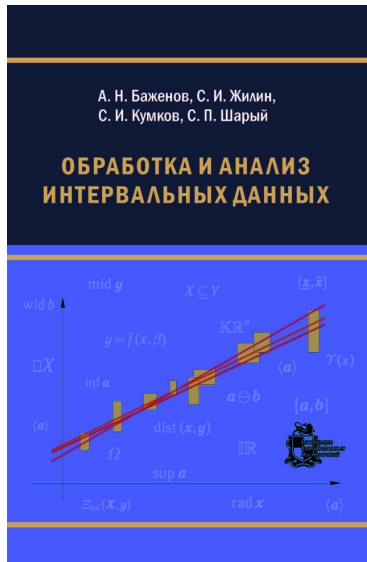


А.Н. Баженов, С.И. Жилин, С.И. Кумков, С.П. Шарый

«Статусы измерений в выборках интервальных данных»

Веб-семинар
«Интервальный анализ и его приложения»
22.04.2024

<https://shop.rcd.ru/catalog/intervalnyy-analiz-i-ego-prilojeniya/19592/>



- Представить часть материала, не вошедшего в книгу [1].
- На примере из области ядернофизического эксперимента обсудить терминологию.
- Анонсировать публикацию методического материала

- Сведения из интервального анализа и интервальной статистики
- Пример обработки интервальной выборки
- Обсуждение терминологии (совершенно совместные измерения)

ТЕОРИЯ

Сведения из интервального анализа и интервальной статистики

Сведения из интервального анализа и интервальной статистики [1]

- Интервал, мультиинтервал §2.1, §2.11
- Накрывающие и ненакрывающие измерения §2.18
- Выборка интервальных данных §3.1
- Информационное множество §2.22
- Совместность выборки интервалов §3.3
- Мода и медианы интервальной выборки §3.4, §3.5
- Обработка накрывающих и ненакрывающих выборок §3.2, §3.8
- Измерения активные и неактивные
- Измерения вполне и частично совместные
- ...

Общая идея классификации статусов измерений заключается в том, что мерой влиятельности (информативности) измерения s в задаче построения модели служит степень уменьшения результирующего информационного множества

$$\Omega(S \cup s)$$

по отношению к исходному

$$\Omega(S),$$

т. е. степень сокращения неопределённости для параметров модели при пополнении выборки S измерением s .

Definition

Измерение s , $s \notin S$, называется *совместным* с рассматриваемой моделью, если информационное множество этого измерения $\Omega(s)$ и информационное множество задачи $\Omega(S)$ имеют непустое пересечение, т.е.

$$\Omega(S \cup s) \neq \emptyset.$$

Definition

Совместное измерение s , $s \notin S$, называется *вполне совместным* с рассматриваемой моделью, если добавление этого измерения к выборке S не изменяет информационное множество задачи,

$$\Omega(S \cup s) = \Omega(S).$$

Definition

Совместное измерение s , $s \notin S$, называется *частично совместным* с рассматриваемой моделью, если при его добавлении в выборку S информационное множество задачи сокращается до некоторого непустого собственного подмножества:

$$\Omega(S \cup s) \subsetneq \Omega(S).$$

Definition

Измерение s из выборки S называется *активным*, если

$$\partial\Omega(s) \cap \partial\Omega(S) \neq \emptyset,$$

т. е. если граница информационного множества измерения s участвует в формировании границы информационного множества всей выборки S . Если же

$$\partial\Omega(s) \cap \partial\Omega(S) = \emptyset,$$

т. е. если граница информационного множества измерения s находится во внутренности информационного множества всей выборки S , то измерение s из выборки S будем называть *неактивным*.

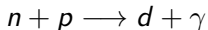
Подмножество всех активных наблюдений в S играет особую роль, поскольку оно является

подвыборкой, полностью определяющей модель.

Исключение из выборки всех прочих измерений не изменяет модель.

ПРИМЕР ОБРАБОТКИ ИНТЕРВАЛЬНОЙ ВЫБОРКИ

Изучение реакции захвата нейтрона протоном [2]



n, p — нейтрон и протон, d — дейтрон

Данные по циркулярной поляризации γ -квантов с поляризованными нейтронами важны для ядерной физики и ядерного нуклеосинтеза.

Экспериментальный эффект вычислялся по формуле

$$\delta = \frac{N^+ - N^-}{N^+ + N^-}, \quad (1)$$

где N^+, N^- — отсчеты γ -квантов при различных поляризациях нейтронов.

