

Исследование бицентрированной модификации для интервальных методов решения систем нелинейных уравнений и их прикладное применение в задачах робототехники

Маминов Артем Дмитриевич,
младший научный сотрудник, ФИЦ ИУ РАН
Посыпкин Михаил Анатольевич,
д.ф.-м.н., член-корр. РАН,
директор, ФИЦ ИУ РАН

19 мая 2025

Содержание доклада

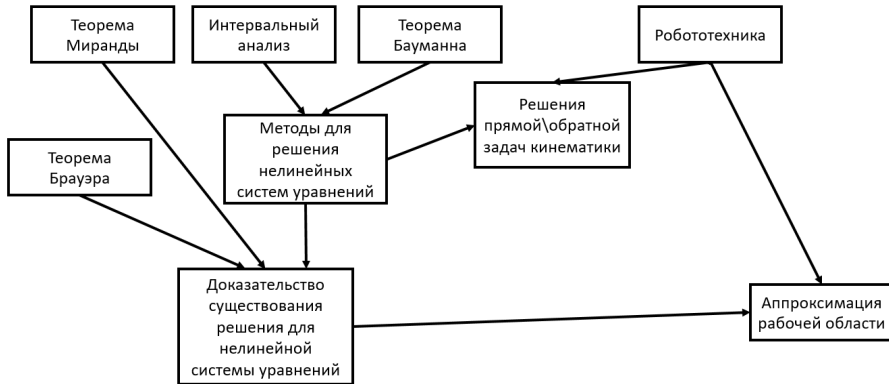
- 1 Введение
- 2 Интервальный анализ
- 3 Методы решения нелинейных систем уравнений
- 4 Экспериментальное исследование
- 5 Заключение

Содержание доклада

- 1 Введение
- 2 Интервальный анализ
- 3 Методы решения нелинейных систем уравнений
- 4 Экспериментальное исследование
- 5 Заключение

- Данное исследование находится на стыке между двумя научными направлениями: интервальным анализом и робототехникой.
- Интервальный анализ
 - методы решения нелинейных систем уравнений;
 - методы доказательства существования решений.
- Робототехника
 - аппроксимация рабочей области робота-манипулятора;
 - решение прямой и обратной задач кинематики.

Связь исследуемых методов



Основные результаты исследования

- Разработана теория построения интервальных операторов для решения систем нелинейных уравнений на основе теоремы Бауманна об оптимальных центрах.
- На основе теоремы Брауэра и теоремы Миранды разработан метод доказательства существования решения для систем нелинейных уравнений.
- Разработан подход для решения актуальных задач из области робототехники на основе методов интервального анализа: аппроксимации рабочей области роботов и решения прямой/обратной задач кинематики.
- Проведено экспериментальное исследование по применению интервальных методов решения систем нелинейных уравнений и методов доказательства существования решения как для синтетических задач, так и для задач в области робототехники.

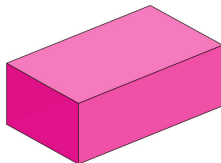
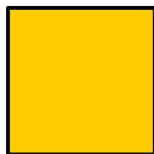
Содержание доклада

- 1 Введение
- 2 Интервальный анализ**
- 3 Методы решения нелинейных систем уравнений
- 4 Экспериментальное исследование
- 5 Заключение

Введение в интервальный анализ

- Интервал $\mathbf{x}^a = \{x \in \mathbb{R} \mid \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\}$ — множество всех действительных чисел между левым и правым концами интервала.
- Интервальный вектор (брус, бокс) — декартово произведение интервалов, содержащихся в нём:
 $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 \times \cdots \times \mathbf{x}_n], \mathbf{x} \in \mathbb{IR}^n, \mathbf{x}_i \in \mathbb{IR}, i = 1, \dots, n.$

^aИнтервальные величины обозначаются полужирным шрифтом



Интервальные математические операции

$$\begin{aligned}x + y &= [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}], & x - y &= [\underline{x} - \bar{y}, \bar{x} - \underline{y}], \\x \cdot y &= [\min\{\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}\}, \max\{\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}\}], \\x/y &= x \cdot [1/\bar{y}, 1/\underline{y}] && \text{если } y \not\ni 0,\end{aligned}$$

- В классической интервальной арифметики деление двух интервалов допустимо только в случае, если делитель не содержит в себе 0.
- В данной работе применяется **расширенная интервальная арифметики Кахана**. Основное отличие такой системы состоит в переопределение операции деления с возможностью делить на интервалы содержащие ноль:

$$\mathbf{x}/\mathbf{y} = \begin{cases} \dots \\ [[-\infty, \bar{\mathbf{x}}/\underline{\mathbf{y}}] \cup [\bar{\mathbf{x}}/\underline{\mathbf{y}}, \infty]], & \text{если } \bar{\mathbf{x}} < 0 \text{ и } \mathbf{y} \ni 0 \\ \dots \end{cases}$$

- В такой системе возможно появление **мультиинтервалов**.

