) вероятности оптимальности слабых решений x_1, x_2, x_3 равны соответственно $p_1 = 0.2917, p_2 = 0.25, p_3 = 0.4583$. В качестве оптимального решения целесообразно принять слабое решение x_3 , имеющее наибольшую вероятность.

Для отыскания вероятностей слабых решений был использован метод имитационного моделирования. Анализ результатов численных экспериментов показал, что наибольшую вероятность имеет решение с минимальной серединой интервального веса. То есть если взять реализацию весов ребер графа, в которой каждому ребру $e \in E$ приписана середина соответствующего интервала $\frac{\overline{C}(e) - \underline{C}(e)}{2}$, то полученное при такой реализации оптимальное решение имеет наибольшую вероятность. Однако, если таких решений несколько, то из них наибольшую вероятность имеет решение, имеющее минимальную верхнюю границу интервального веса. К сожалению, данное наблюдение пока не подтверждено теоретически. Можно лишь утверждать, что полученное решение принадлежит множеству Парето.

Список литературы

- [1] И. И. Еремин *Противоречивые модели оптимального планирования* - М.: Наука, 1988.-160 с.
- [2] J. Rohn *Complexity of Some Linear Problems with Interval Data*. - Reliable Computing, 1997. - V.3, N3, pp. 315–323.
- [3] H. Yaman, O.E. Karasan, M.C. Pinar *Minimum Spanning Tree Problem with Interval Data*. - Technical Report 9909, Department of Industrial Engineering, Bilkent University, Ankara, Turkey, 1999.
- [4] Г.Л. Козина, Р.К. Кудерметов *Оценка качества решений оптимизационной задачи на графах с интервальными параметрами*. - Радіоелектроніка, інформатика, управління. - Запоріжжє: ЗНТУ, 2002. - N2, - с. 93-96.
- [5] Г. Алефельд, Ю. Херцбергер *Введение в интервальные вычисления*. - Пер. с англ. Г.Е. Минца, А.Г. Яковлева / Под ред. Ю.В. Матиясевича. - М.: Мир, 1987. - 356 с.
- [6] X. Пападимитриу, К. Стайглиц *Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность*. - Пер. с англ. - М.:Мир, 1985. - 512 с.
- [7] И.В. Козин, Г.Л. Козина *О структуре множества слабых решений интервальных задач на графах*. - Тезисы докладов научной конференции "Математическое программирование и приложения", Екатеринбург, Россия, 24-28 февраля 2003. Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН, 2003, с.147-148.
- [8] G. Kozina *Discrete Optimization Problems with Interval Data: Pareto Set of Solutions or Set of Weak Solutions?* - Reliable Computing, 2004, V.10, N6, pp. 469-487.

THE RULE OF SOLUTION CHOICE FOR OPTIMIZATION PROBLEMS ON GRAPHS WITH INTERVAL PARAMETERS

G.L. Kozina

Zaporozhye National Technical University, Zaporozhye
e-mail: ains@comint.net

Abstract. We consider shortest path between pair vertices problem on graph with intervally-weighted edges. Possible optimal solution sets are described, the relation between these sets is established, and the rule for making decision is proposed.

Key words: optimization problems on graphs, interval parameters, interval analysis, Pareto set, weak solution, strong solution, probability

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ И ПОРЯДКОВЫЕ СТРУКТУРЫ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ОКРУГЛЕНИЙ

А.Л. Крюкова

Вологодский государственный педагогический университет, Вологда
e-mail: krukova@vologda.ru

Аннотация. В статье мы рассматриваем отношение конгруэнции, алгебраические и порядковые структуры на множестве интервальных округлений. В частности, идемпотентное полукольцо и дистрибутивную решетку интервальных округлений.

Ключевые слова: Интервальное округление, идемпотентное полукольцо, дистрибутивная решетка.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ПРИМЕРЫ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ОКРУГЛЕНИЙ

Возникновение теории интервальных округлений связано с необходимостью унификации процедур округления, используемых при обработке приближенных данных. Истоки алгебраической теории округлений содержатся в работе Кулиша [1], который рассматривает их как отображения $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющие некоторым естественным требованиям. Более удобной и наглядной базой для построения теории округлений является интервальная арифметика. Определение округления на базе интервальной арифметики принадлежит Каминскому [3].

Определение 1.1.

Интервальным округлением (I-округлением) называется отображение $\varphi : \mathbb{IR} \rightarrow \mathbb{IR}$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

$$(\forall A \in \mathbb{IR}) (A \subseteq \varphi(A)), \quad (1)$$

$$(\forall A, B \in \mathbb{IR}) (A \subseteq B \Rightarrow \varphi(A) \subseteq \varphi(B)), \quad (2)$$

$$\varphi^2 = \varphi. \quad (3)$$

Множество интервальных округлений включает в себя весьма широкий класс отображений. Рассмотрим некоторые из них.

1. $\varphi^{(k, l)}([a; b]) = [a_k^-; b_l^+]$, где a_k^- (соответственно b_l^+) – результат обычного (числового) округления $a(b)$ до k -го (l -го) десятичного разряда по недостатку (по избытку) (k, l – любые целые числа). Такие I-округления называются *регулярными*. Множество всех регулярных округлений, дополненное тождественным отображением ε и отображениями $\varphi^{(k, \infty)}([a; b]) = [a_k^-; b]$ и $\varphi^{(\infty, l)}([a; b]) = [a; b_l^+]$, обозначим $\Phi^{(Z)}$.

2. $\Phi_0^{(Z)}$ множество нуль-кусочных округлений, то есть отображений вида

$$\varphi_0^{(k, l)}([a; b]) = \begin{cases} [a; b_l^+], & a \geq 0, \\ [a_k^-; b], & b \leq 0, \\ [a_k^-; b_l^+], & a < 0 < b. \end{cases}$$

3. $\varphi_M(A) = [-\max(|a|, |b|); \max(|a|, |b|)]$

4. Пусть $U = [u; v]$ – фиксированный отрезок, содержащий нуль: $u < 0 < v$. Положим

$$\varphi_U([a; b]) = \begin{cases} [a; b], & [a; b] \cap U = \emptyset \\ [\min(a, u); \max(b, v)], & [a; b] \cap U \neq \emptyset. \end{cases}$$

5. δ -округления. Выберем и зафиксируем действительное число $\delta > 0$, тогда результат округления определяется формулой:

$$\varphi([a, b]) = \begin{cases} [\delta, b], & a \geq \delta, \\ [a, -\delta], & b \leq -\delta, \\ [a, b], & [a, b] \cap [-\delta, \delta] \neq \emptyset \end{cases}$$

Обширность множества Φ вызывает желание ограничить его, исключив из него “патологические” (к ним мы относим отображения из примеров 3 и 4), и приблизить действие произвольного I-округления к действию регулярных округлений.

2. ОПЕРАЦИИ НА МНОЖЕСТВЕ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ОКРУГЛЕНИЙ

Развитие теории интервальных округлений связано с возможностью задавать на множестве Φ алгебраические и порядковые структуры.

Определим для элементов из Φ операции сложения

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(A) = \varphi_1(A) \cap \varphi_2(A) \quad (4)$$

и умножения

$$(\varphi_1 \cdot \varphi_2)(A) = \varphi_2(\varphi_1(A)). \quad (5)$$

Обе они ассоциативны и идемпотентны, кроме того, сложение коммутативно и обладает “аннулирующим” элементом $\varepsilon(A) = A$. Относительно сложения множество Φ замкнуто, то есть алгебра $\langle \Phi, + \rangle$ является полугруппой. Для умножения аналогичные утверждения, вообще говоря, не верны. Однако имеют место следующие предложения [3]:

Утверждение 2.1. Если оба произведения $\varphi\psi$ и $\psi\varphi$ I-округлений φ и ψ являются I-округлениями, то φ и ψ коммутируют: $\varphi\psi = \psi\varphi$.

Утверждение 2.2. Если I-округления φ и ψ коммутируют друг с другом, то оба произведения $\varphi\psi$ и $\psi\varphi$ являются I-округлениями.

В силу утверждений 2.1, 2.2 алгебра $\langle \bar{\Phi}, \cdot \rangle$, где $\bar{\Phi}$ – множество всех коммутирующих друг с другом интервальных округлений, содержащее все регулярные округления, является полугруппой. Округление φ_M, φ_U в ней не содержится, так как они не коммутируют с регулярными округлениями.

Отсюда следует, что I-округления φ_M и φ_U не содержатся ни в какой из коммутативных полугрупп I-округлений, содержащих $\Phi^{(Z)}$, которые нас собственно и будут интересовать. Однако мы не можем утверждать, что другие неприемлемые для нас отображения не попадут в упомянутые выше полугруппы.

Таким образом, введение на некотором подмножестве множества Φ алгебраической структуры позволяет исключить из рассмотрения, по крайней мере, некоторые округления “патологического” типа.

3. ДИСТРИБУТИВНАЯ РЕШЕТКА ИНТЕРВАЛЬНЫХ ОКРУГЛЕНИЙ

В работе [3] показано, что, задавая на множестве Φ всех I-округлений отношение порядка \leq условием

$$\varphi_1 \leq \varphi_2 \Leftrightarrow (\forall A) (\varphi_2(A) \subseteq \varphi_1(A)), \quad (6)$$

мы получим верхнюю полурешетку, в которой $(\varphi_1 \vee \varphi_2)(A) = \varphi_1(A) \cap \varphi_2(A)$.

Определение 3.1.

Пусть Ψ – подмножество в множестве Φ всех I-округлений, удовлетворяющее условиям: любые два округления, содержащиеся в Ψ , коммутируют по умножению, $\Phi^{(Z)} \subseteq \Psi$,

Ψ замкнуто относительно операций сложения и умножения.

Назовем такое множество Ψ *R-множеством*. R-множества в множестве Φ существуют: примером может служить $\Phi^{(Z)}$. Разумеется, само Φ R-множеством не является. Опираясь на лемму Куратовского-Цорна, легко показать, что существуют максимальные R-множества. Обозначим через $\overline{\overline{\Phi}}$ одно из них.

Утверждение 3.1. Максимальное R-множество $\overline{\overline{\Phi}}$ является решеткой.

В самом деле, алгебра $\langle \overline{\overline{\Phi}}, \cdot \rangle$ является коммутативной полугруппой идемпотентов. В такой полугруппе, как хорошо известно, можно ввести так называемое отношение естественного порядка \leq_1 условием

$$\varphi_1 \leq_1 \varphi_2 \Leftrightarrow \varphi_1 \varphi_2 = \varphi_1, \quad (7)$$

относительно которого $\overline{\overline{\Phi}}$ является нижней полурешеткой, в которой операция \wedge определяется условием $\varphi_1 \wedge \varphi_2 = \varphi_1 \varphi_2$. В работе [3] показано, что в полугруппе $\langle \overline{\overline{\Phi}}, \cdot \rangle$ отношение естественного порядка \leq_1 (7) и отношение \leq (6) совпадают. Так как $\overline{\overline{\Phi}}$ замкнуто относительно сложения, и так как $(\varphi_1 + \varphi_2)(A) = \varphi_1(A) \cap \varphi_2(A) = (\varphi_1 \vee \varphi_2)(A)$, то $\varphi_1 \vee \varphi_2 \in \overline{\overline{\Phi}}$.

Утверждение 3.2. Решетка $\langle \overline{\overline{\Phi}}, \vee, \wedge \rangle$ дистрибутивна.

Доказательство. Действительно, $(\varphi \wedge (\psi \vee \chi))(A) = (\varphi(\psi \vee \chi))(A) = (\psi \vee \chi)(\varphi(A)) =$
 $= \psi(\varphi(A)) \cap \chi(\varphi(A)) = (\varphi\psi)(A) \cap (\varphi\chi)(A) = (\varphi\psi \vee \varphi\chi)(A) = ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi))(A),$
 следовательно, $\varphi \wedge (\psi \vee \chi) = (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$.

4. ИДЕМПОТЕНТНОЕ ПОЛУКОЛЬЦО ИНТЕРВАЛЬНЫХ ОКРУГЛЕНИЙ

Определение 4.1.

Идемпотентным полукольцом (ИПК) [7] называется алгебра $\langle S, +, \cdot \rangle$, в которой обе операции ассоциативны, кроме того, сложение коммутативно, идемпотентно и выполняются левый и правый дистрибутивные законы: $x(y + z) = xy + xz$, $(x + y)z = xz + yz$.

Нетрудно проверить, что алгебра $\langle \Phi^{(Z)}, +, \cdot \rangle$ является ИПК. Более того, алгебра

$\langle \overline{\Phi}, +, \cdot \rangle$ является идемпотентным полукольцом. Возвращаясь, к свойствам тех операций, которые были рассмотрены выше, мы можем заметить, что особую сложность представляет доказательство правого дистрибутивного закона, а проверка всех остальных пунктов определения 4.1. тривиальна. Проведем необходимые рассуждения.

Определение 4.2.

Будем понимать под *объединением округлений* следующее

$$(\forall A \in IR) ((\varphi \cup \psi)(A) = \varphi(A) \cup \psi(A)). \quad (8)$$

Легко видеть, что объединение двух округлений удовлетворяет условиям (1) и (2), но совсем не обязано быть идемпотентным, то есть не всегда является интервальным округлением.

Однако имеют место включения $\varphi \cup \psi \subseteq \varphi\psi \subseteq (\varphi \cup \psi) \cdot (\varphi \cup \psi) \subseteq \varphi\psi \cdot \varphi\psi = \varphi\psi$, таким образом

$$\varphi\psi = (\varphi \cup \psi) \cdot (\varphi \cup \psi). \quad (9)$$

Утверждение 4.1. Алгебра $\langle \overline{\Phi}, +, \cdot \rangle$ является идемпотентным полукольцом.

Доказательство. Выполнение левого дистрибутивного закона в $\overline{\Phi}$ легко проверить $\forall A \in IR, (\chi(\varphi + \psi))(A) = (\varphi + \psi)(\chi(A)) = \varphi(\chi(A)) \cap \psi(\chi(A)) = \chi\varphi(A) + \chi\psi(A)$. Покажем теперь, что и правый дистрибутивный закон выполнен, то есть имеет место равенство $\chi(\varphi(A) \cap \psi(A)) = \chi(\varphi(A)) \cap \chi(\psi(A))$. Согласно (8) и (9), $\chi \cdot (\varphi \cap \psi) = (\chi \cup (\varphi \cap \psi)) \cdot (\chi \cup (\varphi \cap \psi))$ и $(\varphi \cap \psi) \cdot \chi = ((\varphi \cap \psi) \cup \chi) \cdot ((\varphi \cap \psi) \cup \chi)$. В силу равенства правых частей и левые части равны $\chi \cdot (\varphi \cap \psi) = (\varphi \cap \psi) \cdot \chi$. Следовательно, и правый дистрибутивный закон выполнен.

5. ОТНОШЕНИЕ КОНГРУЭНЦИИ

В [3] показано, что модель $\langle \Phi, \leq \rangle$ является полной верхней полурешеткой, иными словами в ней любое семейство A I-округлений имеет наименьшую верхнюю границу $\vee A$. Подмодель $\langle \Psi, \leq \rangle$ является подрешеткой полурешетки $\langle \Phi, \leq \rangle$.

В множестве Φ важную роль играют регулярные округления. Алгебра $\langle \Phi^{(Z)}, \cdot \rangle$ является в полугруппе $\langle \overline{\Phi}, \cdot \rangle$ подполугруппой, кроме того модель $\langle \Phi^{(Z)}, \leq \rangle$ является подрешеткой в решетке $\langle \overline{\Phi}, \leq \rangle$. В работе [3] доказаны следующие предложения:

Утверждение 5.1. Если I-округление φ не является r -округлением, то существует покрывающее его r -округление, то есть такое r -округление ψ , что $\varphi < \psi$ и внутри отрезка $[\varphi; \psi]$ не содержится r -округлений.

Утверждение 5.2. Если I-округление φ не является r -округлением и имеет нижнюю границу, принадлежащую подрешетке $\Phi^{(Z)}$, то существует покрываемое им r -округление, то есть такое r -округление χ , что $\chi < \varphi$ и внутри отрезка $[\chi, \varphi]$ не содержится r -округлений. При этом χ является наименьшей верхней границей множества всех нижних границ, I-округления φ , содержащихся в подрешетке $\Phi^{(Z)}$.

Обратимся далее к упорядоченной полугруппе $\langle \overline{\Phi}, \cdot \rangle$. Обозначим через $\overline{\Psi}$ множество всех I-округлений из $\overline{\Phi}$, обладающих нижними границами в ее подполугруппе $\Phi^{(Z)}$. Легко видеть, что $\overline{\Psi}$ – подполугруппа полугруппы $\overline{\Phi}$.

Определение 5.1.

Назовем *наибольшей нижней регулярной границей* (н.н.р.г.) I-округления

$\varphi \in \overline{\Psi} \setminus \Phi^{(Z)}$ r -округление $\varphi^{(k,l)}$ такое, что $\varphi^{(k,l)} < \varphi$ и внутри отрезка $[\varphi^{(k,l)}; \varphi]$ нет r -округлений. Наибольшей нижней регулярной границей r -округления $\varphi^{(u,v)}$ будем считать его самого.

Согласно утверждению 5.2., у любого I-округления $\varphi \in \overline{\Psi}$ существует н.н.р.г., легко видеть, что она единственная [5]. Наибольшую нижнюю регулярную границу округления φ обозначать $\widehat{\varphi}_r$. Легко видеть, что $(\widehat{\varphi \cdot \psi})_r = \widehat{\varphi}_r \cdot \widehat{\psi}_r$, тогда верны следующие два утверждения [5].

Утверждение 5.3. Факторполугруппа $\overline{\Psi}/\text{Ker } f$ изоморфна $\Phi^{(Z)}$.

Заметим, что ядром гомоморфизма f является конгруэнция ρ , определяемая условием $\varphi_1 \rho \varphi_2 \Leftrightarrow (f(\varphi_1) = f(\varphi_2))$, иными словами $\varphi_1 \rho \varphi_2 \Leftrightarrow \widehat{\varphi}_{1r} = \widehat{\varphi}_{2r}$.

Утверждение 5.4. $\overline{\Psi}$ – связка полугрупп.

Действительно, факторполугруппа $\overline{\Psi}/\rho = \Phi^{(Z)}$ есть полугруппа идемпотентов. Кроме того, классы конгруэнции ρ являются полугруппами: если $\widehat{\varphi}_r = \varphi^{(k,l)}$, $\varphi^{(r,s)}$, то $\widehat{\varphi}_r = \varphi^{(k,l)} \cdot \varphi^{(r,s)}$.

В заключении заметим, что полученные структуры, к сожалению, пока не исследованы полностью. Мы не можем с уверенностью сказать, что та или иная из них, свободна от “патологий”, и действие всех ее элементов каким-либо образом сводится к действию регулярных округлений.

Список литературы

- [1] U. Kulisch *An axiomatic Approach to Rounded Computations*. - Numer. Math., 1971, N 18, p. 1-17.
- [2] Г. Алефельд, Ю.Херцбергер *Введение в интервальные вычисления*. М.: Мир, 1987, 356 с.
- [3] Т.Э. Каминский *К теории интервальных округлений* - В кн.: Исследования по математическому анализу и методике преподавания математики. Вологда: Русь, 2000, С.23-36.
- [4] Т.Е. Kaminsky *Interval rounding off lattice* - Intern. Congress on Computer Systems and Applied Math. Abstracts. - St. Petersburg, 1993.
- [5] А.Л. Крюкова *О полугруппе интервальных округлений* - В кн.: Труды 35-й Региональной молодежной конференции. Екатеринбург: УрО РАН, 2004, С.34-37.
- [6] А.Л. Крюкова *Идемпотентное полукольцо интервальных округлений* - В кн.: V Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям. Новосибирск: ИВТ СО РАН, 2004, С.23.
- [7] А.Н. Соболевский *Интервальная арифметика и линейная алгебра над идемпотентными полукольцами* - Доклады РАН, 1999, т. 369, N 6, С.747-749.

ALGEBRAIC AND ORDINAL STRUCTURES OF INTERVAL ROUNDINGS

A.L. Krukova

Vologda State Pedagogical University, Vologda
e-mail: krukova@vologda.ru

Abstract. In this paper we consider relation of congruence, algebraic and ordinal structures of interval roundings. There are idempotent semiring and distributive lattice of interval roundings.

Key words: interval rounding, idempotent semiring, distributive lattice.

ПСЕВДОРЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ИНТЕРВАЛЬНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ КОЭФФИЦИЕНТОВ

А.В. Панюков, Е.С. Чечулина

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск
e-mail: pav@susu.ac.ru, echechulina@plab.ru

Аннотация. Рассматривается система линейных алгебраических уравнений $\tilde{A}x = \tilde{b}$, в которой элементы матриц \tilde{A} и \tilde{b} представляют интервалы $\tilde{a}_{ij} = [\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}]$, $\tilde{b}_j = [\underline{b}_j, \bar{b}_j]$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. В качестве решения данной системы принимаются точки допустимого множества

$$S_{\tilde{A}x=\tilde{b}} = \left\{ x : (\forall i, j = 1, 2, \dots, n) (\forall a_{ij} \in \tilde{a}_{ij}) \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \in \tilde{b}_i \right) \right\}.$$

Если $S_{\tilde{A}x=\tilde{b}} = \emptyset$, то в качестве решения предлагается рассматривать множество допустимых точек системы уравнений с модифицированной правой частью $\tilde{b}(z) = [\underline{b} - z|\underline{b}|, \bar{b} + z|\bar{b}|]$, $z \geq 0$. Пусть $z^* = \inf\{z : S_{\tilde{A}x=\tilde{b}(z)} \neq \emptyset\}$. Псевдорешением исходной системы $\tilde{A}x = \tilde{b}$ называют внутренние точки допустимого множества $S_{\tilde{A}x=\tilde{b}(z^*)}$.

В работе доказано существование псевдорешения для любых интервальных систем линейных алгебраических уравнений и обсуждается способ его нахождения.

Ключевые слова: интервальная неопределенность, интервал, интервальная линейная система, псевдорешение.

Введение

Система линейных алгебраических уравнений - это фундаментальный объект, который встречается при решении многих задач. Часто оказывается, что коэффициенты рассматриваемой системы не могут быть заданы точно, но известны интервалы, которым они принадлежат. В условиях такой интервальной неопределенности коэффициентов необходимо уточнение определения решения. В работе [8] систематизированы подходы к учету интервальной неопределенности и дана их классификация. В соответствии с данной классификацией, AE -решением системы линейных алгебраических уравнений $\tilde{A}x = \tilde{b}$, в которой элементы матриц \tilde{A} и \tilde{b} представляют интервалы $\tilde{a}_{ij} = [\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}]$, $\tilde{b}_j = [\underline{b}_j, \bar{b}_j]$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, называют точки допустимого множества

$$S_{\tilde{A}x=\tilde{b}} = \left\{ x : (\forall i, j = 1, 2, \dots, n) (\forall a_{ij} \in \tilde{a}_{ij}) \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \in \tilde{b}_i \right) \right\},$$

EE -решением рассматриваемой системы уравнений называют точки множества

$$E_{\tilde{A}x=\tilde{b}} = \left\{ x : (\forall i, j = 1, 2, \dots, n) (\exists a_{ij} \in \tilde{a}_{ij}) \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \in \tilde{b}_i \right) \right\},$$

В работах [4, 5] доказано, что поиск EE -решения интервальной системы линейных уравнений является NP-трудной задачей. С другой стороны, в соответствии с теоремой Рона [7] любая точка

допустимого множества AE -решений допускает представление в виде $x = x^+ - x^-$, где x^+, x^- являются решением системы неравенств

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n [a_{ij}x_j^+ - \bar{a}_{ij}x_j^-] &\geq \underline{b}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n., \\ \sum_{j=1}^n [\bar{a}_{ij}x_j^+ - a_{ij}x_j^-] &\leq \bar{b}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ x^+, x^- &\geq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Следовательно, задача поиска AE -решений имеет полиномиальную сложность. Методы оценки AE -решений рассмотрены в работах [8, 9, 6] и др.

Во многих практических задачах система неравенств (1) оказывается плохо обусловленными или вообще несовместной. В этом случае можно по аналогии с работами [1, 3] ввести понятие псевдорешения. Целью данной работы является распространение понятия "псевдорешение" на системы уравнений с интервальной неопределенностью и построение методов их определения.

1. Постановка задачи

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений $\tilde{A}x = \tilde{b}$, в которой элементы матриц \tilde{A} и \tilde{b} представляют интервалы $\tilde{a}_{ij} = [a_{ij}, \bar{a}_{ij}]$, $\tilde{b}_j = [\underline{b}_j, \bar{b}_j]$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Для заданной системы уравнений построим параметризованное семейство систем уравнений $\tilde{A}x = \tilde{b}(z)$ с модифицированной правой частью $\tilde{b}(z) = [\underline{b} - z|\underline{b}|, \bar{b} + z|\bar{b}|]$, $z \geq 0$.

Пусть $z^* = \inf\{z : \mathbf{S}_{\tilde{A}x=\tilde{b}(z)} \neq \emptyset\}$. Псевдорешением исходной системы $\tilde{A}x = \tilde{b}$ будем называть внутренние точки допустимого множества $\mathbf{S}_{\tilde{A}x=\tilde{b}(z^*)}$.

Корректность введенного определения подтверждает теорема 1.

Теорема 1. Для любой системы интервальных уравнений $\tilde{A}x = \tilde{b}$ при всех $z \geq 1$ множество $\mathbf{S}_{\tilde{A}x=\tilde{b}(z)} \neq \emptyset$.

Доказательство.

В соответствии с теоремой Рона условие $\mathbf{S}_{\tilde{A}x=\tilde{b}(z)} \neq \emptyset$ эквивалентно совместности системы линейных неравенств

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n [a_{ij}x_j^+ - \bar{a}_{ij}x_j^-] &\geq \underline{b}_i - z|\underline{b}_i|, \quad i = 1, 2, \dots, n., \\ \sum_{j=1}^n [\bar{a}_{ij}x_j^+ - a_{ij}x_j^-] &\leq \bar{b}_i + z|\bar{b}_i|, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ x^+, x^- &\geq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Полагая в (2) $x^+ = x^- = 0$, получим

$$0 \geq \underline{b}_i - z|\underline{b}_i|, \quad 0 \leq \bar{b}_i + z|\bar{b}_i|, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Таким образом, для всех $z \geq 1$ имеет место включение $0 \in \mathbf{S}_{\tilde{A}x=\tilde{b}(z)}$. Теорема доказана.

2. Метод решения

Способ нахождения псевдорешения системы уравнений $\tilde{A}x = \tilde{b}$ дает

Теорема 2. Существует решение $x^{+*}, x^{-*} \in \mathbf{R}^n, z^* \in \mathbf{R}$ задачи линейного программирования

$$z \rightarrow \min_{x^+, x^-, z},$$

$$\sum_{j=1}^n (\underline{a}_{ij}x_j^+ - \bar{a}_{ij}x_j^-) \geq \underline{b}_i - z|\underline{b}_i|, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\sum_{j=1}^n (\bar{a}_{ij}x_j^+ - \underline{a}_{ij}x_j^-) \leq \bar{b}_i + z|\bar{b}_i|, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

$$x_j^+, x_j^-, z \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

при этом $x^* = x^{+*} - x^{-*}$ является псевдорешением системы $\tilde{A}x = \tilde{b}$

Доказательство.

Сначала докажем существование оптимального решения $x^{+*}, x^{-*} \in \mathbf{R}^n, z^* \in \mathbf{R}$ задачи линейного программирования (3). Из теоремы 1 и теоремы Рона следует, что множество допустимых решений рассматриваемой задачи не пусто. Задача двойственная рассматриваемой имеет вид

$$\sum_{i=1}^n \underline{b}_i y_{1i} - \sum_{i=1}^n \bar{b}_i y_{2i} \rightarrow \max_{y_{1i}, y_{2i}},$$

$$\sum_{i=1}^n \underline{a}_{ji} y_{1i} - \sum_{i=1}^n \bar{a}_{ji} y_{2i} \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$-\sum_{i=1}^n \bar{a}_{ji} y_{1i} + \sum_{i=1}^n \underline{a}_{ji} y_{2i} \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^n |\underline{b}_i| y_{1i} + \sum_{i=1}^n |\bar{b}_i| y_{2i} \leq 1,$$

$$y_{1i}, y_{2i} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

Легко заметить, что решение $y_{1i} = y_{2i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$ является допустимым решением задачи (4). Таким образом, показано существование допустимых решений как у прямой, так и у двойственной задач линейного программирования (задачи (3) и (4)). Из теоремы двойственности в линейном программировании следует существование у этих задач оптимальных решений.

Пусть x^{+*}, x^{-*}, z^* оптимальное решение задачи (3). Из теоремы Рона следует, что $x^* = x^{+*} - x^{-*}$ является допустимым решением системы $\tilde{A}x = \tilde{b}(z^*)$. Из оптимальности z^* следует, что x^* является псевдорешением интервальной системы линейных уравнений $\tilde{A}x = \tilde{b}$.

Теорема доказана.

Таким образом, введенное в работе понятие "псевдорешение" интервальной системы линейных уравнений является вполне конструктивным и позволяет давать приемлимые результаты при решении интервальных систем в том случае, когда множество допустимых решений пусто либо исходная задача является плохо обусловленной.

Авторы признательны С.П.Шарому за конструктивную критику и предоставленные авторам материалы по интервальному анализу.

Список литературы

- [1] Иванов В.К. *О линейных некорректных задачах* // ДАН СССР. - 1962. - Т.145. - №2 - С.270-272.
- [2] Панюков А.В., Чечулина Е.С. *Решения систем линейных алгебраических уравнений при интервальной неопределенности коэффициентов.* // Алгоритмический анализ неустойчивых задач: Тез. докладов Всерос. конф., Екатеринбург, 2-6 февр. 2004 г. - Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2004, стр., 291-292.
- [3] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач.* - М.: Наука, 1979. - 285 с.
- [4] Lakeyev A.V., Kreinovich V. *NP-Hard Classes of Linear Algebraic Systems with Uncertainties* - Reliable Computing 3, 1997. - pp. 51-81.
- [5] Lakeyev A.V., Kreinovich V. *Optimal Solution of Interval Linear Systems is Intractable (NP-Hard)* - Interval Computations 1, 1993. - pp. 6-14.
- [6] Neumaier A. *Interval Methods for Systems of Equations.* - Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [7] Rohn, J. *Inner Solutions of Linear Interval Systems*, in: Nickel, K. (ed.), Interval Mathematics 1985, Lecture Notes in Computer Science 212, Springer, Berlin, 1986, pp. 157-158.
- [8] Shary S.P. *A new technique in systems analysis under interval uncertainty and ambiguity* // Reliable Computing. - 2002. - Vol. 8., №5 - P.321-418.
- [9] Shary S.P. *Solving the linear interval tolerance problem* // Mathematics and Computers in Simulation. - 1995. - Vol. 39. - P.53-85.

PSEUDOSOLUTIONS OF SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS WITH INTERVAL UNCERTAINTY OF COEFFICIENTS

A.V. Panyukov, E.S. Chechulina

South-Ural State University, Chelyabinsk
e-mail: pav@susu.ac.ru, echechulina@plab.ru

Abstract. The system of linear equations $\tilde{A}x = \tilde{b}$, where elements of the matrixes \tilde{A} and \tilde{b} are the intervals $\tilde{a}_{ij} = [\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}]$, $\tilde{b}_j = [\underline{b}_j, \bar{b}_j]$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, is under consideration. As a solution of the initial system we consider the points of the tolerable solution:

$$S_{\tilde{A}x=\tilde{b}} = \left\{ x : (\forall i, j = 1, 2, \dots, n) (\forall a_{ij} \in \tilde{a}_{ij}) \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \in \tilde{b}_i \right) \right\}.$$

If $S_{\tilde{A}x=\tilde{b}(z)} = \emptyset$, the tolerable solution set of the system with the modified right-side vector $\tilde{b}(z) = [\underline{b} - z \underline{b}, \bar{b} + z \bar{b}]$, $z \geq 0$ is considered a solution. Let $z^* = \inf\{z : S_{\tilde{A}x=\tilde{b}(z)} \neq \emptyset\}$. We call inner points of the tolerable set $S_{\tilde{A}x=\tilde{b}(z^*)}$ a pseudosolution of the system $\tilde{A}x = \tilde{b}$.

This paper presents the proof of the existence of a pseudosolution for any interval linear system of equations and the way of finding it is discussed.

Key words: interval uncertainty, interval, interval linear system, pseudosolution

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ПРОЦЕДУРА ОПРЕДЕЛЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ЧИСЕЛ ИНТЕРВАЛЬНОЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ МАТРИЦЫ

С. П. Соколова, А.Г. Тохтабаев

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН,
sokolova_sv@mail.ru

В докладе предложена и исследована вычислительная процедура определения сингулярных чисел интервальной матрицы. Приведены примеры вычисления сингулярных чисел и числа обусловленности интервальных действительных матриц.

1. Математическая основа

Для интервальной действительной матрицы $\mathbf{A}^{n \times m}$, i сингулярное число $\sigma_i(\mathbf{A})$ представляется интервалом, ограничивающим множество сингулярных чисел любой матрицы $\tilde{A} \in \mathbf{A} \in IR^{n \times m}$ т.е.:

$$\sigma_i(\mathbf{A}) = \text{hull} \left\{ \sigma_i(\tilde{A}) \mid (\forall \tilde{A} \in \mathbf{A}) \right\},$$

где $IR^{n \times m}$ - интервальное пространство соответствующей размерности.

Задача определения i интервального сингулярного числа интервальной матрицы $\mathbf{A} \in IR^{n \times m}$ формулируется следующим образом.

Необходимо найти минимум и максимум матричной целевой функции i сингулярного числа $\sigma_i(A)$ в области элементов интервальной матрицы \mathbf{A} . Поставленная задача решена градиентным методом. Для представления вектора-градиента функции i сингулярного числа в аналитическом виде рассмотрим свойства сингулярных чисел и сингулярных векторов с точки зрения линейных пространств.

Представим любую матрицу $A = \{a_{ij}\} \in R^{n \times m}$ через сумму ее сингулярных составляющих:

$$A = \sum_{i=1}^r s_i \cdot U_i \cdot V_i^T,$$

где $r = \min\{n, m\}$, s_i, U_i, V_i - соответственно, сингулярные числа, левый и правый сингулярный векторы. Из элементов матрицы A составим вектор длины $n \cdot m$ в следующем виде:

$$V = [a_{11}, \dots, a_{1m}, a_{21}, \dots, a_{2m}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nm}]^T.$$

Аналогично составим векторы Y_i из элементов матриц $\tilde{A}_i = U_i \cdot V_i^T$. Таким образом, получим:

$$Y = \sum_{i=1}^r s_i \cdot Y_i. \quad (1)$$

Система векторов Y_i является биортогональной, т.е. $Y_i^T Y_i = 1, Y_i Y_j = 0$. Следовательно, вектор Y принадлежит r -мерному подпространству, пространства $R^{n \cdot m}$, определенному в базисе $Y_i, i = \overline{1, r}$ векторов и имеет координаты $s_i, i = \overline{1, r}$, совпадающие, соответственно, со значениями сингулярных чисел матрицы A .

Рассмотрим интервальную систему линейных уравнений

$$\hat{Y} \cdot X = Y, \quad (2)$$

где $\hat{Y}^{nm \times (i-1)}$ - матрица, составленная из столбцов (векторов) Y_i т.е. $\hat{Y} = [Y_1, \dots, Y_{i-1}]$; Y - интервальный вектор, составленный из интервальных элементов исходной матрицы A .

Если в качестве переменных вектора X принять сингулярные числа, что область решения системы (2) будет покрываться Ω . Поскольку вектор $X_0 = [s_1, \dots, s_{i-1}]^T$, составленный из $(i-1)$ сингулярных чисел матрицы A_0 , является одним из решений системы (2), то область Ω не пустая.

Градиент функции $\sigma_k(A)$ в точке A_0 по элементу $A(i, j)$ представляется:

$$\text{grad}_{A(i,j)}(\sigma_k(A_0)) = \frac{\partial(\sigma_k(A_0))}{\partial A(i,j)} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\frac{\sigma_k(A_0 + D) - \sigma_k(A_0)}{\Delta} \right),$$

$$\text{где матрица } D(m,l) = \begin{cases} \Delta, (m=i, l=j) \\ 0 \end{cases}.$$

Пусть U_k, V_k - k левый и правый векторы матрицы A_0 ; \bar{U}_k, \bar{V}_k - k левый и правый векторы матрицы $(A_0 + D)$.

Имеем:

$$\begin{aligned} \text{grad}_{A(i,j)}(\sigma_k(A_0)) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\frac{\sigma_k(A_0 + D) - \sigma_k(A_0)}{\Delta} \right) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\frac{\bar{U}_k^T \cdot (A_0 + D) \cdot \bar{V}_k - U_k^T \cdot A_0 \cdot V_k}{\Delta} \right) = \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\frac{\bar{U}_k^T \cdot A_0 \cdot \bar{V}_k - U_k^T \cdot A_0 \cdot V_k}{\Delta} \right) + U_k(i) \cdot V_k(j). \end{aligned}$$

Обозначим:

$$z_{ij} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\frac{\bar{U}_k^T \cdot A_0 \cdot \bar{V}_k - U_k^T \cdot A_0 \cdot V_k}{\Delta} \right),$$

тогда:

$$\text{grad}_{A(i,j)}(\sigma_k(A_0)) = z_{ij} + U_k(i) \cdot V_k(j).$$

Таким образом, матрица градиентов функции k сингулярного числа имеет вид:

$$\nabla \sigma_k(A_0) = Z + \begin{pmatrix} U_k(1) \cdot V_k(1) & \dots & U_k(1) \cdot V_k(m) \\ \vdots & & \vdots \\ U_k(n) \cdot V_k(1) & \dots & U_k(n) \cdot V_k(m) \end{pmatrix} = Z + U_k \cdot V_k^T, \quad (3)$$

где элементы матрицы Z представлены компонентами z_{ij} соответственно.

Соотношение (3) представляет матрицу градиентов в аналитическом виде, но неопределенность матрицы Z не позволит легко вычислить матрицу градиентов. Решению данной задачи помогут условия следующей теоремы:

Теорема 2. Нормированная матрица градиентов функции k сингулярного числа $\nabla \sigma_k(A)_{norm}$ и матрица $U_k \cdot V_k^T$ совпадают.

Доказательство условий теоремы приведено в [8].

Из теоремы 2 и соотношения 3 следует, что $Z = l \cdot U_k \cdot V_k^T$, где l какой-либо коэффициент. Таким образом:

$$\nabla \sigma_k(A_0) = U_k \cdot V_k^T (l+1) \quad (4)$$

Соотношение (4) позволяет вычислять градиент сингулярного числа $\sigma_i(A_0)$ по соответствующим левому и правому сингулярным векторам матрицы A_0 и позволяет

сократить количество вычислений целевой функции с $(n \cdot m + 1)$ до одного вычисления векторов.

Вычислительная процедура минимизации и максимизации i сингулярного числа поэлементно в интервале $\mathbf{A} \in IR^{n \times m}$ представляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{A}_k &= A_k + d \cdot U_i(A_k) \cdot V_i^T(A_k), \\ A_{k+1}(i, j) &= \begin{cases} A(i, j), \hat{A}_k(i, j) < \underline{A}(i, j) \\ \bar{A}(i, j), \hat{A}_k(i, j) > \bar{A}(i, j) \\ \hat{A}_k(i, j), \hat{A}_k(i, j) \in \mathbf{A}(i, j) \end{cases} \\ A_0 &\in \mathbf{A}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $U_i(A_k), V_i(A_k)$ - i левый и правый сингулярные векторы матрицы A_k , $d \in [-1, 0) \cup (0, 1]$ - коэффициент, характеризующий направление (минимизация, максимизация) и длину шага оптимизации, A_0 - начальная матрица итерации.

С помощью (5) можно определить нижнюю и верхнюю границы интервальных сингулярных чисел $\sigma_i(\mathbf{A})$ интервальной сингулярной матрицы \mathbf{A} с заданной точностью.

Для формализации критерия останова процедуры (5) введены следующие переменные:

$$M = \frac{1}{l} \sum_{j=k-l+1}^k \sigma_i(A_j), \quad J = \frac{1}{2} \sum_{j=k-l+1}^k \left| \text{sign}(M - \sigma_i(A_j)) - \text{sign}(M - \sigma_i(A_{j-1})) \right|$$

где A_j - j матрица процедуры (5), k - номер текущего цикла итерации, M - среднее арифметическое i сингулярных чисел, полученных на l последних циклах.

Как видно, переменная J указывает на количество колебаний целевой функции (относительно установившейся величины), полученной на l последних циклах итерации. Итерацию (5) необходимо останавливать в следующих случаях:

- количество колебаний за определенное количество циклов превосходит заданную величину;
- отсутствие колебаний;
- достижение целевой функции нуля.

Таким образом, условие останова итерации (5) имеет вид:

$$(J > l - 2) \text{ or } (J = 0) \text{ or } (\sigma_i(A_k)). \quad (6)$$

При минимизации i сингулярного числа, процедуру (5) можно значительно ускорить, добавив в каждом цикле (5) следующее условие:

$$\text{Если} \begin{cases} A_{k+1} \neq \hat{A}_k \\ A_0 \in \mathbf{A}, \text{ при } A_0 = \sum_j^{i-1} s_j \cdot U_j \cdot V_j^T, \end{cases} \quad (7)$$

то $A_{k+1} = A_0$.

