ЗАДАЧИ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ИНТЕРВАЛЬНОЙ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИЕЙ

и представительность их решений

А.В. Пролубников

Омский государственный университет

a.v.prolubnikov@mail.ru

14.04.25

ПЛАН ДОКЛАДА:

1. Подходы к решению задач дискретной оптимизации с интервальной целевой функцией.

2. Предлагаемый подход: объединённые множества возможных решений.

3. Интервальный жадный алгоритм как одна из реализаций подхода.

4. Применение подхода для исследования на тему:

   Насколько отдельные возможные решения (одно или несколько) дают представление о возможных решениях задачи с интервальной целевой функцией?

Задача дискретной оптимизации (задача ДО)

Дано:

- дискретное *множество допустимых решений* $\mathcal{D}$,
- *целевая функция* $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}$

Найти: такое $\check{x} \in \mathcal{D}$, что

$$f(\check{x}) = \min_{x \in \mathcal{D}} f(x), \tag{1}$$

либо такое $\hat{x} \in \mathcal{D}$, что

$$f(\hat{x}) = \max_{x \in \mathcal{D}} f(x). \tag{2}$$

Оптимальное решение задачи ДО — это пара $(\check{x}, f(\check{x}))$ для задачи минимизации и пара $(\hat{x}, f(\hat{x}))$ для задачи максимизации.

Задача ДО на (гипер-)графах

Имеем:

- $E = \{e_1, \dots, e_n\}$.
- $w(e) > 0$ — это *вес (стоимость)* ребра $e \in E$, $w_i = w(e_i)$.
- Двоичный вектор $x = (x_1, \dots, x_n)$ задаёт множество $E_x \subset E$: $x_i = 1$, если $e_i \in E_x$, $x_i = 0$, если $e_i \in E \setminus E_x$.
- Дано множество допустимых решений $\mathcal{D}$.

Найти: $\check{x} \in \mathcal{D}$ такой, что

$$f(\check{x}, w) = \min_{x \in \mathcal{D}} f(x, w),$$

где

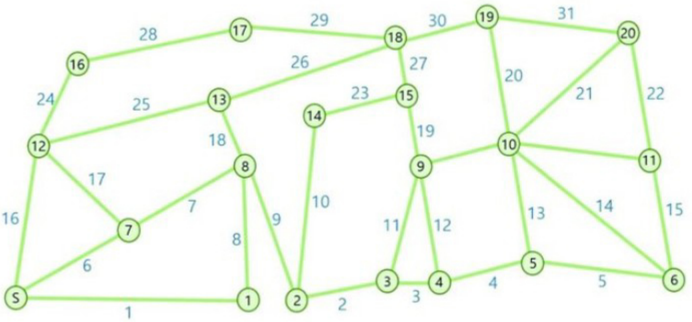
$$f(x, w) = \sum_{e \in E_x} w(e) = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i. \tag{3}$$

Задача ДО на (гипер-)графах

- Множество E может быть рассмотрено как множество рёбер (гипер-)графа $G = \langle V, E \rangle$;
- Множество допустимых решений $\mathcal{D}$
  — как множество подграфов G заданного вида:
  - пути в графе,
  - остовные деревья,
  - гамильтоновы циклы,
  - паросочетания,
  - разрезы

  и др.

Задачи ДО на графах

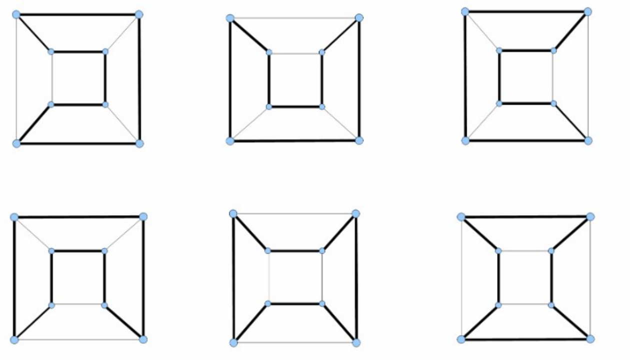


— взвешенный граф, точечные веса рёбер.

Допустимые подграфы — допустимые решения

Найти: гамильтонов цикл минимального веса во взвешенном кубическом графе.

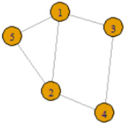
$\mathcal{D}$ — множество гамильтоновых циклов в кубическом графе:



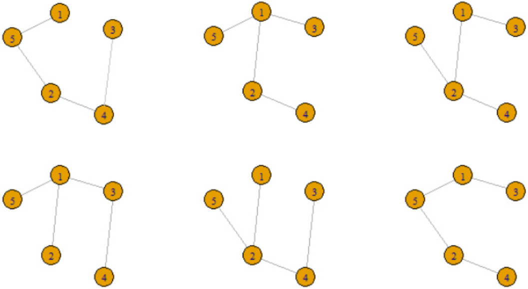
(каждое ребро имеет какой-то вес)

Допустимые подграфы — допустимые решения

Найти: остовное дерево минимального веса в графе

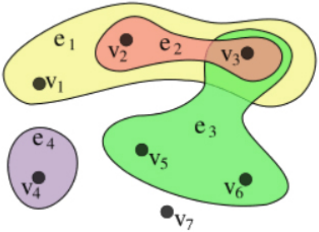


$\mathcal{D}$ — множество остовных деревьев :



Гиперграф —

- множество вершин $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$;
- множество *гипер-рёбер*: рёбро состоит из произвольного количества вершин $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$, $e_i = \{v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}\}$.



$e_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$, $e_2 = \{v_2, v_3\}$, $e_3 = \{v_3, v_5, v_6\}$, $e_4 = \{v_4\}$.

v_7 *не покрыта* ни одним ребром в гиперграфе.

Далее: *Задача о покрытии множества* — это задача о рёберном покрытии *гиперграфа*.

