БЕСКВАНТОРНОЕ ОПИСАНИЕ МНОЖЕСТВ РЕШЕНИЙ ИНТЕРВАЛЬНО-КВАНТОРНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.В. Лакеев
Институт динамики систем и теории управления
им. В.М. Матросова СО РАН, г. Иркутск

И.А. Шарая
Институт вычислительных технологий СО РАН,
г. Новосибирск

I. Введение

интервальные линейные системы, их множества решений

Интервальные линейные системы

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} \boldsymbol{a}_{11}x_1 & + & \boldsymbol{a}_{12}x_2 & + & \ldots & + & \boldsymbol{a}_{1n}x_n & = & \boldsymbol{b}_1, \\ \boldsymbol{a}_{21}x_1 & + & \boldsymbol{a}_{22}x_2 & + & \ldots & + & \boldsymbol{a}_{2n}x_n & = & \boldsymbol{b}_2, \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{a}_{m1}x_1 & + & \boldsymbol{a}_{m2}x_2 & + & \ldots & + & \boldsymbol{a}_{mn}x_n & = & \boldsymbol{b}_m, \end{array}\right.$$

или, кратко,

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b} \tag{1}$$

с интервальной $m \times n$-матрицей $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})$

и интервальным m-вектором $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_i)$ в правой части.

Системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ & \vdots & & & \ddots & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{cases}$$

или, кратко,

$$Ax = b$$

с $m \times n$-матрицей $A = (\,a_{ij}\,)$ и m-вектором $b = (\,b_i\,)$.

Интервальные линейные системы уравнений

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$$

— семейство точечных линейных систем $Ax = b$ с $A \in \boldsymbol{A}$ и $b \in \boldsymbol{b}$.

Объединённое множество решений

интервальной системы линейных уравнений —

$$\Xi_{uni}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \;=\; \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists\, A \in \boldsymbol{A})(\exists\, b \in \boldsymbol{b})(\, Ax = b\,)\,\}$$

— множество решений всевозможных точечных СЛАУ $Ax = b$, для которых матрица A берётся из $\boldsymbol{A}$, а правая часть b берётся из интервального вектора $\boldsymbol{b}$.

Интервальные линейные системы уравнений

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$$

— семейство точечных линейных систем $Ax = b$ с $A \in \boldsymbol{A}$ и $b \in \boldsymbol{b}$.

Допусковое множество решений

интервальной линейной системы уравнений —

$$\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \;=\; \big\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall\, A \in \boldsymbol{A})(\exists\, b \in \boldsymbol{b})(\, Ax = b\,) \,\big\}$$

— множество решений всевозможных точечных СЛАУ $Ax = b$, для которых произведение Ax при любых $A \in \boldsymbol{A}$ попадает в интервалы правых частей $\boldsymbol{b}$.

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$$

— семейство точечных линейных систем $Ax = b$ с $A \in \boldsymbol{A}$ и $b \in \boldsymbol{b}$.

Далее было выделено *управляемое множество решений* ИСЛАУ (английский термин — *controllable solution set*)

$$\varXi_{ctr}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall b \in \boldsymbol{b})(\exists A \in \boldsymbol{A})(Ax = b) \right\},$$

которое возникло при решении задачи автоматического регулирования в интервальной постановке.

Точки из допускового и управляемого множеств решений часто называют *допусковыми* и *управляемыми* решениями соответствующих интервальных систем уравнений. Точки из объединённого множества решений называют иногда *слабыми решениями* интервальных систем уравнений.

Все три упомянутых выше типа решений (множеств решений) для интервальных систем уравнений получаются в результате комбинирования различных логических кванторов при интервальных параметрах системы, так что дальнейший путь обобщения решений для интервальных систем уравнений, неравенств и т. п., в общем, был ясен.

II. Обобщения

на множества кванторных AE-решения решений

Двойственный характер интервальной неопределённости

Интервалы параметров допускают двоякую трактовку.

1. С одной стороны, интересующие нас свойства, условия и т. п. могут выполняться для всех значений из рассматриваемого интервала (бруса).

2. С другой стороны, эти свойства или условия могут выполняться лишь для некоторых (в крайнем случае — для одного) значения из интервала (бруса и т. д.).

Двойственный характер интервальной неопределённости

Пусть задано какое-либо свойство $\mathcal{P}(v)$, которое может выполняться или не выполняться для v из интервала параметров.