Данные из публикации [2]

V.M.Lobashev et al. Circular polarization of γ -quanta in $np \rightarrow d\gamma$ reactions with polarized neutrons // Physics Letters B Volume 289, Issues 1–2, 3 September 1992, Pages 17-21

Table 1
The weighted average values of δ and values of χ^2 .

Beam condition	# of group	Spectral region		
		Compton $\delta_1^{\text{true}} (\times 10^5)$	Photopeak $\delta_2^{\text{true}} (\times 10^5)$	Background $\delta_3 (\times 10^5)$
polarized	1	-3.1 ± 2.7	-4.4 ± 2.7	4.2 ± 6.7
	2	-0.2 ± 2.1	-3.4 ± 1.9	-3.2 ± 4.8
	3	-4.0 ± 2.1	-6.9 ± 2.4	12.1 ± 9.0
	4	-2.1 ± 2.5	-1.2 ± 2.4	12.4 ± 7.2
	5	-3.7 ± 1.9	-1.0 ± 2.7	9.4 ± 5.1
	6	-1.7 ± 3.7	-10.8 ± 3.5	1.0 ± 12.4
	7	-5.7 ± 2.8	-10.2 ± 2.8	-0.6 ± 6.1
	8	-2.8 ± 1.9	-6.3 ± 2.0	3.9 ± 4.3
	9	-8.0 ± 4.0	-10.4 ± 4.1	10.3 ± 10.0
	10	-2.1 ± 3.9	0.6 ± 3.4	-4.8 ± 10.6
	11	-3.6 ± 2.6	-1.8 ± 2.0	4.6 ± 4.2
	12	-7.2 ± 2.5	-6.6 ± 2.1	-5.7 ± 4.6
	13		-4.9 ± 2.1	13.0 ± 3.0
	14		-6.0 ± 2.4	8.4 ± 4.6
	15		-4.0 ± 2.7	10.6 ± 5.5
	final value of δ^{true}	-3.5 ± 0.7	-4.8 ± 0.8	5.8 ± 1.7
	$\chi^2/(N-1)$	0.67	1.47	1.49
depolarized	final value of δ^{true}	0.6 ± 0.8	1.1 ± 0.7	3.0 ± 1.8
	$\chi^2/(N-1)$	1.83	1.24	0.50

Модель данных

Зададим модель данных в виде интервала согласно §2.16 «Измерения и их результаты»

$$\mathbf{x}_i = \hat{x}_i + \epsilon_i[-1, 1]. \quad (2)$$

Здесь \hat{x}_i — среднее значение i -го измерения, $i = 1, 2, \dots, 15$; ϵ_i — погрешность этого измерения (1σ).

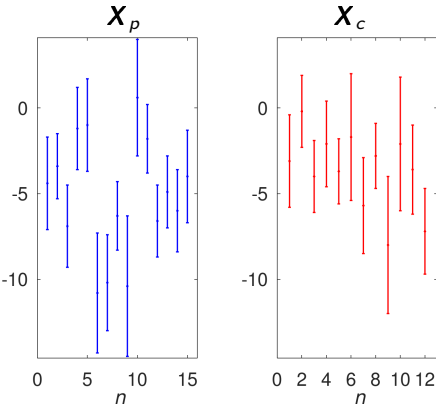
Обозначим интервальную выборку столбца (2) как

$$\mathbf{X}_p = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^{15},$$

и интервальную выборку данных из столбца (1)

$$\mathbf{X}_c = \{\mathbf{x}_j\}_{j=1}^{12}.$$

Диаграммы рассеяния интервальных выборок

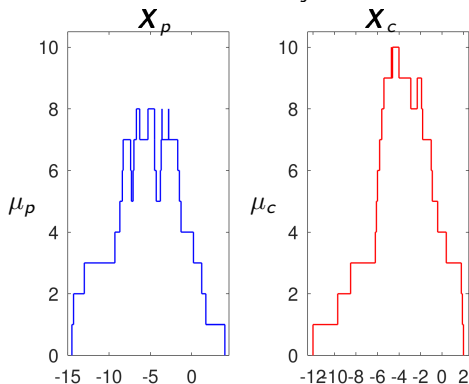


Внешне выборки сходны

Оценки X_p и X_c — интервальная мода

Мода интервальной выборки — §3.4 [1].

Вычисление интервальной моды выполняется путем формирования множества элементарных подинтервалов выборки $\{z\}$ и построения графика частот μ_i включений $z_j \in x_j$.