Содержание доклада

- 1 Введение
- 2 Интервальный анализ
- 3 Методы решения нелинейных систем уравнений
- 4 Экспериментальное исследование
- 5 Заключение

Постановка задачи

- Пусть задана система нелинейных уравнений $F(x) = 0$, $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ имеющая на интервальном векторе $\mathbf{X} \in \mathbb{IR}^n$ конечное множество корней.
- Требуется найти множество всех таких интервальных векторов $\mathbf{x}^* = \{\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*, \dots, \mathbf{x}_k^*\} \subset \mathbf{X}$, что $x_i^* \in \mathbf{x}_i^*$, $i = 1, \dots, k$ и $\text{wid}(\mathbf{x}_i) \leq \varepsilon$, где $F(x_i^*) = 0$ и ε — это точность вычислений; либо убедиться, что решений нет (то есть $\mathbf{x}^* = \emptyset$).

- Интервальные методы основаны на **интервальных операторах** — отображение $\mathbb{IR}^n \rightarrow \mathbb{IR}^n$
- Интервальные операторы основаны на отображение $F(x)$ заданном на интервальном векторе $\mathbf{X}$ и их основная идея заключается в сужении исследуемого интервального вектора для локализации корней системы уравнений.
- На основе таких операторов разумно строить итерационные схемы вида:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k \cap \mathbf{P}(\mathbf{x}^k, c), \text{ для } k = 0, \dots; \mathbf{x}^0 = \mathbf{X},$$

где $\mathbf{P}$ обозначает интервальный оператор, k — номер итерации и c — некоторая точка из $\mathbf{x}^k$.

Интервальный оператор Кравчика

Интервальный оператор Кравчика имеет следующий вид:

$$\mathcal{K}(\mathbf{x}, c)_i = c_i - (\Lambda \cdot F(c))_i + (I - \Lambda \cdot \mathbf{F}'(\mathbf{x}))_i \cdot (\mathbf{x} - c),$$

где F — исследуемая система нелинейных уравнений, $\mathbf{x}$ — исследуемый интервальный вектор, c — середина $\mathbf{x}$, $\mathbf{F}'(\mathbf{x})$ — интервальное расширение матрицы Якоби $F'(\mathbf{x})$, $\Lambda = (0.5 \cdot \alpha \cdot I + F'(c))^{-1}$ — матрица предобуславливания, I — единичная матрица и $\alpha = 1$ если матрица $F'(c)$ сингулярна и 0 если несингулярна. В классическом варианте $c = \text{mid}(\mathbf{x})$, c — вектор-столбец.

Интервальный оператор Хансена-Сенгупты

Интервальный оператор Хансена-Сенгупты имеет следующий вид:

$$\mathcal{HS}(\mathbf{x}^k, c)_i = c_i - \frac{((\Lambda F(c))_i + \sum_{j=0}^i (\Lambda F'(\mathbf{x}))_{ij} \cdot (\mathbf{x}_j^{k+1} - c_j))}{\Lambda F'(\mathbf{x})_{ii}} + \frac{\sum_{j=i+1}^N (\Lambda F'(\mathbf{x}))_{ij} \cdot (\mathbf{x}_j^k - c_j)}{\Lambda F'(\mathbf{x})_{ii}},$$

где $\mathbf{x}_j^{k+1}$ — результат применения оператора Хансена-Сенгупты для предыдущих компонент вектора $\mathbf{x}^k$.

Теорема Бауманна об оптимальных центрах

Теорема

Пусть дано непрерывное отображение $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, для которого существует интервальная Липшицева матрица $\mathbf{L}$ на интервальном векторе $\mathbf{x}$. Тогда матрицы оптимальных центров C^- и C^+ по теореме Бауманна определяются следующим образом для всех $i, j = 1 \dots n$:

$$C_{ij}^- = \begin{cases} \bar{x}_i, & \text{если } \bar{L}_{ij} \leq 0 \\ \underline{x}_i, & \text{если } \underline{L}_{ij} \geq 0 \\ \frac{\bar{L}_{ij}\underline{x}_i - \underline{L}_{ij}\bar{x}_i}{\bar{L}_{ij} - \underline{L}_{ij}}, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$C_{ij}^+ = \begin{cases} \underline{x}_i, & \text{если } \bar{L}_{ij} \leq 0 \\ \bar{x}_i, & \text{если } \underline{L}_{ij} \geq 0 \\ \frac{\underline{L}_{ij}\underline{x}_i - \bar{L}_{ij}\bar{x}_i}{\underline{L}_{ij} - \bar{L}_{ij}}, & \text{иначе} \end{cases}$$

- Применяя теорему Бауманна к какому-либо интервальному оператору можно получить новый **бицентрированный оператор**:

$$P_i^{bic} = P(x, C_i^+) \cap P(x, C_i^-), i = 1, \dots, n$$

- В данном исследовании $L = \Phi'(x)$ — интервальное расширение матрицы Якоби на x для центрированной формы $\Phi(x) = x - \Lambda_{bic} F(x)$
- Матрица преобуславливания Λ_{bic} может задаваться различными способами, в данном исследовании $\Lambda_{bic} = (0.5 \cdot \alpha \cdot I + \beta \cdot F'(c))^{-1}$, где значение $\beta = 1.2$ было найдено экспериментально.