Задачи ДО на (гипер-)графах:

- задача о кратчайшем пути в графе,
- задача о самом длинном пути в ориентированом графе,
- задача об остовном дереве минимального веса,
- задача о вершинном и рёберном покрытиях графа,
- задача коммивояжёра (задача о гамильтоновом цикле минимального веса),
- задача о паросочетаниях,
- задача о минимальном разрезе

и др.

Задачи ДО с интервальными весами (задачи ИДО)

Интервальная целевая функция задачи ИДО

Целевая функция вида

$$\mathbf{f}(x, \mathbf{w}) = \sum_{e \in E_x} \mathbf{w}(e) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{w}_i x_i, \tag{4}$$

где $\mathbf{w}_i = \mathbf{w}(e_i) \in \mathbb{IR}_+$ интервалы возможных значений w_i.

Сценарий — это вектор $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbf{w} = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n)$ — возможные значения коэффициентов функции (3)

- **возможное оптимальное решение** — это решение $\check{x} \in \mathcal{D}$ оптимальное для некоторого сценария.
- **возможное приближённое решение с точностью** α, $\alpha > 1$ — это $\tilde{x} \in \mathcal{D}$ т.ч. для некоторого сценария с $f(\tilde{x}, w) \leq \alpha f(\check{x}, w)$, где $\check{x}$ оптимально при сценарии w .

Подходы к решению задачи ИДО:

- поиск сильного решения;
- нахождение решений для некоторого множества сценариев;
- стохастическая оптимизация;
- робастная оптимизация;
- нахождение множества Парето;
- нахождение объединённых множеств решений:
    - оптимальных решений,
    - приближённых решений.

Стохастическая оптимизация

- имеем вероятностное распределение на интервалах (на множестве сценариев $\boldsymbol{w}$);
- ищем $\check{x} \in \mathcal{D}$ минимизирующий средние потери:

$$\mathrm{M}[f(x)] \to \min$$

Ищется **одно (среднее) решение**.

Но если решение принимается только один раз, то интересуют не только и не столько средние потери, а

- максимальные потери,
- минимальные потери,

  как для возможных решений в отдельности,

  так и для всех возможных решений.
- при каких сценариях мы будем их иметь.

Робастная оптимизация

— поиск **наиболее устойчивого решения**:

- *абсолютно робастное решение* —

$$\max_{w\in\boldsymbol{w}} f(\tilde{x}, w) = \min_{x\in\mathcal{D}} \max_{w\in\boldsymbol{w}} f(x, w)$$

— *критерий Вальда*

- *относительно робастное решение* —

$$\max_{w\in\boldsymbol{w}}\big(f(\tilde{x}, w) - f^*(w)\big) = \min_{x\in\mathcal{D}} \max_{w\in\boldsymbol{w}}\big(f(x, w) - f^*(w)\big),$$

где $f^*(w)$ — вес оптимального решения для сценария w

— *критерий Сэвиджа*

Ищется **только одно решение**.

Учитываются только "плохие" сценарии, которых может быть относительно мало.

Задачи из класса **P** при интервализации становятся **NP**-трудны.

Нахождение множества Парето

Множество Парето — несравнимые друг с другом оптимальные по Парето решения ИДО, то есть решения $x \in \mathcal{D}$, для которых не существует такого x', что

$$\underline{\boldsymbol{f}}(x') \leq \underline{\boldsymbol{f}}(x) \text{ и } \overline{\boldsymbol{f}}(x') < \overline{\boldsymbol{f}}(x)$$

или

$$\underline{\boldsymbol{f}}(x') < \underline{\boldsymbol{f}}(x) \text{ и } \overline{\boldsymbol{f}}(x') \leq \overline{\boldsymbol{f}}(x).$$

$(\underline{\boldsymbol{f}}(x) = f(\underline{\boldsymbol{w}}, x),\ \overline{\boldsymbol{f}}(x) = f(\overline{\boldsymbol{w}}, x))$

Нахождение множества Парето для ИДО эквивалентно нахождению его для двухкритериальной задачи ДО с целевой функцией $(f_1, f_2) = (f(x, \underline{\boldsymbol{w}}), f(x, \overline{\boldsymbol{w}}))$.

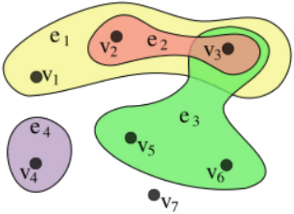
Нахождение множества Парето для задач на графах с интервальными весами может обладать очень большой мощностью

$\Rightarrow$ перебор решений, экспоненциальная сложность.

ОБЪЕДИНЁННЫЕ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ

Задача о покрытии множества (ЗПМ)

Гиперграф —



Покрытие — какой-то набор взвешенных гипер-рёбер, покрывающих все вершины в графе.

Найти: покрытие минимального веса в графе.

$\mathcal{D}$ — все допустимые покрытия.

ЗАДАЧА О ПОКРЫТИИ МНОЖЕСТВА (ЗПМ)

Дано: $U = \{1, \dots, m\}$; $S = \{S_1, \dots, S_n\}$, $S_i \subseteq U : \cup_{i=1}^{n} S_i = U$

$C = \{S_{i_1}, \dots, S_{i_k}\}$ — **покрытие** U, если $\cup_{i=1}^{k} S_{i_j} = U$

Функция веса: $w : S \to \mathbb{R}_+$, $w_i = w\left(S_i\right)$ — вес множества S_i

Найти: покрытие C минимального веса:

$$w\left(C\right) = \sum_{j=1}^{k} w\left(S_{i_j}\right) \to \min$$

ЗПМ с интервальными весами (ИЗПМ)

Дано: $U = \{1, \ldots, m\}$; $S = \{S_1, \ldots, S_n\}$, $S_i \subseteq U : \cup_{i=1}^{n} S_i = U$

$C = \{S_{i_1}, \ldots, S_{i_k}\}$ — **покрытие** U, если $\cup_{i=1}^{k} S_{i_j} = U$

Интервальная функция веса $\boldsymbol{w} : C \to \mathbb{IR}_+$

$(\mathbb{IR}_+ = \{\boldsymbol{x} = [\underline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{x}}] \in \mathbb{IR} \ : \ \underline{\boldsymbol{x}} \geq 0\})$

ИДО — задача дискретной оптимизации с интервальной целевой функцией.