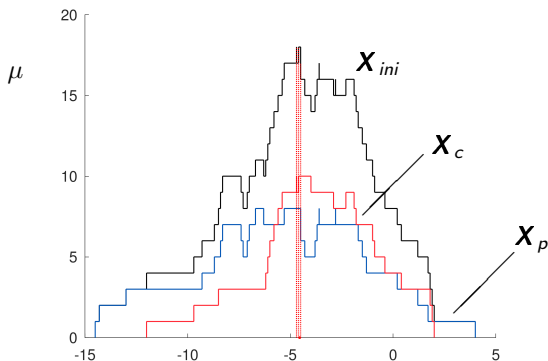


$$\text{mode } X_p \cong [-6.7, -6.3] \cup [-5.3, -4.5], \quad \text{mode } X_c \cong [-4.6, -4.0].$$

Объединение выборок X_p и X_c

$$X_{ini} = X_p \cup X_c \quad \text{или} \quad X_{ini} = \{X_p, X_c\} \quad (3)$$

Графики частот элементарных подинтервалов



Размер максимальной клики вырос с 8 до 18!

Интервальные моды выборок:

$$\text{mode } \mathbf{X}_p \cong [-6.7, -6.3] \cup [-5.3, -4.5], \quad (4)$$

$$\text{mode } \mathbf{X}_c \cong [-4.6, -4.0], \quad (5)$$

$$\text{mode } \mathbf{X}_{ini} \cong [-4.6, -4.5]. \quad (6)$$

Естественным образом интервальная мода объединённой выборки \mathbf{X}_{ini} является пересечением мод своих подвыборок

$$\text{mode } \mathbf{X}_{ini} = \text{mode } \mathbf{X}_p \cap \text{mode } \mathbf{X}_c. \quad (7)$$

Ширина оценки очень мала по отношению к неопределённости данных!

$$\text{wid mode}(\mathbf{X}_{ini}) = 0.1. \quad (8)$$

Оптимальное объединение выборок \mathbf{X}_p и \mathbf{X}_c

Ищем оптимальную выборку

$$\mathbf{X}_R = \mathbf{X}_p \cup R \cdot \mathbf{X}_c, \quad (9)$$

с неизвестным вещественным коэффициентом R .

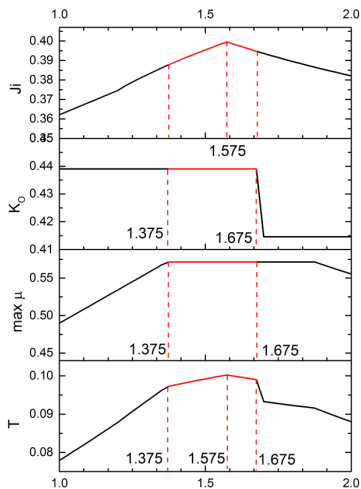
При задании некоторой разумной меры T [3], определим оптимальное значение \hat{R} :

$$\hat{R} = \arg \max_R T(\mathbf{X}_R). \quad (10)$$

А.Н.Баженов, С.И.Жилин, А.Ю.Тельнова. Комбинированная мера совместности в анализе данных с интервальной неопределенностью. Измерительная техника, № 11, 2023, стр.17-25

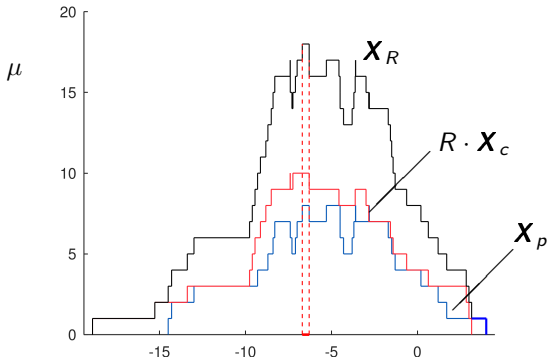
Оптимальное объединение выборок X_p и RX_c

$$\hat{R} = 1.57, \quad R = [1.38, 1.68]. \quad (11)$$



Параметры объединённой выборки X_R

График частот элементарных подинтервалов



Выборка X_R стала унимодальной, ширина моды увеличилась

Интервальная мода объединённой выборки \mathbf{X}_R — интервал

$$\text{mode}\mathbf{X}_R = [-6.7, -6.3], \quad (12)$$

Сравним моды выборок \mathbf{X}_{ini} и \mathbf{X}_R :

$$\text{wid mode}(\mathbf{X}_{ini}) = 0.1 < \text{wid}(\text{mode}\mathbf{X}_R) = 0.4. \quad (13)$$