Алгоритм интервального метода для решения нелинейных систем уравнений

```
Q := Q ∪ x
while |Q| ≠ 0 do
  xk = Q.pop
  if 0 ∈ F(xk) then
    if wid(xk) ≤ ε then
      xk+1 := P(xk, c) ∩ xk
      if xk+1 = xk then
        Q := Q ∪ bisection(xk)
      end
    else if xk+1 ≠ ∅ then
      Q := Q ∪ xk+1
    end
  end
  else
    R := R ∪ xk
  end
end
end
return R
```

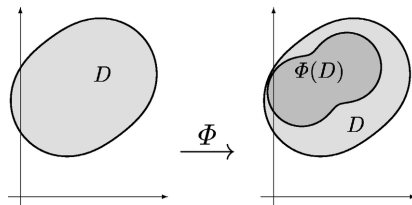
Доказательство существования решения

- Для некоторых задач необязательно находить все корни системы, однако необходимо **доказать существование** хотя бы одного корня.
- Для системы $F(x)$ на заданном интервальном векторе X необходимо доказать существование такого $x^* \in X$, что $F(x^*) = 0$.
- Возможны три варианта:
 - 1 для заданного X доказано существование решения;
 - 2 для заданного X доказано отсутствие решения;
 - 3 для заданного X не удалось доказать существования или отсутствие решения.

Доказательство существования решения. Теорема Брауэра

Теорема

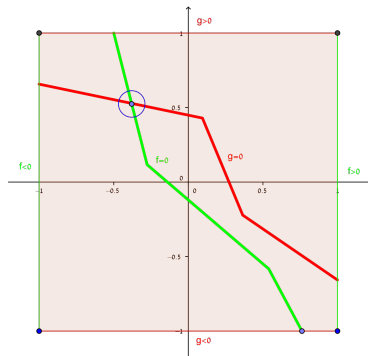
Если $\mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{c})$ — интервальный оператор функции $F(\mathbf{x})$ на интервальном векторе $\mathbf{x}$ и $\mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{c}) \subseteq \mathbf{x}$, то на интервальном векторе $\mathbf{x}$ существует решение $\mathbf{x}^* \in \mathbf{x}$, такое что $F(\mathbf{x}^*) = 0$.



Доказательство существования решения. Теорема Миранды.

Теорема

Если значения компонент $F(x)$ на противоположных гранях интервального вектора x имеют разные знаки, тогда на интервальном векторе x существует корень уравнения x^* для $F(x)$, такой что $F(x^*) = 0$



Алгоритм интервального метода для доказательства существования решения

```
while  $|Q| \neq 0$  do
   $x^k = Q.pop$ 
  if  $0 \in F(x^k)$  then
    if  $wid(x^k) \leq \varepsilon$  then
      if  $miranda(x^k)$  then
        | return E
      end
       $x^p := P(x^k, c)$ 
      if  $x^p \subseteq x^k$  then
        | return E
      end
       $x^{k+1} := x^k \cap x^p$ 
      if  $x^{k+1} \subseteq x^k$  then
        |  $Q := Q \cup \text{bisection}(x^k)$ 
      end
      else if  $x^{k+1} \neq \emptyset$  then
        |  $Q := Q \cup x^{k+1}$ 
      end
    end
    else
      |  $flag_B := True$ 
    end
  end
end
end
if  $flag_B$  then
  | return B
end
return N
```

Содержание доклада

- 1 Введение
- 2 Интервальный анализ
- 3 Методы решения нелинейных систем уравнений
- 4 Экспериментальное исследование**
- 5 Заключение

Сравнение скорости сходимости классических методов и их модифицированных версий

- 1 Было проведено экспериментальное исследование разработанной бицентрированной модификации для решения систем нелинейных уравнений.
- 2 Для тестирования использовались градиенты функций из бенчмарков глобальной оптимизации.
- 3 Фактически решалась задача

$$\nabla f(x) = 0, x \in \mathbb{R}^2,$$

где градиент функции представляет собой систему нелинейных уравнений.

- 4 Для всех тестовых функций запускался алгоритм нахождения корней с $\varepsilon = 10e^{-6}$ с разными интервальными операторам на брусе $x = [x_1, x_2]$, $x_1 = x_2$.

