Автоматика и Телемеханика, № 2, 2012

© 2012 г. **С.П. ШАРЫЙ, д-р физ.-мат. наук**
(Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск)

РАЗРЕШИМОСТЬ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И АНАЛИЗ ДАННЫХ С НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЯМИ[1]

Рассматривается задача о распознавании разрешимости (непустоты множества решений) интервальных систем линейных уравнений. Для её решения предложен метод, основанный на использовании так называемого распознающего функционала множества решений. В качестве приложения представлен новый подход к обработке данных с интервальными неопределённостями, который основан на безусловной максимизации распознающего функционала («метод максимума согласования»), описаны его содержательные интерпретации.

1. Введение

Предметом рассмотрения являются интервальные системы линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ) вида

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{ccccccccc} \boldsymbol{a}_{11}x_1 & + & \boldsymbol{a}_{12}x_2 & + & \ldots & + & \boldsymbol{a}_{1n}x_n & = & \boldsymbol{b}_1, \\ \boldsymbol{a}_{21}x_1 & + & \boldsymbol{a}_{22}x_2 & + & \ldots & + & \boldsymbol{a}_{2n}x_n & = & \boldsymbol{b}_2, \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{a}_{m1}x_1 & + & \boldsymbol{a}_{m2}x_2 & + & \ldots & + & \boldsymbol{a}_{mn}x_n & = & \boldsymbol{b}_m \end{array}\right.$$

с интервальными коэффициентами $\boldsymbol{a}_{ij}$ и свободными членами $\boldsymbol{b}_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, или, кратко,

$$(2)\qquad \boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b},$$

где $\boldsymbol{A} = (\,\boldsymbol{a}_{ij})$ — интервальная $(m \times n)$-матрица и $\boldsymbol{b} = (\,\boldsymbol{b}_i)$ — интервальный m-вектор. Системы (1)–(2) понимаем как семейства точечных линейных систем $Ax = b$ той же структуры с матрицами $A \in \boldsymbol{A}$ и векторами $b \in \boldsymbol{b}$.

Множеством решений интервальной линейной системы уравнений будем называть множество

$$(3)\qquad \varXi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \;=\; \bigl\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists\, A \in \boldsymbol{A})(\exists\, b \in \boldsymbol{b})(\, Ax = b\,) \,\bigr\},$$

образованное всевозможными решениями точечных систем $Ax = b$ с $A \in \boldsymbol{A}$ и $b \in \boldsymbol{b}$ [1–3]. По отношению к этому объекту используют также термин *объединённое множество решений*, поскольку интервальные уравнения могут иметь и другие множества решений [2,4]. Они не рассматриваются в статье, и потому называем (3) сокращённо «множество решений». Ниже обсуждается, как проверять пустоту или непустоту множества решений $\varXi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ и находить точку из него. В самой общей ситуации эти задачи являются NP-трудными [4, 5].

[1]Работа выполнена при поддержке гранта Президента России по поддержке ведущих научных школ (проект № НШ-6068.2010.9).

Система обозначений статьи следует неформальному международному стандарту на обозначения в интервальном анализе [6]. В частности, множество всех замкнутых интервалов вещественной оси обозначаем $\mathbb{IR}$, интервалы и интервальные величины обозначаются буквами жирного шрифта — $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \ldots, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$, тогда как неинтервальные (точечные) величины никак специально не выделяются. Подчёркивание $\underline{\boldsymbol{a}}$ и надчёркивание $\overline{\boldsymbol{a}}$ обозначают нижний и верхний концы интервала $\boldsymbol{a}$, так что $\boldsymbol{a} = [\underline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{a}}] = \{\, a \in \mathbb{R} \mid \underline{\boldsymbol{a}} \leqslant a \leqslant \overline{\boldsymbol{a}} \}$. Кроме того, понадобятся

$$\operatorname{mid} \boldsymbol{a} = \tfrac{1}{2}(\overline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{a}}) \ \text{— середина интервала,}$$

$$\operatorname{rad} \boldsymbol{a} = \tfrac{1}{2}(\overline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{a}}) \ \text{— радиус интервала,}$$

$$\langle \boldsymbol{a} \rangle = \begin{cases} \min\{\, |\overline{\boldsymbol{a}}|, |\underline{\boldsymbol{a}}| \,\}, & \text{если } 0 \notin \boldsymbol{a}, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad \text{— мигнитуда интервала, наименьшее расстояние точек интервала до нуля.}$$

Помимо множества вещественных интервалов посредством $\mathbb{IR}$ будем обозначать также *классическую интервальную арифметику* — алгебраическую систему, образованную интервалами вещественной оси с операциями сложения, вычитания, умножения и деления, определёнными «по представителям», т. е. в соответствии со следующим общим принципом:

$$\boldsymbol{a} \star \boldsymbol{b} = \{\, x \star y \mid x \in \boldsymbol{a},\, y \in \boldsymbol{b} \,\} \qquad \text{для} \quad \star \in \{\, +\,, -\,, \cdot\,, /\, \}.$$

Иными словами, результирующий интервал любой арифметической операции есть множество (также являющееся интервалом), образованное всевозможными результатами этой операции между элементами интервалов-операндов. Развёрнутые формулы для интервальных сложения, вычитания, умножения и деления выглядят следующим образом [1–3]:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} &= \left[\, \underline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{b}},\ \overline{\boldsymbol{a}} + \overline{\boldsymbol{b}} \,\right], \\
\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} &= \left[\, \underline{\boldsymbol{a}} - \overline{\boldsymbol{b}},\ \overline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{b}} \,\right], \\
\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &= \left[\, \min\{\underline{\boldsymbol{a}}\,\underline{\boldsymbol{b}}, \underline{\boldsymbol{a}}\,\overline{\boldsymbol{b}}, \overline{\boldsymbol{a}}\,\underline{\boldsymbol{b}}, \overline{\boldsymbol{a}}\,\overline{\boldsymbol{b}}\},\ \max\{\underline{\boldsymbol{a}}\,\underline{\boldsymbol{b}}, \underline{\boldsymbol{a}}\,\overline{\boldsymbol{b}}, \overline{\boldsymbol{a}}\,\underline{\boldsymbol{b}}, \overline{\boldsymbol{a}}\,\overline{\boldsymbol{b}}\} \,\right], \\
\boldsymbol{a} / \boldsymbol{b} &= \boldsymbol{a} \cdot \left[\, 1/\overline{\boldsymbol{b}},\ 1/\underline{\boldsymbol{b}} \,\right] \qquad \text{для} \ \ \boldsymbol{b} \not\ni 0.
\end{aligned}$$

Интервальный вектор определяется как вектор, т. е. столбец или строка, с интервальными компонентами. Его геометрическим образом является прямоугольный параллелепипед в $\mathbb{R}^n$ с рёбрами, параллельными координатным осям, который часто называют *брусом*. Аналогично, интервальная матрица — это прямоугольная таблица из интервалов, которая рассматривается как множество всевозможных точечных матриц с элементами из заданных интервалов. Для интервалов, интервальных векторов и матриц естественно определяются теоретико-множественные отношения принадлежности «$\in$» и включения «$\subseteq$». Арифметические операции между интервальными векторами и матрицами являются аналогами соответствующих операций для точечного случая. В частности, сумма двух интервальных векторов (или матриц) одинакового размера есть интервальный вектор (матрица) того же размера, образованный поэлементными суммами операндов. То же самое верно для разности интервальных векторов или матриц. Умножение скаляра на интервальный вектор (матрицу) равносильно умножению этого скаляра на каждый элемент вектора (матрицы).