Например, $\mathcal{P}(v)$ может иметь вид:

«v является решением данного уравнения»,

«v является решением рассматриваемой задачи»

с параметрами, которые принимают значения из интервалов.

Принципиально различные ситуации:

1) свойство $\mathcal{P}(v)$ выполнено для *всех* значений $v \in \boldsymbol{v}$,

2) свойство $\mathcal{P}(v)$ выполнено для *некоторых* значений $v \in \boldsymbol{v}$.

Двойственный характер интервальной неопределённости

— хорошо описывается с помощью логических кванторов:

— в первом случае мы пишем «$(\forall v \in \boldsymbol{v})\, \mathcal{P}(v)$»
и говорим об *интервальной A-неопределённости*,

— во втором случае мы пишем «$(\exists v \in \boldsymbol{v})\, \mathcal{P}(v)$»
и говорим об *интервальной E-неопределённости*.

$\Rightarrow$ при работе с интервалами и постановке интервальных задач нужно различать эти типы интервальной неопределённости.

Двойственный характер интервальной неопределённости

— на этом пути возникают понятия кванторных решений
и AE-решений интервальных систем уравнений, неравенств и т. д.:
комбинируем кванторы с интервальными параметрами ...

Но логические кванторы разного смысла не перестановочны:

$$\forall u\ \exists v\ \mathcal{P} \quad \not\equiv \quad \exists v\ \forall u\ \mathcal{P}$$

Если интервальная система уравнений
имеет N интервальных параметров,
то общее количество её кванторных множеств решений $\gg 2^N$.

AE-решения интервальных уравнений и систем

Кванторные решения интервальных систем уравнений, для которых выделяющий предикат имеет AE-форму, т. е. в котором все вхождения квантора всеобщности “$\forall$” предшествуют вхождениям квантора существования “$\exists$”, называются AE-*решениями*.

Эти решения являются частным случаем кванторных решений, которые получаются фиксацией специального порядка логических кванторов в логической формуле (выделяющем предикате), определяющей решения.

AE-решения интервальных уравнений и систем

Пусть $m \times n$-кванторная матрица $\mathcal{A} \in \{\forall, \exists\}^{m\times n}$ и m-кванторный вектор $\beta \in \{\forall, \exists\}^m$ задают типы неопределённости отдельных интервальных параметров $\boldsymbol{a}_{ij}$, $\boldsymbol{b}_i$ в матрице и правой части интервальной линейной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$.

Введём вспомогательные интервальные матрицы $\boldsymbol{A}^\forall = (\boldsymbol{a}^\forall_{ij})$, $\boldsymbol{A}^\exists = (\boldsymbol{a}^\exists_{ij})$ и векторы $\boldsymbol{b}^\forall = (\boldsymbol{b}^\forall_i)$, $\boldsymbol{b}^\exists = (\boldsymbol{b}^\exists_i)$, имеющие те же размеры, что $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{b}$ соответственно, и образованные элементами:

$$\boldsymbol{a}^\forall_{ij} := \begin{cases} \boldsymbol{a}_{ij}, & \text{если } \mathcal{A}_{ij} = \forall, \\ 0, & \text{если } \mathcal{A}_{ij} = \exists, \end{cases} \qquad \boldsymbol{b}^\forall_i := \begin{cases} \boldsymbol{b}_i, & \text{если } \beta_i = \forall, \\ 0, & \text{если } \beta_i = \exists, \end{cases}$$

$$\boldsymbol{a}^\exists_{ij} := \begin{cases} \boldsymbol{a}_{ij}, & \text{если } \mathcal{A}_{ij} = \exists, \\ 0, & \text{если } \mathcal{A}_{ij} = \forall, \end{cases} \qquad \boldsymbol{b}^\exists_i := \begin{cases} \boldsymbol{b}_i, & \text{если } \beta_i = \exists, \\ 0, & \text{если } \beta_i = \forall. \end{cases}$$

Множество AE-решений для интервальной системы линейных алгебраических уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ определить как множество

$$\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A' \in \boldsymbol{A}^{\forall})\,(\forall b' \in \boldsymbol{b}^{\forall})\,(\exists A'' \in \boldsymbol{A}^{\exists})\,(\exists b'' \in \boldsymbol{b}^{\exists})\,((A' + A'')\,x = b' + b'')\,\}.$$

Теорема 1

(характеризация С.П. Шарого множеств AE-решений.)
Вектор $x \in \mathbb{R}^n$ принадлежит множеству AE-решений $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ интервальной системы линейных алгебраических уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ тогда и только тогда, когда

$$\boldsymbol{A}^{\forall} \cdot x - \boldsymbol{b}^{\forall} \;\subseteq\; \boldsymbol{b}^{\exists} - \boldsymbol{A}^{\exists} \cdot x, \tag{2}$$

где « · » — интервальное матричное умножение.