Сравнение скорости сходимости классических методов и их модифицированных версий

Тестовая система	Количество корней	Начальный x	$\mathcal{K}$	$\mathcal{K}_{bic}$	$\mathcal{HS}$	$\mathcal{HS}_{bic}$
Separable sys	4	$[0, 3]$	394	97	21	15
Exponential	1	$[-1, 1]$	7	7	1	1
Sqrt	1	$[1, 5]$	4	4	3	2
Squares sum	1	$[-5, 5]$	1	1	1	1
Rosenbrock	1	$[-2, 2]$	1107	1107	590	571
Beale	3	$[-4.5, 4.5]$	4203	4029	1513	1389
Himmelblau	9	$[-5, 5]$	577	561	91	80
Rastrigin	441	$[-5.12, 5.12]$	3787	3787	1771	1538
Griewank	17	$[-5, 5]$	151	151	127	123
Schaffer	9	$[-2, 2]$	17863	17855	12931	12865
Shubert	98	$[-2, 2]$	3490	2306	1614	1576

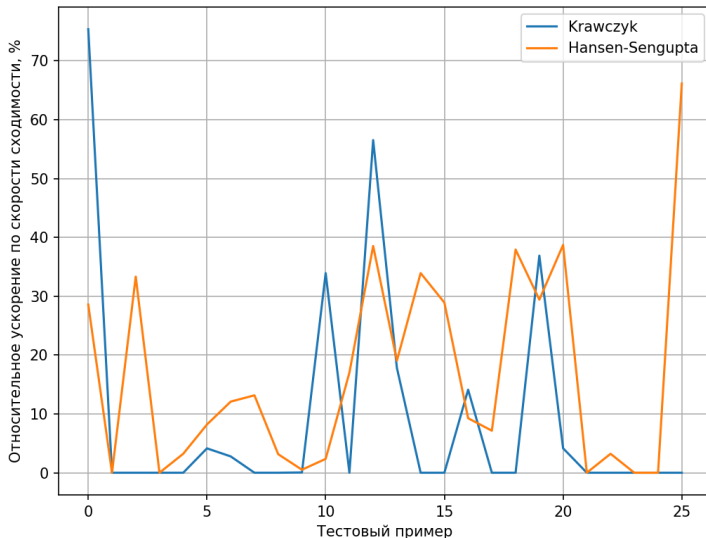
Сравнение скорости сходимости классических методов и их модифицированных версий

Тестовая система	Количество корней	Начальный x	$\mathcal{K}$	$\mathcal{K}_{bic}$	$\mathcal{HS}$	$\mathcal{HS}_{bic}$
Styblinski-Tang	9	$[-5, 5]$	143	143	47	39
Michalewicz	15	$[0, \pi]$	2798	1216	218	134
Dixon Price	3	$[-10, 10]$	320	263	126	102
Three Hump Camel	5	$[-5, 5]$	130	130	56	37
Bohachevsky	81	$[-5, 5]$	999	999	453	322
ElAttar Vidyasagar Dutt	7	$[-5, 5]$	489	420	205	186
Engvall	1	$[-5, 5]$	32	32	28	26
EggCrate	49	$[-5, 5]$	543	543	261	162

Сравнение скорости сходимости классических методов и их модифицированных версий

Тестовая система	Количество корней	Начальный x	$\mathcal{K}$	$\mathcal{K}_{bic}$	$\mathcal{HS}$	$\mathcal{HS}_{bic}$
f26	3	$[-5, 5]$	374	236	17	12
Freudenstein Roth	2	$[-12, 12]$	553	530	155	95
GramacyLee2	2	$[-1, 1]$	67	67	51	51
Leon	1	$[-2, 2]$	1107	1107	590	571
Matyas	1	$[-10, 10]$	1	1	1	1
McCormick	2	$[-2, 2]$	25	25	21	21
Parsopoulos	9	$[-2, 2]$	99	99	65	22
F_{2RPR}^d	2	$[-20, 20]$	47	47	39	27
F_{2RPR}^i	1	$[3, 15]$	7	7	5	5
F_{DEX}^d	2	$[-20, 20]$	31	31	25	21
F_{DEX}^i	4	$[-\pi, \pi]$	121	92	67	19

Сравнение скорости сходимости классических методов и их модифицированных версий



Роботы параллельной структуры

- **Роботы параллельной структуры** — это тип роботов, в которых рабочий инструмент соединен с основанием через несколько независимых кинематических цепей (рычагов или приводов), работающих параллельно.
- Параллельные роботы состоят из замкнутой кинематической цепи, что повышает их точность и жёсткость.
- Роботы параллельной структуры применяются в различных отраслях науки и производства: медицине, промышленной сборке, авиации.



Рисунок: Параллельный робот Stewart Platform

Система кинематических уравнений

- Параллельные роботы обычно описываются **системой кинематических уравнений**, задающей связь между входными параметрами (например углом поворота ротационного привода) и выходными параметрами (положение рабочего инструмента в пространстве).
- Формально система кинематических уравнений это система нелинейных уравнений

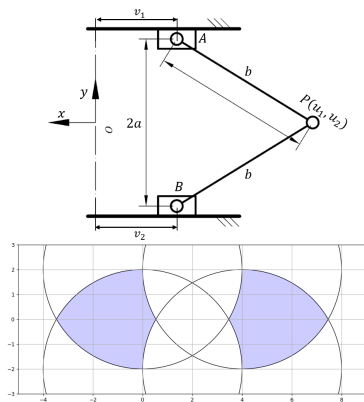
$$F(u, v) = 0,$$

где $F(u, v) : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$, где $u \in \mathbb{R}^m$ — вектор выходных параметров, $v \in \mathbb{R}^n$ — вектор входных параметров.