ЧТО ЯВЛЯЕТСЯ ОПТИМАЛЬНЫМ РЕШЕНИЕМ?

Определения оптимальных решений

- *Сценарий* — это набор точечных весов $w \in \boldsymbol{w}$:

$$w = (w_1, \ldots, w_n) \in (\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n) = \boldsymbol{w}.$$

- *Слабое оптимальное решение* — это решение оптимальное при некотором сценарии $w \in \boldsymbol{w}$.

- *Сильное оптимальное решение* — это решение оптимальное при любом сценарии $w \in \boldsymbol{w}$.

(Далеко) не для всякой ИДО существует сильное оптимальное решение!

- *Объединённое оптимальное решение* ИЗПМ — набор (слабых) оптимальных решений для всех возможных сценариев $w \in \boldsymbol{w}$.

Сильного оптимального решения, как правило, нет

Теорема

Решение ИЗПМ является сильным оптимальным решением $\Leftrightarrow$ оно оптимально в следующей ситуации: веса входящих в него множеств принимают максимальный допустимый вес, а веса всех других множеств — минимальный допустимый.

Использование теоремы:

1) с помощью некоторого алгоритма (например, некоторой схемы МВГ) находим слабое оптимальное решение ЗПМ,
2) устанавливаем веса в соответствии с теоремой о характеризации сильного оптимального решения,
3) находим слабое оптимальное решение ЗПМ для этого сценария,
4) сравниваем полученные решения.

Объединённое оптимальное решение

- *Объединённое оптимальное решение* — это набор слабых оптимальных решений $\Xi = \{C_1, \ldots, C_k\}$ т.ч. для любого сценария $w \in \boldsymbol{w}$ найдётся $C_i \in \Xi$.

C_i — оптимальное решение для множества сценариев $\boldsymbol{w}_{C_i} \subset \boldsymbol{w}$

ИЗПМ — задача нахождения Ξ

Требуется:

1) найти $\Xi = \{C_1, \ldots, C_k\}$;
2) оценить (найти) $\boldsymbol{w}_{C_i}$, для которых они оптимальны;
3) если веса множеств понимаются как случайные величины, принимающие значения $w \in \boldsymbol{w}_i$, и заданы распределения вероятностей сценариев w на $\boldsymbol{w}_i$,
то определить вероятности сценариев,
при которых эти покрытия являются оптимальными.

Приближённое решение, гарантированная точность

ЗАДАЧА О ПОКРЫТИИ МНОЖЕСТВА *NP*-ТРУДНА $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ нахождение приближённых решений с гарантированной точностью

Жадный алгоритм — трудоёмкость $O(nm^2)$.

Гарантированная точность: $\dfrac{w(Gr)}{w(Opt)} \le H(m) \le \ln m + 1$,
где $H(m) = \sum_{k=1}^{m} 1/k$, Gr — *жадное* покрытие, Opt — оптимальное.

— ОЦЕНКА $O(\ln m)$ НЕУЛУЧШАЕМА
ДЛЯ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ!
(при условии $P \ne NP$)

ЕСЛИ $\mathcal{D}$ — МАТРОИД,
ТО ПОЛУЧАЕМ ОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ

Приближённые решения ИЗПМ

Сценарий — точечный вектор $w \in \mathbb{R}^n$, $w \in \mathbf{w}$.

При разных сценариях, вообще говоря, имеем разные оптимальные (приближённые) решения.

Приближённое решение ИЗПМ — решение, получаемое с помощью жадного алгоритма для некоторого сценария $w \in \mathbf{w}$.

Вероятность приближённого решения ИЗПМ — вероятность получения сценария $w \in \mathbf{w}$, т.ч. для неё будет получено это решение.

Решение на стадии поиска рассматривается как *упорядоченный* набор множеств.

- *Объединённое приближённое решение* ИЗПМ $[\mathcal{P}]$ — это набор приближённых решений $\tilde{\Xi} = \tilde{\Xi}[\mathcal{P}]$ для всех возможных сценариев $w \in \mathbf{w}$.

Жадный алгоритм решения ЗПМ (точечный алгоритм)

Жадный алгоритм решения ЗПМ

1 $Gr := \varnothing$.
2 **if** Gr — покрытие U,
3 работу алгоритма завершить.
4 **else** выбрать q т.ч.
$$w_q/|S_q| = \min\left\{ w_i/|S_i| \ : \ S_i \in S \text{ и } S_i \not\subset \bigcup_{j \in Gr} S_j \right\},$$
5 $Gr := Gr \cup \{S_q\}$,
6 $\forall i: \ S_i := S_i \setminus S_q$.
7 Перейти на шаг 2.

ЗПМ $\mathcal{P}$: $U_{\mathcal{P}}$, $S_{\mathcal{P}}$, $w_{\mathcal{P}}$.

Итерация жадного алгоритма решения ЗПМ:

Имеем ЗПМ $\mathcal{P}$.

1) выбираем S_q т.ч.

$$w_q/|S_q| = \min\left\{w_i/|S_i| \ : \ S_i \in S \text{ и } S_i \not\subset \bigcup_{j \in Gr} S_j\right\};$$

2) построение покрытия: $Gr := Gr \cup \{S_q\}$;
3) получаем ЗПМ $\mathcal{P}'$:
   - $U' \leftarrow U \setminus S_q$, $S'_j \leftarrow S_j \setminus S_q$, $w' \leftarrow w$.