AE-решения интервальных уравнений и систем

Пусть заданы две интервальные матрицы $\boldsymbol{A}'$, $\boldsymbol{A}''$ и два интервальных вектора $\boldsymbol{b}'$, $\boldsymbol{b}''$. Рассмотрим интервальную систему уравнений

$$(\boldsymbol{A}' + \boldsymbol{A}'')\, x = \boldsymbol{b}' + \boldsymbol{b}''. \qquad (3)$$

Определение (множество $\forall\exists$-решений уравнения (3)).

Множеством решений интервальной системы уравнений (3) назовём множество

$$\Xi_{\forall\exists}(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{A}'', \boldsymbol{b}', \boldsymbol{b}') = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A' \in \boldsymbol{A}')\, (\forall b' \in \boldsymbol{b}'))$$

$$(\exists A'' \in \boldsymbol{A}'')\, (\exists b'' \in \boldsymbol{b}'')\; (A' + A'')x = b' + b'' \,\}. \qquad (4)$$

И. Рон заметил, что для множества решений $\Xi_{\forall\exists}(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{A}'', \boldsymbol{b}', \boldsymbol{b}'')$ также верна характеризация С.П. Шарого, то есть формула, аналогичная (2)

$$x \in \Xi_{\forall\exists}(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{A}'', \boldsymbol{b}', \boldsymbol{b}'') \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{A}' \cdot x - \boldsymbol{b}' \subseteq \boldsymbol{b}'' - \boldsymbol{A}'' \cdot x, \tag{5}$$

а также характеризация в виде условия разрешимости системы линейных неравенств с модулями

$$x \in \Xi_{\forall\exists}(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{A}'', \boldsymbol{b}', \boldsymbol{b}'') \Longleftrightarrow \left|(A'_c+A''_c)x-(b'_c+b''_c)\right| \le (\Delta''-\Delta')|x|+(\delta''-\delta'), \tag{6}$$

где

$$\boldsymbol{A}' = [\,A'_c - \Delta,\ A'_c + \Delta\,],\ \boldsymbol{A}'' = [\,A''_c - \Delta,\ A''_c + \Delta\,],$$

$$\boldsymbol{b}' = [\,b'_c - \delta,\ b'_c + \delta\,],\ \boldsymbol{b}'' = [\,b''_c - \delta,\ b''_c + \delta\,].$$

Системы с модулями

Пусть C, D — $m \times n$-матрицы, c, d — m-мерные векторы, $x \in \mathbb{R}^n$.

Рассмотрим следующую систему неравенств с модулями вида

$$|Cx - c| \le D|x| + d, \tag{7}$$

и множество ее решений

$$\Xi(C, D, c, d) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid \big|Cx - c\big| \le D\cdot|x| + d \,\}.$$

верно следующее утверждение, которое понадобится нам и в дальнейшем.

AE-решения интервальных уравнений и системы с модулями

Теорема 2

Для любых $m \times n$-матриц C, D и m-векторов c, d существуют интервальная $m \times n$-матрица $\tilde{\boldsymbol{A}}$, интервальный m-вектор $\tilde{\boldsymbol{b}}$ и кванторные $m \times n$-матрица $\mathcal{A}$ и m-вектор β, такие что выполняется равенство

$$\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\tilde{\boldsymbol{A}}, \tilde{\boldsymbol{b}}) = \Xi(C, D, c, d)$$

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = [\, C - |D|,\ C + |D|\,], \qquad \tilde{\boldsymbol{b}} = [\, c - |d|,\ c + |d|\,].$$

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \exists, & \text{если } d_{i,j} \geq 0, \\ \forall, & \text{если } d_{i,j} < 0, \end{cases} \qquad \beta_i = \begin{cases} \exists, & \text{если } d_i \geq 0, \\ \forall, & \text{если } d_i < 0. \end{cases}$$