- Система кинематических уравнений недоопределена, оставляя тем самым определённую степень свободы роботу.

Рабочая область робота

- Рабочая область робота — это множество всех допустимых положений рабочего инструмента робота.
- Информация о рабочей области необходима для планирования траектории движения рабочего инструмента, а площадь рабочей области является важной характеристикой робота, которая может использоваться при оптимизации конструкции робота.



Аппроксимация рабочей области робота

- Так как система кинематических уравнений $F(u, v)$ недоопределена, решение такой системы будет представлять собой не одну точку, а некоторое множество:

$$\Omega = \{u \subseteq \mathbb{R}^m \mid \exists v \subseteq \mathbb{R}^n, \text{ такое что } F(u, v) = 0\}$$

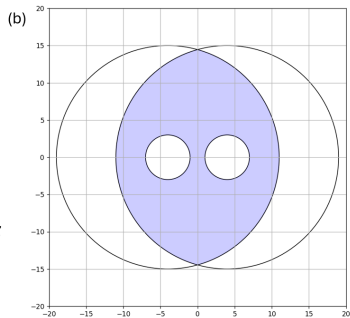
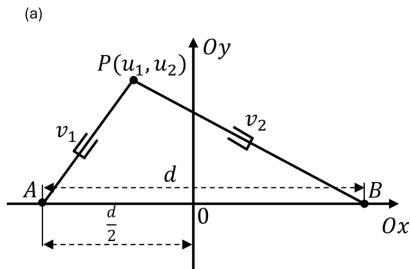
- Множество Ω и будет являться рабочей областью робота.
- Поиск такого множества не всегда возможен, поэтому на практике необходимо найти **аппроксимацию** такого множества ¹.

¹Maminov A. D., Posypkin M. A., Shary S. P. Reliable bounding of the implicitly defined sets with applications to robotics //Procedia Computer Science. – 2021. – Т. 186. – С. 227-234.

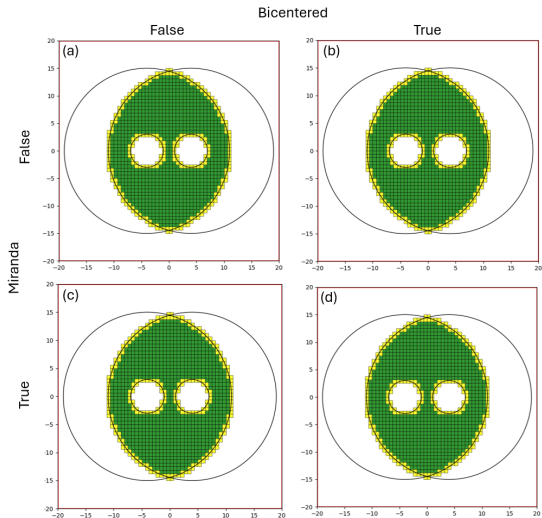
Алгоритм аппроксимации рабочей области роботов

- Основная идея подхода состоит в параметризации недоопределённой системы кинематических уравнений по выходному параметру u . После такой параметризации получим классическую систему нелинейных уравнений $F(v)$ с интервальными коэффициентами.
- Вектор входных параметров v представляют собой доступный диапазон изменений (интервальный вектор), а параметризацию разумно осуществлять с помощью n -мерных параллелепипедов.
- “Обычные” численные методы не применимы напрямую к данной задаче и возникает необходимость в использовании интервальных методов доказательства существования решения интервальной нелинейной системы $F(v) = 0$ на брус u .
- Результатом работы такого алгоритма являются списки брусов, относящихся к внутренней и граничной частям рабочей области.

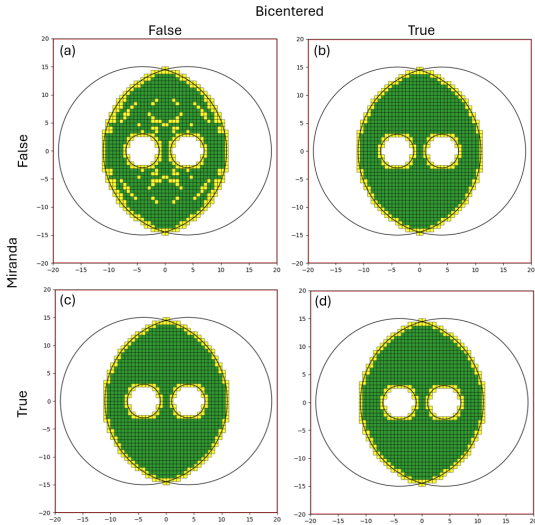
Экспериментальные результаты. Робот 2-RPR