— переход от ЗПМ $\mathcal{P}$ к ЗПМ $\mathcal{P}'(U', S', w)$

Итерация интервального жадного алгоритма

ИЗПМ $\mathcal{P}$: $U_{\mathcal{P}}$, $S_{\mathcal{P}}$, $\boldsymbol{w}_{\mathcal{P}}$.

Итерация жадного алгоритма решения ИЗПМ:

Имеем ИЗПМ $\mathcal{P}$.

1) находим $Q = \{S_{i_1}, \ldots, S_{i_t}\}$ $(|Q| = t)$,
   где $S_{i_j} \in Q$, если $\exists w \in \boldsymbol{w}_{\mathcal{P}}$ т.ч.

$$w_{i_j}/|S_{i_j}| = \min\left\{ w_i/|S_i| \;\middle|\; S_i \in S_{\mathcal{P}} \text{ и } S_i \not\subset \bigcup_{j \in Gr} S_j \right\};$$

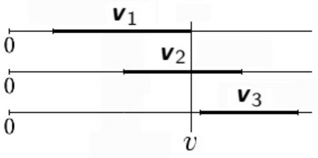
2) получаем варианты построения Gr:
   $Gr \leftarrow Gr \cup \{S_{i_1}\}, \ldots, Gr \leftarrow Gr \cup \{S_{i_t}\}$;
3) получаем задачи $\mathcal{P}^{(i_1)}, \ldots, \mathcal{P}^{(i_t)}$ с полученными $U_{\mathcal{P}^{(i_j)}}$, $S_{\mathcal{P}^{(i_j)}}$, $\boldsymbol{w}_{\mathcal{P}^{(i_j)}}$, $j = \overline{1, t}$.

Построение мнжества Q

- $\boldsymbol{v}_i$ — интервал относительных весов для S_i: $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{w}_i / |S_i|$

$S = \{S_1, S_2, S_3\}$:

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{w}_1 / |S_1|,$$
$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{w}_2 / |S_2|,$$
$$\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{w}_3 / |S_3|.$$



$\Rightarrow$ в Q будут выбраны множества S_1 и S_2

Итерация жадного алгоритма решения ИЗПМ:

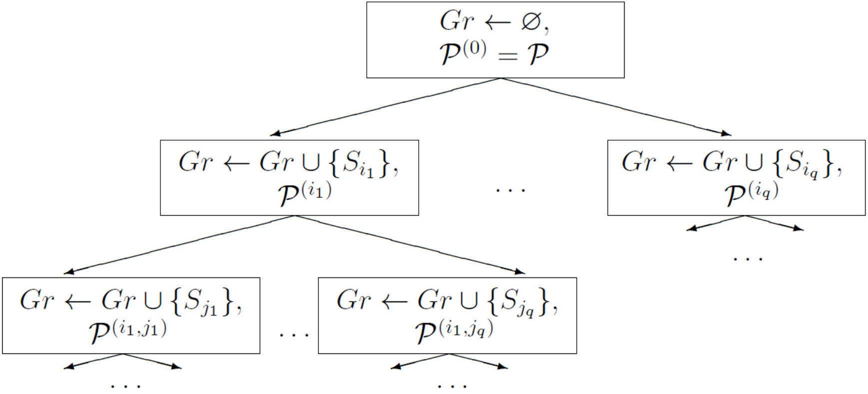
Имеем ИЗПМ $\mathcal{P}$.

1) перебираем варианты — *множества сценариев*, при которых точечным жадным алгоритмом в покрытие Gr могут быть выбраны множества $\{S_{i_1}, \ldots, S_{i_q}\} = Q$ $(Q \subseteq S)$
2) варианты построения Gr: $Gr := Gr \cup \{S_{i_1}\}, \ldots, Gr := Gr \cup \{S_{i_q}\}$;
3) получаем ИЗПМ $\mathcal{P}^{(i_1)}, \ldots, \mathcal{P}^{(i_q)}$ $(q = |Q|)$:

$\mathcal{P}^{(i_1)}$	$\ldots$	$\mathcal{P}^{(i_q)}$
$U^{(i_1)} \leftarrow U \setminus S_{i_1}$,	$\ldots$	$U^{(i_q)} \leftarrow U \setminus S_{i_q}$,
$S_j^{(i_1)} \leftarrow S_j^{(i_1)} \setminus S_{i_1}$,	$\ldots$	$S_j^{(i_q)} \leftarrow S_j^{(i_q)} \setminus S_{i_q}$,
$\mathbf{w}^{(i_1)} \subseteq \mathbf{w}$	$\ldots$	$\mathbf{w}^{(i_q)} \subseteq \mathbf{w}$

Дерево поиска приближённых решений

$\mathcal{P}^{(i_1,\ldots,i_k)}$ — ИЗПМ, получаемая из $\mathcal{P}$ при последовательном выборе в Gr мн-в $S_{i_1},\ldots,S_{i_k}$.



РЕЗУЛЬТАТ РАБОТЫ АЛГОРИТМА:

1) возможные покрытия для $\mathcal{P}$ — объединённое приближённое решение $\tilde{\Xi}$;
2) вероятности их получения, если заданы распределения на $\boldsymbol{w}_i$;
3) интервальная оценка множества возможных значений целевой функции (набор интервалов)

и др.

$\Rightarrow$ <u>**АНАЛИЗ МНОЖЕСТВА ВОЗМОЖНЫХ РЕШЕНИЙ**</u>

Понимая значение целевой функции как величину затрат, в ситуации неопределённости весов выбираем решения из $\tilde{\Xi}$, исходя из

а) минимизации максимальных/средних затрат,
б) минимизации неопределённости затрат

и др.