AE-решения интервальных уравнений и системы с модулями

Следствие

Для любых интервальных $m \times n$-матриц $\boldsymbol{A}'$, $\boldsymbol{A}''$ и интервальных m-векторов $\boldsymbol{b}'$, $\boldsymbol{b}''$ существуют интервальная $m \times n$-матрица $\tilde{\boldsymbol{A}}$, интервальный m-вектор $\tilde{\boldsymbol{b}}$ и кванторные $m \times n$-матрица $\mathcal{A}$ и m-вектор β, такие что выполняется равенство

$$\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\tilde{\boldsymbol{A}}, \tilde{\boldsymbol{b}}) = \Xi_{\forall\exists}(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{A}'', \boldsymbol{b}', \boldsymbol{b}'').$$

Для доказательства достаточно положить $C = \operatorname{mid} \boldsymbol{A}' + \operatorname{mid} \boldsymbol{A}''$, $D = \operatorname{rad} \boldsymbol{A}'' - \operatorname{rad} \boldsymbol{A}'$, $c = \operatorname{mid} \boldsymbol{b}'' + \operatorname{mid} \boldsymbol{b}''$ и $d = \operatorname{rad} \boldsymbol{b}'' - \operatorname{rad} \boldsymbol{b}'$.

III. Обобщения

на множества любых кванторных решений

Обозначим

$$\mu = m(n+1)$$

— общее количество интервальных параметров $m \times n$-системы уравнений , так что всего параметров u_l в нашем случае имеется μ-штук и $l = \overline{1, \mu}$. Если

$$\mathcal{Q}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta) \;=\; \Omega_\mu\, \Omega_{\mu-1} \cdots \Omega_2\, \Omega_1,$$

где $\Omega_l \in \{(\exists u_l \in \boldsymbol{u}_l), (\forall u_l \in \boldsymbol{u}_l)\}$ для всех $l = \overline{1, \mu}$, то соответствующий этой приставке кортеж параметров

$$\bigl\langle\, u_\mu, u_{\mu-1}, \ldots, u_2, u_1 \bigr\rangle \tag{8}$$

является некоторой перестановкой канонического кортежа $\langle a_{11}, \ldots, a_{1n}, b_1, a_{21}, \ \ldots, \ a_{2n}, \ b_2, \ \ldots, \ a_{m1}, \ \ldots, \ a_{mn}, b_m\rangle$, из всех элементов составной $m \times (n+1)$-матрицы $(A\ b)$. Отметим, что кортеж (8) мы нумеруем в обратном порядке, согласно тому, как стоят соответствующие параметры в кванторной приставке.

Определение

Множество решений интервально-кванторной системы уравнений — это множество

$$\Xi_{IQ}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \mathcal{Q}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)(Ax = b) = \text{«истина»} \right\},$$

состоящее из всех кванторных решений.

*

*Нижний индекс «*IQ*» в обозначении множества решений — это сокращение фразы «interval quantifier».

Разобъём приставку $\mathcal{Q}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)$ на κ блоков (которые будем называть *AE-блоками*), т. е. представим её в виде

$$\mathcal{Q}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta) = B_\kappa \dots B_1,$$

где $B_s = \Omega_{i_s} \cdots \Omega_{i_{s-1}+1}$ для $s = \overline{1, \kappa}$ $(i_0 = 0,\ i_\kappa = \mu)$ так, чтобы выполнялись следующие условия:

(а) для $s = \overline{2, \kappa - 1}$, Ω_{i_s} — квантор всеобщности «$\forall$», $\Omega_{i_{s-1}+1}$ — квантор существования «$\exists$» и внутри B_s происходит единственная смена смысла кванторов;

(б) B_1 либо удовлетворяет условию (а), либо состоит только из кванторов всеобщности;

(в) B_κ либо удовлетворяет условию (а), либо состоит только из кванторов существования.

Очевидно, что этими условиями (а)–(в) разбиение кванторной приставки $\mathcal{Q}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)$ на AE-блоки определяется однозначно.

Определение

Определим кортежи $\boldsymbol{A}_\forall = \langle \boldsymbol{A}'_1, \dots, \boldsymbol{A}'_\kappa \rangle$, $\boldsymbol{A}_\exists = \langle \boldsymbol{A}''_1, \dots, \boldsymbol{A}''_\kappa \rangle$, $\boldsymbol{b}_\forall = \left\langle \boldsymbol{b}'_1, \dots, \boldsymbol{b}'_\kappa \right\rangle$, $\boldsymbol{b}_\exists = \left\langle \boldsymbol{b}''_1, \dots, \boldsymbol{b}''_\kappa \right\rangle$, где κ – число АЕ-блоков в $Q(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \mathcal{A}, \beta)$ и для каждого АЕ-блока B_s две интервальные матрицы $\boldsymbol{A}'_s = \left(\boldsymbol{a}'_{sij}\right), \boldsymbol{A}''_s = \left(\boldsymbol{a}''_{sij}\right)$ и два интервальных вектора $\boldsymbol{b}'_s = \left(\boldsymbol{b}'_{si}\right), \boldsymbol{b}''_s = \left(\boldsymbol{b}''_{si}\right)$ определяются следующим образом:

1) если внутри блока B_s происходит единственная смена смысла кванторов; то полагаем

$$\boldsymbol{a}'_{sij} = \begin{cases} \boldsymbol{a}_{ij}, & \text{если } a_{ij} \in \left\{u_{i_s}, \dots, u_{i_{s-1}+1}\right\} \& \mathcal{A}_{ij} = \forall, \\ \mathbf{0}, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{a}''_{sij} = \begin{cases} \boldsymbol{a}_{ij}, & \text{если } a_{ij} \in \left\{u_{i_s}, \dots, u_{i_{s-1}+1}\right\} \& \mathcal{A}_{ij} = \exists, \\ \mathbf{0}, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{b}'_{si} = \begin{cases} \boldsymbol{b}_{i}, & \text{если } b_{i} \in \left\{u_{i_s}, \dots, u_{i_{s-1}+1}\right\} \& \beta_{i} = \forall, \\ \mathbf{0}, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{b}''_{si} = \begin{cases} \boldsymbol{b}_{i}, & \text{если } b_{i} \in \left\{u_{i_s}, \dots, u_{i_{s-1}+1}\right\} \& \beta_{i} = \exists, \\ \mathbf{0}, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

Определение

2) если B_1 состоит только из кванторов всеобщности, то полагаем

$$\boldsymbol{a}'_{1ij} = \begin{cases} \boldsymbol{a}_{ij}, & \text{если } a_{ij} \in \{u_{i_1}, \dots, u_1\} \\ \mathbf{0}, & \text{в противном случае} \end{cases}, \quad \boldsymbol{A}''_1 = \mathbf{0},$$

$$\boldsymbol{b}'_{1i} = \begin{cases} \boldsymbol{b}_i, & \text{если } b_i \in \{u_{i_1}, \dots, u_1\} \\ \mathbf{0}, & \text{в противном случае} \end{cases}, \quad \boldsymbol{b}''_1 = \mathbf{0},$$

3) если B_κ состоит только из кванторов существования, то полагаем

$$\boldsymbol{A}'_\kappa = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{a}''_{\kappa ij} = \begin{cases} \boldsymbol{a}_{ij}, & \text{если } a_{ij} \in \left\{u_\mu, \dots, u_{i_{\kappa-1}+1}\right\}, \\ \mathbf{0}, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{b}'_\kappa = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{b}''_{\kappa i} = \begin{cases} \boldsymbol{b}_i, & \text{если } b_i \in \left\{u_\mu, \dots, u_{i_{\kappa-1}+1}\right\}, \\ \mathbf{0}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Нетрудно показать, что для так определенных матриц и векторов выполняются равенства

$$\boldsymbol{A} = \sum_{s=1}^{\kappa} \left(\boldsymbol{A}'_s + \boldsymbol{A}''_s\right), \quad \boldsymbol{b} = \sum_{s=1}^{\kappa} \left(\boldsymbol{b}'_s + \boldsymbol{b}''_s\right),$$

матрицы $\boldsymbol{A}'_1, \dots, \boldsymbol{A}'_\kappa, \boldsymbol{A}''_1, \dots, \boldsymbol{A}''_\kappa$ образуют дизъюнктное разбиение матрицы $\boldsymbol{A}$, то есть при фиксированных i, j среди интервалов $\boldsymbol{a}'_{1ij}, \dots, \boldsymbol{a}'_{\kappa ij}, \boldsymbol{a}''_{1ij}, \dots, \boldsymbol{a}''_{\kappa ij}$ не более одного ненулевого, а векторы $\boldsymbol{b}'_1, \dots, \boldsymbol{b}'_\kappa, \boldsymbol{b}''_1, \dots, \boldsymbol{b}''_\kappa$ образуют дизъюнктное разбиение вектора $\boldsymbol{b}$, то есть при фиксированном i среди интервалов $\boldsymbol{b}'_{1i}, \dots, \boldsymbol{b}'_{\kappa i}, \boldsymbol{b}''_{1i}, \dots, \boldsymbol{b}''_{\kappa i}$ не более одного ненулевого.