2. Теория

2.1. Постановка задачи и её основные свойства

Будем говорить, что интервальная система уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ вида (1)–(2) является *разрешимой* (*совместной*), если существуют такие $A \in \boldsymbol{A}$ и $b \in \boldsymbol{b}$, что точечная система уравнений $Ax = b$ имеет решение. Подобную разрешимость нередко называют также «слабой разрешимостью» [4]. В статье не рассматриваются другие типы разрешимости интервальных систем уравнений, и потому без ущерба для понимания будем опускать прилагательное «слабая». Нетрудно видеть, что разрешимость интервальной системы уравнений равносильна непустоте её множества решений $\Xi(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$. Впервые рассматриваемая постановка задачи была сформулирована (хотя и без использования интервального языка) в [7], где исследование разрешимости сведено к решению системы нелинейных неравенств, названных впоследствии «неравенствами Оеттли-Прагера».

Универсальный метод решения задачи распознавания разрешимости может быть основан на том факте, что пересечения множества решений ИСЛАУ с каждым из ортантов (координатных углов) пространства $\mathbb{R}^n$ являются выпуклыми полиэдральными множествами, для которых уравнения граничных гиперплоскостей легко выписываются по матрице и правой части ИСЛАУ [2]. Как следствие, пустота или непустота пересечения $\Xi(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ с каждым из ортантов $\mathbb{R}^n$ может быть выявлена путём решения некоторой системы линейных неравенств, например, с помощью хорошо разработанных методов линейного программирования. В целом же, распознавание этим методом непустоты множества решений интервальной линейной $(m\times n)$-системы уравнений и нахождение точки из него потребуют не более чем 2^n решений систем линейных неравенств размера $2m+n$. Этот результат не может быть принципиально улучшен, что отражает отмеченную во введении труднорешаемость рассматриваемой задачи, т. е. её NP-трудность [4, 5, 8]. Ясно также, что описанный метод имеет пассивный характер и практичен лишь при малых размерностях задачи.

Другой подход к исследованию разрешимости интервальной системы линейных уравнений, опирающийся на использование неравенств Оеттли-Прагера из [7], описан в [4] (см. также [9]), но он имеет совершенно ту же экспоненциальную трудоёмкость, пропорциональную 2^n, и также пассивен.

2.2. Метод распознающего функционала

Основой предлагаемого подхода является следующий результат.

Предложение 1. Пусть $\boldsymbol{A}$ *— интервальная* $(m\times n)$*-матрица,* $\boldsymbol{b}$ *— интервальный* m*-вектор. Тогда выражением*

$$\operatorname{Uni}(x,\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) = \min_{1\leqslant i\leqslant m}\left\{ \operatorname{rad}\boldsymbol{b}_i - \left\langle \operatorname{mid}\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{a}_{ij}\,x_j \right\rangle \right\} \tag{4}$$

задается функционал $\operatorname{Uni}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$*, такой что принадлежность точки* $x\in\mathbb{R}^n$ *множеству решений* $\Xi(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ *интервальной линейной системы уравнений* $\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{b}$ *равносильна неотрицательности функционала* Uni *в* x*:*

$$x\in\Xi(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) \qquad\Longleftrightarrow\qquad \operatorname{Uni}(x,\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\geqslant 0.$$

Доказательство предложения 1 и ряда других результатов статьи приведены в Приложении.

Если из контекста понятно, о какой интервальной системе идет речь, то можно писать просто $\operatorname{Uni}(x)$ вместо $\operatorname{Uni}(x,\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$.

Получается, что посредством знака своих значений функционал Uni «распознаёт» принадлежность своего аргумента множеству $\Xi(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$. Именно поэтому по отношению к нему используется эпитет «распознающий». Из доказательства предложения 1 (см. Приложение) следует, что оно останется в силе, если взять функционал Uni в модифицированной форме

$$\operatorname{Uni}_{\gamma}(x,\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) = \min_{1\leqslant i\leqslant m}\left\{ \gamma_i\left(\operatorname{rad}\boldsymbol{b}_i - \left\langle \operatorname{mid}\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{a}_{ij}\,x_j \right\rangle\right) \right\}, \tag{5}$$

где γ_i, $i=1,2,\dots,m$, — положительные числа. Далее будет видно, что иногда применение такой формы распознающего функционала более предпочтительно, нежели исходной.

П р е д л о ж е н и е 2. Функционал Uni *— вогнутый по x в каждом ортанте $\mathbb{R}^n$. Если в матрице $\boldsymbol{A}$ интервальными являются столбцы с номерами из множества $J = \{j_1, j_2, \dots, j_l\}$, $l \leqslant n$, а остальные столбцы — целиком точечные (неинтервальные), то функционал* $\mathrm{Uni}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ *вогнут на каждом из 2^l множеств вида $\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid x_j \gtreqless 0,\ j \in J \,\}$, где «$\gtreqless$» означает одно из отношений «$\geqslant$» или «$\leqslant$».*

П р е д л о ж е н и е 3. Функционал $\mathrm{Uni}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ *— полиэдральный, т. е. его график составлен из конечного числа кусков гиперплоскостей.*

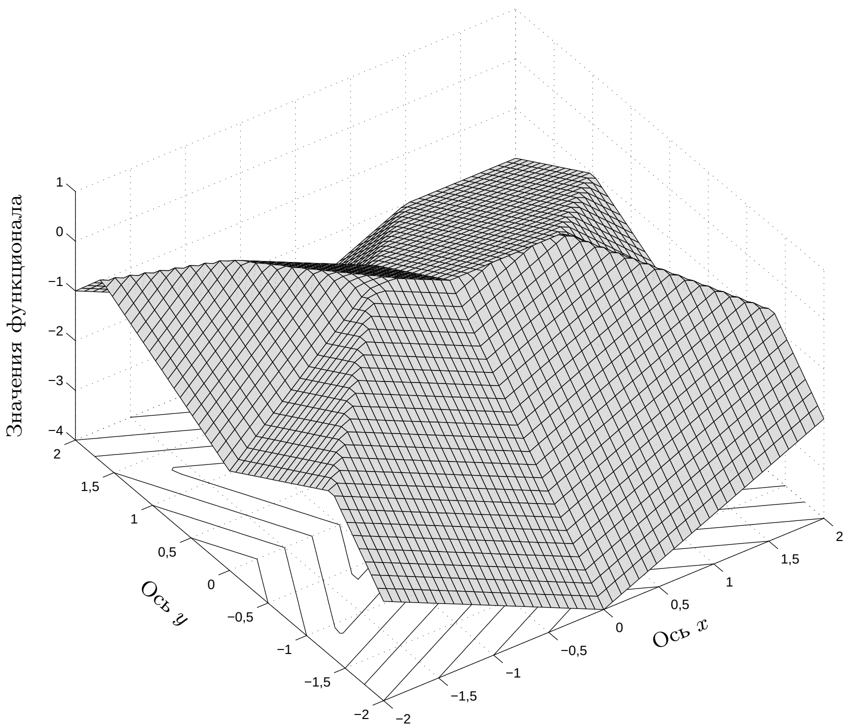

Рис. 1. График распознающего функционала множества решений интервальной системы уравнений (6).