Гарантированная точность

Гарантированная точность для алгоритма решения ИЗПМ

Алгоритм даёт приближённое решение ИЗПМ с гарантированной точностью Δ, если он даёт набор покрытий $C = \{C_1, \ldots, C_k\}$ т.ч. $\forall w \in \boldsymbol{w}\ \exists C_i \in C$: $\frac{w(C_i)}{w(Opt)} \leq \Delta$, где Δ — требуемая точность приближения ($\Delta \geq 1$),
Opt — оптимальное решение для сценария w.

Для $\tilde{\Xi}$: $\forall w \in \boldsymbol{w}\quad \exists Gr_i \in \tilde{\Xi}$ т.ч. $w \in \boldsymbol{w}_{Gr_i}$ и для ЗПМ со сценарием w:

$$\frac{w(Gr_i)}{w(Opt)} \leq H(m),$$

т.е. оценка гарантированной точности — логарифмическая.

**ЕСЛИ $\mathcal{D}$ — МАТРОИД,
ТО ПОЛУЧАЕМ СЛАБЫЕ ОПТИМАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ**

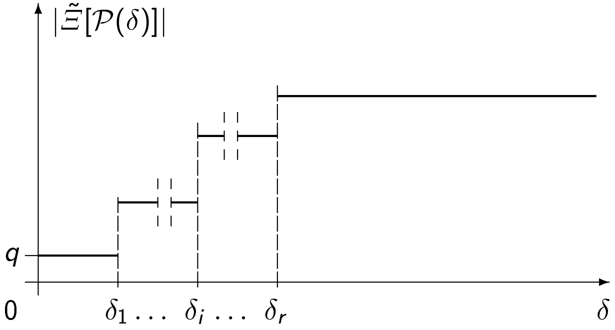
Вычислительная сложность нахождения $Gr\mathcal{P}$

Мощность $\tilde{\Xi}[\mathcal{P}]$ — параметр, характеризующий вычислительную сложность $C(\mathcal{P})$ решения ИЗПМ $\mathcal{P}$:

$$O(m^2 n) \cdot |\tilde{\Xi}[\mathcal{P}]| \leq C(\mathcal{P}) \leq (O(m^2 n) + mC'(\mathcal{P})) \cdot |\tilde{\Xi}[\mathcal{P}]|,$$

где $C'(\mathcal{P})$ — сложность процедуры вычисления вероятностей.

- зависимость $|\tilde{\Xi}[\mathcal{P}(\delta)]|$ от величины радиусов интервалов:



ПРЕДСТАВИТЕЛЬНОСТЬ ВОЗМОЖНЫХ РЕШЕНИЙ

Множество возможных решений

- Результат решения ИДО:
  - множество возможных оптимальных (или приближённых) решений;
  - **интервал** of $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{w})$ возможных значений целевой функции для этих решений (*мультинтервал*).

Объединённое множество решений

$$\Xi = \{x \in \mathcal{D} \mid (\exists w \in \boldsymbol{w})(f(x, w) = \min_{y \in \mathcal{D}} f(y, w))\}$$

Объединённое множество приближённых решений

$\tilde{\Xi}_\alpha$ — множество, содержащее возможные α-приближённые решения для всех сценариев из $\boldsymbol{w}$:

$$\tilde{\Xi}_\alpha = \left\{x \in \mathcal{D} \;\middle|\; (\exists w \in \boldsymbol{w}) \ \left(f(x, w) \leq \alpha \min_{y \in \mathcal{D}} f(y, w)\right)\right\}$$

Представительность возможных решений

• Предположим у нас есть некоторый алгоритм решения задачи ДО, например, **жадный алгоритм**.

Вероятность возможного решения

Вероятность $\mathrm{P}(x)$ возможного решения x — это вероятность сценария, при котором мы получаем $\tilde{x}$ как результат работы алгоритма.

Представительность возможного решения

b — **граница представительности:**

- решение $x \in \varXi$ (или $x \in \tilde{\varXi}$) **непредставительно**, если $\mathrm{P}(x) < b$,
- иначе — **представительно**.

Далее, предполагаем равномерное распределение на интервалах весов.

Вероятность возможного решения — это мера его представительности

Представительность среднего решения

Интервалы $\boldsymbol{w}_i$ — это результаты многократных измерений w_i.

Исследователи часто используют середину интервала $w_\mu \in \boldsymbol{w}$ для оценки значений w_i и используют как их истинные значения при вычислениях.

При этом рассматривается только один сценарий

$$w_\mu = \frac{\overline{\boldsymbol{w}} + \underline{\boldsymbol{w}}}{2}$$

$\Rightarrow$ *рассматривается только одно возможное решение задачи с интервальной неопределённостью.*

Получаем **среднее оптимальное решение** или **среднее приближённое решение** и считаем его решением задачи.

Мы показываем, что очень часто такой подход не оправдан.

Возможные веса для возможных решений

- $w(x)$ — вес $x \in \mathcal{D}$.
- $\boldsymbol{w}(x)$ — веса x при всех сценариях, при которых x — (приближённое) решение, получаемое жадным алгоритмом.

Для неинтервальных весов:

$$w(x) = \sum_{\{i | x_i = 1\}} w(S_i).$$

Для интервальных, вообще говоря,

$$\boldsymbol{w}(x) \neq \sum_{\{i | x_i = 1\}} \boldsymbol{w}(S_i),$$

поскольку можем иметь

$$\boldsymbol{w}(x) \subset \sum_{\{i | x_i = 1\}} \boldsymbol{w}(S_i).$$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{w}(x)$ надо оценивать.

Пример

ИЗПМ:

$\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,
$\mathcal{S} = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7\}$,
где
$S_1 = \{3, 5\}$, $S_2 = \{4, 6\}$, $S_3 = \{1, 3\}$, $S_4 = \{2, 3, 4\}$, $S_5 = \{1, 5, 6\}$,
$S_6 = \{4, 5, 6\}$, $S_7 = \{1, 4, 6, 7\}$, $S_8 = \{1, 3, 4, 6\}$, $S_9 = \{2, 4, 5, 7\}$,
$S_{10} = \{1, 3, 6, 7\}$, $S_{11} = \{1, 2, 4, 6\}$.

$$w_\mu = (119, 117, 124, 135, 128, 130, 143, 144, 144, 142, 141)$$

Относительная ошибка измерений не больше 5%:

$$\boldsymbol{w}_i = [w_{\mu,i} - \Delta w, w_{\mu,i} + \Delta w],$$

где $w_{\mu,i}$ — i-я компонента w_μ, $\Delta w = 5$.