Пусть заданы кортежи $\boldsymbol{A}_\forall = \langle \boldsymbol{A}'_1, \dots, \boldsymbol{A}'_\kappa \rangle$, $\boldsymbol{A}_\exists = \langle \boldsymbol{A}''_1, \dots, \boldsymbol{A}''_\kappa \rangle$, $\boldsymbol{b}_\forall = \left\langle \boldsymbol{b}'_1, \dots, \boldsymbol{b}'_\kappa \right\rangle$, $\boldsymbol{b}_\exists = \left\langle \boldsymbol{b}''_1, \dots, \boldsymbol{b}''_\kappa \right\rangle$, где κ – число AE-блоков.

Рассмотрим κ–блочную интервальную системой линейных алгебраических уравнений вида

$$\left(\sum_{i=1}^{\kappa} \boldsymbol{A}'_i + \sum_{i=1}^{\kappa} \boldsymbol{A}''_i \right) x = \sum_{i=1}^{\kappa} \boldsymbol{b}'_i + \sum_{i=1}^{\kappa} \boldsymbol{b}''_i, \tag{9}$$

и κ–блочную кванторную приставку вида

$$\Phi_\kappa(\boldsymbol{A}_\forall, \boldsymbol{A}_\exists, \boldsymbol{b}_\forall, \boldsymbol{b}_\exists) \equiv (\forall A'_\kappa \in \boldsymbol{A}'_\kappa)(\forall b'_\kappa \in \boldsymbol{b}'_\kappa)(\exists A''_\kappa \in \boldsymbol{A}''_\kappa)(\exists b''_\kappa \in \boldsymbol{b}''_\kappa) \dots$$
$$\dots (\forall A'_1 \in \boldsymbol{A}'_1)(\forall b'_1 \in \boldsymbol{b}'_1)(\exists A''_1 \in \boldsymbol{A}''_1)(\exists b''_1 \in \boldsymbol{b}''_1) \tag{10}$$

Определение

Множеством решений уравнения (9) называется множество

$$\Xi_{IQ}^{\kappa}(\boldsymbol{A}_{\forall}, \boldsymbol{A}_{\exists}, \boldsymbol{b}_{\forall}, \boldsymbol{b}_{\exists}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid$$

$$\mid \Phi_{\kappa}(\boldsymbol{A}_{\forall}, \boldsymbol{A}_{\exists}, \boldsymbol{b}_{\forall}, \boldsymbol{b}_{\exists})(\sum_{s=1}^{\kappa}(A_s' + A_s'')x = \sum_{s=1}^{\kappa}(b_s' + b_s'')) = \text{«истина»} \}.$$

Основная задача данной работы – получить бескванторное описание именно множества $\Xi_{IQ}^{\kappa}(\boldsymbol{A}_{\forall}, \boldsymbol{A}_{\exists}, \boldsymbol{b}_{\forall}, \boldsymbol{b}_{\exists})$.

Если $\boldsymbol{a} = [\underline{a}, \overline{a}]$ — интервальнй m-вектор, то его ширина $\operatorname{wid} \boldsymbol{a}$ определяеся как

$$\operatorname{wid} \boldsymbol{a} \; = \; \overline{a} - \underline{a}.$$

Лемма

Пусть $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ — интервальны m-вектора.
Тогда следующие условия эквивалентны:

1) $(\exists c \in \boldsymbol{c})\ (\boldsymbol{a} \subseteq \boldsymbol{b} + c)$;
2) $(\boldsymbol{a} \subseteq \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$ и $\operatorname{wid} \boldsymbol{a} \leq \operatorname{wid} \boldsymbol{b}$.

$1) \Rightarrow 2)$.

