

Оценивание области значений полинома
с относительной погрешностью ε на интервале
является NP-трудным при $\varepsilon \leq 1$ и
полиномиально сложным при $\varepsilon > 1$

В.Я. КРЕЙНОВИЧ, С.П. ШАРЫЙ

Университет Техаса в Эль-Пасо, Эль-Пасо, США
ФИЦ ИВТ и НГУ, Новосибирск, Россия

30 июня 2025 г.

Часто необходимо вычислять внешнюю оценку для области значений полинома от нескольких переменных $f(x_1, \dots, x_n)$ на заданных интервалах $[\underline{x}_1, \bar{x}_1], \dots, [\underline{x}_n, \bar{x}_n]$ с относительной погрешностью $\varepsilon > 0$.

Известно, что эта задача является NP-трудной для всех $\varepsilon < 1/8$, но не было известно, является ли задача NP-трудной для других ε .

В работе даётся полный ответ на этот вопрос: мы доказываем, что рассматриваемая задача является NP-трудной для всех $\varepsilon \leq 1$ и полиномиально разрешима для всех $\varepsilon > 1$.

Ключевые слова

Интервал, полином, область значений, NP-трудная задача, полиномиально сложная задача, теорема Гаганова

Формулировка задачи

Во многих практических ситуациях нас интересуют значения величин, которые очень трудно или даже невозможно измерять напрямую.

Например, желательно знать температуру воздуха в какой-то необитаемой точке Земли или расстояние до далёкой звезды.

Единственным способом оценивания значений таких величин y являются *косвенные измерения*, когда измеряют более доступные величины $x_1, \dots, x_n$, связанные с y какими-то известными соотношениями

$$y = f(x_1, \dots, x_n),$$

и затем используют результаты измерений $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$ для нахождения оценки $\tilde{y} = f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$.

Вычисление таких оценок

является важным частным случаем обработки данных.

Популярность алгебраических полиномов

В цифровых компьютерах единственными операциями, которые поддерживаются на аппаратном уровне, являются арифметические операции — сложение, вычитание, умножение и деление. Из них деление требует наибольшего времени, так как обычно сводится к нескольким умножениям, совершенно аналогично ручному делению.

Как следствие, для ускорения вычислений программисты стараются минимизировать количество используемых делений, или даже вовсе избегать их, если это возможно. Например, в большинстве компиляторов специальные функции вроде экспоненты $\exp(x)$ или синуса $\sin(x)$ вычисляются с помощью полиномиальных формул, в простейшем случае на основе частичных сумм их рядов Тейлора.

Далее, говоря, что задан полином, будем иметь в виду, что задан алгоритм, который начинается с переменных и констант и состоит из конечной последовательности сложений, вычитаний и умножений.

Необходимость учёта неопределённостей

Измерения не бывают абсолютно точными. Иногда бывает известным вероятностное распределение погрешности измерений $\Delta x := \tilde{x} - x$.

Это распределение обычно определяется путём сопоставления результатов $\tilde{x}$ измерений интересующей нас величины с помощью тестируемого измерительного инструмента и результатов $\tilde{x}_{\text{st}}$ существенно более точного (сертифицированного) инструмента, со значительно меньшей погрешностью измерений, которую можно игнорировать в сравнении с погрешностью тестируемого инструмента.

В этом случае мы берём разность $\tilde{x} - \tilde{x}_{\text{st}}$ между двумя измеренными результатами, $\tilde{x}$ и $\tilde{x}_{\text{st}}$, как хорошее приближение к погрешности измерения $\tilde{x} - x$.

После ряда таких сравнений получаем гистограмму, основываясь на которой можем оценить и вероятностное распределение погрешности.

Интервальное описание неопределённостей

Но существует два важных класса практических ситуаций,
в которых у нас нет такого вероятностного распределения.

1) Один из них относится к случаю высокоточных и самых современных на данный момент измерений, когда используемый измерительный прибор является лучшим из имеющихся, так что не существует ещё более точного прибора для сравнения.

Например, при сверхточных измерениях в фундаментальной науке.

Интервальное описание неопределённостей

Но существует два важных класса практических ситуаций,
в которых у нас нет такого вероятностного распределения.

1) Один из них относится к случаю высокоточных и самых современных на данный момент измерений, когда используемый измерительный прибор является лучшим из имеющихся, так что не существует ещё более точного прибора для сравнения.

Например, при сверхточных измерениях в фундаментальной науке.

Это часто происходит с измерениями, проводимыми нефтяными компаниями, для которых использование дорогих современных приборов оправдано, поскольку позволяет им снизить риск ещё больших расходов на геологоразведку, которые могут последовать из-за ошибочного определения местонахождения месторождений.

Интервальное описание неопределённостей

2) Другой пример — измерения в заводских условиях.

В принципе, можно использовать описанную выше процедуру построения вероятностного распределения для калибровки каждого датчика, но, хотя большинство датчиков дешёвы, их калибровка всё равно дорога.

В целом, калибровка всех датчиков экономически нецелесообразна.

3) Другие ситуации —



Баженов А.Н., Жилин С.И., Кумков С.И., Шарый С.П.
Обработка и анализ интервальных данных. — Москва-Ижевск:
Институт компьютерных исследований, 2024.

Интервальное описание неопределённостей

Во всех этих случаях единственная информация, которой располагаем о погрешности измерения, — это верхняя граница Δ абсолютного значения погрешности: $|\Delta x| \leq \Delta$.

Мы обязательно имеем её, так как иначе, если мы не знаем даже эту верхнюю границу, разница между результатом измерения $\tilde{x}$ и истинным значением x может быть сколь угодно большой.

Тогда по итогу у нас не будет никаких границ истинного значения.

Фактически, это было бы не измерением, а скорее дикой догадкой.