Ниже приведен вычислительный алгоритм получения оценки границ i интервального сингулярного числа интервальной матрицы \mathbf{A} .

Пусть $A_0 \in \{\inf(\mathbf{A}), \text{mid}(\mathbf{A}), \sup(\mathbf{A})\}$, величина шага оптимизации равна $d = -1$ при вычислении нижней границы, $d = 1$ - верхней границы.

Предложенный алгоритм содержит следующие шаги:

Шаг 1. Провести итерацию (5), останов осуществляется при выполнении неравенства (6).

⋮

Шаг к. Провести итерацию (5), но в качестве начальной матрицы принять матрицу, на которой остановилась итерация (5) на предыдущем шаге. При этом коэффициент d уменьшить в два раза.

По завершению данного алгоритма получатся три значения $S = \{S^{(inf)}, S^{(mid)}, S^{(sup)}\}$ при трех различных стартовых матрицах. Причем, при $d < 0$ наименьший элемент из множества S будет оценкой нижней границы множества i сингулярных чисел всевозможных точечных матриц из \mathbf{A} . При $d > 0$, наибольший элемент из S будет оценкой верхней границы с точностью ε .

Таким образом:

$$\begin{cases} \inf\{S^{(inf)}, S^{(mid)}, S^{(sup)}\} \approx \inf\{\sigma_i(\tilde{A}) \mid (\forall \tilde{A} \in \mathbf{A})\}, d < 0 \\ \sup\{S^{(inf)}, S^{(mid)}, S^{(sup)}\} \approx \sup\{\sigma_i(\tilde{A}) \mid (\forall \tilde{A} \in \mathbf{A})\}, d > 0 \end{cases}$$

Предложенный алгоритм имеет достаточно простую структуру и может быть легко реализован.

Пример

Продemonстрируем эффективность предложенного алгоритма на ряде численных примеров.

Пусть имеем следующую интервальную матрицу \mathbf{A} размерности (3×4) :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 22 & [8, 21] & [20, 60] & [-10, 10] \\ [2, 24] & 49 & [-50, 100] & 200 \\ 1 & -61 & [10, 100] & 2 \end{pmatrix}.$$

Методом полного перебора для матрицы \mathbf{A} получены следующие значения интервальных сингулярных чисел:

$$\sigma(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} [207.43, 237.44] \\ [59.96, 127.50] \\ [22.93, 60.85] \end{pmatrix}.$$

По предложенному алгоритму получены следующие значения интервальных сингулярных чисел:

$$\sigma(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} [206.34, 237.44] \\ [59.96, 127.62] \\ [22.93, 64.24] \end{pmatrix}.$$

Как видно, интервальные сингулярные числа, полученные по предложенному алгоритму, включают соответственно сингулярные числа, рассчитанные методом полного перебора. Время вычисления соответствующих интервальных сингулярных чисел с помощью метода полного перебора составило 20 мин, по предложенному алгоритму – 10 сек.

Воспользуемся числовым примером, приведенным в [5]. Интервальная матрица равна:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [2,3] & [1,1] \\ [0,2] & [0,1] \\ [0,1] & [2,3] \end{pmatrix}.$$

Для интервальной матрицы \mathbf{A} в [5] получены следующие интервальные значения сингулярных чисел $\sigma_1 = [2.5616 \ 4.5431]$, $\sigma_2 = [1.3134 \ 2.8541]$, по предложенному алгоритму - $\sigma_1 = [2.5616 \ 4.5431]$, $\sigma_2 = [1 \ 2.8541]$.

Как видно, второе сингулярное число, полученное по предложенному алгоритму, включает в себя второе сингулярное число, приведенное в [5]. Матрица, соответствующая нижней границе второго сингулярного числа, равна:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0.7531 & 0.7531 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Эта матрица не является граничной, как это предполагалось условиями [5].

Включение интервальных сингулярных чисел, полученных по предложенному алгоритму можно объяснить тем, что находится оптимальное решение и не обязательно угловое. В свою очередь, процедура, предложенная в [5], ориентирована только на получение решения с граничными матрицами. Данный пример демонстрирует, что допущения принятые в [5], налагают жесткие ограничения на решение.

Список литературы

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967.
2. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Мир, 1978.
3. Аоки М. Введение в оптимизацию. М.: Мир, 1977.
4. Neumaier A. Interval methods for system of equations. Cambridge, NY, 1990.
5. Deif A.S. Singular Values of an Interval Matrix. // Linear Algebra and its Applications, 151:125-133 (1991).
6. Wall M. E., Rechtsteiner A., Rocha L. M. Singular value decomposition and principal component analysis, Norwell, MA, 2003.
7. Romo T.D., Clarage J.B., Sorensen D.C., Phillips G.N. Automatic identification of discrete substrates in proteins: singular value decomposition analysis of time-averaged crystallographic refinements. //Proteins 1995, 22: 311-321.
8. Соколова С.П., Соколова Л.А. Интеллектуальные информационные системы на основе иммунокомпьютинга./Учебное пособие. Алматы: КБТУ, 2005.

УПРАВЛЕНИЕ ЗАПАСАМИ С УЧЕТОМ ПОТЕРЬ В УСЛОВИЯХ ИНТЕРВАЛЬНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Е. В. Чаусова

*Томский государственный университет, Томск
e-mail: chauev@mail.ru*

Аннотация. Рассматривается динамическая сетевая модель системы управления запасами с интервально заданным спросом и интервальными коэффициентами потерь запаса. Для анализа и расчета оптимальной стратегии управления применяется аппарат интервальной математики. С привлечением полной интервальной арифметики Каухера получены необходимые и достаточные условия существования допустимого управления, достаточные условия существования оптимальной допустимой стратегии управления. Найдена оценка скорости сходимости системы к оптимальному допустимому уровню запаса. Разработан вычислительный алгоритм определения оптимальной допустимой стратегии управления. Рассмотрен численный пример.

Ключевые слова: система управления запасами, сетевая модель, неизвестный спрос, потери запаса, интервальная неопределенность, интервальный анализ, арифметика Каухера.

Введение

Проблеме управления запасами посвящено большое количество работ [1–3]. Современная теория управления запасами позволяет оптимально (например, с точки зрения минимума затрат) управлять как детерминированными, так и стохастическими системами. Однако детерминированные модели не учитывают априорную неопределенность, свойственную реальным системам управления запасами. Вероятностные – требуют точного задания вероятностных характеристик неопределенных параметров системы (факторов неопределенности) и довольно сложны в смысле получения численных результатов. При этом во многих случаях нет основания или недостаточно информации для того, чтобы считать факторы неопределенности случайными, что заметно снижает эффективность применения таких моделей на практике. Это приводит к необходимости учета неопределенности нестохастической (или, в общем случае, неизвестной) природы.

В работе [4] для моделирования и оптимизации систем управления запасами с нестохастической неопределенностью в данных предлагается использовать аппарат интервального анализа [5, 6]. В тех случаях, когда невозможно вероятностное описание факторов неопределенности, интервальные модели более полно отражают характер неопределенности и гарантируют высокий уровень обслуживания системы. В работах [7, 8] рассматриваются динамические сетевые модели систем управления запасами с интервальной неопределенностью спроса и потерями запаса. Коэффициенты потерь запаса учитывают естественные изменения в его количестве и свойствах (порчу, естественную убыль, устаревание запаса и т.д.) и считаются априорно известными. Однако на практике их довольно сложно оценить и модели с точно заданными коэффициентами потерь могут оказаться слишком "грубыми".

Результатом данной работы является обобщение и развитие работы [7] на случай с интервально заданными коэффициентами потерь запаса. Такое предположение более точно соответствует реальности, поскольку в большинстве случаев известными бывают не сами значения коэффициентов потерь, а интервалы их возможных значений. С привлечением полной интервальной арифметики Каухера [9, 10] для этой модели были получены необходимые и достаточные условия существования допустимого управления, доказана теорема о виде оптимального допустимого уровня запаса, определены достаточные условия существования оптимальной допустимой стра-

тегии управления и найдена оценка скорости сходимости системы к оптимальному допустимому уровню запаса. Приведен численный пример.

1. Описание модели и постановка задачи

Рассмотрим систему управления запасами в дискретном времени (с периодическим контролем уровня запасов), представленную в виде динамической сети. Сетевые модели описывают широкий класс систем управления запасами: системы снабжения, производства-распределения, транспортные, информационные и другие системы [11, 12]. Узлы сети задают виды и размеры управляемых запасов, а дуги – управляемые и неуправляемые потоки в сети. Управляемые потоки перераспределяют ресурсы между узлами сети, возможно перерабатывая их, и планируют поставки извне. Неуправляемые потоки описывают неизвестный спрос на ресурсы в узлах сети, который формируется как со стороны других узлов, так и внешнего окружения. Динамика сети описывается следующим разностным уравнением

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + Ed(t), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояний системы, i -ая компонента которого описывает уровень запаса в i -ом узле сети (на i -ом складе) в момент времени t ; $u(t) \in \mathbb{R}^q$ – вектор управляющих воздействий (управление), компоненты которого представляют управляемые потоки в сети в момент времени t ; $d(t) \in \mathbb{R}^m$ – вектор неуправляемых воздействий (спрос), компоненты которого описывают неуправляемые потоки в сети в момент времени t ; структура сети определяется структурой матриц $B \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $E \in \mathbb{R}^{n \times m}$; диагональная матрица $A = \text{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $0 < \alpha_i \leq 1$, $i = \overline{1, n}$ учитывает возможные потери запаса в узлах сети.

Спрос $d(t)$ точно не известен, но диапазон его возможных значений ограничен интервалом:

$$d(t) \in \mathbf{D}, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

где $\mathbf{D} \in \mathbb{I}\mathbb{R}^m$, $\mathbf{D} = [\underline{\mathbf{D}}, \overline{\mathbf{D}}]$, $\mathbf{D} \geq 0$; $\mathbb{I}\mathbb{R} = \{\mathbf{x} = [\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}] \mid \underline{\mathbf{x}} \leq \overline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}\}$ – множество всех правильных интервалов. Границы интервала спроса всегда можно оценить с достаточной степенью достоверности по статистическим данным или руководствуясь накопленным опытом и интуитивными предположениями.

На состояния запаса $x(t)$ и управления $u(t)$ накладываются ограничения, обусловленные возможностями системы:

$$x(t) \in \mathbf{X}, \quad t \geq 0, \quad (3)$$

$$u(t) \in \mathbf{U}, \quad t \geq 0, \quad (4)$$

где $\mathbf{X} \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n$, $\mathbf{X} = [0, \overline{\mathbf{X}}]$; $\mathbf{U} \in \mathbb{I}\mathbb{R}^q$, $\mathbf{U} = [0, \overline{\mathbf{U}}]$.

Коэффициенты потерь запаса $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ заданы в виде интервалов, то есть:

$$A \in \mathbf{A} = \text{Diag}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n), \quad (5)$$

где $\mathbf{A} \in \mathbb{I}\mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{A} = [\underline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{A}}]$, $0 < \mathbf{A} \leq 1$.

Для системы (1) необходимо найти оптимальную (с точки зрения минимума затрат) стратегию управления, гарантирующую полное и своевременное удовлетворение спроса (2) на бесконечном периоде планирования при ограниченных возможностях системы (3), (4) с учетом возможных потерь запаса (5).

Определение 1. Будем называть функцию $u(t) = U(x(t), t)$, $u(t) \in \mathbf{U}$, допустимым на интервале \mathbf{X} управлением для состояния $x(t)$ в момент времени t , $t \geq 0$, если для любого значения спроса $d(t) \in \mathbf{D}$ выполнено включение $x(t+1) \in \mathbf{X}$, где $x(t)$ определяется рекуррентным соотношением (1).

Определение 2. Будем называть стратегию $\Phi = \{u(t), t \geq 0\}, u(t) \in U$, допустимой на интервале \mathbf{X} стратегией управления для начального состояния $x(0) \in \mathbf{X}$, если $u(t)$ является допустимым на интервале \mathbf{X} управлением для состояния $x(t)$ в момент времени $t, t \geq 0$, где $x(t)$ определяется рекуррентным соотношением (1).

Определение 3. Будем называть $\hat{x}, \hat{x} \in \mathbf{X}$, допустимым уровнем запаса в сети, если для любого начального состояния $x(0) \in \mathbf{X}$ существует допустимая стратегия $\Phi \in \Phi(x(0))$ такая, что

$$x(t) \in \mathbf{X}(0, \hat{x}), \quad t \geq \tau \geq 0,$$

где интервальнозначная функция $\mathbf{X}(a, b) = [a, b]$ определена для $a \leq b, a, b \in \mathbb{R}^n$; $\Phi(x(0))$ – множество стратегий, допустимых на интервале \mathbf{X} при начальном состоянии $x(0) \in \mathbf{X}$, а $x(t)$ определяется рекуррентным соотношением (1).

Очевидно, что, если для любого начального состояния $x(0) \in \mathbf{X}$ существует допустимая стратегия управления $\Phi \in \Phi(x(0))$, то $\bar{\mathbf{X}}$ является допустимым уровнем запаса. Однако, как известно, при неоправданно высоком уровне запаса система несет потери от омертвления капитала в запасах и замедления его оборачиваемости. Поэтому необходимо найти оптимальный допустимый уровень запаса в сети \hat{x}^* , минимизирующий расходы системы на хранение запаса (максимальные возможные расходы за один период)

$$C(\hat{x}) = h' \hat{x}, \quad (6)$$

и стратегию управления запасами $\Phi^* \in \Phi(x(0))$, гарантирующую включение

$$x(t) \in \mathbf{X}(0, \hat{x}^*), \quad t \geq \tau^* \geq 0, \quad (7)$$

где $h \in \mathbb{R}^n$ – вектор затрат, $h \geq 0, h \neq 0$, i -ая компонента которого представляет затраты на хранение единицы запаса в i -ом узле сети; символ ' (штрих сверху) означает транспонирование. Тогда затраты системы за период, начиная с некоторого момента времени τ^* , будут не больше $C(\hat{x}^*)$ для любого значения спроса $d(t) \in \mathbf{D}, t \geq \tau^*$.

Стратегию управления $\Phi^* \in \Phi(x(0))$, которая удовлетворяет оптимальному допустимому уровню запаса \hat{x}^* (гарантирует включение (7)), будем называть *оптимальной допустимой стратегией управления* для начального состояния $x(0) \in \mathbf{X}$, а время τ^* – *скоростью сходимости системы* к оптимальному допустимому уровню запаса \hat{x}^* .

2. Определение оптимальной допустимой стратегии управления

Теорема 1 (о существовании допустимого управления). Для любого состояния системы $x(t) \in \mathbf{X}$ в момент времени $t, t \geq 0$, допустимое на интервале \mathbf{X} управление с обратной связью $u(t) = U(x(t), t), u(t) \in \mathbf{U}$, существует и определяется из включения

$$\underline{\mathbf{A}}x(t) + Bu(t) \in \mathbf{X}_A \ominus \mathbf{ED},$$

если и только если выполнены условия

$$\text{wid } \mathbf{ED} \leq \text{wid } \mathbf{X}_A, \quad (8)$$

$$\mathbf{ED} \subseteq \{-BU\}, \quad (9)$$

где $\text{wid } \mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}$ – ширина интервала \mathbf{x} , \ominus – операция внутреннего вычитания на \mathbb{KR} , $\mathbb{KR} = \{\mathbf{x} = [\underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}] \mid \underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}\}$ – расширенное множество интервалов в арифметике Каухера; $\mathbf{X}_A = (I - (\bar{\mathbf{A}} - \underline{\mathbf{A}})) \mathbf{X}$, $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – единичная матрица; $\mathbf{ED} = \mathbf{ED}$; множество $\{-BU\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = -Bu, u \in \mathbf{U}\}$.

Теорема 2 (о виде оптимального допустимого уровня запаса). *Оптимальный допустимый уровень запаса в сети \hat{x}^* , минимизирующий функцию затрат (6), имеет вид*

$$\hat{x}^* = (I - (\bar{A} - \underline{A}))^{-1} (\bar{ED} - \underline{ED}). \quad (10)$$

В случае, когда коэффициенты потерь точно известны, оптимальный допустимый уровень запаса в сети становится равным

$$\hat{x}^* = \bar{ED} - \underline{ED}.$$

Видно, что при интервальной матрице потерь уровень оптимального допустимого запаса выше. Это превышение следует рассматривать, как вынужденную плату за работу в условиях дополнительной неопределенности, источником которой являются коэффициенты потерь запаса.

Теорема 3 (о существовании оптимальной допустимой стратегии). *Для любого начального состояния $x(0) \in \mathbf{X}$ существует оптимальная допустимая на интервале \mathbf{X} стратегия управления $\Phi^* \in \Phi(x(0))$, если выполнены условия (8), (9) и существует $\epsilon > 0$ такое, что*

$$\mathbf{X}(\underline{ED}, \underline{A}\bar{ED}) + \epsilon \mathbf{X}(0, \theta) + \underline{A}(\bar{A} - \underline{A})\mathbf{X} \subseteq \{-BU\},$$

где $\theta \in \mathbb{R}^n$, $\theta = \bar{X} - \hat{x}^*$. *Причем сходимость к оптимальному допустимому уровню запаса достигается не более, чем за конечное число шагов*

$$T = \max_{i=\overline{1, n}} \left\lceil \frac{\ln \left(\frac{\epsilon}{(1 - \underline{\alpha}_i)(1 - (\bar{\alpha}_i - \underline{\alpha}_i)) + \epsilon} \right)}{\ln \underline{\alpha}_i} \right\rceil + 1, \quad (11)$$

где $\lceil x \rceil$ – округление вверх до ближайшего целого числа.

Согласно разработанному алгоритму определения оптимальной допустимой стратегии $\Phi^* = \{u^*(t), t \geq 0\}$, оптимальные управления $u^*(t)$ определяются из решения следующей оптимизационной задачи

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \Rightarrow \min_{u(t), \lambda_1, \dots, \lambda_n} \quad (12)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} -\underline{ED} &\leq \underline{A}x(t) + Bu(t) \leq -\underline{ED} + \Lambda \theta, \\ -\underline{ED} + \Lambda \theta &\leq (I - (\bar{A} - \underline{A})) \bar{X} - \bar{ED}, \\ u(t) &\in \mathbf{U}, \\ \lambda_1, \dots, \lambda_n &\geq 0, \end{aligned}$$

где $x(t)$ определяется рекуррентным соотношением (1) ($x(0)$ – известное начальное состояние запаса), $\Lambda = \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ – диагональная $n \times n$ -матрица, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ – вспомогательные параметры. Момент времени τ^* , $\tau^* \leq T$, начиная с которого $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$, определяет скорость сходимости системы.

3. Пример

Рассмотрим систему производства-распределения (рис. 1), которая описывается динамической сетевой моделью (1) со структурными матрицами

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

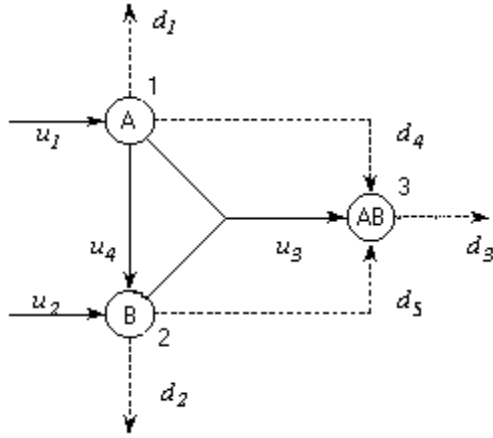


Рис. 1: Структура сети

Сеть состоит из трех узлов: узлы 1, 2 производят продукцию А и В, которая используется для производства продукции АВ в 3-ем узле. Управляемые потоки u_1, u_2 определяют интенсивность производства продукции А и В соответственно; u_4 перераспределяет дополнительные производственные возможности системы между производственными линиями А и В (если $u_4 = 0$, то все дополнительные возможности системы направлены на производство продукции А); u_3 описывает производственную линию, которая из А и В производит продукцию АВ. Неуправляемые потоки d_1, d_2, d_3 определяют спрос в узлах сети на продукцию А, В и АВ соответственно; d_4, d_5 представляют спрос в 3-ем узле на продукцию А и В.

Неопределенность спроса и коэффициентов потерь запаса, ограничения на состояния системы и управления заданы в виде соответствующих интервалов

$$D = \begin{pmatrix} [5, 25] \\ [20, 30] \\ [60, 80] \\ [0, 20] \\ [0, 30] \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} [0.6, 0.75] & 0 & 0 \\ 0 & [0.5, 0.6] & 0 \\ 0 & 0 & [0.75, 0.8] \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} [0, 130] \\ [0, 120] \\ [0, 150] \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} [0, 190] \\ [0, 55] \\ [0, 100] \\ [0, 70] \end{pmatrix}.$$

Для данной системы оптимальный допустимый уровень запаса $\hat{x}^* = (47 \ 22.2 \ 52.6)'$ (формула (10)), условия Теоремы 3 выполнены ($\epsilon = 0.077$), максимальная скорость сходимости $T = 6$ (формула (11)). В каждый момент времени $t, t \geq 0$, решая задачу (12), получаем оптимальное управление $u^*(t)$.