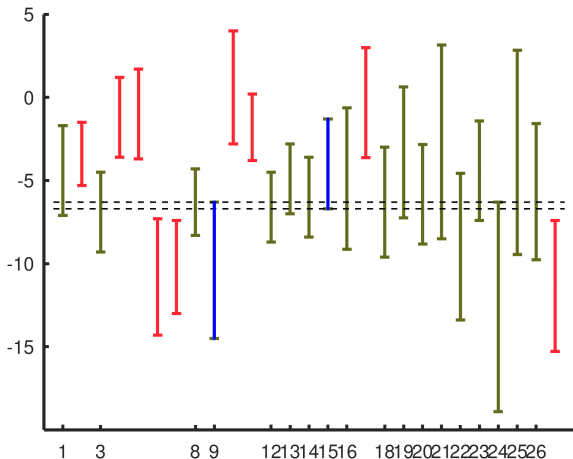
Ширина моды в случае \mathbf{X}_R возросла в 4 раза по отношению к \mathbf{X}_{ini} .

СТАТУСЫ ИЗМЕРЕНИЙ ИНТЕРВАЛЬНОЙ ВЫБОРКИ

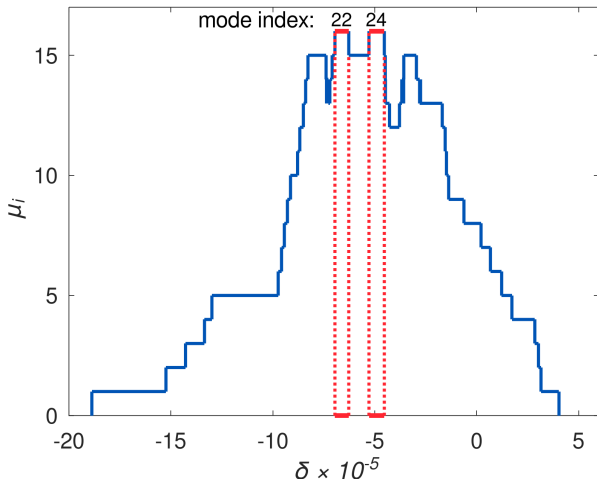
Статусы измерений объединённой выборки X_R

Зелёные интервалы — вполне совместные измерения.

Синим цветом представлены частично совместные измерения {9, 15 }

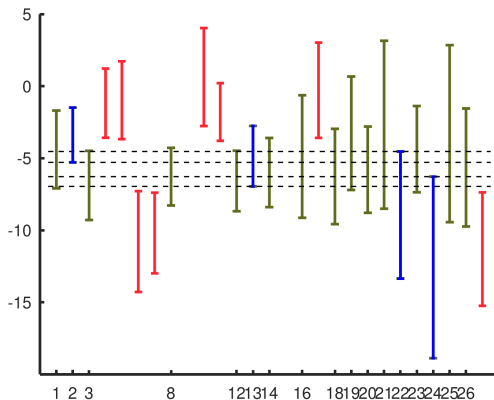


Мода объединённой выборки X_R без частично совместных измерений



Статусы измерений объединённой выборки X_R без частично совместных измерений

Частично совместные измерения {2, 13, 22, 24 }

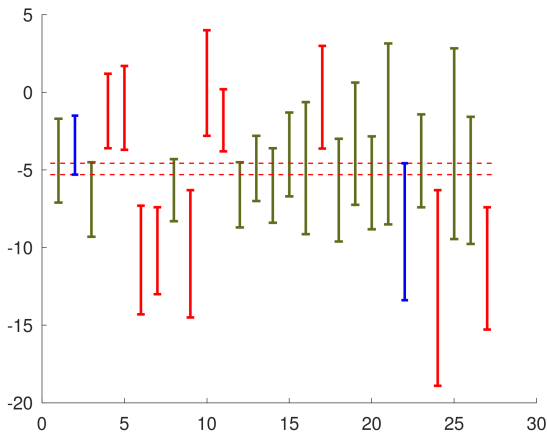


Измерение (2) изменило статус — стало частично совместным.