$\boldsymbol{a} \subseteq \boldsymbol{b} + c \subseteq \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$

$\operatorname{wid} \boldsymbol{a} \leq \operatorname{wid}\,(\boldsymbol{b} + c) = \operatorname{wid} \boldsymbol{b}$

Теорема 3

Пусть заданы два кортежа интервальных матриц

$$\boldsymbol{A}_\forall = \langle \boldsymbol{A}'_1, \dots, \boldsymbol{A}'_\kappa \rangle, \qquad \boldsymbol{A}_\exists = \langle \boldsymbol{A}''_1, \dots, \boldsymbol{A}''_\kappa \rangle,$$

и два кортежа интервальных векторов

$$\boldsymbol{b}_\forall = \langle \boldsymbol{b}'_1, \dots, \boldsymbol{b}'_\kappa \rangle, \qquad \boldsymbol{b}_\exists = \langle \boldsymbol{b}''_1, \dots, \boldsymbol{b}''_\kappa \rangle,$$

Тогда $x \in \Xi^\kappa_{IQ}(\boldsymbol{A}_\forall, \boldsymbol{A}_\exists, \boldsymbol{b}_\forall, \boldsymbol{b}_\exists)$, если и только если выполняются следующие условия:

$$\sum_{i=1}^{\kappa} (\boldsymbol{A}'_i x - \boldsymbol{b}'_i) \subseteq \sum_{i=1}^{\kappa} (\boldsymbol{b}''_i - \boldsymbol{A}''_i x), \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{l} \operatorname{wid} (\boldsymbol{A}'_i x - \boldsymbol{b}'_i) \le \sum_{i=1}^{l} \operatorname{wid} (\boldsymbol{b}''_i - \boldsymbol{A}''_i x), \qquad l = 1, 2, \dots, \kappa - 1. \tag{12}$$

Произведение интервальной $m \times n$–матрицы $\boldsymbol{A}$ на n–мерный вектор x определяется как множество

$$\boldsymbol{A} \cdot x = \{Ax \mid A \in \boldsymbol{A}\}.$$

Теорема (Оеттли-Прагер, Рон)

Если интервальная $m \times n$–матрица $\boldsymbol{A}$ представлена в центрально-симметричном виде $\boldsymbol{A} = [\, A_c - \Delta,\ A_c + \Delta \,]$. то $\boldsymbol{A} \cdot x$ — m–мерный интервальный вектор и

$$\boldsymbol{A} \cdot x = [\, A_c x - \Delta|x|,\ A_c x + \Delta|x| \,]$$

Пусть $\boldsymbol{A}'_i = [\, A'_{ci} - \Delta'_i,\ A'_{ci} + \Delta'_i \,]$, $\boldsymbol{A}''_i = [\, A''_{ci} - \Delta''_i,\ A''_{ci} + \Delta''_i \,]$,

$\boldsymbol{b}'_i = [\, b'_{ci} - \delta'_i,\ b'_{ci} + \delta'_i \,]$, $\boldsymbol{b}''_i = [\, b''_{ci} - \delta''_i,\ b''_{ci} + \delta''_i \,]$, $i = \overline{1, \kappa}$.

Теорема 4

Пусть заданы два кортежа интервальных матриц

$$\boldsymbol{A}_{\forall} = \langle \boldsymbol{A}'_1, \ldots, \boldsymbol{A}'_{\kappa} \rangle, \qquad \boldsymbol{A}_{\exists} = \langle \boldsymbol{A}''_1, \ldots, \boldsymbol{A}''_{\kappa} \rangle,$$

и два кортежа интервальных векторов

$$\boldsymbol{b}_{\forall} = \langle \boldsymbol{b}'_1, \ldots, \boldsymbol{b}'_{\kappa} \rangle, \qquad \boldsymbol{b}_{\exists} = \langle \boldsymbol{b}''_1, \ldots, \boldsymbol{b}''_{\kappa} \rangle,$$

Тогда $x \in \Xi^{\kappa}_{IQ}(\boldsymbol{A}_{\forall}, \boldsymbol{A}_{\exists}, \boldsymbol{b}_{\forall}, \boldsymbol{b}_{\exists})$, если и только если выполняются следующие условия:

$$\left| \sum_{i=1}^{\kappa} \left((A'_{ci} + A''_{ci})x - (b'_{ci} + b''_{ci}) \right) \right| + \sum_{i=1}^{\kappa} \left(\Delta'_i |x| + \delta'_i \right) \le \sum_{i=1}^{\kappa} \left(\Delta''_i |x| + \delta''_i \right). \tag{13}$$

$$\sum_{i=1}^{l} \left(\Delta'_i |x| + \delta'_i \right) \le \sum_{i=1}^{l} \left(\Delta''_i |x| + \delta''_i \right), \qquad l = \overline{1, \kappa - 1}. \tag{14}$$