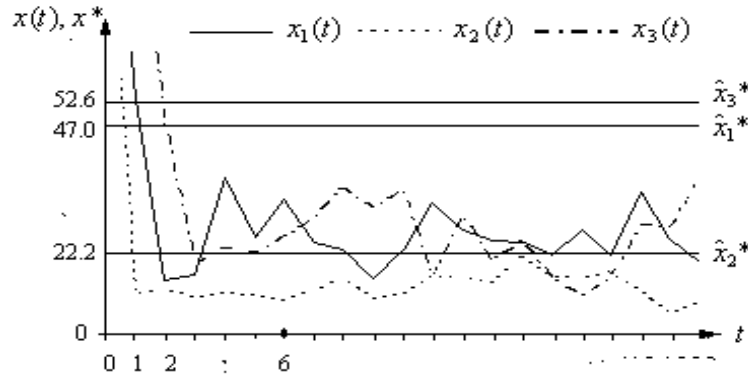


Рис. 2: Динамика изменения запаса

Рисунок 2 показывает динамику изменения запаса в узлах сети при оптимальной стратегии управления $\Phi^*(x(0))$ для начального состояния запаса $x(0) = (130 \ 120 \ 150)'$. Видно, что скорость сходимости $\tau^* = 2$, так как $x(t) \in X(0, \hat{x}^*)$ для $t \geq 2$.

Список литературы

- [1] Лотоцкий В.А., Мандель А.С. *Модели и методы управления запасами*. – М.: Наука, 1991.
- [2] Рыжиков Ю.И. *Теория очередей и управление запасами*. – СПб.: Питер, 2001.
- [3] Рубальский Г.Б. *Вероятностные и вычислительные методы оптимального управления запасами*. – М.: Знание, 1987.
- [4] Чаусова Е.В. *Динамические модели систем управления запасами с интервальной неопределенностью в данных: Диссертация... канд. физ.-мат. наук*. – Томск, 2003.
- [5] Алефельд Г., Херцбергер Ю. *Введение в интервальные вычисления*. – М.: Мир, 1987.
- [6] Moore R.E. *Methods and applications of interval analysis*. – Philadelphia: SIAM, 1979.
- [7] Чаусова Е.В. *Динамическая сетевая модель управления запасами с интервальной неопределенностью спроса и устареванием запаса в узлах сети* // Вестник Томского государственного университета. – 2004. – № 284. – С. 103-108.
- [8] Chausova E.V. *Dynamic Network Inventory Control Model with Interval Nonstationary Demand Uncertainty* // Numerical Algorithms. – 2004. – V. 37. – P. 71-84.
- [9] Kaucher E. *Interval analysis in the extended interval space \mathbb{IR}* // Computing Supplement. – 1980. – Vol. 2. – P. 33-49.
- [10] Шарый С.П. *Алгебраический подход во "внешней задаче" для интервальных линейных систем* // Вычислительные Технологии. – 1998. – Т. 3, № 2. – С. 67-114.
- [11] Ловецкий С.Е., Меламед И.И. *Динамические потоки в сетях* // Автоматика и Телемеханика. – 1987. – № 11. – С. 7-29.
- [12] Glover F., Klingman D., Phillips N.V. *Network models in optimization and their applications in practice*. – NY.: Wiley, 1992.

Inventory Control with Storage Loss under Interval Uncertainty

E. V. Chausova

Tomsk State University, Tomsk
e-mail: chauev@mail.ru

Abstract. We consider a dynamic inventory control system described by a network model with an interval assigned demand and storage loss. We assume that unknown demand may take any value within the interval. Moreover we allow for the case of interval uncertainty in the rate of storage loss (for example, damage and obsolescence of resources). This is a quite real assumption because we never know exactly how much storage loss will be in the system and how much resources will be wasted. In terms of Kaucher interval arithmetic we derive necessary and sufficient conditions for the existence of a feasible feedback control and sufficient conditions for the existence of an optimal feedback control strategy. We obtain an optimal feasible storage level and estimate the rate of the system convergence to this level. Then we develop the algorithm of finding the optimal control strategy. These results are applied to an example.

Key words: inventory control systems, network model, unknown demand, storage loss, interval approach, Kaucher interval arithmetic.

О СТРОЕНИИ ДОПУСТИМОГО МНОЖЕСТВА¹

И.А. Шарая

Институт вычислительных технологий СО РАН

e-mail: sharia@ict.nsc.ru

Аннотация. Доказано, что допустимое множество решений интервальной линейной системы может быть представлено в виде суммы линейного подпространства с ограниченным множеством, которое является выпуклым многогранником. Показано, что такое представление дает возможность проверять допустимое множество на ограниченность и строить подходящие оценки неограниченного допустимого множества на основе методов оценивания ограниченного.

Ключевые слова: интервальные линейные системы, линейная задача о допусках, допустимое множество решений.

Введение

В работе мы будем использовать обозначения, предложенные в [1].

Напомним, что *допустимым множеством решений* для интервальной системы линейных алгебраических уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ (где m, n — целые положительные числа, $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{m \times n}$ — интервальная матрица размерности $m \times n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{IR}^m$ — интервальный вектор длины m , $x \in \mathbb{R}^n$ — вещественный вектор длины n) называется (например, в [2]) множество

$$\Xi = \{x \mid (\forall A \in \mathbf{A}) (\exists b \in \mathbf{b}) (Ax = b)\}. \quad (1)$$

Перепишав определение (1) в виде $\Xi = \{x \mid (\forall A \in \mathbf{A}) (Ax \in \mathbf{b})\}$ и воспользовавшись свойством $\{Ax \mid A \in \mathbf{A}\} = \mathbf{Ax}$, получим *характеристику элементов допустимого множества решений*:

$$x \in \Xi \iff \mathbf{Ax} \subseteq \mathbf{b}. \quad (2)$$

Известно (см., например, [3, 4, 6]), что допустимое множество является выпуклым многогранным (т.е. множеством, которое может быть описано конечной системой нестрогих линейных неравенств). На практике для удобства и быстроты обработки вместо самих допустимых множеств рассматривают их оценки.

Оценивающие множества выбирают простой формы. Результаты, изложенные в данной статье, с формой оценок не связаны, но для определенности будем иллюстрировать рассуждения с помощью интервальных оценок. Интервальными называют оценки, имеющие форму n -мерных интервалов, т.е. ограниченных брусов с ребрами параллельными координатным осям.

Задачи оценивания различаются не только формой оценок, но и расположением оценки по отношению к оцениваемому множеству. Если оценка лежит внутри оцениваемого множества, она называется внутренней. Если содержит оцениваемое множество — внешней. Есть и другие типы расположения. Для допустимого множества чаще всего возникает задача о допусках — задача отыскания внутренней оценки допустимого множества.

¹Работа выполнена в рамках Президентской программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект N НШ-2314.2003.1)

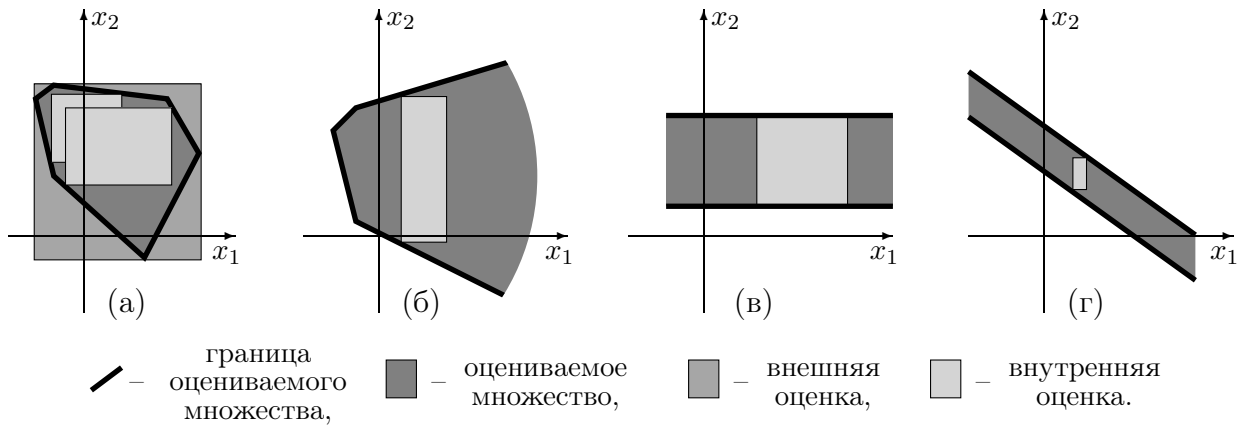


Рис. 1: Интервальное оценивание выпуклого многогранного множества.

Оценки ценятся тем выше, чем лучше они приближают исходное множество. Поэтому среди внешних оценок особенно ценными являются оптимальные (которые нельзя сузить), а среди внутренних — максимальные (которые нельзя расширить).

Для ограниченного допустимого множества всегда существуют оптимальная внешняя и максимальные внутренние интервальные оценки (рис. 1а) и разработаны методы их отыскания. Описание таких методов для оптимальных внешних оценок можно найти в [5], а для максимальных внутренних — в [2, 6]. А вот при построении ограниченных оценок для оценивания неограниченных выпуклых многогранных множеств возникают следующие трудности:

- 1) внешняя оценка не существует (рис. 1б,в,г),
- 2) всякая внутренняя оценка бесконечно мала по сравнению с оцениваемым множеством (рис. 1б,в,г),
- 3) не всегда можно построить максимальную внутреннюю оценку (рис. 1б,в).

Мы докажем, что допустимое множество (1) может быть представлено в виде суммы подпространства $\{c \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}c = 0\}$ с выпуклым многогранником (т.е. ограниченным выпуклым многогранным множеством), и покажем, как с помощью этого результата проверить допустимое множество на ограниченность и подходящим образом оценить неограниченное допустимое множество.

1. Строеие допустимого множества

Введем необходимые обозначения и определения. Столбец с номером j интервальной матрицы \mathbf{A} будем называть *вырожденным*, отождествлять с вещественным вектором и обозначать $A_{:j}$, если нижняя и верхняя грани интервального столбца $\mathbf{A}_{:j}$ совпадают. Обозначим через J множество номеров всех вырожденных столбцов матрицы \mathbf{A} . В линейной алгебре множество вещественных векторов $\{A_{:j} \mid j \in J\}$ называется *линейно зависимым*, если существуют такие числа $c_j \in \mathbb{R}$, что $\sum_{j \in J} A_{:j}c_j = 0$ и $\sum_{j \in J} |c_j| > 0$.

Лемма 1. Для $c \in \mathbb{R}^n$ имеет место эквивалентность

$$\mathbf{A}c = 0 \iff \begin{cases} \sum_{j \in J} A_{:j}c_j = 0, \\ c_k = 0 \quad \text{for } k \notin J. \end{cases} \quad (3)$$

Доказательство. \Leftarrow) очевидно. \Rightarrow) Если вектор $\mathbf{A}c$ нулевой, то и радиус его равен нулю, а по свойствам интервальных операций $\text{rad}(\mathbf{A}c) = \sum_{l=1}^n |c_l| \text{rad}(\mathbf{A}_{:l})$. При $k \notin J$ $\text{rad}(\mathbf{A}_{:k}) \neq 0$, и потому c_k должно быть нулем. Исключив нулевые слагаемые $\mathbf{A}_{:k}c_k$ с индексами $k \notin J$ из равенства $\mathbf{A}c = 0$, получим $\sum_{j \in J} \mathbf{A}_{:j}c_j = 0$.

Лемма 2. *Существование ненулевого вектора c , для которого $\mathbf{A}c = 0$, эквивалентно наличию в матрице \mathbf{A} линейно зависимых вырожденных столбцов.*

Доказательство следует из леммы 1 и определения линейно зависимых векторов.

Обозначим через \mathbb{R}^J подпространство в \mathbb{R}^n , натянутое на оси с номерами $j \in J$.

Лемма 3. *Множество $L = \{c \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}c = 0\}$ является подпространством в \mathbb{R}^J .*

Доказательство следует из леммы 1 и того факта, что решение системы линейных уравнений с нулевой правой частью является подпространством.

Теорема о строении допустимого множества. *Допустимое множество Ξ представимо в виде суммы $\Xi = L + V$, где $L = \{c \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}c = 0\}$ — подпространство в \mathbb{R}^J , V — выпуклый многогранник из подпространства дополнительного к L в \mathbb{R}^n .*

Доказательство. Для произвольных векторов $x \in \mathbb{R}^n$ и $c \in L$ в силу монотонности интервальных операций имеем $\mathbf{A}(x + c) \subseteq \mathbf{A}x + \mathbf{A}c = \mathbf{A}x$. Из полученного включения $\mathbf{A}(x + c) \subseteq \mathbf{A}x$ и характеристики (2) элементов допустимого множества следует, что $x \in \Xi \Rightarrow x + c \in \Xi$. Поэтому $\Xi + L \subseteq \Xi$. Обратное включение $\Xi \subseteq \Xi + L$ справедливо, так как $0 \in L$. Значит $\Xi = L + \Xi$.

Из леммы 3 следует, что L — подпространство в \mathbb{R}^n . Обозначим через L' какое-нибудь подпространство дополнительное к L в \mathbb{R}^n . Тогда $\Xi = L + \Xi \cap L'$. Обозначим множество $\Xi \cap L'$ через V . Очевидно, что $V \subseteq L'$. Так как Ξ и L' являются выпуклыми многогранными множествами, то их пересечение V тоже выпуклое многогранное множество. Для завершения доказательства остается показать, что V ограничено.

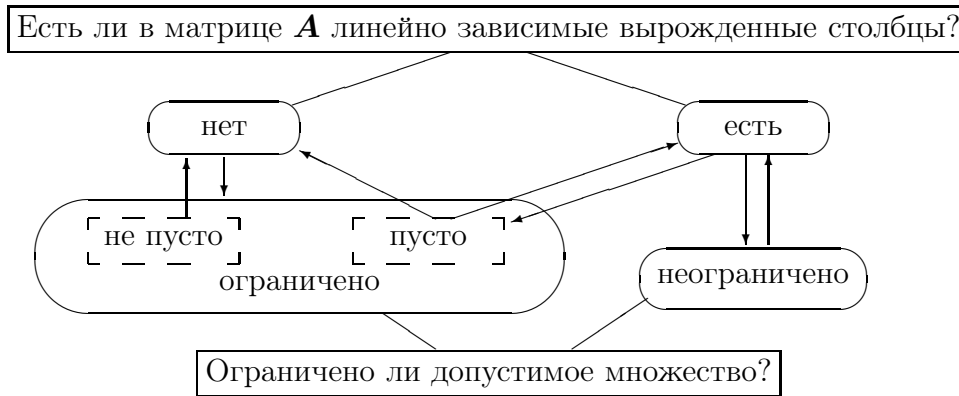
Предположим, что V неограничено, тогда оно содержит некоторый луч с направлением $c \neq 0$. Пересечем этот луч с ортантом, содержащим c . Получим луч $x + c\mathbb{R}^+$. С одной стороны, этот луч лежит во множестве Ξ и по характеристике (2) элементов допустимого множества $\mathbf{A}(x + c\mathbb{R}^+) \subseteq \mathbf{b}$. С другой стороны, начало x и направление c этого луча лежат в одном ортанте, и потому в произведении $\mathbf{A}(x + c\mathbb{R}^+)$ можно раскрыть скобки по правилу дистрибутивности. Так что имеем $\mathbf{A}x + \mathbf{A}(c\mathbb{R}^+) \subseteq \mathbf{b}$. Вынося число за скобки, получим $\mathbf{A}x + \mathbb{R}^+(\mathbf{A}c) \subseteq \mathbf{b}$. Отсюда $\mathbf{A}c = 0$. Значит, $c \in L$. Но это противоречит выбору луча $x + c\mathbb{R}^+$ из множества, лежащего в дополнении к L . Мы показали, что предположение о неограниченности множества V приводит к противоречию, значит V ограничено.

2. Проверка допустимого множества на ограниченность

Из теоремы о строении допустимого множества следует, что

$$(\Xi \text{ ограничено}) \Leftrightarrow ((L = \{0\}) \text{ или } (V \text{ пусто})). \quad (4)$$

Из (4), определения множества L и леммы 2 получаем следующую схему, связывающую вопрос об ограниченности допустимого множества с вопросом о наличии в матрице \mathbf{A} линейно зависимых вырожденных столбцов.



Из схемы видно, что

- если в матрице \mathbf{A} нет линейно зависимых вырожденных столбцов, то допустимое множество ограничено,
- если в матрице \mathbf{A} есть линейно зависимые вырожденные столбцы, то допустимое множество пусто или неограничено,
- если допустимое множество неограничено, то в матрице \mathbf{A} есть линейно зависимые вырожденные столбцы.
- если допустимое множество непусто, то ограниченность допустимого множества эквивалентна отсутствию в матрице \mathbf{A} линейно зависимых вырожденных столбцов. (Другое доказательство критерия ограниченности непустого допустимого множества приведено в [7].)

3. Оценивание неограниченного допустимого множества

Из теоремы о строении допустимого множества следует, что подходящей оценкой для допустимого множества является сумма подпространства L с оценкой выпуклого многогранника V . С помощью леммы 1, мы можем найти подпространство $L = \{c \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}c = 0\}$ методами линейной алгебры. Если $L = \{0\}$, то допустимое множество ограничено и применяем известные методы его оценивания. Если $L \neq \{0\}$, то нам надо оценить V . Очевидно, что этот многогранник можно выбрать из любого подпространства L' , дополнительного к L в \mathbb{R}^n , и тогда его описание получается из (1) заменой переменных, соответствующей переходу в подпространство L' . Затем, поскольку множество V ограничено и описывается как допустимое, его оценку P можно получить известными методами оценивания ограниченного допустимого множества. Ответ исходной задачи будет иметь вид $L + P$.

Проиллюстрируем рассуждения примером в \mathbb{R}^3 , пользуясь тем, что при $n \leq 3$ допустимое множество и его оценки можно строить графически. Оценим множество Ξ из (1) с матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ и правой частью } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [-8, 4] \\ [4, 13] \\ [1, 7] \\ [-1, 19] \end{pmatrix}. \text{ Методами линейной алгебры}$$

получаем $L = \{(1, 1, 1) \cdot t, t \in \mathbb{R}\}$ (см. рис. 2). Возьмем $L' = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0\}$. Многогранник V в L' описывается как допустимое множество решений с матрицей $(A_{\cdot 1} \ A_{\cdot 2})$ и неизменной правой частью \mathbf{b} . В терминах характеристики (2) многогранник V состоит из элементов x , удовлетворяющих интервальному включению

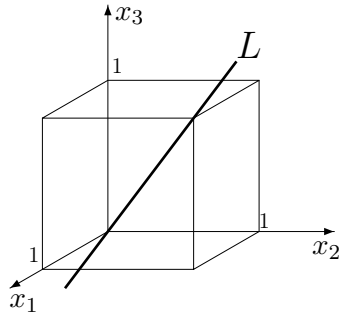


Рис. 2: Подпространство L .

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} x \subseteq \begin{pmatrix} [-8, 4] \\ [4, 13] \\ [1, 7] \\ [-1, 19] \end{pmatrix}, \quad (5)$$

и легко строится графически (рис. 3). Его вершины: $(1,3)$, $(1,6)$, $(3,10)$, $(7,6)$, $(5,2)$, $(3,1)$. Не

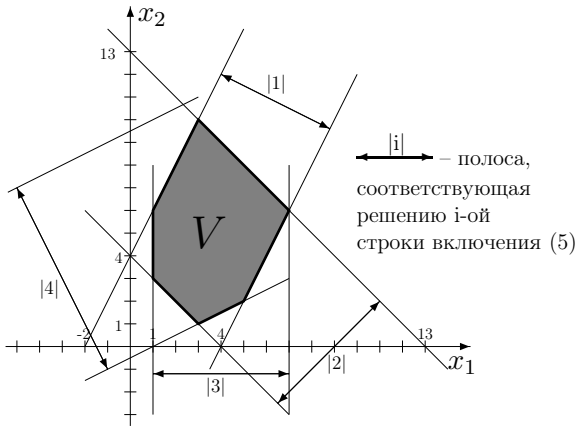


Рис. 3: Многогранник V в L' .