Частично совместные измерения объединённой выборки X_R с различными множествами оценки

Красным цветом - медиана Пролубникова $\text{med}_K X_R$ [4]

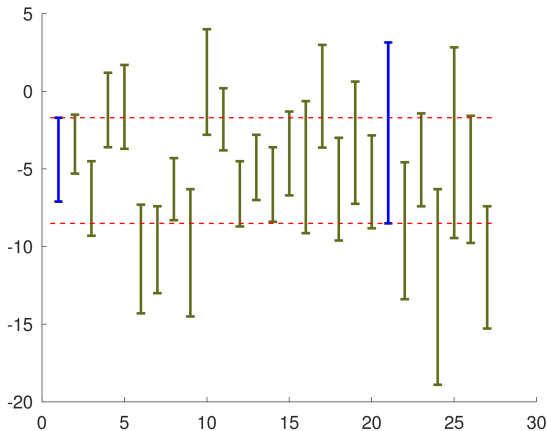
Синим цветом представлены частично совместные измерения $\{2, 22\}$



Частично совместные измерения объединённой выборки X_R с различными множествами оценки

Красным цветом - медиана Крейновича $\text{med}_K X_R$

Синим цветом представлены частично совместные измерения $\{1, 21\}$



Математика

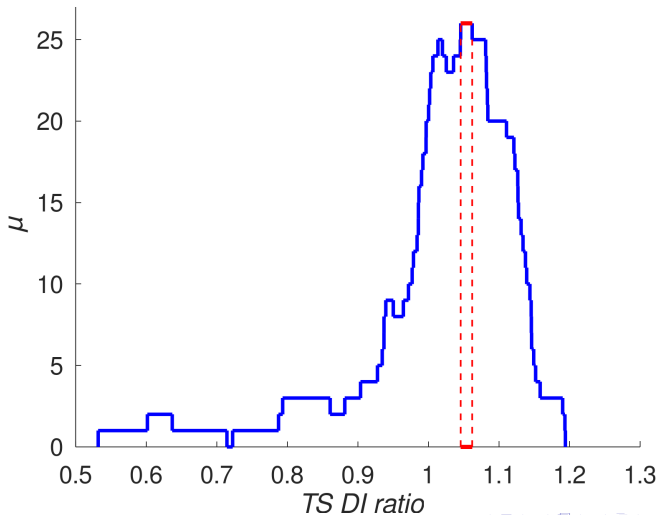
- Вполне совместные измерения составляют ядро выборки (максимальную клику), формируют моду, обеспечивают представительность данных, наиболее стабильный статус
- Частично совместные измерения дают границы оценок выборки, в зависимости от способа оценки (модели) это множество вариабельно
- Несовместность измерений зависит от способа оценки информационного множества и может меняться

Прикладные задачи (здесь — Физика)

- новые способы обработки экспериментальных данных
- пересмотр статуса архивных данных

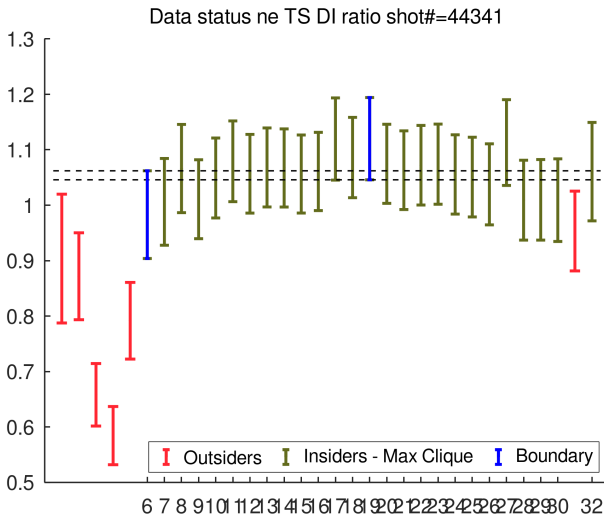
График частот элементарных подинтервалов — 1 серия

Mode ne TS DI ratio shot#=44341



Плотность плазмы — 1 серия

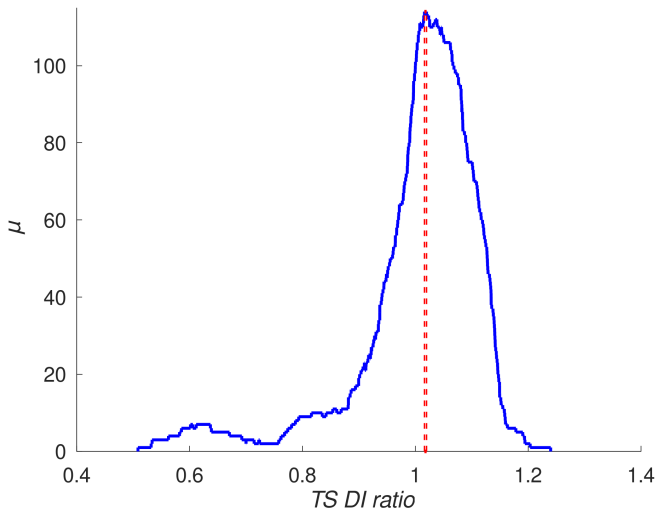
График частот элементарных подинтервалов