В качестве иллюстрации на рис. 1 изображён график распознающего функционала для интервальной линейной системы уравнений

$$\begin{pmatrix} [2,3] & [-1,1] \\ [-1,1] & [2,3] \\ [0,1] & [1,2] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2,2] \\ [0,1] \\ [-1,0] \end{pmatrix}. \tag{6}$$

П р е д л о ж е н и е 4. Функционал $\mathrm{Uni}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ *достигает конечного максимума по x на всём пространстве $\mathbb{R}^n$.*

Можно показать также, что если $\mathrm{Uni}\,(\tilde{x}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) > 0$, то $\tilde{x}$ — точка топологической внутренности $\mathrm{int}\ \varXi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ множества решений, т. е. принадлежит $\varXi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ вместе с некоторой своей окрестностью. При некоторых дополнительных ограничениях на $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$ и $\tilde{x}$ верно также обратное: из принадлежности $\tilde{x} \in \mathrm{int}\ \varXi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ следует $\mathrm{Uni}\,(\tilde{x}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) > 0$ (подробные доказательства приведены в [10]). Эти свойства распознающего функционала позволяют использовать его для исследования принадлежности точек внутренности множества решений, что может иметь особую важность при нахождении телесной внутренней оценки множества решений вокруг точки-центра по методике, описанной в [2, 11].

Как следствие сформулированных выше результатов, естественно приходим к следующей технике исследования разрешимости интервальных линейных систем уравнений. Решаем задачу безусловной максимизации (на всём $\mathbb{R}^n$) распознающего функционала Uni. Если полученное значение максимума функционала больше либо равно нулю, то, во-первых, рассматриваемая система разрешима и, во-вторых, аргументы распознающего функционала, доставляющие ему неотрицательные значения, лежат в её множестве решений. Если же максимум распознающего функционала отрицателен, то множество решений рассматриваемой системы пусто.

2.3. Коррекция интервальной системы уравнений

Величина максимума распознающего функционала $M = \max_{x\in\mathbb{R}^n} \mathrm{Uni}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ является важной характеристикой интервальной системы линейных уравнений, с помощью которой можно выполнять коррекцию разрешимости системы.

Заметим, что величины $\mathrm{rad}\,\boldsymbol{b}_i$ входят слагаемыми во все выражения

$$\mathrm{rad}\,\boldsymbol{b}_i - \left\langle \mathrm{mid}\,\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij}\, x_j \right\rangle,$$

нижней огибающей которых является распознающий функционал Uni. Поэтому одновременное изменение всех $\mathrm{rad}\,\boldsymbol{b}_i$ на одну и ту же величину приводит к тому, что и значение распознающего функционала изменится на ту же величину. В частности, если $C \geqslant 0$ и $\boldsymbol{e} = ([-1,1],\dots,[-1,1])^\top$, то для системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b} + C\boldsymbol{e}$ с уширенной на $C\boldsymbol{e}$ правой частью имеем $\mathrm{Uni}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b} + C\boldsymbol{e}) \;=\; \mathrm{Uni}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) + C$ и, следовательно,

$$\max_x \;\mathrm{Uni}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b} + C\boldsymbol{e}) \;=\; \max_x \;\mathrm{Uni}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) + C.$$

Если множество решений $\varXi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ пусто, так что $M < 0$, то при увеличении радиуса всех компонент правой части на $C \geqslant |M|$ это множество сделается непустым, поскольку $\max_{x\in\mathbb{R}^n} \mathrm{Uni}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b} + C\boldsymbol{e})$ станет уже неотрицательным. В случае, когда одинаковое уширение компонент правой части неприемлемо, вводится положительный весовой вектор $(\varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_m)$, $\varkappa_i > 0$, такой что увеличение радиуса $\boldsymbol{b}_i$ должно быть пропорционально $\varkappa_i$. Тогда следует найти $M_\gamma = \max_{x\in\mathbb{R}^n} \mathrm{Uni}_\gamma(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ для модифицированного распознающего функционала (5) с $\gamma_i = \varkappa_i^{-1}$, $i = 1, 2, \dots, m$, и увеличить радиус каждого $\boldsymbol{b}_i$ на $\varkappa_i C$, где $C \geqslant |M_\gamma|$.

Возможность коррекции интервальной линейной системы путём изменения её матрицы основывается на следующем простом свойстве мигнитуды интервала: для любых вещественных чисел p, q, таких что $0 \notin p + q\,[-1,1]$

$$\langle\, p + q\,[-1,1]\,\rangle = |p| - |q|. \tag{7}$$

В самом деле, $p + q\,[-1,1] = [\,p - |q|, p + |q|\,]$, и если $0 \notin p + q\,[-1,1]$, то нужно признать, что $|p| > |q|$. Тогда $\langle\, p + q\,[-1,1]\,\rangle = \min\{|p - |q||, |p + |q||\,\} = |p| - |q|$.

Как следствие (7), если $U = \mathrm{Uni}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) < 0$, то для каждого $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, такого что соответствующее выражение в фигурных скобках из (4) отрицательно, имеем

$$\begin{aligned}
\mathrm{rad}\,\boldsymbol{b}_i - \left\langle \mathrm{mid}\,\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij}\, x_j \right\rangle &= \\
= \;\mathrm{rad}\,\boldsymbol{b}_i - \left\langle \mathrm{mid}\,\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \bigl(\,\mathrm{mid}\,\boldsymbol{a}_{ij} + [-1,1]\cdot \mathrm{rad}\,\boldsymbol{a}_{ij}\bigr)\, x_j \right\rangle &= \\
= \;\mathrm{rad}\,\boldsymbol{b}_i - \left\langle \mathrm{mid}\,\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} (\,\mathrm{mid}\,\boldsymbol{a}_{ij})\, x_j + [-1,1] \sum_{j=1}^{n} (\,\mathrm{rad}\,\boldsymbol{a}_{ij})\, x_j \right\rangle &= \\
= \;\mathrm{rad}\,\boldsymbol{b}_i + \sum_{j=1}^{n} (\,\mathrm{rad}\,\boldsymbol{a}_{ij})\, |x_j| - \left|\, \mathrm{mid}\,\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} (\,\mathrm{mid}\,\boldsymbol{a}_{ij})\, x_j \,\right|&.
\end{aligned}$$

При $x \neq 0$, увеличив радиусы всех элементов $\boldsymbol{a}_{ij}$ матрицы $\boldsymbol{A}$ на такую величину C, что

$$C \sum_{j=1}^{n} |x_j| \geqslant |U|,$$

получим $\operatorname{Uni}(x, \boldsymbol{A}+C\boldsymbol{E}, \boldsymbol{b}) \geqslant 0$ для интервальной $(m \times n)$-матрицы $\boldsymbol{E} = ([-1,1])$, все элементы которой суть $[-1,1]$. Таким образом, точка x будет принадлежать непустому множеству решений $\Xi(\boldsymbol{A}+C\boldsymbol{E}, \boldsymbol{b})$. Ясно, что ценой незначительного усложнения этой конструкции можно добиться корректировки исходной системы путём неодинакового уширения элементов матрицы $\boldsymbol{A}$.