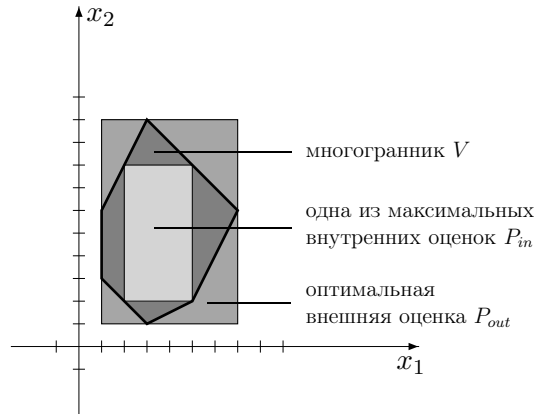


Рис. 4: Оценивание многогранника V в L' .

прибегая к конкретным методам оценивания, выберем оценки для V просто графически (рис. 4). В качестве оценки допустимого множества Ξ предъявим сумму подпространства L с оценкой многогранника V . Сравнение допустимого множества с предъявленными оценками приведено на рисунке 5.

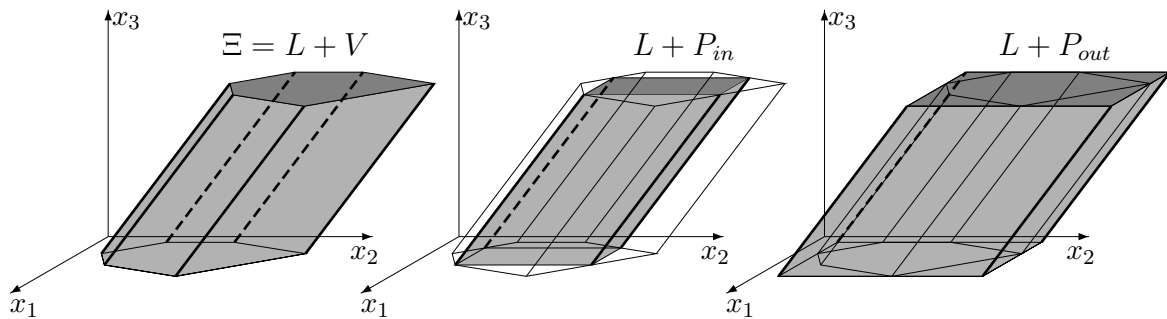


Рис. 5: Допустимое множество и его оценки. Срез по x_3 от 0 до 10.

Список литературы

- [1] R.B. Kearfott, M.T. Nakao, A. Neumaier, S.M. Rump, S.P. Shary, P. van Hentenryck *Standardized notation in interval analysis*.
<http://www.mat.univie.ac.at/~neum/software/int>
- [2] С.П. Шарый *Алгебраический подход к анализу линейных статических систем с интервальной неопределенностью*. Изв. РАН. Теория и системы управления, 1997, N3, с. 51–61.
(<http://www.ict.nsc.ru/shary/Papers/IzvAN.ps>)
- [3] J. Rohn *Inner solutions of linear interval systems*. – in: Interval Mathematics 1985. New York: Springer Verlag, 1986, p. 157–158.
(Lecture Notes in Computer Science; vol. 212.)
- [4] В.В. Шайдуров, С.П. Шарый *Решение интервальной алгебраической задачи о допусках*. Препр. АН СССР, Сиб. отд-ние, Вычисл. центр, N5. Красноярск, 1988, 27 с.
- [5] С.П. Шарый *Внешнее оценивание обобщенных множеств решений интервальных линейных систем*. Вычислительные технологии, 1999, т. 4, N4, с. 82–110.
(<http://www.ict.nsc.ru/shary/Papers/Outer.ps>)
- [6] С.П. Шарый *Решение интервальной линейной задачи о допусках*. Автоматика и Телемеханика, 2004, N10, с. 147–162.
(<http://www.ict.nsc.ru/shary/Papers/AiT.ps>)
- [7] И.А. Шарая *Ограничено ли допустимое множество решений интервальной системы?* Вычислительные технологии, 2004, т. 9, N3, с. 108–112.
(<http://www.ict.nsc.ru/sharaya/Papers/ct04.ps>)

STRUCTURE OF THE TOLERABLE SOLUTION SET OF INTERVAL LINEAR SYSTEM

I.A. Sharaya

Institute of Computational Technologies, Novosibirsk
e-mail: sharia@ict.nsc.ru

Abstract. We prove that the tolerable solution set of interval linear system may be represented as the sum of the linear subspace and a bounded convex polytope. Such representation is useful in investigation of boundedness of a tolerable solution set and in estimation of unbounded tolerable solution sets.

Key words: interval linear systems, linear tolerance problem, tolerable solution set.

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ В ИНТЕРВАЛЬНОЙ ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

С.П. Шарый

*Институт вычислительных технологий СО РАН, г. Новосибирск
e-mail: shary@ict.nsc.ru*

Владимиру Сергеевичу Зюзину в честь его семидесятилетия

Аннотация. Работа является критическим обзором интервальных методов оптимизации, предназначенных для вычисления глобальных оптимумов функций многих переменных. Для преодоления некоторых недостатков традиционных детерминистских интервальных методов мы намечаем пути конструирования стохастических подходов в интервальной глобальной оптимизации, основанных в частности, на идеях случайного поиска и “симулированного отжига”.

Ключевые слова: оптимизация, глобальная, интервальные методы, стохастические методы, случайное блуждание, симулированный отжиг.

Введение

Предмет представляемой работы — задача глобальной оптимизации вещественнозначной функции $F : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$ на прямоугольном брусе $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}^n$ со сторонами, параллельными координатным осям:

$$\boxed{\text{найти } \min_{x \in \mathbf{X}} F(x)} . \quad (1)$$

Решение задачи (1) при отсутствии априорной информации о характере глобального поведения целевой функции и структуре её локальных экстремумов неизбежно требует применения методов, осуществляющих в том или ином виде перебор и сравнение “всех точек” области определения. Таковыми являются, например, методы неравномерных покрытий [4] или разнообразные версии мултистарта (см. [5]). Сюда же могут быть отнесены различные интервальные методики решения задачи (1), основой которых является адаптивное, в соответствии со стратегией “ветвей и границ”, дробление области определения оптимизируемой функции и интервальное оценивание области значений по получающимся подобластям (см., к примеру, [11, 12, 18]). Подобные интервальные методы глобальной оптимизации, будучи детерминированными процедурами, позволяют надежно находить гарантированные двусторонние границы как для величины оптимума, так и для доставляющих его значений аргумента в случае оптимизационных задач (1) невысокой и средней размерности n .

Для практической оптимизации функций большого числа аргументов целесообразно привлекать уже вероятностные подходы, но подобные методы в современном интервальном анализе совершенно не разработаны. В нашей работе впервые намечены пути конструирования стохастических интервальных алгоритмов глобальной оптимизации, совме-

шающих в себе интервальную технику оценивания по подобластям с вероятностным характером алгоритма. В частности, мы представляем интервальные алгоритмы глобальной оптимизации, основанные на 1) случайном поиске и 2) “симулированном отжиге”, популярном методе статистической оптимизации, который берёт своё название от одноимённого физического процесса [15].

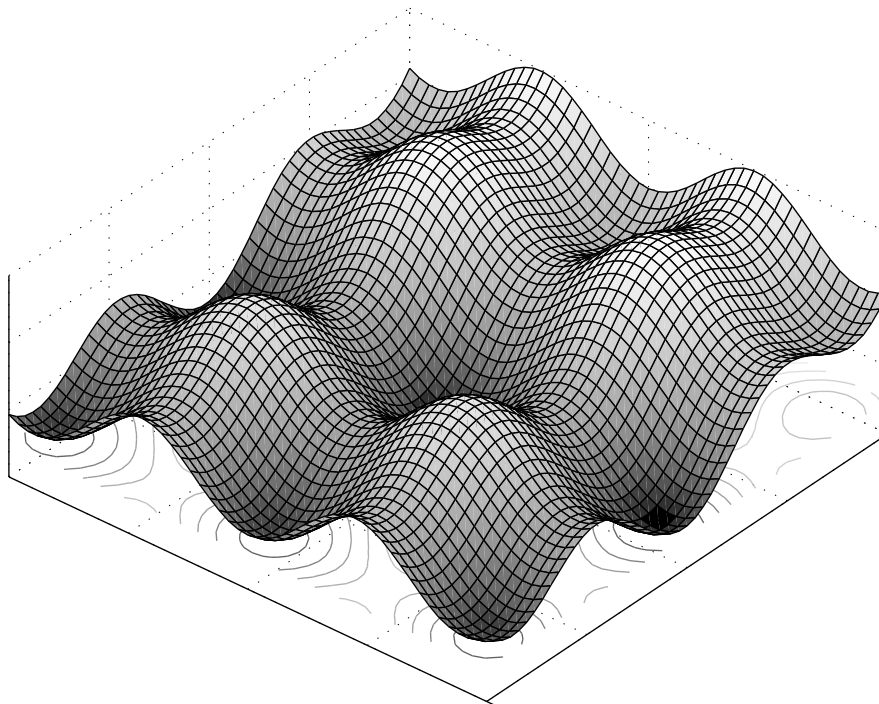


Рис. 1: Образчик графика многоэкстремальной функции $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, трудной для глобальной оптимизации.

Следует отметить, что в самом общем случае задача глобальной оптимизации является труднорешаемой. По существу, современные численные методы её решения сводятся к нахождению значений всех локальных оптимумов и сравнению их между собой. И подобное положение не является следствием плохости существующих методик, недостаточным уровнем развития современной теории оптимизации и т.п. В 1984 году А.А. Гагановым [3] было строго показано, что даже для полиномиальной целевой функции F задача глобальной оптимизации является NP-трудной, что, фактически, равносильно признанию того, что для её решения требуются не менее чем экспоненциальные в зависимости от размерности n трудозатраты. Один из последних эффектных результатов в этом направлении — теорема Кирфотта-Крейновича [14], утверждающая, что за пределами класса выпуклых функций решение задачи глобальной оптимизации (1) является NP-трудным.

1. Основы интервальной техники

Чтобы придать нашему тексту самостоятельный характер, изложению основных результатов будет предпослан краткий обзор интервальных методов оптимизации.

Одномерные *интервалы* — это замкнутые отрезки вещественной оси \mathbb{R} , многомерные интервалы (называемые также *брусками*) — прямые произведения одномерных интервалов. Говорят, что некоторая величина имеет *интервальную неопределенность*, если её точное значение не задано, но, тем не менее, известно, что оно лежит в пределах некоторого интервала.

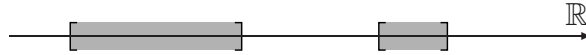


Рис. 2: Одномерные интервалы

Интервальный анализ может быть кратко определён как научная дисциплина на стыке вычислительной математики и информатики,

- предметом которой является решение задач с интервальными (или, более общо, ограниченными) неопределенностями и неоднозначностями в данных, возникающими в постановке задачи, либо в спецификациях на ответ, либо на промежуточных стадиях процесса решения,
- чьей характеристической особенностью является рассмотрение множеств неопределенности как самостоятельных целостных объектов, посредством установления арифметических, аналитических и т.п. операций и отношений между ними.

В частности, интересующая нас задача глобальной оптимизации (1) находится в сфере применимости методов интервального анализа. И это тем более верно в отношении задачи доказательной глобальной оптимизации, когда в формулировке (1) требуется вычисление гарантированных двусторонних оценок (т.е., фактически, интервалов) для ответа, как для величины целевой функции, так и для доставляющих его значений аргумента.

Одним из основных инструментов интервального анализа являются так называемые *интервальные арифметики* — алгебраические системы, формализующие операции между интервалами. Наиболее популярная *классическая интервальная арифметика* — это алгебраическая система \mathbb{IR} , образованная интервалами $\mathbf{x} = [\underline{x}, \bar{x}] \subset \mathbb{R}$ так, что арифметические операции определены в ней “по представителям”, т.е. в соответствии со следующим фундаментальным принципом:

$$\mathbf{x} \star \mathbf{y} = \{ x \star y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y} \} \quad \text{для } \star \in \{ +, -, \cdot, / \},$$

— результирующий интервал любой операции есть множество, образованное всевозможными результатами этой операции между элементами интервалов-операндов. Развёрнутые формулы для интервальных сложения, вычитания, умножения и деления выглядят следующим образом [2, 6, 11, 12, 16, 17, 18]:

$\mathbf{x} + \mathbf{y} = [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}]$ $\mathbf{x} - \mathbf{y} = [\underline{x} - \bar{y}, \bar{x} - \underline{y}]$ $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = [\min\{\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}\}, \max\{\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}\}]$ $\mathbf{x}/\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot [1/\bar{y}, 1/\underline{y}] \quad \text{для } \mathbf{y} \not\ni 0$

Интервальные арифметические операции обладают важным свойством *монотонности по включению*:

$$\mathbf{x} \subseteq \mathbf{x}', \mathbf{y} \subseteq \mathbf{y}' \Rightarrow \mathbf{x} \star \mathbf{y} \subseteq \mathbf{x}' \star \mathbf{y}' \quad \text{для } \star \in \{ +, -, \cdot, / \}.$$

Естественным образом определяются

$$\begin{aligned} \text{середина интервала} & \text{---} \quad \text{mid } \mathbf{x} = \frac{1}{2}(\overline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{x}}), \\ \text{ширина интервала} & \text{---} \quad \text{wid } \mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}, \\ \text{абсолютное значение интервала} & \text{---} \quad |\mathbf{x}| = \max\{|\underline{\mathbf{x}}|, |\overline{\mathbf{x}}|\}. \end{aligned}$$

Интервальный вектор определяется как вектор, столбец или строка, с интервальными компонентами. Его геометрическим образом является прямоугольный параллелепипед в \mathbb{R}^n со сторонами, параллельными координатным осям, который, как уже упоминалось, часто называют *брусом*. Сумма (разность) двух интервальных векторов одного размера — это вектор из поэлементных сумм (разностей) операндов. Топология на пространстве \mathbb{IR}^n всех n -мерных интервальных векторов задается метрикой

$$\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max\{\|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}\|, \|\overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{y}}\|\},$$

где $\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}$ — это векторы нижних концов, $\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}$ — векторы верхних концов для интервальных векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{IR}^n$ соответственно, а $\|\cdot\|$ — норма в \mathbb{R}^n (совпадающая с абсолютной величиной для $n = 1$). Операции взятия середины, ширины и абсолютного значения применяются к интервальным векторам покомпонентно. Аналогичным покомпонентным образом понимается и упорядочение интервальных векторов и матриц (по включению и т.п.). Наконец, для произвольного множества $D \subset \mathbb{R}^n$ посредством $\mathbb{I}D$ будет обозначаться множество всех интервальных векторов, содержащихся в D , т.е.

$$\mathbb{I}D = \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \subseteq D \}.$$

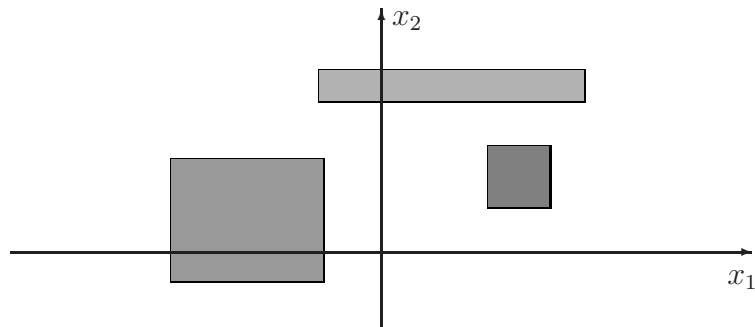


Рис. 3: Интервальные векторы-брусы в \mathbb{R}^2 .

Задача об определении области значений функции на том или ином подмножестве области её определения, эквивалентная задаче оптимизации, в интервальном анализе принимает специфическую форму задачи о вычислении так называемого *интервального расширения функции*. Напомним

Определение. Пусть D — непустое подмножество пространства \mathbb{R}^n . Интервальная функция $\mathbf{f} : \mathbb{I}D \rightarrow \mathbb{I}\mathbb{R}^m$ называется *интервальным продолжением* вещественной функции $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, если $\mathbf{f}(x) = f(x)$ для всех $x \in D$.

Определение [6, 12, 16, 17, 18]. Пусть D непустое подмножество пространства \mathbb{R}^n . Интервальная функция $\mathbf{f} : \mathbb{I}D \rightarrow \mathbb{I}\mathbb{R}^m$ называется *интервальным расширением* вещественной функции $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, если

- 1) $\mathbf{f}(x)$ — интервальное продолжение $f(x)$ на D ,
- 2) $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ монотонна по включению, т.е. $\mathbf{x} \subseteq \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}) \subseteq \mathbf{f}(\mathbf{y})$ на $\mathbb{I}D$.

Таким образом, если $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ — интервальное расширение функции $f(x)$, то для области значений f на брус $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}^n$ мы получаем следующую внешнюю (с помощью объемлющего множества) оценку:

$$\{ f(x) \mid x \in \mathbf{X} \} \subseteq \mathbf{f}(\mathbf{X}).$$

Соответственно, если \mathbf{F} — интервальное расширение целевой функции F из (1), то для решения задачи (1) справедлива оценка

$$\underline{\mathbf{F}}(\mathbf{X}) \leq \min_{x \in \mathbf{X}} F(x).$$

Эффективное построение интервальных расширений функций — это важнейшая задача интервального анализа, поиски различных решений которой продолжаются и в настоящее время. Чтобы сделать работу самодостаточной, уместно привести в рамках нашего беглого обзора некоторые общезначимые результаты в этом направлении. Первый из них часто называют “основной теоремой интервальной арифметики”:

Теорема [2, 6, 11, 12, 16, 17]. Если для рациональной функции $f(x)$ на интервале \mathbf{x} определён результат $\mathbf{f}_{nat}(\mathbf{x})$ подстановки вместо её аргументов интервалов их изменения и выполнения всех действий над ними по правилам интервальной арифметики, то

$$\{ f(x) \mid x \in \mathbf{x} \} \subseteq \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

т.е. $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ содержит множество значений функции $f(x)$ на \mathbf{x} .

Нетрудно понять, что по отношению к рациональной функции $f(x)$ интервальная функция $\mathbf{f}_{nat}(\mathbf{x})$, о которой идёт речь в Теореме, является интервальным расширением. Оно называется *естественным интервальным расширением*, и вычисляется совершенно элементарно.

Использование естественного интервального расширения подчас приводит к весьма грубым результатам при оценивания областей значений функций, в связи с чем получили развитие более совершенные способы (формы) нахождения интервальных расширений. Одна из наиболее популярных — так называемая *центрированная форма*:

$$\mathbf{f}_c(\mathbf{x}, \tilde{x}) = f(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^n \mathbf{g}_i(\mathbf{x}, \tilde{x})(\mathbf{x}_i - \tilde{x}_i),$$

где $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$ — некоторая фиксированная точка, называемая “центром”,
 $\mathbf{g}_i(\mathbf{x}, \tilde{x})$ — интервалы, зависящие в общем случае как от \tilde{x} , так и \mathbf{x} .

В частности, $\mathbf{g}_i(\mathbf{x}, \tilde{x})$ могут быть внешними интервальными оценками значений производных $\partial f(x)/\partial x_i$ на \mathbf{x} . За дальнейшей информацией мы отсылаем заинтересованного читателя к книгам [2, 6, 11, 12, 16, 17], развернуто излагающим проблему построения интервальных расширений функций.

Для дальнейшего важно отметить, что точность интервального оценивания при использовании любой из форм интервального расширения критическим образом зависит от ширины бруса оценивания. Для естественного интервального расширения

$$\text{dist}(\mathbf{f}_{nat}(\mathbf{x}, \tilde{x}), f(\mathbf{x})) \leq C \|\text{wid } \mathbf{x}\| \quad (2)$$

с некоторой константой C , тогда как для центрированной формы верна оценка

$$\text{dist}(\mathbf{f}_c(\mathbf{x}, \tilde{x}), f(\mathbf{x})) \leq 2(\text{wid } \mathbf{g}(\mathbf{x}, \tilde{x}))^\top |\mathbf{x} - \tilde{x}|, \quad (3)$$

где $f(\mathbf{x})$ — точная область значений функции, $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \tilde{x}) = (\mathbf{g}_1(\mathbf{x}, \tilde{x}), \mathbf{g}_2(\mathbf{x}, \tilde{x}), \dots, \mathbf{g}_n(\mathbf{x}, \tilde{x}))$.

2. Интервальные методы глобальной оптимизации

Оценки (2) и (3) описывают асимптотическое поведение качества интервальных расширений при стремлении размеров брусков к нулю, когда $\text{wid } \mathbf{x} \rightarrow 0$. Но если размеры бруса не являются малыми, то погрешность интервального оценивания области значений может оказаться весьма значительной. Что же делать в этом случае?