Множество возможных приближённых решений $\tilde{\Xi} = \{\tilde{x}^{(i)}\}_{i=1}^{\overline{1,7}}$, интервалы возможных потерь для них $\boldsymbol{w}(\tilde{x}^{(i)})$, их вероятности $\mathrm{P}(\tilde{x}^{(i)})$:

1) $\tilde{x}^{(1)} = (1,0,0,1,0,0,1,0,0,0,0)$, $\boldsymbol{w}(\tilde{x}^{(1)}) = [382, 410]$, $\mathrm{P}(\tilde{x}^{(1)}) = 0.1542$;
2) $\tilde{x}^{(2)} = (1,0,0,0,0,0,1,0,1,0,0)$, $\boldsymbol{w}(\tilde{x}^{(2)}) = [391, 410]$, $\mathrm{P}(\tilde{x}^{(2)}) = 0.0007$;
3) $\tilde{x}^{(3)} = (1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,1)$, $\boldsymbol{w}(\tilde{x}^{(3)}) = [390, 410]$, $\mathrm{P}(\tilde{x}^{(3)}) = 0.1342$;
4) $\tilde{x}^{(4)} = (0,0,0,0,0,0,0,1,1,0,0)$, $\boldsymbol{w}(\tilde{x}^{(4)}) = [278, 295]$, $\mathrm{P}(\tilde{x}^{(4)}) = 0.1172$;
5) $\tilde{x}^{(5)} = (0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,0)$, $\boldsymbol{w}(\tilde{x}^{(5)}) = [278, 293]$, $\mathrm{P}(\tilde{x}^{(5)}) = 0.3166$;
6) $\tilde{x}^{(6)} = (1,0,0,0,0,0,0,0,1,0,1)$, $\boldsymbol{w}(\tilde{x}^{(6)}) = [389, 417]$, $\mathrm{P}(\tilde{x}^{(6)}) = 0.0826$;
7) $\tilde{x}^{(7)} = (1,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1)$, $\boldsymbol{w}(\tilde{x}^{(7)}) = [387, 417]$, $\mathrm{P}(\tilde{x}^{(7)}) = 0.1946$.

$\tilde{x}_\mu = \tilde{x}^{(1)} = (1,0,0,1,0,0,1,0,0,0,0)$ для сценария w_μ, $f(\tilde{x}_\mu, w_\mu) = 397$.

- для решения “в среднем”: $\mathrm{P}(\tilde{x}_\mu) = 0.1542$;
- наиболее вероятное решение — $\tilde{x}^{(5)}$, $\mathrm{P}(\tilde{x}^{(5)}) = 0.3166$.

Среднее приближённое решение $\tilde{x}_\mu$ непредставительно, если $b \geq 0.1542$.

Распределение весов возможных ОПТИМАЛЬНЫХ решений на множестве всех сценариев

Возможные оптимальные решения:

- $\check{x}^{(1)} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0)$;
- $\check{x}^{(2)} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0)$.

- $f(\check{x}^{(i)}, w) \in [276, 296]$ для всех $w \in \boldsymbol{w}$, $i = \overline{1, 2}$.

- $\mathrm{P}(\check{x}_\mu) = 0.667$, т.е. $\check{x}_\mu$ имеет наибольшую вероятность.

- его вес равен среднем весу всех возможных оптимальных решений: $w(\check{x}_\mu) = f(\check{x}_\mu, w_\mu) = 286$.

- Отклонение от среднего равно 10:

$$\max_{\substack{w \in \boldsymbol{w} \\ \check{x} \in \Xi}} |f(\check{x}_\mu, w_\mu) - f(\check{x}, w)| = 10. \tag{5}$$

Распределение весов возможных ПРИБЛИЖЁННЫХ решений на множестве всех сценариев

$f(\tilde{x}^{(i)}, w) \in [276, 417]$ для $w \in \boldsymbol{w}$.

- средний вес возможного приближённого решения равен 350.51:

$$\sum_{\tilde{x} \in \tilde{\Xi}} \mathrm{P}(\tilde{x}) \cdot \frac{\underline{\boldsymbol{w}}(\tilde{x}) + \overline{\boldsymbol{w}}(\tilde{x})}{2} \approx 350.51.$$

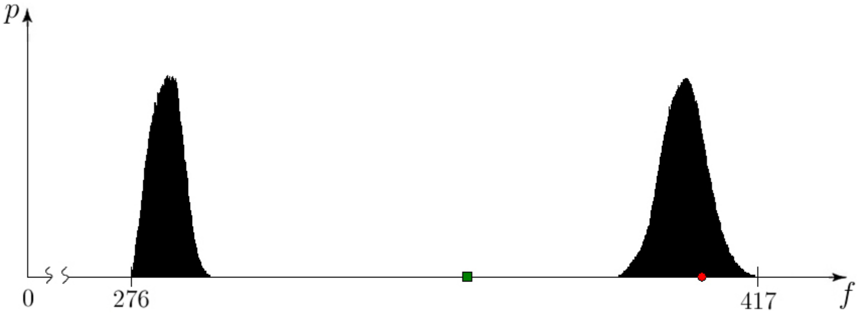
- $f(\tilde{x}_\mu, w_\mu) = 397.$

Значительное отклонение от среднего веса приближённых решений по всем сценариям из $\boldsymbol{w}$:

$$\max_{\substack{w \in \boldsymbol{w} \\ \tilde{x} \in \tilde{\Xi}}} |f(\tilde{x}_\mu, w_\mu) - f(\tilde{x}, w)| = 121. \tag{6}$$

Распределение весов возможных ПРИБЛИЖЁННЫХ решений на множестве всех сценариев

ПРИБЛИЖЁННЫЕ РЕШЕНИЯ МЕНЕЕ СТАБИЛЬНЫ ЧЕМ ОПТИМАЛЬНЫЕ!