3. Приложения к анализу данных с неопределённостями

3.1. Задача оценивания параметров

Приложением разработанной выше техники исследования разрешимости ИСЛАУ может служить задача оценивания параметров линейной зависимости по неточным данным. Пусть имеется объект, входы и выход которого описываются конечномерным вектором $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ и скаляром $b \in \mathbb{R}$ соответственно, а зависимость «вход-выход» является линейной, т. е.

$$b = x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \tag{8}$$

с некоторыми вещественными константами x_k, $k = 0, 1, \ldots, n$. Требуется найти (или как-то оценить) значения x_k, т. е. идентифицировать параметры объекта.

Каждое наблюдение (измерение) входов и выходов объекта порождает соотношение, которое связывает искомые x_k, т. е. является некоторым уравнением относительно этих x_k. Если серия наблюдений входа-выхода объекта является «достаточно представительной», то можно попытаться решить получающуюся систему уравнений относительно неизвестных x_k и найти их значения. Для удобства условимся обозначать результат i-го измерения входов объекта через $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$, а выхода — через b_i. Тогда задача оценивания параметров сводится к нахождению решения $x = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$ — обычного, либо в каком-то обобщённом смысле — для системы линейных уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ x_0 + a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{array}\right.$$

где m — общее количество измерений (наблюдений).

Обратимся теперь к более сложной практической ситуации, когда входы и/или выходы объекта не являются точно известными и доступны лишь их интервальные оценки, т. е. принадлежности a_{ij} и b_i некоторым интервалам:

$$a_{ij} \in \boldsymbol{a}_{ij} = [\underline{\boldsymbol{a}}_{ij}, \overline{\boldsymbol{a}}_{ij}] \qquad \text{и} \qquad b_i \in \boldsymbol{b}_i = [\underline{\boldsymbol{b}}_i, \overline{\boldsymbol{b}}_i], \tag{9}$$

$i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Подобная неопределённость является следствием не только неизбежных ошибок измерений, но может также вытекать из принципиальных трудностей в определении значений некоторых величин или их вероятностных характеристик (см., к примеру, обстоятельный разбор этих причин в [12, 13]). В этих новых условиях естественно приходим к необходимости рассматривать задачу оценивания параметров по интервальным данным (9). Традицию подобной постановки задачи следует вести от пионерской статьи Л.В. Канторовича [14], и о современном состоянии этого научного направления читатель может составить впечатление из публикаций [12, 13, 15–21] и приведённой в них библиографии.

Далее будем придерживаться следующего широко принятого определения: станем говорить, что набор параметров x_0, x_1, x_2, $\ldots$, x_n объекта, описываемого (8), *согласуется* с интервальными экспериментальными данными $(\boldsymbol{a}_{i1}, \boldsymbol{a}_{i2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{in})$ и $\boldsymbol{b}_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, если для каждого i (т. е. для каждого наблюдения) в пределах измеренных интервалов существуют такие точечные представители $a_{i1} \in \boldsymbol{a}_{i1}$, $a_{i2} \in \boldsymbol{a}_{i2}$, $\ldots$, $a_{in} \in \boldsymbol{a}_{in}$ и $b_i \in \boldsymbol{b}_i$, что выполнено соотношение

$$x_0 + a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i. \tag{10}$$

Если $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})$ — интервальная $(m \times (n+1))$-матрица, составленная из m результатов измерений входов и первого столбца с единичными элементами, $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m)^\top$ — интервальный вектор m измерений выходов, то семейство всех векторов параметров, согласующихся с интервально заданными экспериментальными данными, может быть представлено в виде

$$\bigl\{\, x = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \bigl(\exists (a_{ij}) \in (\boldsymbol{a}_{ij})\bigr)\bigl(\exists (b_i) \in (\boldsymbol{b}_i)\bigr)(\, Ax = b\,)\bigr\},$$

т. е. как множество решений всевозможных точечных систем $Ax = b$ с $A = (a_{ij}) \in \boldsymbol{A}$ и $b = (b_i) \in \boldsymbol{b}$. Специалистами по анализу данных и идентификации это множество называется *информационным множеством*, *(апостериорным) множеством возможных значений параметров* [15] и др. Но далее принципиально то, что это множество является ни чем иным, как множеством решений $\varXi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ интервальной линейной системы уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$, построенной по данным наблюдений (измерений).

Как уже упоминалось, это множество решений есть объединение не более чем 2^{n+1} полиэдральных множеств, так что длина его полного прямого описания может расти экспоненциально с размерностью $(n+1)$ интервальной системы, построенной по данным измерений. По этой причине обычно ограничиваются нахождением его оценок в том или ином смысле, т. е. заменяют точное описание $\varXi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ на какое-либо приближение в соответствии со смыслом решаемой практической задачи. Далее автор не рассматривает эту постановку и занимается лишь нахождением одной («наиболее представительной») точки из информационного множества.

3.2. Парадокс интервального оценивания

В общем случае прямое применение этого подхода приводит к парадоксу, суть которого может быть охарактеризована фразой «чем лучше, тем хуже». По-видимому, впервые он был отмечен Е.З. Демиденко в [22].

В самом деле, присутствие неопределённости в данных является нежелательным феноменом, который искажает истинную картину реальности, и потому уменьшение этой неопределённости, т. е. сужение интервалов в данных, является благом, которое на практике должно приветствоваться. С другой стороны, при более широких интервалах исходных данных множество решений интервальной системы также является более широким, и потому появляется больше возможностей для выбора из него параметров модели, чем в случае узких интервальных данных, когда множество решений может стать вообще пустым. Итак, чем выше точность исходных данных, чем меньше их интервальная неопределённость, тем хуже для оценивания параметров. И наоборот, чем шире интервальные неопределённости, чем меньше знаем о точных значениях измеряемых величин, тем лучше для процесса оценивания параметров и тем более богатый набор результатов можно получить.

Эта ситуация наглядно изображена на рис. 2 и 3, где интервалы неопределённостей рис. 3 получаются сужением интервалов рис. 2, но при этом теряется возможность проведения прямой, проходящей через все брусы неопределённости, т. е. согласованной со всеми данными.