Одним из возможных выходов из этого затруднения является принудительное дробление бруса области определения с тем, чтобы уменьшить его размеры, а вместе с ними и погрешность интервального оценивания. Именно, если разбить исходный брус \mathbf{X} на два подбруса \mathbf{X}' и \mathbf{X}'' , дающие в объединении весь \mathbf{X} , т.е. такие, что $\mathbf{X}' \cup \mathbf{X}'' = \mathbf{X}$ (см. Рис. 4), то

$$\{F(x) \mid x \in \mathbf{X}\} = \{F(x) \mid x \in \mathbf{X}'\} \cup \{F(x) \mid x \in \mathbf{X}''\}.$$

По этой причине в качестве новой оценки минимума целевой функции по \mathbf{X} можно взять

$$\min\{\underline{F}(\mathbf{X}'), \underline{F}(\mathbf{X}'')\}$$

и она будет, вообще говоря, более точна, чем исходная $\underline{F}(\mathbf{X})$, так у брусков \mathbf{X}' и \mathbf{X}'' размеры меньше, чем у исходного \mathbf{X} . Бруссы-потомки \mathbf{X}' и \mathbf{X}'' можно, в свою очередь, опять разбить на более мелкие части, найти для них интервальные расширения и далее уточнить оценку для минимума, потом снова повторить процедуру и т.п.

Целесообразно внести в этот процесс последовательного дробления-оценивания некоторый порядок, и обычно организуют такое уточнение оценки снизу для $\min_{x \in \mathbf{X}} F(x)$ в соответствии со стратегией, заимствованной из “метода ветвей и границ”, широко известного в комбинаторной оптимизации. Более точно,

- из брусков \mathbf{Y} , возникающих в процессе дробления исходного бруса \mathbf{X} , и их оценок $\underline{F}(\mathbf{Y})$ организуем список;
- на каждом шаге алгоритма дробить будем лишь один брус \mathbf{Y} , тот, который обеспечивает наименьшую оценку $\underline{F}(\mathbf{Y})$ для $\min_{x \in \mathbf{X}} F(x)$;

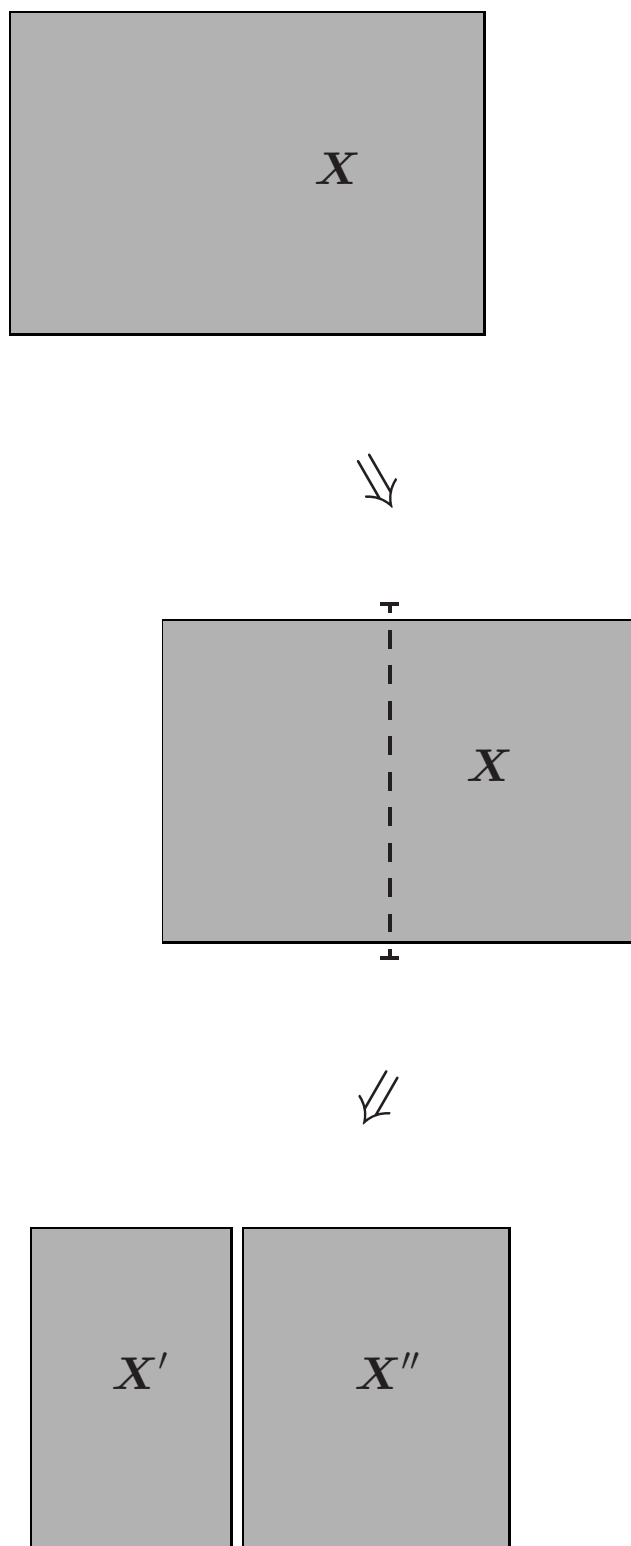


Рис. 4: Принудительное дробление бруса для уменьшения его размера.

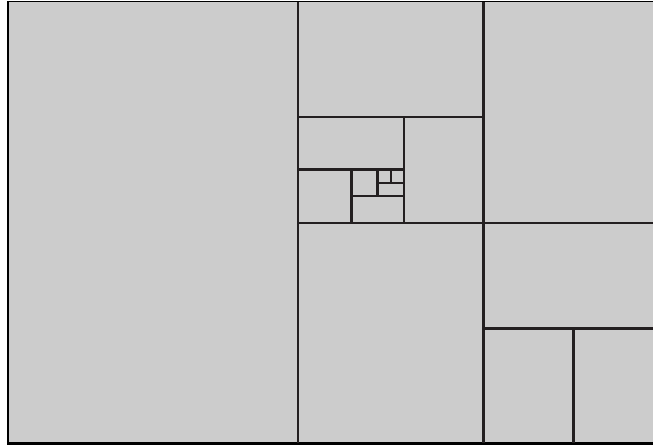


Рис. 5: Типичная конфигурация бруса области определения функции в результате его последовательного дробления в алгоритме Табл. 1.

Таким образом, в процессе выполнения алгоритма будет поддерживаться *рабочий список* \mathcal{L} , состоящий из записей-пар

$$(\mathbf{Y} , \underline{F(\mathbf{Y})}),$$

где \mathbf{Y} — интервальный n -брус, $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{X}$. Для упрощения обработки списка \mathcal{L} удобно сделать его упорядоченным, выстроив записи в нём так, чтобы они были упорядочены по возрастанию оценок $\underline{F(\mathbf{Y})}$. Первую запись списка, соответствующий брус \mathbf{Y} и оценку $\underline{F(\mathbf{Y})}$ мы будем называть *ведущими* на данном шаге.

Важным вопросом организации нашего алгоритма является конкретный способ разбиения брусков. С одной стороны, он должен обеспечивать стремление размеров ведущих брусков к нулю в процессе работы алгоритма, а, с другой, не приводить к излишним трудозатратам. Традиционный способ разбиения состоит том, что в подвергаемом дроблению брусе рассекают на равные (либо примерно равные) части лишь одну или несколько самых широких интервальных компонент [18, 19].

В итоге мы приходим к алгоритму, описываемому псевдокодом Табл. 1, где “ \leftarrow ” обозначает оператор присваивания. На начальном этапе исполнения алгоритма ведущие брусы концентрируются вокруг локальных минимумов целевой функции $F(x)$ на \mathbf{X} . Далее, по мере того, как достигается достаточное уточнение этих локальных минимумов (т.е. вместе с измельчением ведущих брусков), алгоритм постепенно отсеивает те из них, которые не являются глобальными минимумами. Более точно, всякий неглобальный локальный минимум имеет такую окрестность, что в неё, начиная с некоторого шага алгоритма, ведущие брусы уже не попадают. Раньше или позже, но все ведущие брусы будут сконцентрированы лишь вокруг глобальных минимумов (их может быть несколько), после чего алгоритм выполняет окончательное уточнение результата, т.е. значения этих глобальных минимумов. Такова схема работы алгоритма, но некоторые её этапы могут отсутствовать для конкретных задач. Например, если размерность n велика, то до уточнения локальных минимумов дело может даже не дойти.

Конечно, представленный в Табл. 1 простейший алгоритм глобальной оптимизации едва ли может быть с успехом применен к решению серьезных практических задач. Фактически, при уменьшении размеров области, подозрительной на глобальный минимум, основной упор в нём делается на бисекцию, эффект от которой при увеличении размерности

Таблица 1: Простейший интервальный адаптивный алгоритм глобальной оптимизации функций

<p>Вход</p> <p>Брус области определения \mathbf{X}.</p> <p>Интервальное расширение $\mathbf{F} : \mathbb{I}\mathbf{X} \rightarrow \mathbb{I}\mathbb{R}$ целевой функции F.</p> <p>Заданная точность $\epsilon > 0$.</p>
<p>Выход</p> <p>Оценка снизу глобального минимума F^* функции F на \mathbf{X}.</p>
<p>Алгоритм</p> <p>$\mathbf{Y} \leftarrow \mathbf{X}$;</p> <p>вычисляем $\mathbf{F}(\mathbf{Y})$ и инициализируем список $\mathcal{L} \leftarrow \{ (\mathbf{Y}, \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{Y})) \}$;</p> <p>DO WHILE ($\text{wid}(\mathbf{F}(\mathbf{Y})) \geq \epsilon$)</p> <p style="padding-left: 40px;">выбираем компоненту l, по которой брус \mathbf{Y} имеет наибольшую длину, т.е. $\text{wid } \mathbf{Y}_l = \max_i \text{wid } \mathbf{Y}_i$;</p> <p style="padding-left: 40px;">рассекаем \mathbf{Y} по l-ой координате пополам на брусы \mathbf{Y}' и \mathbf{Y}'', такие что</p> <p style="padding-left: 80px;">$\mathbf{Y}' \leftarrow (\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_{l-1}, [\underline{\mathbf{Y}}_l, \text{mid } \mathbf{Y}_l], \mathbf{Y}_{l+1}, \dots, \mathbf{Y}_n)$,</p> <p style="padding-left: 80px;">$\mathbf{Y}'' \leftarrow (\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_{l-1}, [\text{mid } \mathbf{Y}_l, \overline{\mathbf{Y}}_l], \mathbf{Y}_{l+1}, \dots, \mathbf{Y}_n)$;</p> <p style="padding-left: 40px;">вычисляем $\mathbf{F}(\mathbf{Y}')$ и $\mathbf{F}(\mathbf{Y}'')$;</p> <p style="padding-left: 40px;">удаляем запись $(\mathbf{Y}, \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{Y}))$ из списка \mathcal{L} ;</p> <p style="padding-left: 40px;">помещаем записи $(\mathbf{Y}', \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{Y}'))$ и $(\mathbf{Y}'', \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{Y}''))$ в список \mathcal{L} в порядке возрастания второго поля ;</p> <p style="padding-left: 40px;">обозначаем ведущую запись списка \mathcal{L} через $(\mathbf{Y}, \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{Y}))$;</p> <p>END DO</p> <p>$F^* \leftarrow \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{Y})$;</p>

n становится всё менее и менее ощутимым. Целесообразно поэтому рассматривать алгоритм Табл. 1 как “скелет”, основу для конструирования практических оптимизационных методов путём наращивания на неё различных модификаций, значительно ускоряющих сходимость. Обычный их перечень (не претендующий на полноту) включает в себя следующие модификации (см., в частности, работы [4, 11, 12, 18]):

- ▶ посредством выявления монотонности целевой функции F по тем или иным переменным на брусах \mathbf{Y} из списка \mathcal{L} добиваются уменьшения размерности этих брусов;
- ▶ строят более качественное интервальное расширение для целевой функции $F(x)$;
- ▶ на основе специфических локальных свойств целевой функции в соответствующих брусах применяют более эффективные, чем бисекция, процедуры минимизации (например, методы градиентного спуска в тех брусах \mathbf{Y} , где $F(x)$ гладкая и выпуклая);
- ▶ наряду с оцениванием целевой функции F по целым брусам вычисляют её значения в каких-то точках этих брусов, — они доставляют верхнюю границу искомого глобального минимума, знание которой позволяет чистить рабочий список \mathcal{L} от записей, заведомо не могущих быть ведущими;
- ▶ и т.д.

Интервальные методы глобальной оптимизации описанного выше типа получили значительное развитие в последние десятилетия ушедшего века. С их помощью было решено немалое число трудных практических задач (см., к примеру, [9]), а соответствующая теория вошла неотъемлемой частью во все энциклопедии и справочники по оптимизации (в частности, в капитальный многотомный труд [10]). Резюмируя наш обзор, можно сказать, что рассмотренные выше интервальные методы глобальной оптимизации хорошо работают для задач малой и средней размерности (когда n не превосходит нескольких десятков) и “не слишком плохих” целевых функций.

Вместе с тем, эксплуатация интервальных методов глобальной оптимизации выявила и ряд проблем. Если размерность задачи велика и/или целевая функция имеет большое количество локальных экстремумов, то за практически приемлемое время размеры ведущих брусов из рабочего списка уже не удастся уменьшить решающим образом, они остаются сравнимыми с размером начального бруса области определения, что обуславливает немалую погрешность интервального алгоритма в целом.

Последнему обстоятельству способствует и нередкое явление “застаивания интервальной оценки” (см. Рис. 6). Дело в том, что погрешность интервального оценивания целевой функции может вести себя весьма сложно для брусов конечных размеров. В частности, она совсем не обязана монотонно убывать в той же мере, что и уменьшение размеров бруса, и если такой брус делается ведущим, то выявление его бесперспективности приведет к большим и бесцельным потерям времени.

Отметим следующие характерные черты интервальных оптимизационных методов рассмотренного типа:

1. Доказательность (называемую также гарантированностью) результата: получаемая оценка значений глобального минимума гарантированно приближает его снизу (часто удается даже одновременно оценивать оптимум снизу и сверху).

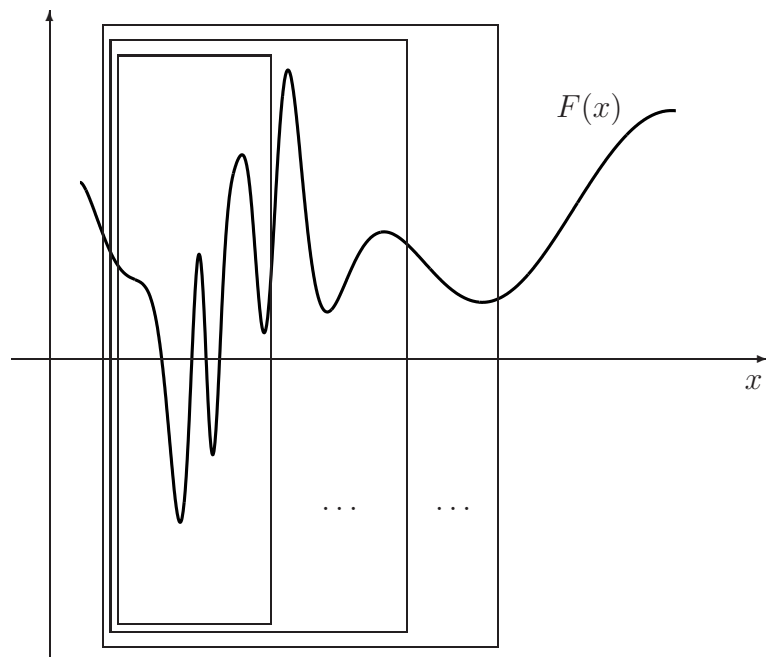


Рис. 6: Явление “застаивания” интервальной оценки: при значительном уменьшении ширины бруса качество интервальной оценки улучшается несущественно.

2. Чисто детерминистский характер алгоритма: каждый шаг его исполнения однозначно определяется результатами предыдущих шагов и свойствами целевой функции.

Доказательность обеспечивается свойствами интервальных расширений функций и находимых с их помощью оценок, а также вычислительной схемой алгоритмов, имеющих в своей основе псевдокод Табл. 1. Таким образом, обе вышеотмеченные особенности оказываются тесно связанными друг с другом.

Доказательность (гарантированность) результатов современных интервальных методов глобальной оптимизации является, несомненно, весьма ценным качеством, и среди неинтервальных методов встречается весьма редко. С другой стороны, в жертву этой доказательности принесено очень многое, даже вычислительная эффективность, которая у интервальных методов оказывается заметно хуже, чем у их классических неинтервальных собратьев.

А нельзя ли, поступившись в той или иной степени доказательностью и/или детерминизмом интервальных методов, выиграть в их вычислительной эффективности либо в каких-то других полезных качествах? Именно этот вопрос явился стимулом к написанию настоящей работы, и ниже мы постараемся обосновать осторожно положительный ответ на него.

Можно наметить несколько основных путей реализации высказанной идеи.

Во-первых, для оценки областей значений функции $F(x)$ по подмножествам области определения D вместо использования полноценных интервальных расширений можно довольствоваться непрерывными интервальными продолжениями, т.е. такими интервальными

ми функциями F , что

$$\begin{aligned} F(x) &= F(x) \text{ на } D, \\ \text{wid } F(Y) &\rightarrow 0 \text{ при } \text{wid } Y \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Доказательность получаемых интервальных оценок, конечно, пострадает, но это может быть скомпенсировано уменьшением трудозатрат на вычисление интервальных оценок $F(Y)$. Например, в алгоритме из Табл. 1 результирующая оценка F^* при замене интервального расширения F на непрерывное интервальное продолжение не будет уже приближать глобальный минимум снизу, но “состоятельность” этой оценки, т.е. свойство стремиться к искомому глобальному минимуму, успешно сохранится.

Во-вторых, при конструировании интервальных оптимизационных алгоритмов мы можем отказаться от чисто детерминистской вычислительной схемы и допустить в той или иной мере стохастические переходы. Этот путь мы и рассмотрим подробно в оставшейся части нашей работы.

3. Стохастические алгоритмы оптимизации

Стохастические методы оптимизации функций — это большая и интенсивно развивающаяся область знаний со своими специфическими подходами и ценностями (см., к примеру, [5, 8, 10]). Простейший стохастический оптимизационный алгоритм — это случайный пассивный поиск, который заключается в повторяющемся случайном бросании точки на области определения. Мы рассмотрим его здесь по чисто дидактическим причинам, как модельный пример.

Еще один популярный вероятностный алгоритм оптимизации — “симулированный отжиг” (simulated annealing), — моделирующий одноименный физический процесс и предложенный в современном виде в работе [15]. В русской литературе можно встретить такие его названия как “моделированный отжиг”, “процедура отпуска” [1], “имитация затвердевания” [5]. Псевдокод этого алгоритма приведен в Табл. 2.

С алгоритмом связывается неотрицательный вещественный параметр T , называемый “температурой” и аналогичный физической температуре в реальном отжиге. В процессе работы алгоритма величина T постепенно уменьшается от некоторого начального значения T_0 до конечного T_{fin} . На практике последовательность значений T обычно делают геометрической прогрессией с некоторым знаменателем α , меньшим единицы, хотя выбор стратегии уменьшения T , обеспечивающей сходимость метода к глобальному оптимуму, является, строго говоря, далеко не столь простым [1].

Правило $\mathcal{S}(y)$ выбора новой точки z — это обычно случайное бросание с плотностью вероятности, симметричной относительно y . Фигурирующую в алгоритме вероятность $P_T(y, z)$ принятия нового приближения z обычно полагают равной

$$P_T(y, z) = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta F \leq 0, \\ \exp\left(-\frac{\Delta F}{kT}\right), & \text{если } \Delta F \geq 0, \end{cases}$$

где через ΔF обозначено приращение значения функции в сравнении со старым приближением, т.е.

$$\Delta F = F(z) - F(y).$$

Таблица 2: Псевдокод “симулированного отжига”.

<p>Вход</p> <p>Брус области определения $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}^n$. Целевая функция $F : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$. Начальное T_0 и конечное T_{fin} значения “температуры”.</p>
<p>Выход</p> <p>Оценка F^* глобального минимума функции F на \mathbf{X}.</p>
<p>Алгоритм</p> <p>выбираем начальное приближение $y = x_0 \in \mathbf{X}$; назначаем стартовую “температуру” $T = T_0 > 0$; назначаем целую величину N_T — “количество испытаний на один температурный уровень” ; DO WHILE ($T > T_{fin}$) DO FOR $k = 1$ TO N_T случайно выбираем новую точку $z \in \mathbf{X}$ по правилу $\mathcal{S}(y)$; принимаяем z, полагая $y \leftarrow z$, с вероятностью $P_T(y, z)$; END DO уменьшаем значение температуры $T \leftarrow \alpha T$; END DO $F^* \leftarrow F(y)$;</p>

Графики функции $P_T(y, z)$ в зависимости от ΔF для различных температур T изображены на Рис. 7. Здесь константа k в знаменателе аргумента экспоненты служит для масштабирования и играет роль постоянной Больцмана в физических формулах (см. [1, 15]).