Рассматриваемая в работе модель измерений, соответствует ситуации когда всё, что мы узнаём после их выполнения, — это верхние границы Δ_i соответствующих погрешностей измерений $\Delta x_i := \tilde{x}_i - x_i$.

Необходимость интервальных вычислений

Равносильное описание: после измерения каждой величины x_i известно лишь то, что она принадлежит интервалу $[\underline{x}_i, \bar{x}_i]$, где обозначено $\underline{x}_i := \tilde{x}_i - \Delta_i$ и $\bar{x}_i := \tilde{x}_i + \Delta_i$.

Об интересующей нас величине $y = f(x_1, \dots, x_n)$ мы знаем лишь её принадлежность области значений отображения f

$$[\underline{y}, \bar{y}] = \{ f(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in [\underline{x}_i, \bar{x}_i] \text{ для всех } i \}$$

при условии, что f непрерывна.

Эту область значений часто обозначают $f([\underline{x}_1, \bar{x}_1], \dots, [\underline{x}_n, \bar{x}_n])$.

Вычисление этой области значений для заданной функции $f(x_1, \dots, x_n)$ и интервалам её области определения является одной из основных целей *интервальных вычислений*.

Насколько трудны интервальные вычисления?

Для простейших арифметических операций

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \quad f(x_1, x_2) = x_1 - x_2, \quad f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$$

существуют явные формулы для соответствующих областей значений:

$$[\underline{x}_1, \bar{x}_1] + [\underline{x}_2, \bar{x}_2] = [\underline{x}_1 + \underline{x}_2, \bar{x}_1 + \bar{x}_2],$$

$$[\underline{x}_1, \bar{x}_1] - [\underline{x}_2, \bar{x}_2] = [\underline{x}_1 - \bar{x}_2, \bar{x}_1 - \underline{x}_2],$$

$$[\underline{x}_1, \bar{x}_1] \cdot [\underline{x}_2, \bar{x}_2] = \left[\min\{\underline{x}_1 \underline{x}_2, \underline{x}_1 \bar{x}_2, \bar{x}_1 \underline{x}_2, \bar{x}_1 \bar{x}_2\}, \right. \\ \left. \max\{\underline{x}_1 \underline{x}_2, \underline{x}_1 \bar{x}_2, \bar{x}_1 \underline{x}_2, \bar{x}_1 \bar{x}_2\} \right].$$

Эти формулы, дополненные ещё делением,
известны как операции *интервальной арифметики*.

Для более сложных функций задача более трудна. В частности, даже для алгебраических полиномов $f(x_1, \dots, x_n)$ вычисление точных границ $\underline{y}$ и $\bar{y}$ для области значений является NP-трудным.

При условии $P \neq NP$ (в чём убеждены большинство специалистов по вычислениям) не существует полиномиально сложных алгоритмов, которые решали бы все частные случаи рассматриваемой задачи.

Результат впервые доказан А.А. Гагановым в 1981 году:



Гаганов А.А. О сложности вычисления интервала значений полинома от многих переменных. Дипломная работа. – Ленинград: Ленинградский госуниверситет, математико-механический факультет, 1981.



Гаганов А.А. О сложности вычисления интервала значений полинома от многих переменных // Кибернетика. – 1985. – №4. – С. 6–8.

О СЛОЖНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕРВАЛА ЗНАЧЕНИЙ ПОЛИНОМА ОТ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В последние годы в вычислительной математике широкое распространение получили методы интервального анализа, в основе которых лежит идея двусторонней аппроксимации аргументов и областей значений функций.

В данной статье рассматривается сложность вычисления области значений полинома от многих переменных, когда его аргументы изменяются в пределах некоторых интервалов. Показано, что задача вычисления интервала значений полинома как с заданной абсолютной погрешностью, так и с заданной относительной погрешностью является NP - и NP^c -трудной (полином с рациональными коэффициентами задается термом с функциональными символами сложения и умножения).

Некоторые методы решения данной задачи для рациональных функций приведены в [1]. Отметим, что все они требуют в общем случае вычисления значений функции в экспоненциальном по числу переменных множестве точек. Разбивая область определения полинома на подобласти [1, п. 2.2] и заменяя вычисление естественного интервального расширения полинома вычислением граничных функций [2], можно свести данную задачу к паре переборных задач, одна из которых лежит в $NP_{\max}$, а другая — в NP .

Сложность полиномов, по-видимому, не приведет к полиномиальным алгоритмам.

Полученный результат показывает, что при разработке практических алгоритмов и программ для нахождения области значений функций необходимо использовать дополнительные упрощающие предположения (например, знакопостоянство частных производных). Этот результат также может служить некоторым аргументом в пользу общего подхода, принятого в интервальном анализе, где разрабатывают быстрые алгоритмы для нахождения интервалов, гарантированно содержащих области значения функции, но при этом данные интервалы не обеспечивают какой-либо заданной точности, а просто удовлетворяют некоторому условию наибольшей суженности [2].

Определения

Рассмотрим полином $p(x)$ с рациональными коэффициентами от n вещественных переменных $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, заданный в виде арифметического выражения (формулы). Пусть аргументы полинома изменяются в интервалах $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ с рациональными границами. Обозначим через $B(X)$ интервал значений полинома $p(x)$.

А.А. Гаганов рассмотрел постановку задачи, в которой концы $\underline{x}_i$ и $\overline{x}_i$ всех заданных интервалов являются рациональными числами, и все константы, используемые при вычислении полиномов (коэффициенты и т. п.), также рациональны.

Это требование является стандартным условием
в теоретических исследованиях по сложности вычислений.

А.А. Гаганов рассмотрел постановку задачи, в которой концы $\underline{x}_i$ и $\overline{x}_i$ всех заданных интервалов являются рациональными числами, и все константы, используемые при вычислении полиномов (коэффициенты и т. п.), также рациональны.