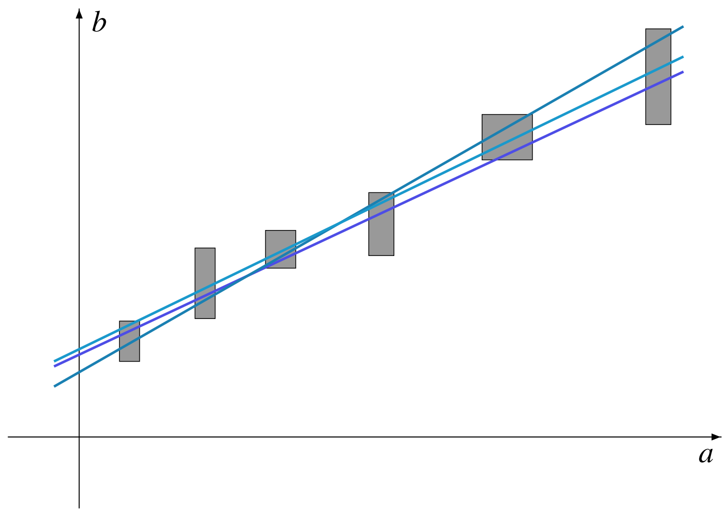

Рис. 2. Широкие интервалы неопределённости позволяют построить много моделей, согласующихся с данными.

Для преодоления отмеченного парадокса существуют два принципиально разных пути.

Первый из них основан на допущении о том, что интервалы в данных адекватно представляют границы ошибок измерений, так что уменьшение их ширины-неопределённости является позитивным фактом. При этом невозможность выбора каких-либо параметров модели, согласующихся с этими интервальными данными (когда множество решений интервальной системы пусто), является признаком неадекватности самой модели, которая выбрана для описания объекта. Как следствие, модель должна быть сменена, а процесс оценивания параметров повторён заново с другой моделью.

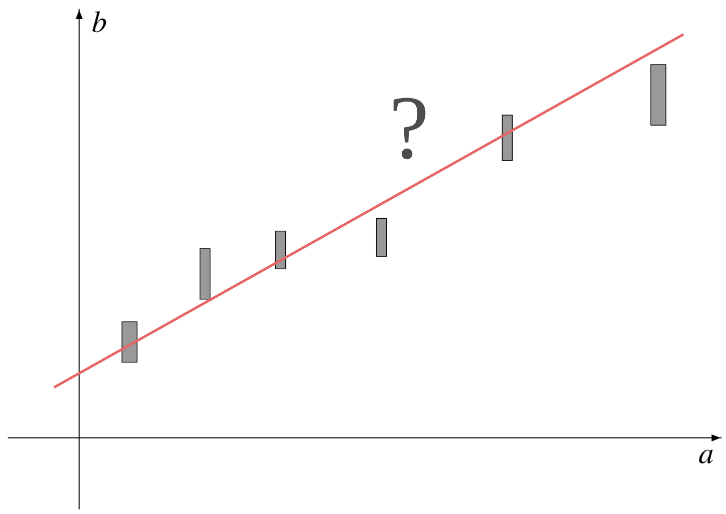

Рис. 3. Для узких интервалов неопределённости может не существовать модели, согласующейся с данными.

Второй путь предполагает, что интервалы неопределённости данных могут не вполне достоверно отражать множества возможных значений соответствующих величин, так что, в принципе, для выбранной модели объекта можно и не получать полного согласования с ней экспериментальных данных. Допустима некоторая несогласованность (как и в традиционном случае точечных данных с зашумлением), и решается задача — тем или иным способом минимизировать это несогласование.

Другая ситуация, в которой вынуждены идти по этому пути, связана с необходимостью сохранения избранной модели, вида функциональной зависимости между рассматриваемыми величинами, относительно которой дано или a priori известно, что «так должно быть».

На этом втором пути необходимо выбрать количественную «меру несогласования» данных с параметрами объекта, и тогда искомой оценкой можно будет, к примеру, взять ту точку пространства параметров, в которой эта несогласованность минимальна.

3.3. Метод максимизации согласования

Какой именно можно взять «меру согласования/несогласования» данных и параметров модели? На этот счёт существуют естественные требования, которым мера согласования/несогласования должна удовлетворять.

При непустом информационном множестве эта мера должна быть положительной для точек из этого множества, на которых «согласование» в самом деле достигается. При этом для точек внутренности множества решений мера согласования должна быть очевидно не меньшей (или даже большей), чем на границе. Отсутствие согласования (противоречивость данных) можно считать «отрицательным согласованием», так что, в целом, мера согласования/несогласования может быть каким-либо функционалом, принимающим значения из вещественной оси $\mathbb{R}$.

Из сказанного в подразделе 2.2 следует, что на роль меры согласования вполне подходит распознающий функционал Uni. На этом пути получаем подход к оцениванию параметров, который можно назвать «методом максимизации согласования» (или методом максимума согласования): искомой оценкой параметров берётся точка $\arg\max \mathrm{Uni}$, в которой достигается наибольшее значение распознающего функционала Uni информационного множества. При этом

- если $\max\,\mathrm{Uni} \geqslant 0$, то эта точка лежит в непустом множестве параметров, согласующихся с данными;
- если $\max\,\mathrm{Uni} < 0$, то множество параметров, согласующихся с данными, пусто, но эта точка минимизирует несогласованность.

Из результатов подраздела 2.3 следуют дальнейшие содержательные интерпретации метода максимума согласования. Так, если множество параметров, согласующихся с данными, пусто, то $\arg\max \mathrm{Uni}$ — первая точка, которая появится в этом множестве при равномерном уширении вектора правой части относительно его середины. Таким образом, метод максимизации согласования при пустом информационном множестве выбирает в качестве значений искомых параметров точку, на которой минимизируется увеличение интервальной неопределённости в выходных переменных, делающее это множество непустым. Подобный принцип согласования противоречивых данных положен в основу метода оценивания параметров, развиваемого Н.М. Оскорбиным, С.И. Жилиным и др. [16–18] В предлагаемом в статье подходе этот принцип автоматически получается как следствие из общего правила выбора оцениваемых параметров. Отметим также, что рассматриваемые процедуры согласования противоречивых данных содержательно близки к методам коррекции несовместных систем линейных неравенств, развиваемых в Екатеринбурге школой И.И. Ерёмина (см., к примеру, [23]).

3.4. Практическая реализация

Практичность развитого выше подхода к оцениванию параметров решающим образом зависит от имеющейся возможности находить максимум распознающего функционала. В самой общей ситуации эта задача весьма сложна, будучи задачей оптимизации негладкой и многоэкстремальной целевой функции. Для её решения применимы подходящие методы глобальной оптимизации, причём можно выбрать их адаптивными, т. е. подстраивающими своё выполнение под задачу, в отличие от пассивных подходов к исследованию разрешимости ИСЛАУ, упомянутых в подразделе 2.1.

Важнейший частный случай — это точные значения входных величин a_{ij}, когда интервальная неопределённость присутствует лишь на выходах b_i. В настоящее время этот случай наиболее детально разработан в теории нестатистического оценивания параметров (см., в частности, [12, 13, 16, 17] и цитированную в этих работах литературу). Отметим также, что при дополнительных статистических предположениях этот частный случай соответствует условиям применения традиционного регрессионного анализа, при которых получены, в частности, наиболее сильные результаты об оптимальности популярного метода наименьших квадратов.