Теорема 5

Для любых кортежей интервальных $m \times n$-матриц $\boldsymbol{A}_\forall = \langle \boldsymbol{A}'_1, \dots, \boldsymbol{A}'_\kappa \rangle$, $\boldsymbol{A}_\exists = \langle \boldsymbol{A}''_1, \dots, \boldsymbol{A}''_\kappa \rangle$ и кортежей интервальных m-векторов $\boldsymbol{b}_\forall = \langle \boldsymbol{b}'_1, \dots, \boldsymbol{b}'_\kappa \rangle$, $\boldsymbol{b}_\exists = \langle \boldsymbol{b}''_1, \dots, \boldsymbol{b}''_\kappa \rangle$ существуют интервальная $(\kappa m) \times n$-матрица $\tilde{\boldsymbol{A}}$, интервальный (κm)-вектор $\tilde{\boldsymbol{b}}$ и кванторные $(\kappa m) \times n$-матрица $\mathcal{A}$ и (κm)-вектор β, такие что выполняется равенство

$$\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\tilde{\boldsymbol{A}}, \tilde{\boldsymbol{b}}) \;=\; \Xi^{\kappa}_{IQ}(\boldsymbol{A}_\forall, \boldsymbol{A}_\exists, \boldsymbol{b}_\forall, \boldsymbol{b}_\exists).$$

Доказательство. Представим неравенства (14), (13) в виде одной системы неравенств с модулями вида (7), полагая

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_\kappa \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} D_1 \\ \vdots \\ D_\kappa \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_\kappa \end{pmatrix}, \qquad d = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_\kappa \end{pmatrix},$$

где $C_l = 0$, $c_l = 0$ при $l = \overline{1, \kappa - 1}$,

$$C_\kappa = \sum_{s=1}^{\kappa} \left(\check{A}'_s + \check{A}''_s\right), \qquad c_\kappa = \sum_{s=1}^{\kappa} \left(\check{b}'_s + \check{b}''_s\right),$$

$$D_l = \sum_{s=1}^{l} \left(\Delta''_s - \Delta'_s\right), \qquad d_l = \sum_{s=1}^{l} \left(\delta''_s - \delta'_s\right)$$

для всех $l = \overline{1, \kappa}$. Тогда, определяя матрицы $\tilde{\boldsymbol{A}}$, $\mathcal{A}$ и векторы $\tilde{\boldsymbol{b}}$, β по этим C, c, D, d так же, как в Предложении 1, получаем, что $\Xi_{\mathcal{A}\beta}(\tilde{\boldsymbol{A}}, \tilde{\boldsymbol{b}}) = \Xi^{\kappa}_{IQ}(\boldsymbol{A}_\forall, \boldsymbol{A}_\exists, \boldsymbol{b}_\forall, \boldsymbol{b}_\exists)$.

Спасибо за внимание!

Заключение

С помощью выделения в кванторной приставке $\forall\exists$-блоков получен способ приведения интервально-кванторных линейных систем уравнений к некоторому каноническому виду, в котором кванторы всеобщности и существования строго чередуются.

Это также позволило несколько обобщить понятие интервально-кванторных линейных систем уравнений. Получено бескванторное описание этих множеств как в интервальной арифметике – теорема 3 (что обобщает соответствующие результаты H. Beeck'а и С.П. Шарого, так и в виде разрешимости систем линейных неравенств с модулями – теорема 4 (что обобщает результат Оеттли—Прагера для объединенного множества решений и результат И. Рона для AE-решений).

Используя бескванторное описание в виде разрешимости систем линейных неравенств с модулями, показано, что класс множеств решений обобщенных интервально-кванторных уравнений совпадает с классом AE-решений (теорема 5).

Литература

Kearfott R.B., Nakao M.T., Neumaier A., Rump S.M., Shary S.P., Hentenryck P. Standardized notation in interval analysis // Вычисл. технологии. – 2010. – Т. 15, № 1. – С. 7–13. URL: http://www.ict.nsc.ru/jct/getfile.php?id=1345

Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. – Новосибирск: XYZ, 2018.– 622 с. URL: http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks/SharyBook.pdf

Shary S.P. Linear static systems under interval uncertainty: algorithms to solve control and stabilization problems // International Journal of Reliable Computing. Supplement. Extended Abstracts of APIC'95, International Workshop on Applications of Interval Computations, El Paso, TX, February 23-25, 1995 / Ed.: V. Kreinovich. – El Paso: University of Texas at El Paso, 1995. – P. 181–184. URL:http://www.nsc.ru/interval/shary/Papers/ElPaso.pdf

Shary S.P. Algebraic solutions to interval linear equations and their