Это требование является стандартным условием
в теоретических исследованиях по сложности вычислений.

Оно вызвано необходимостью того, чтобы эти числа имели конечную длину кодировки, т. е. конечную сложность своего описания, так как именно это позволяет говорить о сложности алгоритма вообще. Сложность представления иррациональных чисел бесконечна.

На практике рациональный тип входных данных не является большим ограничением, так как любое вещественное число может быть сколь угодно точно приближено рациональными, а реальные измерительные процессы, как правило, дают рациональные результаты.



Википедия
Свободная энциклопедия

- [Заглавная страница](#)
- [Содержание](#)
- [Избранные статьи](#)
- [Случайная статья](#)
- [Текущие события](#)
- [Пожертвовать](#)

Участие

- [Сообщить об ошибке](#)
- [Как править статьи](#)
- [Сообщество](#)
- [Форум](#)
- [Справка](#)
- [Свежие правки](#)
- [Новые страницы](#)
- [Служебные страницы](#)

Инструменты

- [Ссылки сюда](#)
- [Связанные правки](#)
- [Постоянная ссылка](#)
- [Сведения о странице](#)
- [Цитировать страницу](#)
- [Получить короткий URL](#)
- [Скачать QR-код](#)
- [Внешний вид](#)

W Матиясевич, Юрий Влад X +

← → ↻

 [ru.wikipedia.org/wiki/Матиясевич%2C Юрий Владимирович](https://ru.wikipedia.org/wiki/Матиясевич%2C_Юрий_Владимирович)

110%



 Вы не представились системе [Обсуждение](#) [Вклад](#) [Создать учётную запись](#) [Войти](#)

Статья Обсуждение

[Читать](#)

Правит

[Править код](#)

История

Искать в Википедии



Матиясевич, Юрий Владимирович

Материал из Википедии — свободной энциклопедии

[\[править код \]](#)

В Википедии есть статьи о других людях с фамилией **Матиясевич**.

Юрий Владимирович Матиясевич (род. 2 марта 1947, Ленинград) — советский и российский математик, исследователь Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН, член экспертной комиссии РСОШ по математике, академик Российской академии наук, доктор физико-математических наук. Внёс существенный вклад в теорию вычислимости, завершив решение десятой проблемы Гильберта.

Содержание [\[скрыть\]](#)

- 1 Биография
- 2 Основные научные результаты
- 3 Премии и награды
- 4 Библиография
 - 4.1 Книга
 - 4.2 Статьи
- 5 Примечания
- 6 Литература
- 7 Ссылки

Биография [править | править код]

Юрий Матиясевич родился в Ленинграде 2 марта 1947 года. Первые несколько классов учился в школе № 255 у Софьи Григорьевны Генерсон, благодаря которой заинтересовался математикой. С 1961 года начал принимать участие во всероссийских олимпиадах. В 1962–1963 годах учился в **физико-математической школе № 239** Ленинграда. Также с 7 по 9 класс занимался в математическом кружке Ленинградского дворца пионеров. В 1963–1964 годах закончил 10-й

**Юрий Владимирович
Матиясевич**



Во время проведения JASS 08

Имя при
рождении

Юрий
Владимирович
Матиясевич

Дата рождения

2 марта 1947
(78 лет)

Первое Интервальное совещание — Красноярск, 1984



- Матиясевич Ю. В. Вещественные числа и ЭВМ // Кибернетика и вычисл. техника. – 1986. – Вып. 2. – С. 104–133.
- Matijasevich, Y.V. A posteriori interval analysis. In: Caviness, B.F. (eds) EUROCAL'85. EUROCAL 1985. Lecture Notes in Computer Science, vol 204. Springer, Berlin, Heidelberg, 1985.
- Matijasevich Yu. A posteriori version of interval analysis // Topics in the Theoretical Basis and Appl. of Comp. Sci. M. Arat'ó, I. K'atai, L. Varga (eds.) / Proc. Fourth Hung. Computer Sci. Conf. Budapest: Acad. Kiado, 1986. – P. 339–349.
- Мусаев Э.А. Расширение апостериорно-интервального анализа на случай произвольных программ и его опытная реализация: дис. ... канд. физ.-мат. наук : 05.13.16 / АН СССР. Ленингр. ин-т информатики и автоматизации. – Ленинград, 1988.

Внешняя интервальная оценка

Так как вычисление точной области значений возможно не всегда, естественная идея состоит в том, чтобы найти её *внешнюю оценку*, т. е. интервал $[\underline{Y}, \overline{Y}]$, который содержит искомую область значений:

$$[\underline{y}, \overline{y}] \subseteq [\underline{Y}, \overline{Y}].$$

Например, если для управляемого температурой процесса хотим гарантировать, что температура y всегда находится в желаемом диапазоне $[\underline{y}_{\text{des}}, \overline{y}_{\text{des}}]$, то нужно обеспечить включение всей области значений процесса в желаемый диапазон.

Тогда будет гарантироваться, что все возможные значения y лежат в требуемом диапазоне.

Внешняя интервальная оценка

Естественно, хотелось бы найти эту внешнюю оценку настолько близкой к точной области значений, насколько это возможно.

Но именно об этом — отрицательные результаты А.А. Гаганова.

Для случая абсолютной погрешности приближения он доказал, что при любом $\varepsilon > 0$ задача вычисления внешней оценки, для которой $|\underline{Y} - \underline{y}| \leq \varepsilon$ и $|\overline{Y} - \overline{y}| \leq \varepsilon$, является NP-трудной.

Для случая относительной погрешности он доказал, что при любом $\varepsilon \in]0, 1/8[$ задача вычисления внешней оценки, для которой

$$\underline{Y} - \varepsilon \cdot |\underline{Y}| \leq \underline{y} \leq \underline{Y} + \varepsilon \cdot |\underline{Y}| \quad \text{и} \quad \overline{Y} - \varepsilon \cdot |\overline{Y}| \leq \overline{y} \leq \overline{Y} + \varepsilon \cdot |\overline{Y}|,$$

также является NP-трудной.