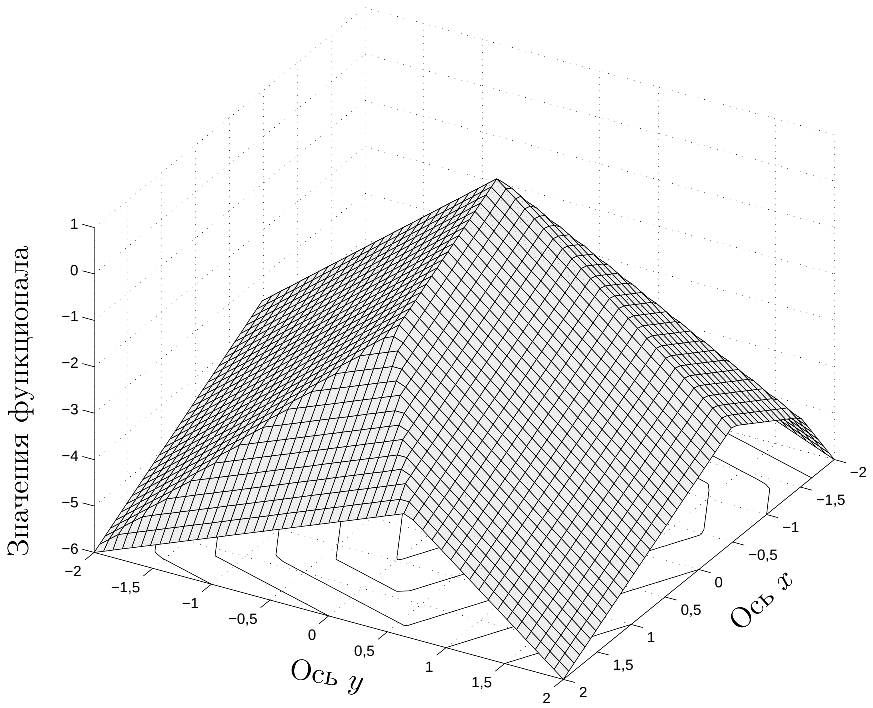

Рис. 4. График распознающего функционала для ИСЛАУ с точечной матрицей.

В случае когда значения входных переменных точны, получаем интервальную линейную систему $Ax = \boldsymbol{b}$ с точечной матрицей $A = (a_{ij})$, в которой интервальность сосредоточена лишь в правой части. Как следствие, распознающий функционал принимает более простой вид

$$\mathrm{Uni}\,(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \;=\; \min_{1\leqslant i\leqslant m} \left\{ \,\mathrm{rad}\,\boldsymbol{b}_i - \left|\; \mathrm{mid}\,\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,x_j \;\right| \,\right\},$$

и в силу предложения 2 он при этом глобально вогнут на всём пространстве $\mathbb{R}^n$. Вместо многоэкстремальной конфигурации, изображённой на рис. 1, получаем унимодальный функционал, график которого выглядит примерно так, как на рис. 4, где показан график распознающего функционала множества решений для ИСЛАУ

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [0, 1] \\ [-1, 0] \end{pmatrix}.$$

Хорошие свойства функционала Uni в случае точечной матрицы $\boldsymbol{A}$ позволяют использовать для отыскания его максимума, к примеру, развитые методы негладкой выпуклой оптимизации (см. [24, 25] и др. работы). Свободно распространяемая программа, которая реализует эту версию метода максимума согласования для систем компьютерной математики Scilab и MATLAB и использует в качестве основы код `ralgb5`, написанный П.И. Стецюком

(Институт кибернетики НАН Украины, Киев), находится на сервере Института вычислительных технологий СО РАН по адресу `http://www.nsc.ru/interval/Programing`

Другой возможный способ максимизации распознающего функционала в случае точечной матрицы — решить задачу линейного программирования по отысканию максимума u для пар $(x, u) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, принадлежащих выпуклому полиэдральному подграфику распознающего функционала Uni:

$$\text{найти} \max u \quad \text{при условиях} \begin{cases} u \leqslant \quad a^{(i)}x - \underline{\boldsymbol{b}}_i, \\ u \leqslant -a^{(i)}x + \overline{\boldsymbol{b}}_i, \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

где $a^{(i)}$ означает i-ю строку матрицы A рассматриваемой ИСЛАУ. В целом, для точных входных данных получаем весьма эффективную методику обработки данных с интервальными неопределённостями в выходных переменных.

Если в общем случае l — общее количество входных переменных с неопределённостью, то, как показывает предложение 2, распознающий функционал Uni имеет 2^l областей вогнутости. Поэтому в общем случае, когда l невелико, можно организовать нахождение глобального максимума распознающего функционала через перебор всех его областей вогнутости и максимизацию на каждой из них с помощью методов негладкой оптимизации из [24, 25].

4. Заключение

Введением распознающего функционала множества решений задача исследования разрешимости интервальной системы линейных алгебраических уравнений сводится к удобной аналитической форме, позволяющей более детально исследовать и корректировать исходную систему.

Метод максимума согласования — перспективный метод обработки данных с интервальными неопределённостями, основанный на максимизации распознающего функционала множества решений (информационного множества задачи). Он может служить хорошей альтернативой традиционным методам регрессионного анализа, использующим теоретико-вероятностные модели ошибок данных.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство предложения 1. Ясно, что точка $x \in \mathbb{R}^n$ лежит в множестве решений $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ тогда и только тогда, когда существует матрица $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij}) \in \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})$, такая что $\tilde{A}x \in \boldsymbol{b}$. После детального расписывания матрично-векторного произведения в левой части и представления интервалов правой части в форме «середина-радиус» эта принадлежность примет вид

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}x_j \;\in\; \text{mid}\, \boldsymbol{b}_i + \left[-\text{rad}\, \boldsymbol{b}_i, \text{rad}\, \boldsymbol{b}_i \right], \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Добавив теперь по $(-\text{mid}\, \boldsymbol{b}_i)$ к обеим частям полученных включений, придём к соотношениям

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}x_j - \text{mid}\, \boldsymbol{b}_i \;\in \left[-\text{rad}\, \boldsymbol{b}_i, \text{rad}\, \boldsymbol{b}_i \right], \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

которые, в свою очередь, равносильны

$$\left| \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}x_j \; - \text{mid}\, \boldsymbol{b}_i \right| \leqslant \text{rad}\, \boldsymbol{b}_i \;,$$

и поэтому

$$\text{(П.1)} \qquad \operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i - \left| \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j \right| \geqslant 0, \qquad i = 1, 2, \dots, m.$$

Итак, $x \in \varXi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, если и только если существуют такие $\tilde{a}_{ij} \in \boldsymbol{a}_{ij}$, $j = 1, 2, \dots, n$, $i = 1, 2, \dots, m$, что оказываются справедливыми все неравенства (П.1). Но это эквивалентно выполнению для $i = 1, 2, \dots, m$ условий

$$\text{(П.2)} \qquad \max_{\substack{\tilde{a}_{ij} \in \boldsymbol{a}_{ij}, \\ j=1,2,\dots,n}} \left\{ \operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i - \left| \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j \right| \right\} \geqslant 0,$$