Плотность плазмы — 4 серии

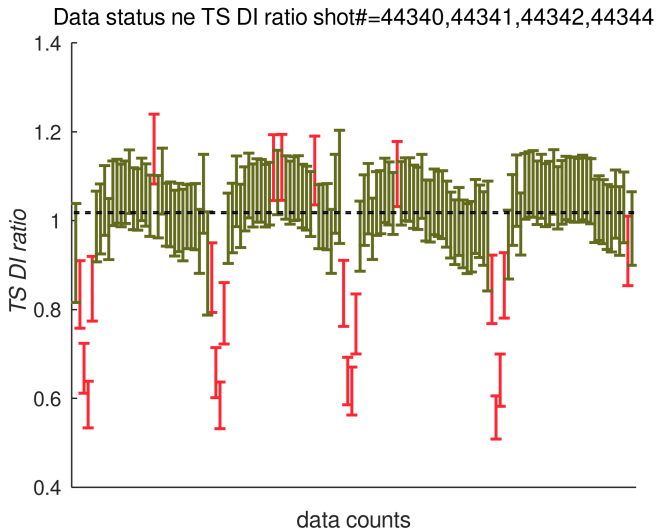
График частот элементарных подинтервалов

Mode ne TS DI ratio shot#=44340,44341,44342,44344



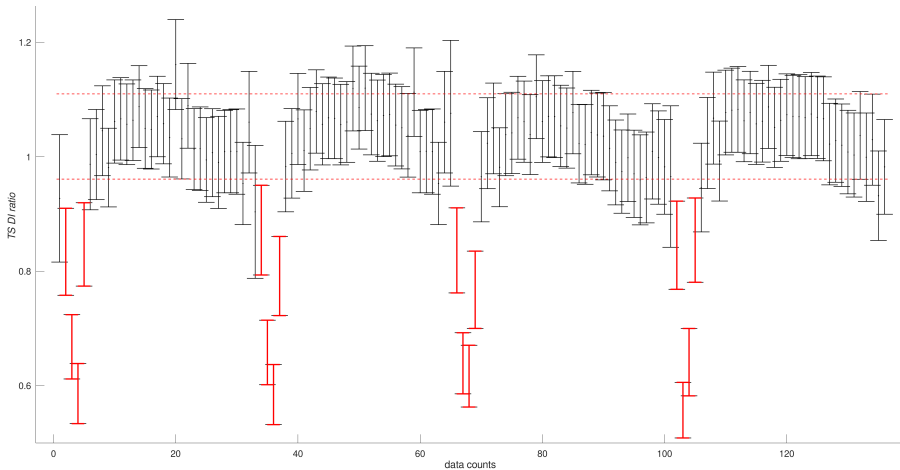
Плотность плазмы — 4 серии





Чёрным цветом - mode X_R . Множество частично совместных измерений зависит от объёма выборки, не приведено.



Плотность плазмы — 4 серии

Красным цветом - $\text{med}_K X_R$. Хорошо отделяются аутсайдеры.
Множество частично совместных измерений зависит от объёма выборки, не приведено.



-  А.Н. БАЖЕНОВ, С.И. ЖИЛИН, С.И. КУМКОВ, С.П. ШАРЫЙ. Обработка и анализ данных с интервальной неопределённостью. РХД. Серия «Интервальный анализ и его приложения». Москва-Ижевск. 2024 (в печати).
-  A.N.Bazhenov, L.A.Grigor'eva, V.V.Ivanov, E.A.Kolomensky, V.M.Lobashev, V.A.Nazarenko, A.N.Pirozhkov, Yu.V.Sobolev. Circular polarization of γ -quanta in $np \rightarrow d\gamma$ reactions with polarized neutrons // Physics Letters B Volume 289, Issues 1–2, 3 September 1992, Pages 17-21
-  А.Н.Баженов, С.И.Жилин, А.Ю.Тельнова. Комбинированная мера совместности в анализе данных с интервальной неопределенностью. Измерительная техника, № 11, 2023, стр.17-25
-  А.В.Пролубников. Медиана интервальных данных. Вычислительные технологии, 2024

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!