Результаты

Теорема 1. Для любого $\varepsilon > 0$ задача $P^{+\varepsilon}(X)$ NP -трудная.

Теорема 2. Для $0 < \varepsilon < 1/8$ задача $P^{\varepsilon}(X)$ NP -трудная.

Теоремы доказываются с помощью сведения 3-КНФ $\leq_{pol} P^{\varepsilon}(X)$. Здесь 3-КНФ — задача о выполнимости булевой формулы в конъюнктивной нормальной форме, в которой каждая дизъюнкция содержит не более трех членов, $\leq_{pol}$ — полиномиальная сводимость, а $P^{\varepsilon}(X)$ — любая из рассматриваемых задач.

Задача 3 — КНФ является NP -полной [4].

Рассмотрим пропозициональную формулу $f(q)$ от n переменных $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ в 3-КНФ

$$f = f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_k. \quad (4)$$

Будем кодировать формулу f способом, аналогичным кодированию полинома. Построим по формуле $f(q)$ полином $p(x)$. Сначала перейдем к базису $\{\neg, \wedge\}$, используя тождество

$$q_1 \vee q_2 \equiv \neg(\neg q_1 \wedge \neg q_2) \quad (5)$$

и снимая двойные отрицания, а затем поставим в соответствие логическим переменным и операциям арифметические:

$$q_i \rightarrow x_i, \quad \neg q_i \rightarrow (1 - x_i), \quad q_i \wedge q_j \rightarrow x_i x_j. \quad (6)$$

Дизъюнкция, состоящая из одной переменной без отрицания, преобразуем специальным образом:

$$q_i \rightarrow (1 - (1 - x_i)). \quad (7)$$

Приведем пример построения полинома:

Булеву вектору $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ поставим во взаимно однозначное соответствие 0—1 вектор $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ таким образом, чтобы

$$\alpha_i = \text{true} \Leftrightarrow \beta_i = 1, \quad i = \overline{1, n}. \quad (11)$$

Докажем две леммы о свойствах построенного полинома.

Лемма 1. Пусть f — пропозициональная формула в 3-КНФ и p — построенный по правилам (5)—(7) полином, тогда:

- 1) $\forall x (x \in [0, 1] \Rightarrow 0 \leq p(x) \leq 1)$;
- 2) если α — булев вектор, в β — поставленный ему в соответствие 0—1 вектор, то $f(\alpha) = \text{true} \Rightarrow p(\beta) = 1$, $f(\alpha) = \text{false} \Rightarrow p(\beta) = 0$;
- 3) если f невыполнима, то $\forall x (x \in [0, 1]^n \Rightarrow p(x) \leq 7/8)$.

Доказательство 1. Возьмем $x \in [0, 1]^n$, тогда $0 \leq y_{ij}(x) \leq 1$, $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, 3}$, и из (10) следует, что $0 \leq p_i(x) \leq 1$, $i = \overline{1, k}$, поэтому $0 \leq p(x) \leq 1$.

2. Докажем, справедливость импликации $f(\alpha) = \text{true} \Rightarrow p(\beta) = 1$.

Пусть $f(\alpha) = \text{true}$, тогда $f_i(\alpha) = \text{true}$, $i = \overline{1, k}$, и в каждый дизъюнкт f_i входит по крайней мере один литерал r_{ij} такой, что $r_{ij}(\alpha) = \text{true}$. Если $r_{ij}(\alpha) = \alpha_i$, то $\alpha_i = \text{true}$ и по (9) $y_{ij}(\beta) = (1 - \beta_i)$. Так как $\alpha_i = \text{true} \Rightarrow \beta_i = 1$, то $y_{ij}(\beta) = 0$. Случай $r_{ij}(\alpha) = \neg \alpha_i$ разбирается аналогично. Таким образом, справедливо $r_{ij}(\alpha) = \text{true} \Rightarrow y_{ij}(\beta) = 0$, поэтому в каждый полином p_i входит по крайней мере один множитель y_{ij} такой, что $y_{ij}(\beta) = 0$. Отсюда $p_i(\beta) = 0$, $i = \overline{1, k}$, и $p(\beta) = 1$.

Импликация $f(\alpha) = \text{false} \Rightarrow p(\beta) = 0$ доказывается сходным образом.

Постановка задачи и итоги работы

Постановка задачи

Естественный вопрос по поводу результата А.А. Гаганова заключается в том, что произойдёт при вычислениях с относительной погрешностью $\varepsilon \geq 1/8$?

Остаётся ли получающаяся задача всё ещё NP-трудной
или же она полиномиально разрешима?

Что сделано в этой работе

Даётся исчерпывающий ответ на сформулированный выше вопрос.

Показано, что задача оценивания области значений полинома является NP-трудной для всех $\varepsilon \leq 1$
и полиномиально разрешима для всех $\varepsilon > 1$.

Предложение

Задача вычисления внешней интервальной оценки области значений алгебраического полинома $f(x_1, \dots, x_n)$ на интервалах $[\underline{x}_i, \bar{x}_i] \ni x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, с заданной относительной погрешностью $\varepsilon > 0$ является:

- NP-трудной для всех $\varepsilon \leq 1$ и*
- полиномиально разрешимой для всех $\varepsilon > 1$.*

- Как можно будет увидеть из следующего ниже доказательства, обоснование NP-трудности не требует, чтобы оценка $[\underline{Y}, \bar{Y}]$ была именно внешней оценкой области значений.

Поэтому даже для $\varepsilon < 1/8$ наш результат является более сильным, чем исходная теорема А.А. Гаганова: если хотим найти просто приближение к области значений, не обязательно содержащее эту область значений, задача всё равно NP-трудна.