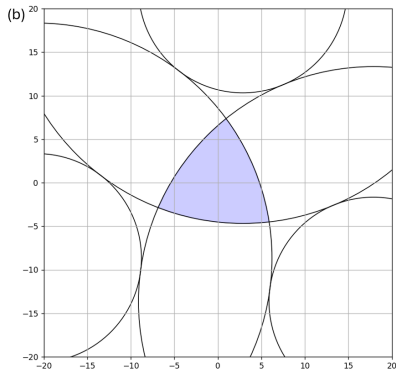
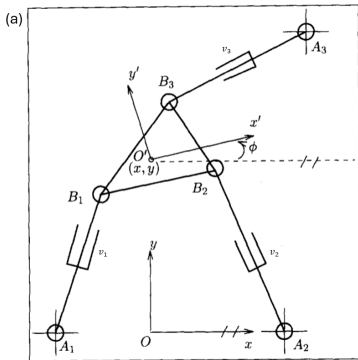
Экспериментальные результаты. Робот 2-RPR. Метод Кравчика



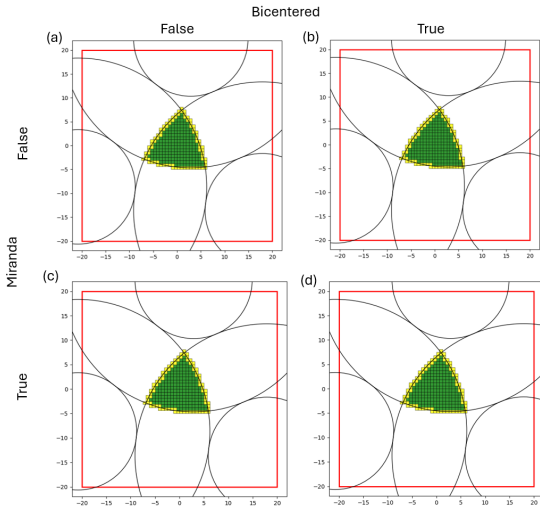
Экспериментальные результаты. Робот 2-RPR. Метод Хансена-Сенгупты



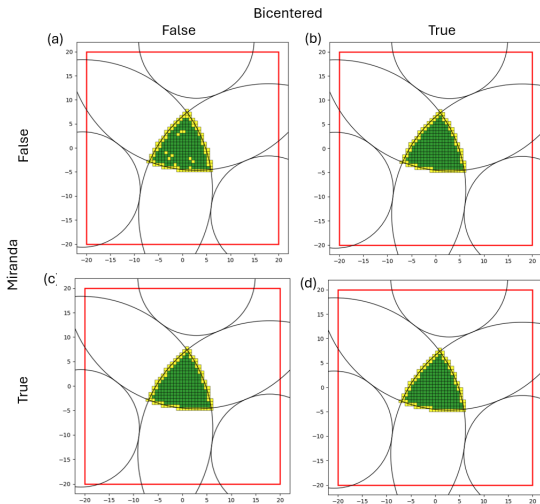
Экспериментальные результаты. Робот 3-RPR



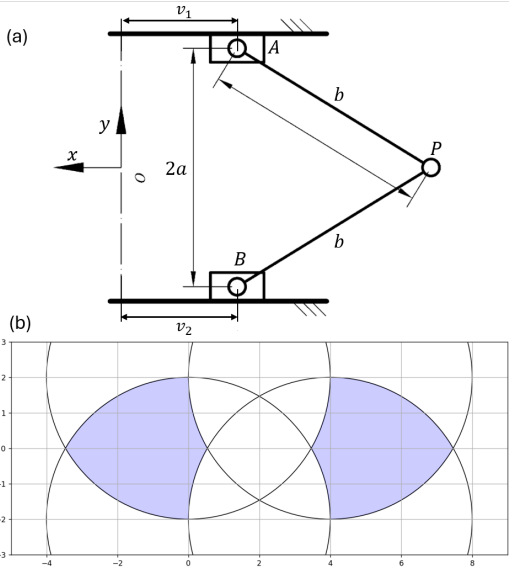
Экспериментальные результаты. Робот 3-RPR. Метод Кравчика



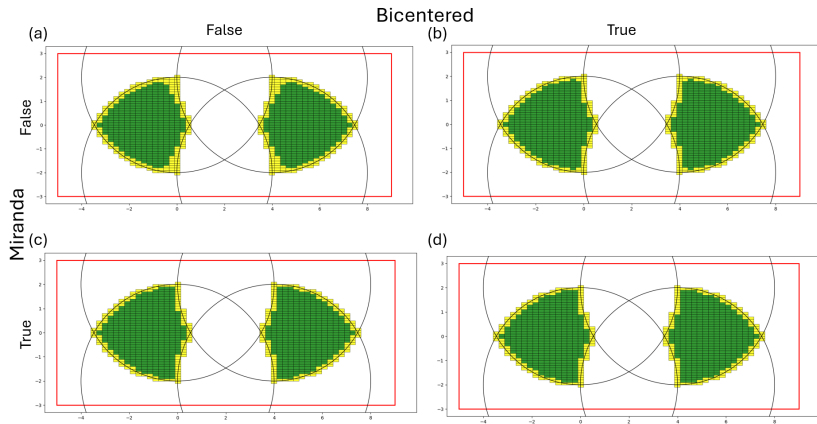
Экспериментальные результаты. Робот 3-RPR. Метод Хансена-Сенгупты