в которых, если внести максимум внутрь фигурной скобки, будем иметь

$$\operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i - \min_{\substack{\tilde{a}_{ij} \in \boldsymbol{a}_{ij}, \\ j=1,2,\dots,n}} \left| \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j \right| \geqslant 0.$$

Учитывая далее, что естественное интервальное расширение выражения под знаком модуля совпадает с его областью значений и, вместо минимума взяв мигнитуду интервала, из (П.2) получим для $i = 1, 2, \dots, m$:

$$\text{(П.3)} \qquad \operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i - \left\langle \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \right\rangle \geqslant 0.$$

Наконец, можно свернуть m штук условий (П.3) в одно соотношение посредством взятия минимума по i и заключить, что точка x принадлежит множеству решений $\varXi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ действительно в том и лишь в том случае, если

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant m} \left\{ \operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i - \left\langle \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \right\rangle \right\} \geqslant 0.$$

Доказательство предложения 2. Достаточно провести его для всех функций

$$\psi_i(x) = \operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i - \left\langle \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij}\, x_j \right\rangle, \qquad i = 1, 2, \dots, m,$$

поскольку Uni является их нижней огибающей.

Пусть $\lambda \in [0, 1]$ и пусть точки x, y принадлежат одному ортанту в $\mathbb{R}^n$, так что $x_j y_j \geqslant 0$ для всех $j = 1, 2, \dots, n$. В этом случае имеет место дистрибутивность интервального умножения по сложению (см. [1–3])

$$\text{(П.4)} \qquad \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} \bigl(\lambda x_j + (1 - \lambda) y_j\bigr) = \lambda \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j + (1 - \lambda) \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} y_j,$$

вследствие чего

$$
\begin{aligned}
&\psi_i\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) = \\
&\qquad = \ \mathrm{rad}\,\boldsymbol{b}_i - \left\langle \lambda \left(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij}\, x_j \right) + (1-\lambda) \left(\mathrm{mid}\,\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij}\, x_j \right) \right\rangle \geqslant \\
&\qquad \geqslant \ \mathrm{rad}\,\boldsymbol{b}_i - \lambda \left\langle \mathrm{mid}\,\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij}\, x_j \right\rangle + (1-\lambda) \left\langle \mathrm{mid}\,\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij}\, x_j \right\rangle = \\
&\qquad = \ \lambda\, \psi_i(x) + (1-\lambda)\, \psi_i(y),
\end{aligned}
$$

где воспользовались свойством мигнитуды $\langle \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \rangle \leqslant \langle \boldsymbol{a} \rangle + \langle \boldsymbol{b} \rangle$ [2,3].

В общем случае провести выполненные выше выкладки нельзя, так как дистрибутивность в (П.4) отсутствует. Но если для некоторого индекса $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ все $\boldsymbol{a}_{ik}$ — точечные (неинтервальные), то (П.4) справедливо вне зависимости от знаков x_k и y_k. Следовательно, если точечным является целый k-й столбец в $\boldsymbol{A}$, т. е. все $\boldsymbol{a}_{ik}$, $i = 1, 2, \dots, m$, то и все функции $\psi_i(x)$ (а вместе с ними и Uni) будут вогнутыми на множествах $\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \gtreqless 0, \dots, x_{k-1} \gtreqless 0, x_{k+1} \gtreqless 0, \dots, x_n \gtreqless 0 \,\}$, каждое из которых является объединением двух ортантов в $\mathbb{R}^n$. Обобщение этого рассуждения на случай нескольких неинтервальных столбцов в $\boldsymbol{A}$ очевидно.

Доказательство предложения 3. Обозначая

$$
\mathrm{hyp}\,\mathrm{Uni} \ = \big\{\, (x, u) \mid x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R},\ \mathrm{Uni}\,(x) \geqslant u \,\big\}
$$

— подграфик функционала Uni, можно переформулировать основной результат предложения 2 на геометрическом языке следующим равносильным образом. Для любого ортанта $\mathcal{O}$ в $\mathbb{R}^n$ пересечение $\mathrm{hyp}\,\mathrm{Uni} \cap (\mathcal{O} \times \mathbb{R})$ выпукло. Покажем, что на самом деле эти множества $\mathrm{hyp}\,\mathrm{Uni} \cap (\mathcal{O} \times \mathbb{R})$ являются полиэдральными (многогранными) множествами в $\mathbb{R}^{n+1}$, т. е. пересечениями конечного числа полупространств в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Принимая во внимание, что $\langle \boldsymbol{a} \rangle = \max\{0, \underline{\boldsymbol{a}}, -\overline{\boldsymbol{a}}\}$ для любого интервала $\boldsymbol{a}$, имеем право выписать цепочку равенств

$$
\begin{aligned}
\psi_i(x) \ &= \ \mathrm{rad}\,\boldsymbol{b}_i - \max \left\{ 0\,,\ \underline{\mathrm{mid}\,\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j}\,,\ -\left(\overline{\mathrm{mid}\,\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j} \right) \right\} = \\
&= \ \mathrm{rad}\,\boldsymbol{b}_i + \ \min \left\{ \ 0\,,\ \overline{\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j} - \mathrm{mid}\,\boldsymbol{b}_i\,,\ \mathrm{mid}\,\boldsymbol{b}_i - \underline{\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j} \right\} = \\
&= \ \min \left\{ \mathrm{rad}\,\boldsymbol{b}_i\,,\ \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_{ij} x_j - \underline{\boldsymbol{b}}_i\,,\ \overline{\boldsymbol{b}}_i - \sum_{j=1}^{n} \check{a}_{ij} x_j \right\},
\end{aligned}
$$

где кортежи $(\hat{a}_{i1}, \hat{a}_{i2}, \dots, \hat{a}_{in})$ и $(\check{a}_{i1}, \check{a}_{i2}, \dots, \check{a}_{in})$ образованы концами компонент интервального вектора $(\boldsymbol{a}_{i1}, \boldsymbol{a}_{i2}, \dots, \boldsymbol{a}_{in})$ (т. е. i-й строки матрицы $\boldsymbol{A}$), фиксированными для каждого конкретного ортанта $\mathcal{O}$. Это вытекает из правила умножения интервала на число. Из последнего представления действительно видно, что функционал $\mathrm{Uni} = \min_i \psi_i$ является в $\mathcal{O}$ нижней огибающей линейных выражений, стоящих под знаком минимума для $i = 1, 2, \dots, m$. Следовательно, график функционала Uni «склеен» из конечного числа кусков гиперплоскостей в $\mathbb{R}^{n+1}$, и для любого ортанта $\mathcal{O}$ в $\mathbb{R}^n$ множество $\mathrm{hyp}\,\mathrm{Uni} \cap (\mathcal{O} \times \mathbb{R})$ действительно полиэдральное.