- Как можно будет увидеть из следующего ниже доказательства, обоснование NP-трудности не требует, чтобы оценка $[\underline{Y}, \bar{Y}]$ была именно внешней оценкой области значений.

Поэтому даже для $\varepsilon < 1/8$ наш результат является более сильным, чем исходная теорема А.А. Гаганова: если хотим найти просто приближение к области значений, не обязательно содержащее эту область значений, задача всё равно NP-трудна.

- Доказательство ниже носит общий характер и после несложной адаптации его можно применить к любому классу функций, который замкнут относительно прибавления константы.

Во всех таких случаях задача вычисления внешней оценки области значений с относительной погрешностью $\varepsilon > 0$ является NP-трудной при $\varepsilon \leq 1$ и полиномиально разрешимой при $\varepsilon > 1$.

1°. Докажем сначала, что наша задача является NP-трудной для всех $\varepsilon \leq 1$.

1.1°. Как обычно доказывается NP-трудность?

Стандартный способ доказательства NP-трудности — показать, что одна из известных NP-трудных задач может быть сведена к рассматриваемой задаче; см., к примеру, книги

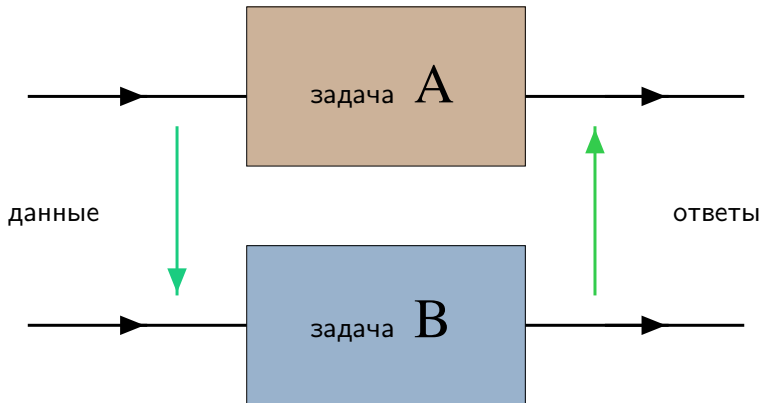


Гэри М.Р., Джонсон Д.С. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – Москва: Мир, 1982.



Kreinovich V., Lakeyev A., Rohn J., Kahl P. Computational complexity and feasibility of data processing and interval computations. – Dordrecht: Kluwer, 1998.

Задача А сводится к задаче В



Полиномиальный алгоритм — алгоритм, сложность выполнения которого ограничена полиномом от размера входных данных задачи.

Класс P — задачи, разрешимые за полиномиальное время на обычном вычислительном устройстве (машине Тьюринга, например).

Класс NP — задачи, разрешимые за полиномиальное время на недетерминированном вычислительном устройстве.

Центральным в теории сводимости является вопрос $P \neq NP$?

В классе NP выявлены универсальные (или NP -полные) задачи, к которым полиномиально сводится любая задача из NP . Эти универсальные задачи как бы дают «эталон сложности».

Немного более слабое свойство — NP -трудность.

Суть NP-трудности



“Я не могу найти эффективного алгоритма, но этого не может сделать и никто из этих знаменитостей”.

Сводимость задачи 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ

В своём доказательстве в качестве сводимой задачи А.А. Гаганов использовал известную задачу 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ (называемую также задачей о выполнимости 3-КНФ формулы или 3-SAT).

В этой задаче на вход подаётся логическая 3-КНФ формула, т. е. формула вида $C_1 \& \dots \& C_m$, где каждый C_j (называемый *клаузой*) есть дизъюнкция не более трёх членов, имея вид $a \vee b \vee c$ или $a \vee b$.

Здесь a, b, c — *литералы*,

т. е. либо пропозициональные переменные v_i , либо их отрицания $\neg v_i$.

Требуется определить, является ли данная формула *выполнимой*, т. е. существует ли набор значений переменных $v_1, \dots, v_n$, который делает формулу истинной.

Задача 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ

Пример

Формула

$$(v_1 \vee v_2) \& (\neg v_1 \vee \neg v_2)$$

становится истинной, когда v_1 истинно, а v_2 ложно.

Формула

$$(v_1 \vee v_2) \& (\neg v_1 \vee \neg v_2) \& (\neg v_1 \vee v_2) \& (v_1 \vee \neg v_2)$$

никогда не является истинной.

1.2°. Как А.А. Гаганов доказал свой результат?

Он сопоставил каждой 3-КНФ формуле F некоторый полином $f_F(x_1, \dots, x_n)$, для которого верхняя граница $\bar{y}_F$ его области значений на интервалах

$$[\underline{x}_1, \bar{x}_1] = \dots = [\underline{x}_n, \bar{x}_n] = [0, 1]$$

обладает следующим свойством:

- ▶ если исходная формула F выполнима, то $\bar{y}_F = 1$,
- ▶ если исходная формула F невыполнима, то $\bar{y}_F \leq 7/8$.

Таким образом, для внешней оценки $[\underline{Y}_F, \overline{Y}_F]$, которая приближает область значений полинома f_F с относительной погрешностью ε , такой что $\varepsilon < 1/8 = 1 - 7/8$, справедливо следующее:

- ▶ исходная формула F выполнима, если $\overline{Y}_F \geq 1$,
- ▶ исходная формула F невыполнима, если $\overline{Y}_F < 1$.

В целом, получаем сведение задачи 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ:

чтобы проверить выполнимость 3-КНФ формулы F , достаточно

- вычислить $\overline{Y}_F$ с относительной погрешностью $\varepsilon < 1/8$ для соответствующего полинома $f_F(x_1, \dots, x_n)$ и затем
- сравнить найденное значение $\overline{Y}_F$ с 1.