Как видим, в алгоритме “симулированного отжига” новое приближение безусловно принимается, если оно обеспечивает лучшее значение целевой функции. Но даже если новое приближение не лучше старого, ненулевая (и зависящая от температуры) вероятность его принятия все равно существует. Случайные “рысканья” по области определения, которые совершает “симулированный отжиг”, помогают ему выбираться из впадин вокруг локальных минимумов и обеспечивают тем самым глобальность поиска решения задачи (1). По мере уменьшения температуры T амплитуда случайных блужданий симулированного отжига делается все меньше и меньше, а алгоритм Табл. 2 превращается при этом в случайный локальный поиск.

Отметим, что, в действительности, со сходной проблемой — как выбираться из участков

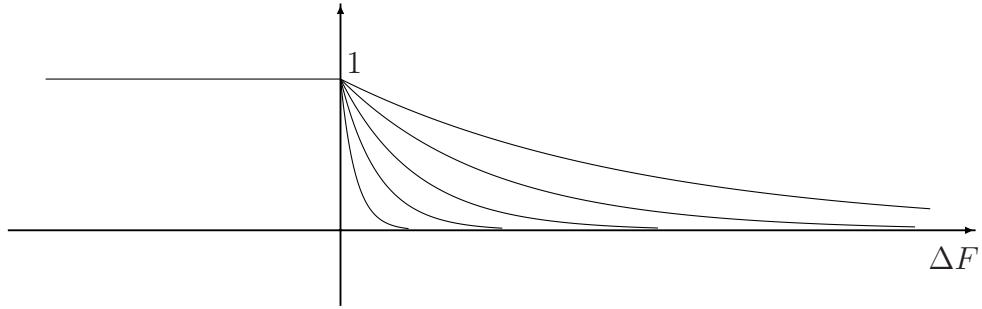


Рис. 7: Графики функций $P_T(y, z)$ для различных температур T .

обширных “плато” — мы сталкиваемся и в интервальных методах глобальной оптимизации типа представленного в Табл. 1, когда в силу “застаивания” интервальной оценки на протяжении многих шагов алгоритма ведущая оценка достигается на некотором брусе, не содержащем искомого оптимума. Нельзя ли применить основную идею “симулированного отжига” для борьбы с “застаиванием” оценки в интервальных алгоритмах глобальной оптимизации?

4. Стохастические интервальные методы

При конструировании стохастических интервальных оптимизационных процедур мы будем считать известным интервальное расширение целевой функции: из него будет черпаться информация о целевой функции в виде оценок её областей значений по подбрусам области определения. Далее, желая обеспечить глобальность поиска оптимума мы должны позаботиться о том, чтобы случайно выбираемые в области определения \mathbf{X} подбрусы в совокупности покрывали бы весь исходный брус \mathbf{X} . С другой стороны, пересечение подбрусом, по которым мы оцениваем целевую функцию, это ненужное дублирование усилий, нежелательное в экономно спроектированном алгоритме.

Как компромисс сформулированных выше взаимно противоположных требований, имеет смысл сохранить ту общую организацию данных и порядок работы с ними, которые сформировались в традиционных интервальных алгоритмах глобальной оптимизации, описанных в §2:

- все оцениваемые подбрусы получаются как результат процесса последовательного дробления исходного бруса области определения \mathbf{X} ,
- все получающиеся в результате дробления и подвергаемые оцениванию подбрусы должны сохраняться в процессе работы алгоритма.

Иными словами, мы, фактически, будем оперировать с некоторой дискретной конфигурацией на брусе исходной области определения \mathbf{X} (наглядно изображенной на Рис. 5). Для дальнейшего развития нашей идеи оптимизировать функцию посредством подходящего разбиения области определения вкупе с интервальным оцениванием особенно ценными окажутся, таким образом, идеи дискретной стохастической оптимизации.

Таблица 3: Псевдокод метода случайного интервального дробления.

<p>Вход</p> <p>Брус области определения $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}^n$.</p> <p>Интервальное расширение целевой функции $\mathbf{F} : \mathbb{I}\mathbf{X} \rightarrow \mathbb{I}\mathbb{R}$.</p> <p>Количество испытаний N.</p>
<p>Выход</p> <p>Оценка F^* глобального минимума функции F на \mathbf{X}.</p>
<p>Алгоритм</p> <p>$\mathbf{Y} \leftarrow \mathbf{X}$;</p> <p>вычисляем $\mathbf{F}(\mathbf{Y})$ и присваиваем $F^* \leftarrow \underline{\mathbf{F}(\mathbf{Y})}$;</p> <p>инициализируем рабочий список $\mathcal{L} \leftarrow \{ \mathbf{Y} \}$;</p> <p>DO FOR $k = 1$ TO N</p> <p style="padding-left: 20px;">случайным образом выбираем из списка \mathcal{L} брус \mathbf{Z} ;</p> <p style="padding-left: 20px;">рассекаем брус \mathbf{Z} по самой длинной компоненте пополам на брусы-потомки \mathbf{Z}' и \mathbf{Z}'' ;</p> <p style="padding-left: 20px;">вычисляем оценки $\phi' \leftarrow \underline{\mathbf{F}(\mathbf{Z}')}$ и $\phi'' \leftarrow \underline{\mathbf{F}(\mathbf{Z}'')}$;</p> <p style="padding-left: 20px;">IF ($\mathbf{Z} = \mathbf{Y}$) THEN</p> <p style="padding-left: 40px;">присваиваем $F^* \leftarrow \min\{ \phi', \phi'' \}$;</p> <p style="padding-left: 40px;">посредством \mathbf{Y} обозначаем тот из брусков \mathbf{Z}' и \mathbf{Z}'' , который обеспечил новую оценку F^*</p> <p style="padding-left: 20px;">ELSE</p> <p style="padding-left: 40px;">присваиваем $F^* \leftarrow \min\{ F^*, \phi', \phi'' \}$</p> <p style="padding-left: 20px;">END IF</p> <p style="padding-left: 20px;">удаляем из списка \mathcal{L} брус \mathbf{Z} , помещаем в \mathcal{L} брусы \mathbf{Z}' и \mathbf{Z}'' ;</p> <p>END DO</p>

Аналогом простейшего оптимизационного метода случайного поиска можно считать при этом алгоритм, псевдокод которого представлен в Табл. 3. Мы будем называть его “случайным интервальным дроблением”, так как каждое испытание состоит в нём в дроблении пополам случайно выбранного бруса из покрытия области определения \mathbf{X} . Все брусы получающиеся в процессе работы алгоритма, хранятся в рабочем списке \mathcal{L} . При отсутствии априорной информации о целевой функции F случайный выбор бруса \mathbf{Z} списка \mathcal{L} естественно осуществлять по равновероятному правилу, т.е. полагая вероятности выбора всех брусов одинаковыми.

Интервальное случайное дробление — это пассивный вычислительный алгоритм в том смысле, что каждый последующий его шаг никак не использует информацию, полученную на предыдущих. Ясно также, что вычислительная эффективность “случайного интервального дробления” невысока, хотя ряд свойств случайного поиска делает его применение оправданным в некоторых практических ситуациях (см. [5]). Кроме того, отталкиваясь от случайного интервального дробления можно строить более совершенные алгоритмы, реализующие те или иные схемы адаптации к целевой функции.

Вычислительная схема интервального аналога “симулированного отжига” помещена в Табл. 4. При этом вероятность дробления выбранного бруса \mathbf{Z} , как и в классическом методе “симулированного отжига”, задаётся по формуле

$$P_T(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta F \leq 0, \\ \exp\left(-\frac{\Delta F}{kT}\right), & \text{если } \Delta F \geq 0, \end{cases}$$

где

$$\Delta F = \underline{F(\mathbf{Z})} - \underline{F(\mathbf{Y})}$$

— приращение оценки оптимума, обеспечиваемое брусом нового приближения. На Рис. 8 приведено семейство графиков этой функции для различных температур T .

Правило $\mathcal{S}(\mathbf{Y})$ в алгоритме Табл. 4 — это случайный выбор бруса \mathbf{Z} из рабочего списка. Его можно организовать самым различным образом в зависимости от наличия априорной информации о целевой функции.

Отметим, что помимо процедуры Табл. 4 интервальный симулированный отжиг может быть представлен ещё “доказательным” вариантом, в котором по ходу исполнения алгоритма сохраняется свойство вычисляемой оценки не превосходить глобальный оптимум. В чём же смысл введения элементов стохастичности в такую вычислительную схему? Тем самым мы “рандомизируем” вычислительную схему, обеспечивая более равномерное приложение вычислительных усилий на ранних этапах работы алгоритма. Частично это способствует и преодолению эффекта “заставания” интервальной оценки.

На графиках функций $P_T(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ область отрицательных ΔF затемнена, чтобы показать её недоступность для доказательной версии “интервального симулированного отжига”: коль скоро \mathbf{Y} — ведущий на данном шаге брус, то $\underline{F(\mathbf{Y})}$ не больше оценки по любому брусу списка, а ΔF всегда неотрицательна.

Отметим, что на продвинутых этапах выполнения доказательной версии “интервального симулированного отжига”, когда температура T достаточно уменьшается, алгоритм Табл. 5 превращается в традиционный интервальный алгоритм глобальной оптимизации из Табл. 1.

Первые вычислительные эксперименты с доказательной версией интервального метода “симулированного отжига”, выполненные в работе [7] на задачах малой размерности,

Таблица 4: Простейший интервальный алгоритм симулированного отжига

<p>Вход</p> <p>Брус области определения $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}^n$. Интервальное расширение $\mathbf{F} : \mathbb{I}\mathbf{X} \rightarrow \mathbb{I}\mathbb{R}$ целевой функции F. Начальное T_0 и конечное T_{fin} значения “температуры”.</p>
<p>Выход</p> <p>Оценка F^* глобального минимума функции F на \mathbf{X}.</p>
<p>Алгоритм</p> <p>$\mathbf{Y} \leftarrow \mathbf{X}$; назначаем стартовую “температуру” $T = T_0 > 0$; назначаем величину N_T — “количество испытаний на один температурный уровень” ; вычисляем $\mathbf{F}(\mathbf{Y})$ и инициализируем список $\mathcal{L} \leftarrow \{ (\mathbf{Y}, \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{Y})) \}$; DO WHILE ($T > T_{fin}$) DO FOR $k = 1$ TO N_T случайно выбираем из \mathcal{L} запись $(\mathbf{Z}, \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{Z}))$ по правилу $\mathcal{S}(\mathbf{Y})$; DO (с вероятностью $P_T(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$) рассекаем \mathbf{Z} по самой длинной компоненте пополам на брусы-потомки \mathbf{Z}' и \mathbf{Z}'' ; вычисляем $\mathbf{F}(\mathbf{Z}')$ и $\mathbf{F}(\mathbf{Z}'')$; удаляем запись $(\mathbf{Z}, \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{Z}))$ из списка \mathcal{L} ; помещаем записи $(\mathbf{Z}', \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{Z}'))$ и $(\mathbf{Z}'', \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{Z}''))$ в список \mathcal{L} ; обозначаем через $(\mathbf{Y}, \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{Y}))$ ту из записей $(\mathbf{Z}', \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{Z}'))$ и $(\mathbf{Z}'', \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{Z}''))$, которая имеет меньшее значение второго поля ; END DO END DO уменьшаем значение температуры $T \leftarrow \alpha T$; END DO $F^* \leftarrow \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{Y})$;</p>

Таблица 5: Доказательная версия интервального алгоритма симулированного отжига

<p>Вход</p> <p>Брус области определения $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}^n$. Заданная точность $\epsilon > 0$. Интервальное расширение $\mathbf{F} : \mathbb{I}\mathbf{X} \rightarrow \mathbb{I}\mathbb{R}$ целевой функции F. Начальное T_0 и конечное T_{fin} значения “температуры”.</p>
<p>Выход</p> <p>Оценка снизу F^* глобального минимума функции F на \mathbf{X}.</p>
<p>Алгоритм</p> <p>$\mathbf{Y} \leftarrow \mathbf{X}$; назначаем стартовую “температуру” $T = T_0 > 0$; назначаем величину N_T — “количество испытаний на один температурный уровень” ; вычисляем $\mathbf{F}(\mathbf{Y})$ и инициализируем список $\mathcal{L} \leftarrow \{ (\mathbf{Y}, \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{Y})) \}$; DO WHILE ($T > T_{fin}$ и $\text{wid}(\mathbf{F}(\mathbf{Y})) \geq \epsilon$) DO FOR $k = 1$ TO N_T случайно выбираем из \mathcal{L} запись $(\mathbf{Z}, \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{Z}))$ по правилу $\mathcal{S}(\mathbf{Y})$; DO (с вероятностью $P_T(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$) рассекаем \mathbf{Z} по самой длинной компоненте пополам на брусы \mathbf{Z}' и \mathbf{Z}'' ; вычисляем $\mathbf{F}(\mathbf{Z}')$ и $\mathbf{F}(\mathbf{Z}'')$; удаляем запись $(\mathbf{Z}, \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{Z}))$ из списка \mathcal{L} ; помещаем записи $(\mathbf{Z}', \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{Z}'))$ и $(\mathbf{Z}'', \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{Z}''))$ в список \mathcal{L} в порядке возрастания второго поля ; END DO обозначаем ведущую запись списка \mathcal{L} через $(\mathbf{Y}, \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{Y}))$; END DO уменьшаем значение температуры $T \leftarrow \alpha T$; END DO $F^* \leftarrow \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{Y})$;</p>

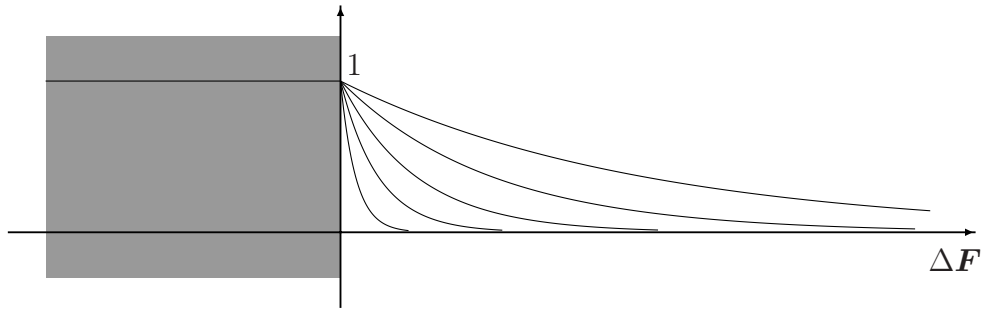


Рис. 8: Графики функций $P_T(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ для различных температур T .

свидетельствуют, что он работает заметно хуже детерминированных алгоритмов интервальной глобальной оптимизации, если целевая функция $F(x)$ имеет не очень сложную структуру. Если же $F(x)$ имеет много локальных экстремумов и сложный рельеф, то преимущество чисто детерминированных подходов делается малоощутимым. По-видимому, при повышении размерности задачи n интервальный “симулированный отжиг” должен демонстрировать все более благоприятное поведение.

5. Итоги

- 1) Вычислительная оптимизация, в частности, глобальная оптимизация функций — благодатная почва для приложений интервальных методов.
- 2) Доказательность (гарантированность) результатов является ценным свойством современных интервальных методов глобальной оптимизации, но она же является одной из причин их недостаточной вычислительной эффективности в сравнении с классическими неинтервальными подходами. Отказ от доказательности и/или чисто детерминистского характера интервальных оптимизационных методов может, на наш взгляд, привести к созданию численных алгоритмов с качественно новыми свойствами, в частности, с улучшенной вычислительной эффективностью.
- 3) В интервальные методы разнообразными способами могут быть введены элементы стохастического управления. Простейшие стохастические интервальные алгоритмы — это случайное интервальное дробление и интервальный “симулированный отжиг”.
- 4) Практические перспективы стохастических интервальных методов оптимизации, в частности “случайного интервального дробления” и “интервального симулированного отжига”, требуют дальнейшего исследования. По мнению автора, стохастическим интервальным подходам суждено занять достойное место в арсенале вычислительной оптимизации.

Список литературы

- [1] Р. Азенкотт *Процедура “отпуска”*. — В кн.: Труды семинара Н. Бурбаки за 1988 год. Москва: Мир, 1990, с. 235–251.

- [2] Г. Алефельд, Ю. Херцбергер *Введение в интервальные вычисления*. Москва: Мир, 1987.
- [3] А.А. Гаганов *О сложности вычисления интервала значений полинома от многих переменных*. – Кибернетика, 1985, №4, с. 6–8.
- [4] Ю.Г. Евтушенко, В.А. Ратькин *Метод половинных делений для глобальной оптимизации функции многих переменных*. – Известия АН СССР “Техническая кибернетика”, 1987, №1, с. 119–128.
- [5] А.А. Жиглявский, А.Г. Жилинскас *Методы поиска глобального экстремума*. Москва: Наука, 1991.
- [6] С.А. Калмыков, Ю.И. Шокин, З.Х. Юлдашев *Методы интервального анализа*. Новосибирск: Наука, 1986.
- [7] Н.В. Панов, В.В. Колдаков *Программный комплекс для графического представления процесса и результатов работы интервальных алгоритмов*. – В кн.: Пятая международная конференция “Перспективы систем информатики” памяти акад. А.П. Ершова – PSI’03. Международное совещание по интервальной математике и методам распространения ограничений, 8–9 июля 2003 года, Новосибирск, Академгородок. Новосибирск: ИСИ СО РАН, 2003, с. 38–45.
- [8] Л.А. Растрингин *Статистические методы поиска*. М.: Наука, 1968.
- [9] G.F. Corliss, R.B. Kearfott *Rigorous global search: Industrial applications*. – В кн.: *Developments in reliable computing*, T. Csendes, ed. Dordrecht: Kluwer, 1999, p. 1–16. (см. <http://interval.louisiana.edu/preprints/scan98.pdf>)
- [10] *Encyclopedia of Optimization*. C.A. Floudas and P.M. Pardalos, eds. Volumes I–VI. Dordrecht: Kluwer, 2001.
- [11] E. Hansen, G.W. Walster *Global optimization using interval analysis*. New York: Marcel Dekker, 2004.
- [12] R.B. Kearfott *Rigorous global search: Continuous problems*. Dordrecht: Kluwer, 1996.
- [13] R.B. Kearfott, M.T. Nakao, A. Neumaier, S.M. Rump, S.P. Shary, P. van Hentenryck *Standardized notation in interval analysis*. – См. настоящий сборник.
- [14] R.B. Kearfott, V. Kreinovich *Beyond convex? Global optimization is feasible only for convex objective functions: A theorem*. – *Journal of Global Optimization*, в печати (см. <http://interval.louisiana.edu/preprints/NP.pdf>).
- [15] S. Kirkpatrick, C.D. Gelatt, M.P. Vecchi *Optimization by simulated annealing*. – *Science*, 1983, Vol. 220, p. 671–680.
- [16] R.E. Moore *Methods and applications of interval analysis*. Philadelphia: SIAM, 1979.
- [17] A. Neumaier *Interval methods for systems of equations*. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

- [18] H. Ratschek, J. Rokne *New computer methods for global optimization*. Chichester, New York: Ellis Horwood, Halsted Press, 1988.
- [19] S.P. Shary *On optimal solution of interval linear equations*. – SIAM Journal on Numerical Analysis, 1995, Vol. 32, №2, p. 610–630.
- [20] Tao Wang *Global optimization for constrained nonlinear programmings*. Ph.D. thesis. Urbana, Illinois: University of Illinois at Urbana-Champaign, 2001.

STOCHASTIC APPROACHES IN INTERVAL GLOBAL OPTIMIZATION

Sergey P. Shary

Institute of computational technologies SB RAS, Novosibirsk
e-mail: shary@ict.nsc.ru

Abstract. The work is a critical survey of interval optimization methods aimed at computing global optima of multivariable functions. To overcome some drawbacks of traditional deterministic interval techniques, we outline the ways for constructing stochastic approaches of interval global optimization, in particular those based on the ideas of random search and simulated annealing.

Key words: optimization, global, interval methods, stochastic approaches, random walking, simulated annealing.