Доказательство предложения 4. Покажем, что распознающий функционал достигает конечного максимума в каждом ортанте $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$.

Полиэдральное множество $\operatorname{hyp}\operatorname{Uni} \cap (\mathcal{O} \times \mathbb{R})$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ представимо [26] в виде выпуклой комбинации крайних точек (s_j, t_j), $s_j \in \mathbb{R}^n$, $t_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \ldots, p$, и крайних лучей с направляющими векторами (d_j, e_j), $d_i \in \mathbb{R}^n$, $e_i \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \ldots, q$, так что

$$\text{(П.5)} \qquad \operatorname{hyp}\operatorname{Uni} \cap (\mathcal{O} \times \mathbb{R}) = \left\{ \sum_{j=1}^{p} \lambda_j (s_j, t_j) + \sum_{j=1}^{q} \mu_j (d_j, e_j) \;\middle|\; \lambda_j \geqslant 0,\ \mu_j \geqslant 0, \sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1 \right\}.$$

Поскольку $\operatorname{Uni}(x) \leqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant m} \operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i$, то в представлении (П.5) должно быть $e_j \leqslant 0$. В противном случае во множестве $\operatorname{hyp}\operatorname{Uni} \cap (\mathcal{O} \times \mathbb{R})$ окажутся точки со сколь угодно большой $(n+1)$-й координатой. Следовательно,

$$\begin{aligned}
\max_{x \in \mathcal{O}} \operatorname{Uni}(x) \;&=\; \max \bigl\{\, (n+1)\text{-я координата точек из } \operatorname{hyp}\operatorname{Uni} \cap (\mathcal{O} \times \mathbb{R}) \,\bigr\} = \\
&=\; \max \left\{ \sum_{j=1}^{p} \lambda_j t_j + \sum_{j=1}^{q} \mu_j e_j \;\middle|\; \lambda_j \geqslant 0,\ \mu_j \geqslant 0,\ \sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1 \right\} = \\
&=\; \max \left\{ \sum_{j=1}^{p} \lambda_j t_j \;\middle|\; \lambda_j \geqslant 0,\ \sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1 \right\} \;=\; \max\nolimits_{1 \leqslant j \leqslant p} t_j
\end{aligned}$$

и достигается в крайней точке множества $\operatorname{hyp}\operatorname{Uni} \cap (\mathcal{O} \times \mathbb{R})$, имеющей наибольшую $(n+1)$-ю координату.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х.* Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, 1986.
2. *Шарый С.П.* Конечномерный интервальный анализ. Новосибирск: 2011. Электронная книга, доступная на `http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks`
3. *Neumaier A.* Interval methods for systems of equations. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
4. *Фидлер М., Недома Й., Рамик Я., Рон И. и др.* Задачи линейной оптимизации с неточными данными. Москва-Ижевск: Изд-во «РХД», 2008.
5. *Kreinovich V., Lakeyev A., Rohn J., Kahl P.* Computational complexity and feasibility of data processing and interval computations. Dordrecht: Kluwer, 1998.
6. *Kearfott R.B., Nakao M., Neumaier A., Rump S., et al.* Standardized notation in interval analysis // Вычисл. технологии. 2010. Т. 15. №1. С. 7–13.
7. *Oettli W., Prager W.* Compatibility of approximate solution of linear equations with given error bounds for coefficients and right-hand sides // Numerische Mathematik. 1964. V. 6. P. 405–409.
8. *Лакеев А.В., Носков С.И.* О множестве решений линейного уравнения с интервально заданными оператором и правой частью // Сиб. матем. журн. 1994. Т. 35. №5. С. 1074–1084.
9. *Rohn J.* Systems of linear interval equations // Linear Algebra and its Applications. 1989. V. 126. P. 39–78.
10. *Шарый С.П.* О характеризации объединённого множества решений интервальной линейной алгебраической системы. Красноярск: 1990. 20 с. Деп. в ВИНИТИ, №726-В91.
11. *Шарый С.П.* Ещё раз о внутреннем оценивании множеств решений интервальных линейных систем // Вычисл. технологии. 2003. Т. 8, Спец. выпуск «Тр. Совещания российско-казахстанской рабочей группы по вычислительным и информационным технологиям». С. 146–160.

12. *Вощинин А.П., Бочков А.Ф., Сотиров Г.Р.* Метод анализа данных при интервальной нестатистической ошибке // Заводская лаборатория. 1990. Т. 56. №7. С. 76–81.

13. *Вощинин А.П.* Задачи анализа с неопределёнными данными — интервальность и/или случайность? // Межд. конф. по вычислительной математике МКВМ-2004. Рабочие совещания. Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ. 2004. С. 147–158. (Электронный адрес статьи — `http://www.nsc.ru/interval/Conferences/IMRO_04/Voschinin.pdf`)

14. *Канторович Л.В.* О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений // Сиб. матем. журн. 1962. Т. 3. №5. С. 701–709.

15. *Куржанский А.Б.* Задача идентификации — теория гарантированных оценок // АиТ. 1991. №4. С. 3–26.

16. *Оскорбин Н.М., Максимов А.В., Жилин С.И.* Построение и анализ эмпирических зависимостей методом центра неопределённостей // Изв. Алт. гос. ун-та. 1998. №1. С. 35–38.

17. *Жилин С.И.* Нестатистические модели и методы построения и анализа зависимостей. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук по спец. 05.13.01. Барнаул: АлтГУ, 2004. Электронная версия доступна по адресу `http://www.nsc.ru/interval/Library/ApplDiss/Zhilin.pdf`

18. *Zhilin S.I.* Simple method for outlier detection in fitting experimental data under interval error // Chemometrics and Intellectual Laboratory Systems. 2007. V. 88. No. 1. P. 60–68.

19. *Жолен Л., Кифер М., Дидри О., Вальтер Э.* Прикладной интервальный анализ. Москва-Ижевск: Изд-во «РХД», 2007.

20. *Поляк Б.Т., Назин С.А.* Оценивание параметров в линейных многомерных системах с интервальной неопределенностью // Проблемы управления и информатики. 2006. №1–2. С. 103–115.

21. *Померанцев А.Л., Родионова О.Е.* Построение многомерной градуировки методом простого интервального оценивания // Журн. аналитической химии. 2006. Т. 61. С. 1032–1047.

22. *Демиденко Е.З.* Комментарий II к статье А.П. Вощинина, А.Ф. Бочкова и Г.Р. Сотирова «Метод анализа данных при интервальной нестатистической ошибке» // Заводская лаборатория. 1990. Т. 56. №7. С. 83–84.

23. *Ерёмин И.И.* Противоречивые модели оптимального планирования. М.: Наука, 1988.

24. *Шор Н.З., Журбенко Н.Г.* Метод минимизации, использующий операцию растяжения пространства в направлении разности двух последовательных градинетов // Кибернетика. 1971. №3. С. 51–59.

25. *Шор Н.З., Стеценко С.И.* Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация. Киев: Наук. Думка, 1989.

26. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 06.06.2011 г.