Конструкция А.А. Гаганова: краткое описание

Каждой пропозициональной переменной v_i , т. е. каждой переменной, которая может принимать два возможных значения — “ложь” (“0”) и “истина” (“1”), мы сопоставляем вещественную переменную x_i .

Фактически, мы организуем полином первой степени

$$f_{v_i}(x_1, \dots, x_n) = x_i,$$

который принимает значения из интервала $[0, 1]$.

Каждому отрицанию $\neg v_i$ сопоставляем полином первой степени

$$f_{\neg v_i}(x_1, \dots, x_n) = 1 - x_i.$$

Каждой клаузе $C_j = a \vee b$ мы сопоставляем полином

$$f_{C_j}(x_1, \dots, x_n) = 1 - (1 - f_a(x_1, \dots, x_n)) \cdot (1 - f_b(x_1, \dots, x_n)).$$

Каждой клаузе $C_j = a \vee b \vee c$ мы сопоставляем полином

$$\begin{aligned} f_{C_j}(x_1, \dots, x_n) &= \\ &= 1 - (1 - f_a(x_1, \dots, x_n)) \cdot (1 - f_b(x_1, \dots, x_n)) \cdot (1 - f_c(x_1, \dots, x_n)). \end{aligned}$$

Наконец, формуле $F = C_1 \& \dots \& C_m$ мы сопоставляем полином

$$f_F(x_1, \dots, x_n) = f_{C_1}(x_1, \dots, x_n) \cdot \dots \cdot f_{C_m}(x_1, \dots, x_n).$$

Индукцией по длине описанной конструкции проверяется, что если $x_i \in [0, 1]$, то все эти полиномы принимают значения также в $[0, 1]$.

Действительно, всё, что мы делаем при образовании полиномов, — выполнение операций $1 - a$ и $a \cdot b$, а также обеих этих операций, в применении к значениям из $[0, 1]$ приводят к значениям также из $[0, 1]$.

Индукцией по длине описанной конструкции проверяется, что если $x_i \in [0, 1]$, то все эти полиномы принимают значения также в $[0, 1]$.

Действительно, всё, что мы делаем при образовании полиномов, — выполнение операций $1 - a$ и $a \cdot b$, а также обеих этих операций, в применении к значениям из $[0, 1]$ приводят к значениям также из $[0, 1]$.

Можно также проверить, что для $x_i \in \{0, 1\}$ полином $f_F(x_1, \dots, x_n)$ принимает истинностные значения (“0” или “1”) формулы F .

Как следствие, если формула F выполнима, то тогда всегда имеем $f_F(x_1, \dots, x_n) \leq 1$, причём $f_F(x_1, \dots, x_n) = 1$ для кортежа значений переменных $(x_1, \dots, x_n)$, дающего формуле истинное значение.

Таким образом, в этом случае в самом деле $\bar{y}_F = 1$.

Что произойдёт, если формула F не является выполнимой?

В этом случае для любых $x_i \in [0, 1]$, $i = 1, 2, \dots, n$, всегда

$$f_F(x_1, \dots, x_n) \leq 7/8,$$

так что $\bar{y}_F \leq 7/8$.

В самом деле, для каждого набора $x_i \in [0, 1]$ можем рассмотреть кортеж $(v_1, \dots, v_n)$, состоящий из значений 0 или 1, которые наиболее близки к значениям x_i :

- если $x_i \leq 0.5$, то берём $v_i = 0$,
- если $x_i > 0.5$, то берём $v_i = 1$.

В обоих случаях $|x_i - v_i| \leq 0.5$.

Аналогично для отрицаний: $|(1 - x_i) - (1 - v_i)| \leq 0.5$. Следовательно, для всех литералов

$$|f_a(x_1, \dots, x_n) - a| \leq 0.5. \quad (1)$$

Так как F невыполнима, она не является истинной для некоторых значений v_i . Поэтому как минимум одна клауза C_j является ложной.

Если клауза имеет вид $a \vee b \vee c$, это означает, что $a = b = c = 0$.

Поэтому в силу (1)

$$f_a(x_1, \dots, x_n) \leq 0.5, \quad f_b(x_1, \dots, x_n) \leq 0.5, \quad f_c(x_1, \dots, x_n) \leq 0.5,$$

что влечёт

$$1 - f_a(x_1, \dots, x_n) \geq 0.5, \quad 1 - f_b(x_1, \dots, x_n) \geq 0.5, \quad 1 - f_c(x_1, \dots, x_n) \geq 0.5.$$

Следовательно,

$$(1 - f_a(x_1, \dots, x_n)) \cdot (1 - f_b(x_1, \dots, x_n)) \cdot (1 - f_c(x_1, \dots, x_n)) \geq 0.5^3 = 1/8$$

и

$$\begin{aligned} f_{C_j}(x_1, \dots, x_n) \\ &= 1 - (1 - f_a(x_1, \dots, x_n)) \cdot (1 - f_b(x_1, \dots, x_n)) \cdot (1 - f_c(x_1, \dots, x_n)) \\ &\leq 1 - 1/8 = 7/8. \end{aligned}$$

Если рассматриваемая клауза имеет вид $a \vee b$, это означает $a = b = 0$.

Поэтому в силу (1) получаем

$$f_a(x_1, \dots, x_n) \leq 0.5, \quad f_b(x_1, \dots, x_n) \leq 0.5.$$

Как следствие, $1 - f_a(x_1, \dots, x_n) \geq 0.5$ и $1 - f_b(x_1, \dots, x_n) \geq 0.5$, что влечёт

$$(1 - f_a(x_1, \dots, x_n)) \cdot (1 - f_b(x_1, \dots, x_n)) \geq 0.5 \cdot 0.5 = 1/4,$$

и

$$\begin{aligned} f_{C_j}(x_1, \dots, x_n) &= 1 - (1 - f_a(x_1, \dots, x_n)) \cdot (1 - f_b(x_1, \dots, x_n)) \\ &\leq 1 - 1/4 = 3/4 < 7/8. \end{aligned}$$

В обоих случаях $f_{C_j}(x_1, \dots, x_n) \leq 7/8$.