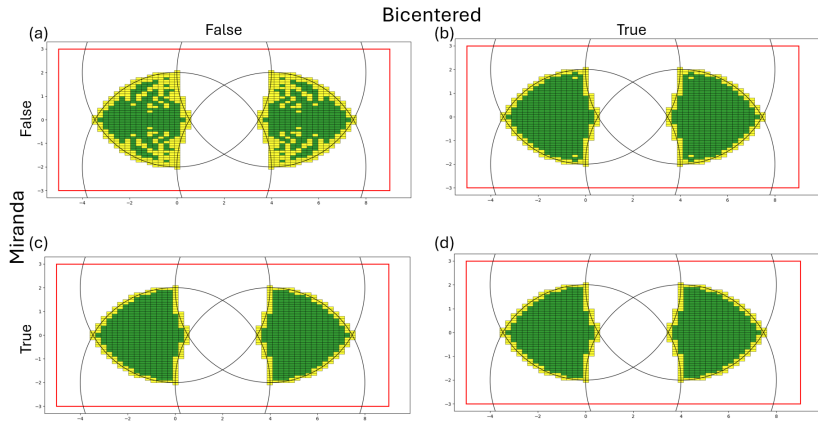
Экспериментальные результаты. Робот PRRRP



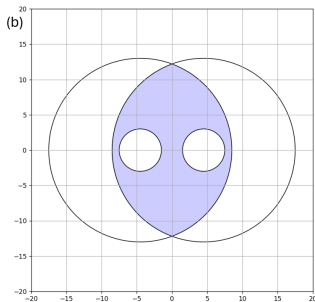
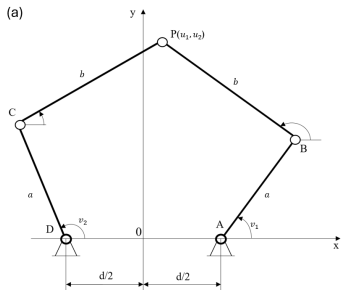
Экспериментальные результаты. Робот PRRRP. Метод Кравчика



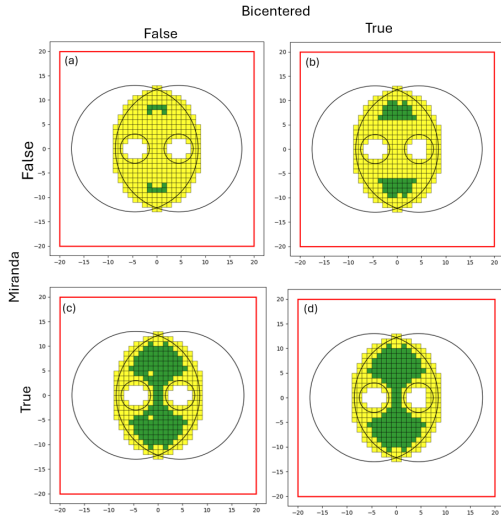
Экспериментальные результаты. Робот PRRRP. Метод Хансена-Сенгупты



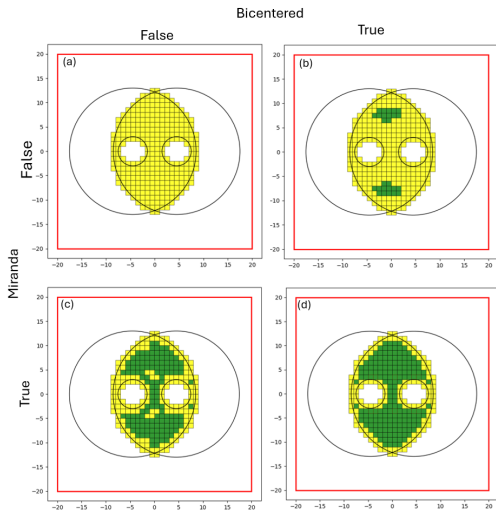
Экспериментальные результаты. Робот RRRRR (DexTar)



Экспериментальные результаты. Робот DexTar. Метод Кравчика

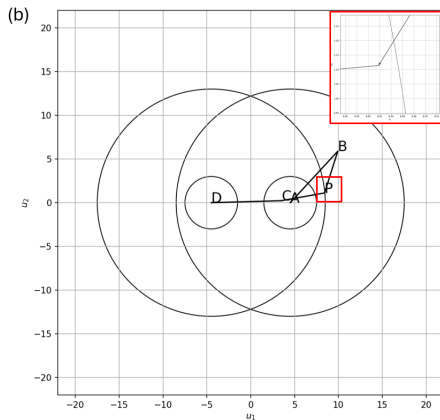
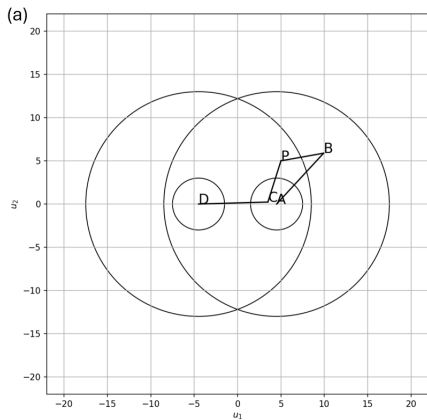