Гистограмма частот весов возможных приближённых решений

Как много задач с непредставительными средними приближёнными решениями?

Выборка — пары вида $(\overline{\mathcal{P}}^{(i)}(m,\delta), d^{(i)}(m,\delta))$:

1) множество $\overline{\mathcal{P}}^{(i)}(m,\delta)$ состоит из 1000 индивидуальных ИЗПМ;
2) вектор $d^{(i)}(m,\delta)$ харктеризует распределение задач в соответствии с $\mathrm{P}(\tilde{x}_\mu)$:

$$d^{(i)}(m,\delta) = (d_1^{(i)}(m,\delta), \dots, d_{10}^{(i)}(m,\delta)),$$

где $d_k^{(i)}(m,\delta)$ — доля (в процентах) задач из $\overline{\mathcal{P}}^{(i)}(m,\delta)$, для которых эта вероятность принадлежит одному из 10 интервалов, $k = \overline{1,10}$:

$$\mathrm{P}(\tilde{x}_\mu) \in [(k-1)/10, k/10].$$

Генерирование ЗПМ

Вход: m, q, δ.

1. $i := 0$.
2. Пока не покрыты все элементы $\mathcal{U}$ менее чем q раз.
   - 2.1. $i := i + 1$.
   - 2.2. Сгенерировать мощность p_i множества S_i:
     p_i — значение случайной величиные, равномерно распределённой на $\mathcal{U} = \{1, \ldots, m\}$.
   - 2.3. В соответствии с равномерным распределением на $\mathcal{U}$, случайно выбираем из него p_i элементов для получения S_i.
   - 2.4. Генерируем веса w_i:
     $$w_i := 100 + 10 \cdot p_i + \eta,$$
     где $\eta \in \mathbb{Z} \cap [-5, 5]$ выбирается случайно (р.м.).
   - 2.5. Формируем интервальный вес множеств $\boldsymbol{w}_i$:
     $\boldsymbol{w}_i := [w_i - \delta, w_i + \delta]$.

Выход: ИЗПМ с полученными $\mathcal{U}$, $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_n\}$, $\boldsymbol{w} \in \mathbb{IR}^n_+$.

$m = 5$. Средние значения $d^{(i)}(5, \delta)$, $i = \overline{1, 1000}$

Сколько процентов задач из 1000 имеют средние приближённые решения с вероятностью из k-го интервала $[0.1(k-1), 0.1i]$?

$\delta \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0.05	0.18	0.53	1.59	5.04	0.10	1.49	10.13	80.89
2	0	0.06	0.35	1.20	3.64	4.04	3.65	7.70	7.39	71.96
3	0	0.13	0.65	1.98	5.27	4.57	7.70	7.13	5.32	67.26
4	0	0.20	1.11	3.31	6.20	7.39	7.21	6.17	5.62	62.77
5	0	0.35	1.71	4.23	7.58	9.29	7.00	5.09	4.09	60.65

— усреднение по 100 наборам $\overline{\mathcal{P}}^{(i)}(m, \delta)$. Среднеквадратичное отклонение:

$\delta \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0.07	0.17	0.23	0.63	1.17	0.10	0.45	2.12	3.94
2	0.01	0.08	0.20	0.42	0.88	0.97	1.07	1.58	1.66	5.50
3	0.01	0.12	0.27	0.72	0.97	1.15	1.53	1.09	1.10	5.55
4	0.02	0.13	0.39	0.94	1.27	1.28	1.44	1.27	1.00	6.03
5	0.01	0.18	0.47	1.13	1.57	1.51	1.10	0.95	0.83	5.92

$m = 10$. Средние значения $d^{(i)}(10, \delta)$, $i = \overline{1, 1000}$

Сколько процентов задач из 1000 имеют средние приближённые решения с вероятностью из k-го интервала $[0.1(k-1), 0.1i]$?

$\delta \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0.05	0.23	0.48	1.72	6.08	0.13	1.82	11.87	77.61
2	0	0.07	0.42	1.25	3.55	5.09	3.73	9.48	8.84	67.57
3	0.01	0.15	0.81	2.31	5.47	5.67	9.90	8.82	6.92	59.94
4	0.01	0.23	1.32	3.84	7.09	8.57	9.09	8.46	8.87	52.53
5	0.02	0.40	2.10	4.95	9.17	11.36	9.21	7.84	8.12	46.81

— усреднение по 100 наборам $\overline{\mathcal{P}}^{(i)}(m, \delta)$. Среднеквадратичное отклонение:

$\delta \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.01	0.07	0.15	0.21	0.45	0.88	0.12	0.42	1.11	1.46
2	0	0.08	0.20	0.36	0.69	0.79	0.71	1.00	1.01	1.72
3	0.03	0.15	0.31	0.54	0.80	0.77	0.98	0.82	0.94	1.65
4	0.03	0.17	0.42	0.69	0.83	0.91	1.08	1.34	1.20	2.65
5	0.04	0.20	0.42	0.79	0.88	1.18	1.17	1.07	1.53	3.54

$m = 15$. Средние значения $d^{(i)}(15, \delta)$, $i = \overline{1, 1000}$.

Сколько процентов задач из 1000 имеют средние приближённые решения с вероятностью из k-го интервала $[0.1(k-1), 0.1i]$?