Для всех других клауз имеем

$$f_{C_k}(x_1, \dots, x_n) \leq 1.$$

Таким образом, произведение $f_F(x_1, \dots, x_n)$ всех значений

$$f_{C_1}(x_1, \dots, x_n), \dots, f_{C_m}(x_1, \dots, x_n)$$

тоже меньше или равно $7/8$.

Поскольку это верно для всех возможных комбинаций

значений $x_i \in [0, 1]$, $i = 1, 2, \dots, n$, то заключаем, что $\bar{y}_F \leq 7/8$.

Доказательство нашего результата

1.3°. В своём доказательстве А.А. Гаганов
использовал допущение о том, что $\varepsilon < 1/8$.

Мы исследуем более общий случай, когда требуется лишь $\varepsilon \leq 1$.

Доказательство нашего результата

1.3°. В своём доказательстве А.А. Гаганов

использовал допущение о том, что $\varepsilon < 1/8$.

Мы исследуем более общий случай, когда требуется лишь $\varepsilon \leq 1$.

Чтобы распространить доказательство А.А. Гаганова на этот случай, для каждой 3-КНФ формулы F вместо оригинального полинома Гаганова $f_F(x_1, \dots, x_n)$ рассмотрим модифицированный полином

$$f_{F-}(x_1, \dots, x_n) := f_F(x_1, \dots, x_n) - 15/16.$$

Область значений $[\underline{y}_{F-}, \overline{y}_{F-}]$ модифицированного полинома $f_{F-}(x_1, \dots, x_n)$ может быть получена из области значений исходного полинома $f_F(x_1, \dots, x_n)$ вычитанием числа $15/16$.

Специальная константа $15/16$ получается как

$$\frac{15}{16} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{7}{8} + 1 \right),$$

и она обеспечивает сдвиг области значений и её оценки,
который центрирует их относительно нуля.

«Сдвигая» на эту константу выводы пункта 1.2°, можем заключить:

- ▶ если исходная формула F выполнима, то $\bar{y}_{F-} = 1/16$,
- ▶ если исходная формула F невыполнима, то $\bar{y}_{F-} \leq -1/16$.

Кроме того, отметим отдельно, что $\bar{y}_{F-}$ не может равняться нулю.

По этой причине

- ◀ исходная формула F выполнима, если $\bar{y}_{F-} > 0$,
- ◀ исходная формула F невыполнима, если $\bar{y}_{F-} < 0$.

Обозначим $[\underline{Y}_{F-}, \overline{Y}_{F-}]$ внешнюю интервальную оценку области значений полинома $f_{F-}(x_1, \dots, x_n)$, т. е. $[\underline{Y}_{F-}, \overline{Y}_{F-}] \supseteq [\underline{y}_{F-}, \overline{y}_{F-}]$.

Тогда при $\varepsilon \leq 1$ в целом получаем:

- ▶ Если $\overline{Y}_{F-} \geq 0$, то по определению относительной погрешности

$$\overline{y}_{F-} \geq \overline{Y}_{F-} - \varepsilon \cdot |\overline{Y}_{F-}| = (1 - \varepsilon) \cdot \overline{Y}_{F-} \geq 0.$$

Следовательно, $\overline{y}_{F-} \geq 0$ и $\overline{y}_{F-} \neq 0$, и это означает, что исходная формула F выполнима.

- ▶ Если $\overline{Y}_{F-} < 0$, то по определению относительной погрешности

$$\overline{y}_{F-} \leq \overline{Y}_{F-} + \varepsilon \cdot |\overline{Y}_{F-}| = (1 - \varepsilon) \cdot \overline{Y}_{F-} \leq 0.$$

Следовательно, $\overline{y}_{F-} \leq 0$ и $\overline{y}_{F-} \neq 0$, и это означает, что исходная формула F не выполнима.

Таким образом, мы получили следующее сведение

задачи 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ к задаче оценивания области значений:

чтобы проверить выполнимость 3-КНФ формулы, достаточно

- вычислить $\overline{Y}_{F-}$ для соответствующего полинома $f_{F-}(x_1, \dots, x_n)$ и затем
- сравнить найденное значение $\overline{Y}_{F-}$ с 0.

2°. Докажем теперь, что наша задача

является полиномиально разрешимой для всех $\varepsilon > 1$.

Мы всегда можем найти за полиномиальное время внешнюю оценку области значений любого полинома $f(x_1, \dots, x_n)$. Например, можно подставить вместо аргументов полинома интервалы их изменения и заменить все арифметические операции операциями интервальной арифметики, т. е. взять *естественное интервальное расширение*.

2°. Докажем теперь, что наша задача

является полиномиально разрешимой для всех $\varepsilon > 1$.

Мы всегда можем найти за полиномиальное время внешнюю оценку области значений любого полинома $f(x_1, \dots, x_n)$. Например, можно подставить вместо аргументов полинома интервалы их изменения и заменить все арифметические операции операциями интервальной арифметики, т. е. взять *естественное интервальное расширение*.

Обозначим $[s_f^-, s_f^+]$ найденную внешнюю оценку области значений.

Для реальной области значений $[\underline{y}_f, \bar{y}_f]$ имеет место

$$s_f^- \leq \underline{y}_f \leq \bar{y}_f \leq s_f^+.$$

Обозначая $s_f := \max \{ |s_f^-|, |s_f^+| \}$, получим

$$-s_f \leq \underline{y}_f \leq \bar{y}_f \leq s_f. \quad (2)$$

2.1°. Рассмотрим сначала случай, когда $\varepsilon \geq 2$.