Экспериментальные результаты. Робот DexTar. Метод Хансена-Сенгупты

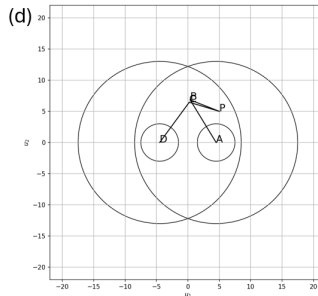
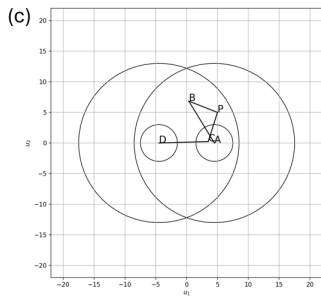
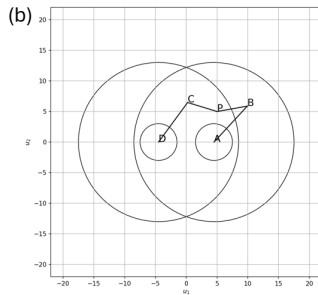
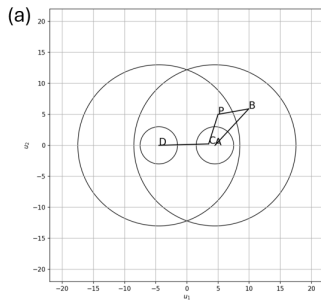


- Прямая (обратная) задача кинематики — нахождение выходных (входных) параметров по заданным входным (выходным) параметрам.
- Параметризуя исходную систему кинематических уравнений по входным или выходным параметрам, будет получена обычная система нелинейных уравнений.
- Решение такой параметризованной системы и будет являться решением прямой или обратной задач кинематики.

Решение прямой задачи кинематики



Решение обратной задачи кинематики



- Весь программный код написан на языке Python и основан на разработанной библиотеке интервальной арифметики ²
- Разработанные методы полностью автоматизированы: благодаря библиотеке SymPy все аналитические действия выполняются автоматически.
- Достаточно задать начальную систему нелинейных уравнений (или систему кинематических уравнений) и необходимые параметры.

²Маминов А. Д., Посыпкин М. А. РАЗРАБОТКА БИБЛИОТЕКИ ИНТЕРВАЛЬНОЙ АРИФМЕТИКИ НА ЯЗЫКЕ PYTHON // Системы компьютерной математики и их приложения. – 2020. – №. 21. – С. 166-171.

Содержание доклада

- 1 Введение
- 2 Интервальный анализ
- 3 Методы решения нелинейных систем уравнений
- 4 Экспериментальное исследование
- 5 Заключение**

Заключение. Интервальные методы.

- Разработаны интервальные методы для локализации корней систем нелинейных уравнений на основе теоремы Бауманна об оптимальных центрах (бицентрированные методы).
- Проведено экспериментальное исследование по сравнению скорости сходимости классических и бицентрированных методов, доказано преимущество бицентрированных методов в скорости сходимости.
- Разработан метод доказательства существования решения на основе интервальных методов для решения систем нелинейных уравнений, теоремы Брауэра и теоремы Миранды. На основе этого метода разработан автоматизированный подход для аппроксимации рабочей области роботов.

- Проведено экспериментальное исследование по применению разработанных методов для решения задачи прямой/обратной кинематики. Разработанный подход позволяет решать поставленные задачи без каких-либо дополнительных аналитических преобразований.
- Проведено экспериментальное исследование эффективности применения разработанных подходов для решения задачи аппроксимации рабочей области. Классические варианты методов не всегда могут точно определять рабочую область, однако применение разработанных модификаций позволяет для всех тестовых систем находить точную аппроксимацию рабочей области.

- Разработанные методы используют схему branch-and-prune и с ростом размерности количество интервальных векторов в очереди может стать слишком велико и не обрабатываться за допустимое время. Данная проблема может быть решена путём применения параллельных вычислений для ускорения работы программы.
- В данной работе были исследованы только планарные роботы-манипуляторы и, как можно увидеть из экспериментального исследования, только применение всех разработанных модификаций позволяет получить точную аппроксимацию. Применимость данного подхода к роботам более сложных структур (например трёхмерным роботам) требует дополнительного исследования.

Спасибо за внимание!

Контакты:

Почта: artem_maminov@mail.ru

Telegram: [@amaminov](https://t.me/amaminov)