$\delta \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0.03	0.22	0.39	1.39	5.85	0.71	1.70	11.54	78.16
2	0	0.05	0.35	1.08	3.07	5.46	4.06	9.28	9.45	67.19
3	0	0.10	0.60	1.88	4.83	6.10	10.31	9.42	8.47	58.29
4	0.01	0.18	1.08	3.32	6.91	8.72	9.91	9.64	10.54	49.67
5	0.01	0.35	1.84	4.53	8.73	12.26	10.18	9.11	10.96	41.99

— усреднение по 100 наборам $\overline{\mathcal{P}}^{(i)}(m, \delta)$. Среднеквадратичное отклонение:

$\delta \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0.05	0.14	0.22	0.47	0.92	0.22	0.46	1.39	2.55
2	0.01	0.09	0.25	0.41	0.85	0.87	0.99	1.11	1.15	3.98
3	0.01	0.10	0.33	0.79	1.14	0.86	1.18	1.36	0.87	4.16
4	0.03	0.15	0.51	1.07	1.32	1.26	1.11	1.06	1.73	3.59
5	0.03	0.26	0.65	1.20	1.68	1.00	1.20	1.19	1.70	4.31

$m = 20$. Средние значения $d^{(i)}(20, \delta)$, $i = \overline{1, 1000}$.

Сколько процентов задач из 1000 имеют средние приближённые решения с вероятностью из k-го интервала $[0.1(k-1), 0.1i]$?

$\delta \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0.01	0.10	0.29	1.01	5.35	1.42	1.89	9.92	80.00
2	0	0.04	0.19	0.79	2.43	5.69	4.12	9.37	9.46	67.91
3	0	0.06	0.46	1.67	4.64	7.04	10.71	10.02	10.55	54.84
4	0	0.11	0.78	2.74	6.46	9.48	10.87	11.10	12.94	45.52
5	0.01	0.20	1.32	3.98	8.62	12.92	11.89	11.46	12.97	36.63

— усреднение по 100 наборам $\overline{\mathcal{P}}^{(i)}(m, \delta)$. Среднеквадратичное отклонение:

$\delta \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.01	0.03	0.11	0.22	0.40	0.91	0.37	0.37	1.72	2.58
2	0	0.06	0.15	0.33	0.83	0.76	0.71	1.31	1.08	3.50
3	0	0.07	0.25	0.57	1.32	0.90	1.31	0.98	0.88	3.64
4	0.01	0.12	0.42	0.95	1.65	1.52	1.29	1.15	1.13	5.66
5	0.02	0.15	0.58	1.25	2.09	1.44	1.40	1.24	1.31	5.85

1). Для более чем половины задач среднее приближённое решение не представительно.

(граница представительности $b = 0.9$, относительная ошибка $\leq 5\%$)

2). С ростом размерности доля таких растёт

для всех $b = k/10$, $k = \overline{1,9}$.

Представительность возможных приближённых решений для бОльших размерностей

- P_μ — среднее значение $P(\tilde{x})$ по всем $\tilde{x} \in \tilde{\Xi}$ для задачи
- $P_{\max}$ — максимум $P(\tilde{x})$ по всем $\tilde{x} \in \tilde{\Xi}$

- MP_μ — среденее значение P_μ по всем сгенерированным задачам размерности m
- $MP_{\max}$ — среднее значение $P_{\max}$ для них

Представительность возможных приближённых решений для бОльших размерностей

MP_μ and MP_{max}:

m	MP_μ	MP_{max}
100	0.0554	0.3675
200	0.0214	0.2636
300	0.0128	0.2235
400	0.0092	0.1984
500	0.0071	0.1794
600	0.0055	0.1656
700	0.0049	0.1603
800	0.0040	0.1498
900	0.0036	0.1420
1000	0.0033	0.1378

Представительность возможных приближённых решений для бОльших размерностей

Доля задач с представительным приближённым решением достаточно велика при $m \leq 20$ ($b = 0.9$).

Например, она равна 36.63% при $m = 20$ и $\delta = 5$.

Но для бОльших значений m почти нет таких задач, для которых среднее приближённое решение или любое другое было бы представительным для $b = 0.9$.

Выводы:

Насколько отдельные возможные приближённые решения (одно или несколько) дают представление о возможных приближённых решениях задачи с интервальной целевой функцией?

Среднее приближённое решение, как и любое другое возможное приближённое решения, как правило, непредставительно.

Решая ИЗПМ необходимо,

обосновывать представительность получаемых возможных (оптимальных или приближённых) решений.

Если такого обоснования дать нелья, то задача ИДО должна решаться с учётом неопределённостей.

Как решать ИДО?

а) использовать различные отношения порядка на множестве интервалов возможных значений функции;
б) поиск *представительных множеств* решений;
в) использовать имитационное моделирование;
г) уменьшать размерность задач

использовать другие методы дискретной оптимизации и интервального анализа.

Уменьшение размерности задачи с изменением множества допустимых решений и целевой функции (весов) так, чтобы значения оптимумов (приближённые) для полученной задачи менялись мало, но размерность задачи была меньше. И по её решению восстанавливалось бы решение исходной задачи.

(Например, объединение вершин в графе накрываемых одними и теми же множествами для ИЗПМ, стягивание рёбер, содержащих вершины степени 2 для ИОД.)

Полный текст

1. A.V. Prolubnikov. The interval greedy algorithm for discrete optimization problems with interval objective function // arXiv.org, 2022. https://arxiv.org/pdf/2003.01937

2. A.V. Prolubnikov. On the representativeness of approximate solutions of discrete optimization problems with interval cost function // arXiv.org, 2022. https://arxiv.org/pdf/2201.00182

3. А.В. Пролубников. Задача о покрытии множества с интервальными весами подмножеств и жадный алгоритм её решения // Вычислительные технологии. 2015. Т. 20, № 6. С. 70–84.

4. А.В. Пролубников. Об одном подходе к решению задачи о покрытии с интервальными весами и его вычислительной сложности. Вычислительные технологии. 2017. Т. 22, № 2. С. 115–126.