Покажем, что в этом случае внешняя оценка $[-s_f, s_f]$
является искомым приближением.

По определению относительной погрешности должны показать

$$s_f - \varepsilon \cdot s_f \leq \bar{y}_f \leq s_f + \varepsilon \cdot s_f \quad \text{и} \quad -s_f - \varepsilon \cdot s_f \leq \underline{y}_f \leq -s_f + \varepsilon \cdot s_f,$$

т. е., равносильно,

$$-(\varepsilon - 1) \cdot s_f \leq \bar{y}_f \leq (1 + \varepsilon) \cdot s_f \quad \text{и} \quad -(1 + \varepsilon) \cdot s_f \leq \underline{y}_f \leq s_f \cdot (\varepsilon - 1).$$

Для $\varepsilon \geq 2$ имеем $\varepsilon - 1 \geq 1$ и $1 + \varepsilon > 1$.

Следовательно, требуемые неравенства вытекают из формулы (2).

2.2°. Рассмотрим теперь случай, когда $1 < \varepsilon < 2$.

Покажем, что в этом случае интервал

$$[-S_f, S_f] := \left[-\frac{s_f}{\varepsilon - 1}, \frac{s_f}{\varepsilon - 1} \right]$$

является искомым интервалом внешней оценки.

2.2°. Рассмотрим теперь случай, когда $1 < \varepsilon < 2$.

Покажем, что в этом случае интервал

$$[-S_f, S_f] := \left[-\frac{s_f}{\varepsilon - 1}, \frac{s_f}{\varepsilon - 1} \right]$$

является искомым интервалом внешней оценки.

В самом деле, тогда $0 < \varepsilon - 1 < 1$, так что

$$s_f \leq \frac{s_f}{\varepsilon - 1}.$$

Следовательно, новый интервал содержит внешнюю оценку $[-s_f, s_f]$ и тоже является поэтому внешней оценкой.

По определению относительной погрешности мы должны показать

$$S_f - \varepsilon \cdot S_f \leq \bar{y}_f \leq S_f + \varepsilon \cdot S_f \quad \text{и} \quad -S_f - \varepsilon \cdot S_f \leq \underline{y}_f \leq -S_f + \varepsilon \cdot S_f,$$

что эквивалентно

$$-(\varepsilon - 1) \cdot S_f \leq \bar{y}_f \leq (1 + \varepsilon) \cdot S_f \quad \text{и} \quad -(1 + \varepsilon) \cdot S_f \leq \underline{y}_f \leq S_f \cdot (\varepsilon - 1).$$

Подставляя $S_f = \frac{s_f}{\varepsilon - 1}$ в эти неравенства, получаем

$$-s_f \leq \bar{y}_f \leq \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon - 1} \cdot s_f \quad \text{и} \quad -\frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon - 1} \cdot s_f \leq \underline{y}_f \leq s_f.$$

Поскольку

$$\frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon - 1} \geq 1,$$

искомые неравенства также следуют из формулы (2).

Оба случая доказаны. Предложение также полностью доказано.

Beyond Convex? Global Optimization Is Feasible Only for Convex Objective Functions: A Theorem

VLADIK KREINOVICH¹ and R. BAKER KEARFOTT²

¹*Department of Computer Science, University of Texas at El Paso, El Paso, TX 79968 (e-mail: vladik@utep.edu);* ²*Department of Mathematics, University of Louisiana, Lafayette, Louisiana 70504-1010 (e-mail: rbk@louisiana.edu)*

(Received 21 July 2004; accepted in revised form 8 August 2004)

Abstract. It is known that there are feasible algorithms for minimizing convex functions, and that for general functions, global minimization is a difficult (NP-hard) problem. It is reasonable to ask whether there exists a class of functions that is larger than the class of all convex functions for which we can still solve the corresponding minimization problems feasibly. In this paper, we prove, in essence, that no such more general class exists. In other words, we prove that global optimization is always feasible only for convex objective functions.

Key words: Computational complexity, Global optimization, Non-convexity

1. Introduction

It is well known that in general, global optimization is a difficult-to-solve problem. In particular, it is known that even the problem of minimizing an objective function $f(x_1, \dots, x_n)$ on a box (“hyper-rectangle”) $[x_1, \bar{x}_1] \times \dots \times [x_n, \bar{x}_n]$ is a problem of interest in interval computations (Taulin

Теорема Кирфотта–Крейновича

2. Definitions and the main result

In this paper, we consider continuous functions $f(x_1, \dots, x_n)$ from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}$ for different n .

DEFINITION. We say that a class of functions $\mathcal{F}$ is closed if it satisfies the following four conditions:

- $\mathcal{F}$ contains all linear functions;
- $\mathcal{F}$ is closed under addition, i.e., if $f \in F$ and $g \in F$, then $f + g \in F$;
- $\mathcal{F}$ is closed under multiplication by a positive constant, i.e., if $f \in F$ and $c > 0$, then $c \cdot f \in F$;
- $\mathcal{F}$ is closed under linear substitution: if whenever $f(x_1, \dots, x_k) \in F$ and c_{ik} are real numbers, we have
$$f(c_{10} + c_{11} \cdot x_1 + \dots + c_{1n} \cdot x_n, \dots, c_{k0} + c_{k1} \cdot x_1 + \dots + c_{kn} \cdot x_n) \in F.$$

It is easy to see that the class of all linear functions is closed, and that the class of all convex functions is closed.

By a *minimization problem*, we mean the following problem: given a function $f \in F$ and a box B , find the minimal value of the function f on the box B .

THEOREM 1. If a closed class $\mathcal{F}$ contains at least one non-convex function and at least one non-linear convex function, then for this class, the problem of finding the minimum of a given function $f \in F$ on a given box is NP-hard.

Спасибо за внимание!