Standardized notation in interval analysis

R. Baker Kearfott

*Department of Mathematics, University of Louisiana at Lafayette
Box 4-1010 Lafayette, Louisiana 70504-1010, USA*

Mitsuhiro T. Nakao

*Graduate School of Mathematics, Kyushu University 33
Fukuoka 812, Japan*

Arnold Neumaier

*Institut für Mathematik, Universität Wien
Strudlhofgasse 4, A-1090 Wien, Austria*

Siegfried M. Rump

*Institut f. Informatik III, Technical University Hamburg-Harburg
Schwarzenbergstrasse 95, D-21073 Hamburg, Germany*

Sergey P. Shary

*Institute of Computational Technologies
Lavrentiev Ave., 6, Novosibirsk, 630090, Russia*

Pascal van Hentenryck

*Dept. of Computer Science, Brown University
P.O. Box 1910, Providence, RI 02912, USA*

June 7, 2005

Abstract

A standard for the notation of the most used quantities and operators in interval analysis is proposed.

1 Introduction

Publications in interval analysis currently suffer from a multitude of incompatible notational styles. There are obvious advantages in having a standardized notation, especially for those peripheral to our field who only want to read an occasional paper to see whether the field offers something for the solution of their problems. It is important for the future of interval analysis to reach out to these colleagues; a standardized notation contributes to limit the burden of learning new notation to a minimum.

In much of mathematics, standardization happens automatically because people use the notation introduced by the first influential papers on an issue. In interval analysis, this unfortunately did not happen. Worse, because there was no consensus in the past literature, new authors of work in interval analysis created their own notational habits, and produced further variants that added to the confusion. The time seems ripe to attempt to correct this unpleasant situation.

The purpose of this paper is to propose a standard that hopefully persuades the entire community to use it for publishing their work. Emphasis is on easy usage and easy comprehensibility. To facilitate the acceptance of the standard, a \LaTeX style file is provided [5] that makes it easy to create documents conforming to the standard.

The proposed standard is based on the following guiding lines: The notation should blend seamlessly with traditional notation in mathematics, in particular numerical analysis and optimization. It should also result in formulas that look as simple as possible, while conveying the meaning clearly even to readers not working in the field. And it should create a minimal burden in preparing manuscripts for authors wanting to conform to the standard. In particular, standardization is restricted to the most basic aspects of interval terminology.

We hope that the suggested notation will appear persuasive to authors in interval analysis and its applications, convincing them that using it is likely to improve the communication of ideas in interval analysis to colleagues and potential users.

2 Standard notation

Noninterval quantities. General recommendations on the mathematical style are in the authoritative *Handbook of Writing for the Mathematical Sciences* by HIGHAM [3].

In order for the notation to be consistent with traditional usage in other fields of mathematics, in particular optimization and numerical analysis, letters defining scalars and vectors should be lower case, and those defining matrices should be upper case. Sets should be capitals not in bold, unless they are intervals or boxes (see below). Similarly, letters denoting scalar-valued functions should be lower case, and letters denoting vector-valued functions should be upper case.

Upper case vector-valued functions are advisable because these are nonlinear operators, generalizations of linear operators and matrices. This is the dominant usage, cf., e.g., ORTEGA & RHEINBOLDT [13, p. 20], DENNIS & SCHNABEL [1], although not universally followed (e.g., NOCEDAL & WRIGHT [12] use lower case).

Arithmetic expressions are formulas (or more general programs) composed of a finite sequence of operations and elementary functions applied to constants, the components of an argument vector, or intermediate results. Letters denoting expressions should be sansserif lower case

for scalar results, and sansserif upper case for vector results. Expressions are evaluated on arguments of a given class using class specific operations and elementary functions.

A notational distinction of arithmetic expressions and the function they represent is important because equivalent expressions give different results when evaluated in nonstandard (e.g., floating point) arithmetic. This has been blurred in the past, sometimes leading to confusion, especially for people outside interval analysis who are likely to interpret $f([-1, 1])$ as the image of $[-1, 1]$ under f ; $f([-1, 1])$ specifies it as the result of applying the operations in f to the interval $[-1, 1]$ in its intrinsic arithmetic.

The sloppy usage of “the function $f(x) = x^2 - x + 1$ ” is accepted in mathematics, but is discouraged and should be replaced by either “the expression $f(x) = x^2 - x + 1$ ” or “the function f defined by $f(x) = x^2 - x + 1$ for all $x \in \mathbb{R}$ ”, depending on the intended usage: The first form emphasizes the syntactic form to be used for evaluation and is defined for all arguments for which the operations are defined, while the second form emphasizes the mapping aspect and has no meaning with a nonreal argument.

Given a list x of arguments, the sublist consisting of components x_k with indices k in a subset K of indices is denoted by x_K , and the complementary sublist by $x_{\notin K}$, or by $x_{\neq k}$ if $K = \{k\}$; the ordering is that of the natural ordering of the index set. If f is an expression in x then

$$f(x_K, y_{\notin K}) := f(z), \quad z_k = \begin{cases} x_k & \text{if } k \in K, \\ y_k & \text{if } k \notin K, \end{cases}$$

denotes the value of f at the argument with components in K taken from x and the others taken from y . Similarly, $f(x_k, y_{\neq k})$ denotes the value of f at the argument with components k taken from x and the others taken from y .

This is the simplest of various notations used in some versions of slopes, and in constraint propagation for slicing, where some arguments in an expression are intervals, and others are components of centers or endpoints of intervals.

\mathbb{R} denotes the field of real numbers, \mathbb{R}^n the vector space of column vectors of length n with real entries, and $\mathbb{R}^{m \times n}$ the vector space of $m \times n$ -matrices with real coefficients.

This is the standard notation in numerical analysis; cf. GOLUB & VAN LOAN [2], HIGHAM [4], NEUMAIER [11]. In optimization, it is usually avoided to refer explicitly to a space of matrices but if it occurs, such as in NOCEDAL & WRIGHT [12, p. 255], the above notation is used there, too.

It is recommended to write $S \subseteq S'$ if S is a subset of S' , and to avoid the use of the ambiguous symbol \subset .

To say unambiguously that S is a proper subset of S' (rarely needed in our field), it is best to use words, or $S \subseteq S'$, $S \neq S'$.

The interior of a subset $S \subseteq \mathbb{R}^n$ is denoted by $\text{int } S$, the boundary by ∂S . The convex hull (closed convex hull) of a set S is denoted by $\text{ch } S$ ($\text{cch } S$).

Note that the above includes the possibility of writing $\text{int } (S)$, $\text{ch } (S)$, etc., where appropriate.

The relations $=, <, \leq, >, \geq$ between vectors or matrices, and the supremum $\sup S$ and infimum $\inf S$ of a set S of vectors or matrices are interpreted componentwise.

This conforms with standard usage in lattice theory, and is essential in arguments based on the theory of nonnegative matrices, M -matrices, and H -matrices, where vectors with all components > 0 figure prominently.

The transpose of a vector x (a matrix A) is written as x^T (A^T). The transposed inverse of a nonsingular square matrix A is denoted by

$$A^{-T} = (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Using x^T and A^T is standard in numerical analysis and optimization. The notation A^{-T} is now also frequently used in numerical analysis and very convenient. Many pure mathematicians prefer x^\top , A^\top , and statisticians (and Matlab) use x' , A' ; our choice is guided by the closeness of interval analysis to numerical analysis and optimization.

Components of a matrix A are denoted by A_{ik} (preferably) or a_{ik} (if done consistently); the i th row of A is denoted by $A_{i.}$, and the k th column by $A_{.k}$.

$$\text{diag}(A) = (A_{11}, \dots, A_{nn})^T$$

denotes the diagonal of a square matrix A , $\text{Diag}(a) = \text{Diag}(a_1, \dots, a_n)$ the diagonal matrix with diagonal entries a_k , and $\text{Diag}(A) = \text{Diag}(\text{diag}(A))$ the diagonal part of A .

This is a compromise between mathematical notation and Matlab notation, consistent with traditional notation.

There is no common notation in mathematics for the identity matrix; numerical analysts usually use I ; other authors use E or Id . Many mathematicians use 1 as the unit in any ring and hence also in the ring of matrices, and this has its advantages. Our recommendation is to use I , and 1 in contexts where I is used as an index set.

The preferred (but not the only useful) norm in interval computations is the maximum norm, $\|x\|_\infty = \max_k |x_k|$; in papers where $\|x\|$ shall denote a distinguished norm, it should be defined so explicitly in the paper.

Intervals and boxes. A *box* of dimension n is a pair $\mathbf{x} = [\underline{x}, \bar{x}]$ consisting of two real column vectors \underline{x} and \bar{x} of length n with $\underline{x} \leq \bar{x}$. The set of all boxes of dimension n is denoted by \mathbb{IR}^n .

\mathbb{IR}^n has been used in four recent books, NEUMAIER [10, 11], KEARFOTT [9], JAULIN et al. [6]. Boldface for intervals is in [9, 11]; [10] did not distinguish between reals and intervals notationally; [6] used \mathbf{x} for real vectors and $[\mathbf{x}]$ for interval vectors, which seems unnecessarily complicated, given that mathematicians do not specially mark vectors; [9] used capital boldface letters for interval vectors, with the disadvantage that formulas of linear algebra have a different appearance when written for intervals.

A box \mathbf{x} is generally identified with the (nonempty) set of points between its lower and upper bound,

$$\mathbf{x} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\},$$

so that a vector $x \in \mathbb{R}^n$ is *contained* in a box \mathbf{x} , i.e., $x \in \mathbf{x}$, iff $\underline{x} \leq x \leq \bar{x}$. Similarly, a *thin* box $\mathbf{x} = [x, x]$ (i.e., a box of zero width) is usually identified with the unique point x it contains. A generic (arbitrary) point in a box \mathbf{x} is often denoted by x or \tilde{x} . The set of vertices of a box \mathbf{x} (or more generally a polytope S) is denoted by $\text{vert } \mathbf{x}$ ($\text{vert } S$).

We write $\text{inf } \mathbf{x} := \underline{x}$ for the *lower bound*, $\text{sup } \mathbf{x} := \bar{x}$ for the *upper bound*, and $\text{dim } \mathbf{x} = n$ for the dimension of \mathbf{x} . The *width* of a box \mathbf{x} is

$$\text{wid } \mathbf{x} = \bar{x} - \underline{x} \geq 0;$$

its *radius* is

$$\text{rad } \mathbf{x} = \frac{1}{2} \text{wid } \mathbf{x} = \frac{1}{2}(\bar{x} - \underline{x}),$$

and its *midpoint* is

$$\text{mid } \mathbf{x} = \frac{1}{2}(\bar{x} + \underline{x}).$$

\tilde{x} was reserved for the midpoint in [10], but is elsewhere used more generally for a center, i.e., a representative point (not necessarily the midpoint) used in centered forms.

A (real, closed, nonempty) *interval* is a 1-dimensional box, i.e., a pair $\mathbf{x} = [\underline{x}, \bar{x}]$ consisting of two real numbers \underline{x} and \bar{x} with $\underline{x} \leq \bar{x}$. The set of all intervals is denoted by \mathbb{IR} . A box \mathbf{x} may be considered as an *interval vector* $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)^T$ with *components* $\mathbf{x}_k = [\underline{x}_k, \bar{x}_k]$. For example, if $\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ and $\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ then $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} [1,2] \\ [3,4] \end{pmatrix}$.

The *deviation* of an interval \mathbf{x} is the real number $\text{dev } \mathbf{x}$ defined by $\text{dev } \mathbf{x} = \underline{x}$ if $|\underline{x}| \geq |\bar{x}|$, and $\text{dev } \mathbf{x} = \bar{x}$ otherwise. The *mignitude* of an interval \mathbf{x} is the number

$$\langle \mathbf{x} \rangle = \min\{|x| \mid x \in \mathbf{x}\}.$$

Using $\langle \mathbf{x} \rangle$ for the mignitude would make formulas more difficult to interpret, especially if used together with inequality signs.

The interval-valued *absolute value function* is defined on intervals by

$$\text{abs}(\mathbf{x}) = \{|x| \mid x \in \mathbf{x}\},$$

The *absolute value* of a box \mathbf{x} is the real vector

$$|\mathbf{x}| = \max\{|x| \mid x \in \mathbf{x}\} = \sup\{-\underline{x}, \bar{x}\}.$$

In particular,

$$\text{abs}(\mathbf{x}) = [\langle \mathbf{x} \rangle, |\mathbf{x}|] \quad \text{for intervals } \mathbf{x}.$$

The vector valued hypermetric between \mathbf{x} and \mathbf{y} is denoted by

$$\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup\{|\underline{x} - \underline{y}|, |\bar{x} - \bar{y}|\};$$

the Hausdorff distance between two boxes \mathbf{x} and \mathbf{y} in the metric given by the maximum norm is then

$$\text{dist}_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_\infty,$$

and similarly for other specific norms.

[10] used the traditional $q(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ for $\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, which is less easy to understand.

Interval matrices. An $m \times n$ *interval matrix* is a $m \times n$ matrix \mathbf{A} whose entries $\mathbf{A}_{jk} = [\underline{A}_{jk}, \bar{A}_{jk}]$ ($j = 1, \dots, m, k = 1, \dots, n$) are intervals. An interval matrix \mathbf{A} is generally identified with the (nonempty) set of matrices A with $A_{jk} \in \mathbf{A}_{jk}$ for all j, k , equivalently with $\underline{\mathbf{A}} \leq A \leq \bar{\mathbf{A}}$. The notation for boxes is adapted to interval matrices in the natural componentwise way. An exception is the mignitude, which is undefined for non-square matrices, and becomes the *comparison matrix* $\langle \mathbf{A} \rangle$ of a square matrix \mathbf{A} , defined as the matrix with diagonal components $\langle \mathbf{A} \rangle_{kk} = \langle \mathbf{A}_{kk} \rangle$ and off-diagonal components $\langle \mathbf{A} \rangle_{jk} = -|\mathbf{A}_{jk}|$ for $j \neq k$.

This is needed for consistent usage in the context of *H-matrices*; see NEUMAIER [10, Chapter 3]. $\langle \mathbf{A} \rangle$ is undefined for matrices that are not square and for vectors of length > 1 .

Operations and expressions. A relation $\mathbf{x} \omega \mathbf{y}$ (with $\omega \in \{=, <, \leq, >, \geq\}$) between two boxes \mathbf{x} and \mathbf{y} is defined to be true iff $x \omega y$ for all $x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}$.

This is the traditional, oldest interpretation, and is established. Of course, other interpretations are possible but should be designated differently. For example, the statement “ xwy for some $x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}$ ” could perhaps be denoted by $\mathbf{x}\omega^\mathbf{y}$; but this should be defined in each paper using it.*

Operations (and elementary functions) are automatically interpreted as the natural operations on the class of objects involved; i.e., real for real (vector, matrix) arguments, interval if an argument is interval (vector, matrix).

In case of finite precision arithmetic, interval operations are assumed outward rounded. In case of conflicting interpretations (exact vs. rounded, or interval versus set operations), the recommended notation is $\text{fl}(\text{expression})$ for the floating point evaluation of an explicitly given expression expression , $\text{fl}_\Delta(\text{expression})$ and $\text{fl}_\nabla(\text{expression})$ for upward and downward directed rounding, respectively, $\text{flint}(\text{expression})$ for the outward rounded interval evaluation, and $\text{set}(\text{expression})$ for the set (Minkowski) evaluation.

$\text{fl}(\text{expression})$ is commonly used in numerical analysis, and generalizes naturally in the form stated.

Since expressions define unique functions from (part of) \mathbb{IR} to \mathbb{IR} , other functions from \mathbb{IR} to \mathbb{IR} may also be written in bold if desired.

The image of a set S under a mapping f (which equals the range of f for arguments in S) is denoted by

$$\text{range}(f, S) = \{f(x) \mid x \in S\},$$

and the range of an expression \mathbf{f} over a box \mathbf{x} is

$$\text{range}(\mathbf{f}, \mathbf{x}) = \{\mathbf{f}(x) \mid x \in \mathbf{x}\}.$$

The use of $f(S)$ for the image of S under f is discouraged since, for boxes $S = \mathbf{x}$, a confusion with an interval evaluation may occur. Alternatives such as $\text{range}_{x \in S} f(x)$ formed in analogy to the use of \min or \lim are acceptable.

The interval hull of a set S is denoted by $\square S$, and the interval evaluation of an expression \mathbf{f} is $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, so that $\text{range}(\mathbf{f}, \mathbf{x}) \subseteq \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

$\square S$ is a much-used alternative symbol for interval hull, but has the disadvantage that its \LaTeX definition does not adapt to different fonts and sizes.

Generalizations of intervals. Complex intervals exist either as rectangles or as disks. If only one sort of complex intervals is used, the set of such intervals should be denoted by \mathbb{IC} , otherwise use $\mathbb{IC}_{\text{rect}}$ for the set of complex rectangles and $\mathbb{IC}_{\text{disc}}$ for the set of complex discs.

An *extended box* of dimension n is either the empty set $\mathbf{x} = \emptyset$, or a pair $\mathbf{x} = [\underline{x}, \bar{x}]$ consisting of two column vectors $\underline{x} \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})^n$ and $\bar{x} \in (\mathbb{R} \cup \{\infty\})^n$ with $\underline{x} \leq \bar{x}$. $^*\mathbb{IR}^n$ denotes the set of extended boxes of dimension n . An *extended interval* is an extended box of dimension 1.

KAUCHER [7, 8] completed interval arithmetic by introducing anti-intervals where the upper bound is smaller than the lower bound, and converse operations to the standard interval arithmetic operations. In particular, we have *inner* addition and *inner* subtraction,

$$\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} = [\underline{x} + \bar{y}, \bar{x} + \underline{y}], \quad \mathbf{x} \ominus \mathbf{y} = [\underline{x} - \underline{y}, \bar{x} - \bar{y}],$$

and more complicated formulas for inner multiplication \odot and inner division \oslash . The support of the resulting algebraic system — *Kaucher complete interval arithmetic* — consisting of both intervals and anti-intervals is denoted by \mathbb{KR} .

Kaucher’s notation \mathbb{IR} conflicts with the later consensus usage of this for the set of intervals.

All notation for intervals and boxes is extended to these generalizations in a straightforward way.

3 The `intmacros.sty` style file

To facilitate the acceptance of the proposed standard, a \LaTeX style file is provided [5] (together with the \LaTeX source of the present paper as an example of its use) that makes it easy to create documents conforming to the standard. The style file is designed to keep the \LaTeX notation for intervals as simple as possible.

The style file uses `\a` for \mathbf{a} , `\A` for \mathbf{A} , etc., to denote bold face (i.e., interval) quantities. This notation is very short and quite convenient; even on the blackboard, `\A` is better than $[A]$ since it is shorter, and can be read naturally as “*interval A*”.

`\mathsf f` gives the sansserif letter f , etc., denoting an expression.

The style file uses `\Rz` for \mathbb{R} , and similarly for other open-faced upper case letters. `\ul x` and `\ol x` encode the lower bound \underline{x} and the upper bound \bar{x} of \mathbf{x} .

In some cases, the existence of already frequently used macros prevented the natural name for an abbreviation, and we modified it according to the annotation in the style file. For example, both `\vert` and `\Vert` are reserved in \LaTeX for single and double vertical lines, respectively. So, the vertex set gets the abbreviation `\ivert` instead of `\vert`. Similarly, the interior is typed as `\iint` instead of `\int`, the midpoint as `\imid` instead of `\mid`, an interval or box \mathbf{i} is typed as `\ii` instead of `\i`, \mathbf{v} as `\vv` instead of `\v`, and an interval matrix \mathbf{D} as `\DD` instead of `\D`.

References

- [1] J.E. Dennis and R.B. Schnabel, Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1983.
- [2] G.H. Golub and C.F. van Loan, Matrix Computations, 2nd ed., Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore 1989.
- [3] N.J. Higham, Handbook of Writing for the Mathematical Sciences, SIAM, Philadelphia 1993.
- [4] N.J. Higham, Accuracy and Stability of Numerical Algorithms, SIAM, Philadelphia 1996.
- [5] Notation in Interval Analysis.
<http://www.ict.nsc.ru/interval/InteNotation.ps>
<http://www.mat.univie.ac.at/~neum/software/int>
- [6] L. Jaulin, M. Kieffer, O. Didrit and E. Walter, Applied Interval Analysis, Springer, London, 2001.
- [7] E. Kaucher, Algebraische Erweiterungen der Intervallrechnung unter Erhaltung Ordnungs- und Verbandsstrukturen, *Computing Supplement*, **1** (1977), pp. 65–79.
- [8] E. Kaucher, Interval analysis in the extended interval space $\mathbb{I}\mathbb{R}$, *Computing Supplement*, **2** (1980), pp. 33–49.
- [9] R.B. Kearfott, Rigorous Global Search: Continuous Problems. Kluwer, Dordrecht, 1996.

- [10] A. Neumaier, Interval Methods for Systems of Equations, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
- [11] A. Neumaier, Introduction to Numerical Analysis, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.
- [12] J. Nocedal and S.J. Wright, Numerical Optimization, Springer Series in Operations Research, Springer, Berlin 1999.
- [13] J.M. Ortega and W.C. Rheinboldt, Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables, Classics in Applied Mathematics 30, SIAM, Philadelphia 2000.

